Navigatie

Eveline Visee
Gideon Wormeester

Versie van 12 mei 2018

Vierkant voor Wiskunde
Zomerkamp B 2018

Voorwoord

In dit onderzoeksprogramma zoeken we uit hoe mensen vroeger, voordat ze over smartphones met GPS beschikten, de weg vonden. We gaan het hebben over het bepalen van het noorden (of zuiden), breedte- en lengtegraden. We werken met het astrolabium om de tijd te bepalen aan de hand van de sterren.

Al in de Oudheid reisden handelaren de hele (bekende) wereld over met hun goederen; wat van ver komt is bijzonder en daardoor waardevol. Om op de juiste bestemming te komen is het niet praktisch om de weg uit je hoofd te leren, zeker niet als de reis maanden of jaren kan duren. De oudste gevonden kaarten komen dan ook uit de 25^e eeuw voor het begin van onze jaartelling.

Vroege scheepskapiteins volgden vaak de kust om hun koers te vinden, maar dit was niet altijd genoeg. Om van Kreta naar Egypte te komen kostte meer dan een dag, waarbij het schip 's nachts het land niet in zicht had, en de bemanning dus de sterren moest gebruiken om het schip in de juiste richting te sturen. Zeekaarten werden gemaakt waarop ondieptes en opvallende kenmerken van de kust werden aangegeven.

Een andere vroege uitvinding was het peillood. Een zwaar gewicht dat achter het schip in het water gelaten werd kon gebruikt worden om de diepte van het water te bepalen. Daarmee kon de afstand tot het dichtstbijzijnde land worden geschat. Ook de wind kon helpen bij het bepalen van de richting.

De hemel was echter de meest nauwkeurige navigatiemethode op open zee. De Grieks-Egyptische geleerde Eratosthenes berekende rond het jaar ± 150 voor het begin van onze jaartelling de omtrek van de aarde door gebruik te maken van de stand van de zon. Zijn berekening was nauwkeuriger (en maar 10% groter dan de werkelijke waarde) dan die van Christoffel Columbus (1492), meer dan 1500 jaar later.

's Nachts werd gebruik gemaakt van de sterren. De Poolster en de sterren van de Kleine Beer zijn heel geschikt om de richting van het Noorden te vinden, en het astrolabium, de sextant, octant en de jacobsstaf werden allen ontwikkeld om gebruik te maken van de sterren.

Uitleg van de gebruikte symbolen:

In de kantlijn staat een aantal speciale symbolen. Deze hebben de volgende betekenis:

✄ staat voor een praktische opdracht.

☞ betekent dat er achterin een hint bij deze opgave is te vinden.

★ staat voor een extra moeilijke opgave.

🗨 staat voor een discussievraag.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Navigeren met je horloge

We beginnen dit kampprogramma met een klein experiment. Je krijgt hiervoor het horlogewerkblad, een werkblad met drie afbeeldingen van een horlogeplaat. Je kan ook werken met een analoog horloge, als je dit hebt. In dat geval kun je de wijzerplaat in je schrift overtekenen bij tekenopdrachten.

Het doel van dit experiment is om het noorden te bepalen, zonder kompas.

☞ **1.1** **(a)** Hoe laat is het nu?

(b) Hoe laat is het nu in wintertijd?

Stel je horloge nu in op wintertijd, of, als je het werkblad gebruikt, teken dan eerst de juiste stand van de wijzers op de wijzerplaat in de wintertijd. De volgende opgave voer je buiten uit, zodat je kan zien waar de zon staat.

LET OP: kijk nooit rechtstreeks naar de zon! Ook niet als je een zonnebril draagt. Het is beter om te kijken naar de richting van de schaduwen.

1.2 Waarom mag je nooit rechtstreeks in de zon kijken?

1.3 Welk apparaat kun je gebruiken om de tijd te meten met behulp van de zon, zonder in de zon te kijken?

✄ **1.4** Zorg dat de kleine wijzer van je horloge in de richting van de zon wijst. Op je werkblad, markeer de kleinste hoek tussen de kleine wijzer en de 12. Teken vervolgens de lijn die deze hoek precies in tweeën deelt.

1.5 Hoe wordt deze lijn ook wel genoemd?

De lijn, die je zojuist getekend hebt, ligt precies in de richting naar het zuiden. Teken nu op je werkblad de richting van het noorden.

1.6 Terwijl je nog buiten bent, vergelijk met je groepsgenoten. Hebben jullie allemaal precies dezelfde richting gevonden voor het zuiden? Hoe nauwkeurig denk je dat deze methode is?

1.7 Hoe weet je dat deze lijn precies naar het zuiden wijst?

1.8 Waarom werkt deze methode minder goed als je dichter bij de evenaar bent, en beter als je dichter bij de Noordpool bent?

