拓扑

作者：M
时间：2022
版本：1.0

ElegantLATEX Program

呃呃——M

目录

第 1 章 度量空间

1.1 定义与例子

定义 1.1 (度量空间的定义)
一个度量空间就是一个数对 (X,d),其中 X 是一个集合,d 是一个函数 $d: X\times X\to[0,\infty)$,我们称该函数为一个度量,$X$ 中的任意三点 x,y,z 满足如下三个性质:

- $d(x,y)=d(y,x)$;
- $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
- $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

♣

当然有些读者希望距离函数有其他的性质, 但是上述三条是最简化的性质 (即其他的性质都可以通过上述三个性质去证明), 我们接下来给出一些度量空间的例子.

例题 1.1 (a) 令 $X=\mathbb{R}$, 定义 $d(x,y)=|x-y|$. 证明留作习题.

(b) 对于 q 维的欧氏空间 $\mathbb{R}^q$, 定义

$$d(x,y)=[\sum_{n=1}^{q}(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

其中,$x=(x_1,\cdots,x_q),y=(y_1,\cdots,y_q)\in\mathbb{R}^q$, 这将下文进行论述.

(c) 令 $X=\mathbb{R}^q$, 对于 $x,y\in\mathbb{R}^q$, 定义

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{q}|x_n-y_n|$$

这很容易被验证为是一个度量.

(d) 令 $X=\mathbb{R}^q$, 对于 $x,y\in\mathbb{R}^q$, 定义

$$d(x,y)=\max\{|x_n-y_n|:1\le n\le q\}$$

证明留作习题, 并且观察上述 q 维欧氏空间上定义的度量.

(e)X 可为任意集合, 我们定义

$$d\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

这个度量空间我们称为离散度量空间. 验证也非常容易. (f) 我们在上述讨论中提到了若干的度量空间, 若 (X,d) 是一个给定的度量空间, 且 Y 是 X 的一个非空子集, 那么 (Y,d) 也是一个度量空间, 我们称 (Y,d) 是 (X,d) 的子空间. 比如说, 我们取 $X=\mathbb{R},Y=[0,1]$.

为了证明上述例子中的 (b), 我们要证明著名的 Cauchy-Schwarz 不等式, 在此之前我们先引入内积的定义和性质.

定义 1.2 (内积)

对于向量 $x=(x_1,\cdots,x_q), y=(y_1,\cdots,y_q)\in\mathbb{R}^q, \langle x,y\rangle=\sum\limits_{n=1}^{q}x_ny_n$, 我们称 $\langle x,y\rangle$ 为向量空间 $\mathbb{R}^q$ 的内积. 内积具有如下性质:

- $\langle x,x\rangle\geq 0$;
- $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$;
- $\langle tx+z,y\rangle=t\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle$.
- $\langle x,y+tz\rangle=\langle x,y\rangle+t\langle x,z\rangle$

♣

定理 1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式)

若 $x=(x_1,\cdots,x_q), y=(y_1,\cdots,y_q)$ 是 $\mathbb{R}^q$ 中的向量, 那么就有

$$\left[\sum_{n=1}^{q}x_ny_n\right]^2\leq\left[\sum_{n=1}^{q}x_n^2\right]\left[\sum_{n=1}^{q}y_n^2\right]$$

♡

证明 我们使用上述内积的定义去解决这个题目. 我们用内积的定义将不等式转化为

$$\langle x,y\rangle\langle x,y\rangle\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

这个式子直接证明会有困难, 我们在数学分析中证明过该式子的积分形式, 运用的是二次多项式的根的判别方法, 这里同样适用. 我们先在式子中适当加入参数:

$$0\leq\langle x-ty,x-ty\rangle=\langle x,x\rangle-2t\langle x,y\rangle+t^2\langle y,y\rangle\,(\text{运用内积性质的第三四条})$$

再令 $\alpha=\langle y,y\rangle,\beta=\langle x,y\rangle,\gamma=\langle x,x\rangle$, 可以得到原式为 $f(t)=\alpha t^2-2\beta t+\gamma$, 且 $f(t)\geq 0$. 这样它的判别式 $4\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, 化简以后就可以得到 C-S 不等式了.

推论 1.1

在例题 1.1 中 (b) 所定义的 d 是一个度量.

