数学分析复习

常庚哲——《数学分析教程》

时间：9/25/2022

版本：1.0

重学根基，日学日新

目录

前言

这份讲义是来自于常庚哲的《数学分析教程》. 对于其中不熟悉的知识点 (如定义, 定理等) 详细书写, 对于其中熟悉的知识点只摘录题目与例题.

根据中国科学技术大学 (USTC) 的课程安排, 我们把数学分析分为三大模块, 第一模块是《数学分析教程》的第一章到第七章, 第二模块是第八章到第十三章, 第三模块是第十四章到第十八章. 在某些章节时, 会选用其他书进行补充.

对于题目, 大部分以课本上的题目为主, 额外增加谢惠民《数学分析习题课讲义》上的问题.

第 1 章 数列极限

例题 1.1 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$$

解

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{\frac{3}{2}(2\sqrt{n}-1)}{2\sqrt{n}-1}\right|=\frac{5}{4\sqrt{n}-2}<\frac{5}{2\sqrt{n}}$$

所以, 对于任意的给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $N=[\frac{25}{4\varepsilon^2}]$, 当 $n>N$ 时, 便有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

问题 1.1 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

解 当 $n\geq 1$ 时, 我们有 $\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}$. 因为该乘积中的最大项是 1, 其余项都小于 1. 那么我们可以取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$$

所以 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$.

问题 1.2 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

解 首先要知道 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\to\frac{1}{3}(n\to\infty)$$

如果证明的话, 进行恰当变换即可.

问题 1.3 设 a,b,c 是三个给定的实数, 令 $a_0=a, b_0=b, c_0=c$, 并归纳地定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2} \\ b_n = \frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2} \\ c_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \end{cases}$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

证明 对于本题的迭代数列, 我们采用线性代数中的方法. 注意到

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

根据矩阵对角化的条件, 我们可以求出特征值与特征向量, 于是就有

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

带入计算后就可以得到最后的结果.

问题 1.4 设 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = a$$

证明 本题用到了一个重要结论, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 我们就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$$

对于本题

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n} = e^{\frac{\ln(a_1\cdots a_n)}{n}} = e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}} \to e^{\ln a}(n\to\infty) = a$$

问题 1.5 如果 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_pn+p)=0$$

证明 首先有

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}k\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)(k\in\mathbb{Z})$$

因为 $a_0=-(a_1+\cdots+a_p)$, 所以

$$\begin{aligned}a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}&=-(a_1+\cdots+a_p)\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

问题 1.6 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$$

证明 我们有

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leq\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}=\frac{k}{\sqrt{n^4+kn^2}+n^2}\leq\frac{k}{2n^2}$$

$$\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\leq\frac{n+1}{4n}$$

运用夹逼准则, 很容易发现极限是 $\dfrac{1}{4}$.

上面这种题型, 也可以总结为

问题 1.7 已知函数在零点附近可微, 且 $f(0)=0, f'(0)=a$, 对于正整数 p, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)+f\left(\frac{2^p}{n^{p+1}}\right)+\cdots+f\left(\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)\right]=\frac{a}{p+1}$$

比如说, 对于上题, 只要取 $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ 即可, 我们在后续会接触到这个证明, 在这里不再赘述.

问题 1.8(Toeplitz 定理) 设 $n,k\in\mathbb{Z}^*, t_{nk}\geq 0, \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

补充: 运用 Toeplitz 定理计算: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$$

解

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)/2}\cdot\frac{n(n+1)/2}{n^2}$$

显然 $t_{nk}=\dfrac{k}{n(n+1)/2}$, 关于 Toeplitz 定理的条件均满足. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)/2}=a$$

综上, 题目被证明.

问题 1.9 (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$|a_{n+p}-a_n|\leq\frac{p}{n}$$

且对一切 $n,p\in\mathbb{N}^*$ 成立. 问 $\{a_n\}$ 是不是 Cauchy 列.

(2) 当 $|a_{n+p}-a_n|\leq\dfrac{p}{n^2}$ 时, 上述的结论又如何?

解 (1)$\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列, 对于 $\{a_n\}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, 我们有

$$|a_{n+p}-a_n|=\sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k}\leq\frac{p}{n}$$

(2) 该列是 Cauchy 列，我们有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&\leq\frac{1}{(n+p-1)^2}+\frac{1}{(n+p-2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

$$\leq\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p-3}-\frac{1}{n+p-2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1}$$

所以只要取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1}<\frac{1}{n-1}<\varepsilon$$

问题 1.10(Lebesgue 数) 设开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则必存在 $\sigma>0$, 使得只要区间 $A\subset[a,b]$ 且 A 的长度 $|A|<\sigma$, 就必有 $\{I_\lambda\}$ 中的一个区间包含 A. 其中 σ 称为 Lebesgue 数.

或者换一种叙述方法, 设开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则必存在一个正数 $\sigma>0$, 使得对于区间 $[a,b]$ 中的任意两个点 x',x'', 都有 $|x'-x''|<\sigma$, 那么就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 x',x''. 其中 σ 称为 Lebesgue 数.

证明 对于第一个叙述, 使用反证法. 对于第二个叙述, 谢惠民中提到的是一种几何化的方法.

第 2 章 函数的连续性

第 3 章 函数的导数

第 4 章 Taylor 定理