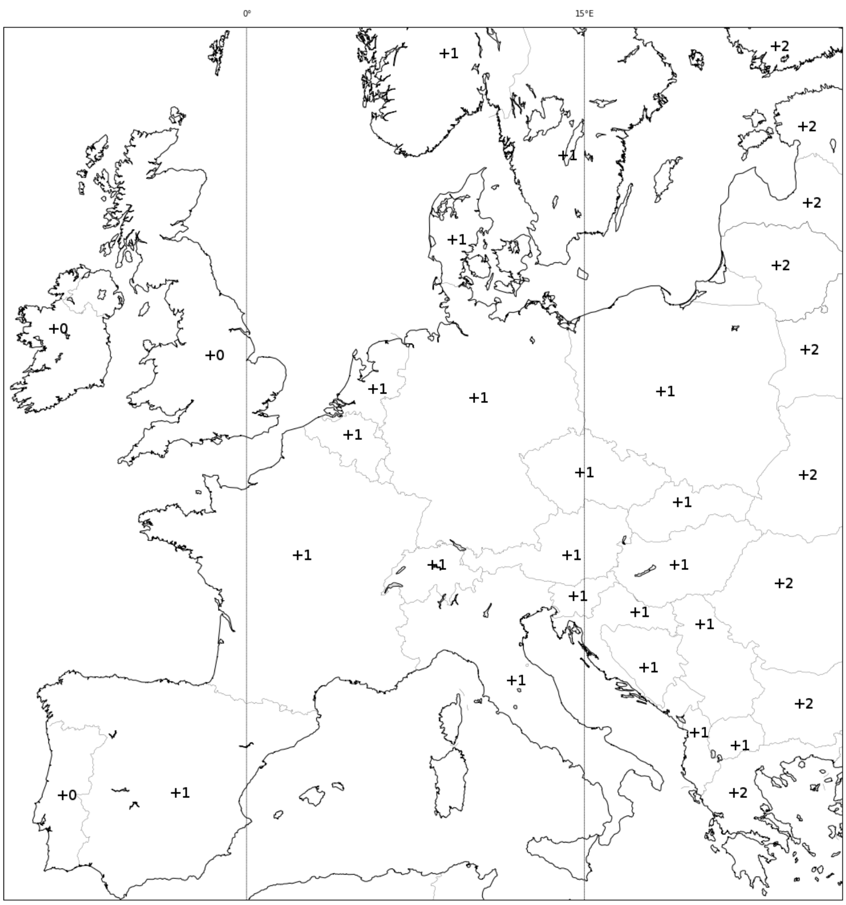
✄ **1.9** Hoe pas je deze methode aan voor de zomer? Zet je horloge terug op zomertijd en probeer of je dezelfde uitkomst krijgt.

1.10 Waarom werkt deze methode beter in de winter dan in de zomer?

1.11 De officiële tijd hier in Nederland is hetzelfde als in het westelijkste puntje van Spanje (dat ten opzichte van Nederland een tijdzone verder naar het westen ligt), maar ook hetzelfde als in het oostelijkste puntje van Polen (dat ten opzichte van Nederland een tijdzone verder naar het oosten ligt). Bekijk het plaatje: iedere verticale lijn geeft de theoretische grens van een tijdzone aan, maar in ieder land staat aangegeven welke tijdzone het land gebruikt.

(a) Wat voor problemen levert dit op?

★ **(b)** Hoe pas je de methode aan?



Figuur 1.1: Europa met tijdzones.

1.12 Hoe zou je deze methode aanpassen als je in Australië was?

Je hebt nu gezien hoe belangrijk het is om de juiste tijd te weten als je aan het navigeren bent. Je zult later in dit programma zien dat de tijd niet alleen belangrijk is voor het bepalen van het noorden of zuiden met je horloge, maar ook voor het bepalen van de lengtegraad of als je een GPS apparaat gebruikt.

1.13 In de vorige opgave heb je gezien dat het verschil tussen zomertijd, wintertijd en lokale tijd belangrijk is.

(a) Waarom gebruiken we de wintertijd niet het hele jaar door?

(b) Waarom gebruiken we niet overal de lokale tijd?