♡

证明 我们使用内积将该度量表示为,$d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$. 我们可以观察到其显然满足度量空间定义的第一条和第二条, 我们着重来证明第三条性质. 任取 $\mathbb{R}^q$ 中的一点 z, 我们有

$$\begin{aligned}
d^2(x,y)&=\langle x-y,x-y\rangle\\
&=\langle x-z+z-y,x-z+z-y\rangle\\
&=\langle x-z,x-z+z-y\rangle+\langle z-y,x-z+z-y\rangle\\
&=\langle x-z,x-z\rangle+\langle x-z,z-y\rangle+\langle z-y,x-z\rangle+\langle z-y,z-y\rangle\\
&\leqslant d^2(x,z)+2d(x,z)\,d(z,y)+d^2(z,y)\,(\text{这一步运用了 C-S 不等式})\\
&=[d(x,z)+d(z,y)]^2
\end{aligned}$$

从而证明了三角不等式, 故这里的 d 是一个度量.

定义 1.3 (开球, 闭球)

当 $x \in X, r > 0$ 时, 我们定义

$$B(x;r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad \overline{B}(x;r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

分别称为开球和闭球.

当 $X = \mathbb{R}$ 时,$B(x;r) = (x-r, x+r)$;$\overline{B}(x;r) = [x-r, x+r]$. 同时, 我们注意到当 $s < r$, 就有 $\overline{B}(x;s) \subset B(x;r)$.

定义 1.4 (开集, 闭集)

若 (X,d) 是一个度量空间, 我们称 X 的子集 G 是一个开集, 那么对于 $\forall x \in G, \exists r > 0$, 使得 $B(x;r) \subset G$. 若 X 的一个子集 F 是闭集, 则其补集 $X \backslash F$ 是开集.

例题 1.2 (a) 我们注意到 $X, \varnothing$ 是既开又闭集合.
(b) 对于任意的 $r > 0, B(x;r)$ 是开集. 若 $y \in B(x;r)$ 且 $0 < s < r - d(x,y)$, 那么 $B(y;s) \subset B(x;r)$.(该性质可以通过三角不等式证得, 为了直观我们也可以直接画出二维图, 是显然的).
(c) 在度量空间中, 任何 X 的有限集是闭集.(先证明 $X \backslash F$ 是开集即可).

当 (X,d) 是一个度量空间, 且有 $Y \subset X$, 根据前文我们知道 (Y,d) 也是一个度量空间. 我们说若 A 是 Y 的开集, 并不能说明 A 是 X 的开集. 注意到在这种情况下, 当 $y \in Y, r > 0, B_Y(y;r) = \{z \in Y : d(z,y) < r\} = B(y;r) \cap Y$, 但是这不一定是 X 的开子集. 举个例子, 假如 $X = \mathbb{R}, Y = [0,1]$, 那么 $[0, \frac{1}{2}]$ 是 Y 中的开集, 但不是 X 中的开集 (因为当在 Y 中时, 它即便在 0 这个点, 只能取大于 0, 小于 $\frac{1}{2}$ 的 r, 所以其开球一直在 $[0, \frac{1}{2}]$ 中, 但是如果在 X 中, 开球就会取到小于 0 的值, 不满足开集的定义). 所以我们说开集闭集都是一个相对的定义, 在一个集合中是开集, 那么在另外一个集合就有可能失去了开集的性质.

命题 1.1

设 (X,d) 是一个度量空间,Y 是 X 的子集.

- Y 的一个子集 G 在 Y 中相对开当且仅当存在一个开集 $U \subset X$, 使得 $G = U \cap Y$.
- Y 的一个子集 F 在 Y 中相对闭当且仅当存在一个闭集 $D \subset X$, 使得 $F = D \cap Y$

下面介绍逆三角不等式

命题 1.2

若 (X,d) 是度量空间, 对于 $x,y,z \in X$, 我们有

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

证明 我们先证明 $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$. 由三角不等式可知,$d(x,y) - d(y,z) \leq (d(x,z) + d(z,y)) - d(y,z) = d(x,z)$. 由于 x,y,z 的任意性, 我们可以将 x 替换为 z, 将 z 替换为 x, 那么

刚刚的不等式就变为

$$d(z,y)-d(y,x)\leq d(z,x)$$

两个式子合并后即可证得命题.

命题 1.3

有限个开集的交仍然是开集, 任意多个开集的并任然是开集. 闭集情况相反.

