复分析笔记

GTM11

时间：10/17/2022

版本：1.0

ElegantLATEX Program

重学根基，日学日新

目录

第 1 章 复数系

1.1 实数

我们用 $\mathbb{R}$ 表示所有实数组成的集合. 假定读者熟悉如下实数的性质:$\mathbb{R}$ 的序, 上确界和下确界的定义和性质,$\mathbb{R}$ 的完备性,$\mathbb{R}$ 中序列的收敛性与无穷级数.

1.2 复数域

我们把复数集 $\mathbb{C}$ 定义为所有有序数对 (a,b) 的集合, 其中 a,b 是实数. 加法和乘法由下述定义:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$$

这样定义后, 我们可以验证 $\mathbb{C}$ 满足加法与乘法的结合律, 分配律, 交换律;$(0,0),(1,0)$ 分别是加法和乘法的单位元, 并且 $\mathbb{C}$ 中每一个元素都有加法和乘法的逆元. 所以 $\mathbb{C}$ 是一个域.

对于复数 $(a,0)$, 我们将简写为 a. 从 $a\to(a,0)$ 的映射定义了一个从 $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的域同构, 所以我们可以把 $\mathbb{R}$ 考虑为 $\mathbb{C}$ 的一个子集. 如果我们定义 $i=(0,1)$, 那么就有 $a+bi=(a,b)$, 我们便直接采用这样的记号表示复数, 不使用有序数对的符号了.

定义 1.1 (绝对值和共轭数)

如果 $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$, 则我们定义 $|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$ 为 z 的绝对值,$\overline{z}=x-iy$ 为 z 的共轭数 (conjugate). ♣

下面是绝对值与共轭数的基本性质, 我们可以用前三条性质推出后三条.

命题 1.1

(1)$|z|^2=z\overline{z}$.

(2)Re$z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, Im$z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

(3)$(\overline{z+w})=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$

(4)$|zw|=|z||w|$

(5)$|z/w|=|z|/|w|$

(6)$|\overline{z}| = |z|$

问题 1.1 设 $R(z)$ 是 z 的有理函数, 如果 $R(z)$ 的所有系数是实数, 则 $\overline{R(z)} = R(\overline{z})$.

证明 有理函数就是指

$$R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}$$

其中 $n, m \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}, a_i, b_j \in \mathbb{R}(i = 0, \cdots, n, j = 0, \cdots, m)$. 我们可以用归纳法证明: 当 $z = z_1 + \cdots + z_n, w = w_1 w_2 \cdots w_n$, 那么就有 $\overline{z} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}, \overline{w} = \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}, |w| = |w_1| \cdots |w_n|$. 于是就有:

$$\begin{aligned}\overline{R(z)} &= \frac{\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}}{\overline{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}} = \frac{a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} \cdots + a_0}{b_n \overline{z^n} + b_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + b_0} \\ &= \frac{a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} \cdots + a_0}{b_n \overline{z}^n + b_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + b_0} = R(\overline{z})\end{aligned}$$

1.3 复平面