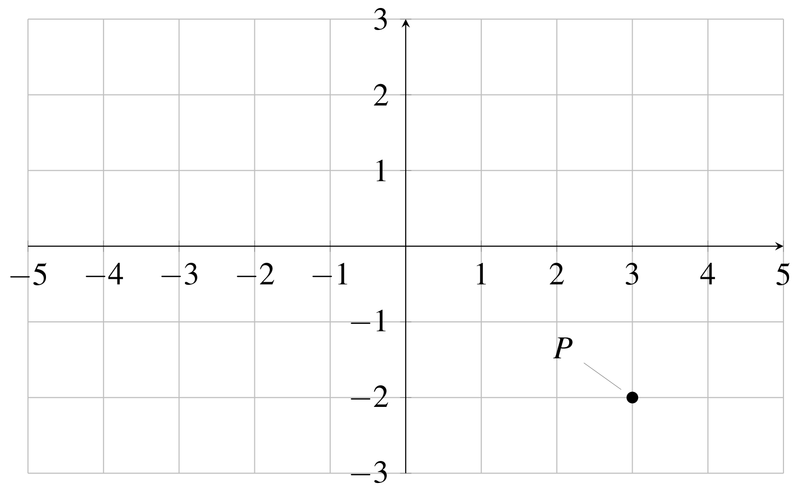
Hoofdstuk 2

Je plaats op een ronde Aarde

Wanneer je opzoekt waar je bent of waar je naar toe gaat, kijk je vrijwel altijd op een kaart. Of je dit nu doet met een papieren kaart, een informatiebord langs de weg of met een app op je telefoon, één ding hebben ze gemeen: De kaart is plat. Maar de Aarde is allesbehalve plat en het vertalen van de ronde aarde naar een platte kaart is niet eenvoudig.

In dit hoofdstuk ga je leren wat er bij komt kijken om te navigeren op een ronde wereld en hoe het toch, met enige beperkingen, mogelijk is om platte kaarten te gebruiken voor een ronde Aarde.

2.1 Coördinaten op een boloppervlak

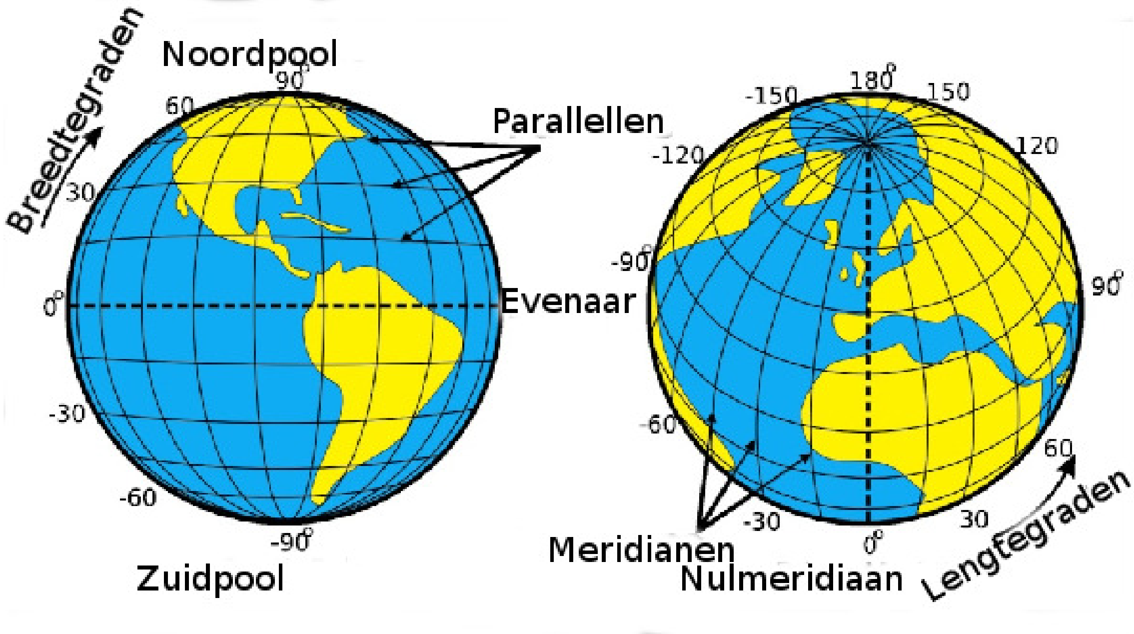


Hierboven zie je een voorbeeld van een plat rooster. Misschien heb je dit al eerder gezien tijdens de wiskundeles. Zo'n rooster zou je kunnen gebruiken om over een kaart heen te leggen. Langs de x-as en y-as staan getallen waarmee we de coördinaten van punten in het rooster kunnen bepalen. Je kunt het punt met $x = 2$ en $y = 3$ vinden door op de x-as de waarde 2 op te zoeken en op de y-as de waarde 3. Het gezochte punt is vervolgens te vinden op de plek waar de 2 lijnen vanuit de gevonden punten op de assen elkaar snijden. Een korte notatie voor de coördinaten van dit punt is $(2,3)$.

2.1 **(a)** Waar ligt het punt (4, 1) in bovenstaand rooster?

(b) Wat zijn de coördinaten van het in het bovenstaand rooster aangegeven punt P?