证明 我们不妨设 $G_1,\cdots,G_k$ 是一族开集, 我们的目标就是证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{k} G_k$ 依旧是开集. 对 $\bigcap\limits_{n=1}^{k} G_k$ 中的任意一点 x, 对于每一个开集 G_n, 都能找到一个开邻域 $B(x,r_n)\subset G_n$. 我们只要选取这所有半径中的最小值, 将其记为 r, 便可得 $B(x,r)\subset\bigcap\limits_{n=1}^{k} G_k$. 后面一个也是显然的. 对于闭集, 我们可以使用 De Morgan 公式, 这样开集和闭集的这个性质便证明了.

接下来我们引入内部, 闭包, 边界的定义, 这有助于我们进行后面一系列的工作.

定义 1.5 (内部, 闭包, 边界)

设 A 是 X 的子集.

- A 的内部, 我们用记号记为 int$A$(此处与尤承业稍有不同,int 为 interior 缩写)

$$\mathrm{int}A=\bigcup\{G:G\text{是开集且}G\subset A\}$$

- A 的闭包, 我们用记号记为 cl$A$(此处与尤承业稍有不同,cl 为 closure 缩写)

$$\mathrm{cl}A=\bigcap\{F:F\text{是闭集且}A\subset F\}$$

- 上述两个定义, 完美诠释了尤承业中关于内部, 闭包的 4 个等价命题中的, 开集是包含在 A 的最大开集, 闭集是包含 A 的最小闭集这两句话.
- A 的边界, 我们用记号记为 ∂A

$$\partial A=\mathrm{cl}A\cap\mathrm{cl}(X\backslash A)$$

命题 1.4

设 $A\subset X$

- $x\in\mathrm{int}A$ 当且仅当存在 $r>0$ 使得 $B(x;r)\subset A$.
- $x\in\mathrm{cl}A$ 当且仅当对于 $\forall r>0, B(x;r)\cap A\neq\varnothing$.

证明

前面的命题非常有用, 因为它提供了一个具体的, 逐点的方法来确定集合的闭包和内部. 我们将在下面的例子中看到这一点.

例题 1.3 (a)

(b)

命题 1.5

设 A 是 X 的一个子集.

- A 是闭集当且仅当 $A=\mathrm{cl}A$.
- A 是开集当且仅当 $A=\mathrm{int}A$.
- $\mathrm{cl}A=X\backslash[\mathrm{int}(X\backslash A)], \mathrm{int}A=X\backslash[\mathrm{cl}(X\backslash A)], \partial A=\mathrm{cl}A\backslash\mathrm{int}A$.
- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 X 的子集, 那么有 $\mathrm{cl}[\bigcup_{k=1}^n A_k]=\bigcup_{k=1}^n \mathrm{cl}A_k$, 对于内部, 把 $\bigcup$ 换为 $\bigcap$ 即可, 对于无穷的情形, 结果不成立.

定义 1.6 (稠密与可分)

当度量空间 (X,d) 的子集 E 满足 $\mathrm{cl}E=X$ 时, 我们称该子集是稠密的. 我们称度量空间 (X,d) 是可分的, 当且仅当它具有可数的稠密子集.

例题 1.4 (a)

(b)

(c)

(d)

命题 1.6

E 在 A 中稠密当且仅当对于 $\forall x\in X, r>0, B(x;r)\cap E\neq\varnothing$.

1.2 序列和完备性

1.3 连续性

定义 1.7

设 (X,d) 和 (Z,ρ) 是两个度量空间, 若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $d(a,x)<\delta$ 时, 有 $\rho(f(a),f(x))<\varepsilon$, 那我们说函数 $f:X\to Z$ 在 X 上的 a 点连续. 如果对于 X 的每一个点都连续的话, 那么称函数为连续函数.

我们不会花太多时间研究在单点连续的函数, 但是我们会对在整个度量空间连续的函数进行讨论.

定理 1.2

若 $(X,d),(Z,\rho)$ 都是度量空间, 且 $f:X\to Z$, 则下面几个命题是等价的.

(a)f 是 X 上的连续函数.

(b) 若 U 是 Z 的一个开集, 那么 $f^{-1}(U)$ 是 X 的一个开集.

(c) 若 D 是 Z 的一个闭集, 那么 $f^{-1}(D)$ 是 X 的一个闭集.

证明

命题 1.7

两个连续函数的复合映射依然是连续函数.

证明

定理 1.3 (Urysohn 引理)

若 A 和 B 是 X 的两个不相交闭集, 存在一个连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 满足下列三个性质

(a) 对于 $\forall x \in X, 0 \leq f(x) \leq 1$;

(b) 对于 $\forall x \in A, f(x) = 0$;

(c) 对于 $\forall x \in B, f(x) = 1$.

证明

定义 1.8 (同胚映射与同胚)

设 $(X, d), (Z, \rho)$ 都是度量空间, 若映射 $f : X \to Z$ 是一个双射且 f, f^{-1} 是连续的, 那我们称这个映射是一个同胚映射. 若在两个度量空间中存在同胚映射, 那么我们称这两个度量空间是同胚的.

(关于同胚映射与等距映射的区别的讨论)

定义 1.9 (等价)

设 X 是一个集合, 若两个度量 d, ρ 定义了相同的收敛序列, 那么称 d, ρ 等价. 或者, 若恒等映射 $i : (X, d) \to (X, \rho)$ 是同胚映射, 则 d, ρ 等价.

命题 1.8

对于任意的度量空间 (X, d)

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

定义了一个等价度量.

例题 1.5

定义 1.10 (一致连续)

例题 1.6

命题 1.9 (一致连续的相关命题)

1.4 紧致性

定义 1.11

若度量空间 (X,d) 的子集 K 是紧致的, 则 K 的每个开覆盖都有有限子覆盖.

我们容易发现一些不紧致的集合的例子. 对于开区间 $(0,1)$, 我们有 $\mathcal{G}=\{(\frac{1}{n},1):n\in\mathbb{N}\}$ 是该开区间的一个开覆盖, 但是该开覆盖没有有限子覆盖. 同样的, 对于 $\mathbb{R}$ 来说, 其也是不紧致的. 因为 $\{(-n,n):n\in\mathbb{N}\}$ 是一个覆盖 $\mathbb{R}$ 的开集, 但是没有有限子覆盖. 我们能够很容易发现 X 的每个有限子集都是紧致的, 但是要找到一些不显然的紧致集合的例子, 我们首先要证明以下结论.

命题 1.10

令 (X,d) 是一个度量空间.

(1) 若 K 是 X 的一个紧致子集, 那么 K 是闭集且有界.

(2) 若 K 是紧致的, 且 F 是 K 中的闭集, 那么 F 是紧致的.(对于一般的拓扑空间, 尤承业命题 2.15: 紧致空间的闭子集紧致.)

(3) 紧致子集在连续映射下的像也是紧致的.(对于一般的拓扑空间, 尤承业命题 2.16: 紧致空间的在连续映射下的像紧致.)

证明 (1)

(2)

(3)

现在我们可以照搬微积分中的一个结论, 这个结论一般称之为极值性质或者定理.

推论 1.2

若 (X,d) 是一个紧致的度量空间,$f:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 存在 X 中两点 a,b, 使得 $f(a)\le f(x)\le f(b)(\forall x\in X)$.($f(a),f(b)$ 分别是最小值与最大值).

证明

接下来我们再引入两个定义 (完全有界与有限交性质)

定义 1.12

我们称度量空间 (X,d) 的子集 K 是完全有界的等价于对于任意的 $r>0$, 存在 K 的一组点 $x_1,\cdots,x_n$, 都有 $K\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k;r)$.

若对于 K 的子集构成的集族 $\mathcal{F}$, 有 $F_1,\cdots,F_n\in\mathcal{F},\bigcap_{k=1}^{n}F_k\neq\varnothing$, 那么称这个集族具有有限交性质 (FIP).

接下来的定理是度量空间紧致性的主要结果.

定理 1.4

下面的命题对于度量空间 (X,d) 中的闭子集 K 是等价的.

(1)K 是紧致的.

(2)$\mathcal{F}$ 是 K 中的闭子集构成的集族, 且满足有限交性质 (FIP).

(3)K 中的每一个序列都有收敛的子序列.

(4)K 的每个有限子集都有极限点.

上述两个等价命题, 也就是尤承业中定义 2.1

(5)(K,d) 是一个完全有界的完备度量空间.

证明

紧致性是一个非常重要的性质, 许多优美的结果就是在紧致性的基础上得到的. 有些在本书中可以看到, 有些将在读者的数学生涯中见到. 紧集在一定的意义上几乎是有限的, 我们对于紧集的这种有限性质的运用, 通常也可以在有限集中体现.

接下来的一个结果是命题 1.1 的一个反命题. 首先我们引入一个引理:

引理 1.1

若 $-\infty<a<b<\infty\in\mathbb{R}$, 那么 $[a,b]$ 是紧致的.

证明

定理 1.5 (Heine-Borel 定理)

$\mathbb{R}^q$ 的子集是紧致的当且仅当该子集是闭集且有界.

证明

例题 1.7 对于度量空间 $\mathbb{Q}$, 若 $a<b\in\mathbb{Q}$, 则集合 $F=\{x\in\mathbb{Q}:a\leq x\leq b\}=\mathbb{Q}\cap[a,b]$ 是闭集且有界, 但是它不是紧致的. 实际上, 在 F 中存在一个序列 x_n, 该序列收敛到一个无理数. 因此该序列没有子列收敛到 F 中的一点. 所以对于任一度量空间, 一个有界闭集不一定是紧致, 且 Heine-Borel 定理是欧氏空间特有的.

我们注意到, 在 Heine-Borel 定理中,$\mathbb{R}^q$ 上度量一定是规范的, 否则即便是满足 Heine-Borel 定理度量的等价度量, 都有可能使得结果不成立. 比如说对于 $\mathbb{R}$ 上的度量 $d(x,y)=|x-y|(1+|x-y|^{-1})$. 这提供了另一个有界闭集不紧化的例子.

定理 1.6

若 (X,d) 是一个度量空间且 $f:X\to(Z,\rho)$ 是一个连续函数, 那么该函数是一致连续的. ♡

证明

命题 1.11

一个紧致的度量空间是可分的.(尤承业习题 2.3.(7), 从而紧致的度量空间是 C_2 空间). ♠

证明

1.5 连通性

考虑下面两个关于 $\mathbb{R}$ 的子集的例子. 第一个是集合 $X=[0,1]\cup(2,3)$, 第二个是集合 $Y=[0,1]\cup(1,2)$. 在 X 有两个不同的" 部分",$[0,1],(2,3)$. 虽然我们也把 Y 写成了并集的样式, 但是它并不实际上是分离的" 部分". 从某种意义上说, 我们将 Y 写成这种形式是偶然的, 我们也能讲 Y 写成其他不同的形式. 对于 X 和 Y, 它们真正的区别是什么?

1.6 Baire 范畴定理

第 1 章 练习

1. 证明: 有限紧集的并集还是紧集.
2. 若 K 是 (X,d) 的子集, 证明:K 是紧致的当且仅当 K 的每个相对开集的覆盖都有有限子覆盖.
3. 证明: 一个完全有界集合的闭包还是完全有界的.
4. 证明: 一个完全有界集合是有界的. 这个命题反过来成立吗?
5. 若 $\{E_n\}$ 是一个完全有界集合中的序列, 且 $\mathrm{diam}E_n\to0$. 证明:$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 是完全有界的.
6. 若 (X,d) 是完备度量空间, 且 $E\subset X$, 证明:E 是完全有界的当且仅当 E 的闭包是紧致的.

7. (a) 若 G 是一个开集且 K 是 G 的一个紧致子集. 证明, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\{x : \text{dist}(x, K) < \delta\} \subset G$.

   (b) 给出一个在度量空间 X 的开集 G 以及 G 的一个非紧闭子集 F, 使得不存在 $\delta > 0$, 满足 $\{x : \text{dist}(x, F) < \delta\} \subset G$

8. 若 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ 为度量空间, 证明:$X_1 \times X_2$ 是紧致的当且仅当 X_1, X_2 均紧致.

9. 给出一个不紧致的度量空间 (X, d) 以及一个连续函数 $f : (X, d) \to (Z, \rho)$, 使得 $f(X)$ 是紧致的.

10. 对于 X 的两个子集 A, B, 定义 A 到 B 的距离为 $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

    (a) 证明:$\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A) = \text{dist}(\overline{A}, \overline{B})$.

    (b) 证明: 若 A, B 是 X 的两个不相交的闭子集, 且 B 是紧致的, 从而 $\text{dist}(A, B) > 0$.

    (c) 给出平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个不相交的闭子集 A 和 B 的例子, 使 $\text{dist}(A, B) = 0$.

    (d) 该题与练习 7 有关吗?

11. 证明:

$$\{x = x_n \in l^\infty : \sup_n |x_n| \leq 1\}$$

    不是完全有界的, 因此也不是紧致的.

12. 若一个度量空间可以写成若干紧集的并集，就称它为 σ-紧的.

    (a) 给出三个是 σ-紧但不是紧致的度量空间.

    (b) 证明:σ-紧的度量空间是紧致的.