Omdat de Aarde een bol is[1] hebben we voor plaatsen op het aardoppervlak een ander systeem van coördinaten nodig, de zogenaamde bolcoördinaten. In plaats van x en y waardes, praten we over lengtegraden en breedtegraden.



Figuur 2.1: parallellen en meridianen

De lengtegraad wordt gemeten langs de horizontale lijnen in bovenstaande figuur, terwijl de breedtegraad gemeten wordt langs de verticale lijnen. Lijnen met constante lengtegraad worden ook wel meridianen genoemd. Lijnen met constante breedtegraad heten parallellen. De belangrijkste meridiaan is de nul-meridiaan die door de Engelse plaats Greenwich loopt. Lengtegraden worden uitgedrukt ten opzichte van deze nul-meridiaan. Bij de parallellen is er een vergelijkbare situatie: De nul-parallel is beter bekend als de evenaar.

Lengte- en breedtegraden worden uitgedrukt in graden, zoals de naam al impliceert. Lengtegraden lopen van $-180°$ tot $+180°$ en breedtegraden van $-90°$ tot $+90°$. Meestal worden in plaats van min- en plus-tekens echter de windrichtingen gebruikt. Zo wordt een breedtegraad van 40° boven de evenaar geschreven als $40°N$ (N van Noord) en een lengtegraad van 15° ten oosten van de nul-meridiaan wordt geschreven als $15°E$ (E van East, oftewel Oost).

2.2 Lengtegraden hebben een totaal bereik van 360°, terwijl breedtegraden slechts een bereik van 180° hebben. Waarom is het niet nodig dat breedtegraden ook een bereik van 360° hebben?

[1]Precies gezegd is de Aarde geen perfecte bol, maar een afgeplatte ellipsoïde. De straal van de Aarde bij de evenaar is iets groter dan bij de polen. In dit onderzoeksprogramma gaan we echter uit van een bol.

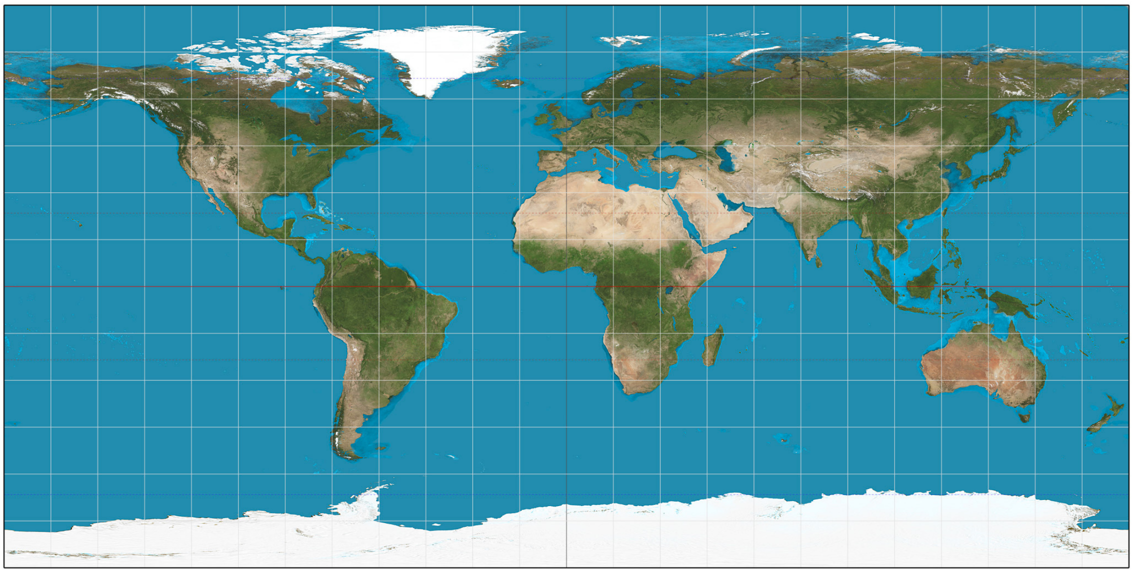
2.3 **(a)** De straal van de Aarde is ongeveer 6400 km. Wat is de omtrek van de Aarde?

(b) Hoe ver moet je over de evenaar reizen om de lengtegraad van je positie met 1° te veranderen?

(c) De parallel die door Heino loopt heeft een straal van ongeveer 3900 km. Hoe groot is de omtrek van deze parallel?

(d) Als je vanuit Heino 1° lengtegraad verplaatst, welke afstand leg je dan af?

Omdat het makkelijker is om het aardoppervlak plat weer te geven, hebben we een manier nodig om het bolvormige oppervlak op een plat rooster over te zetten. Een voor de hand liggende manier is om de boel zo af te beelden dat meridianen verticale lijnen worden op het platte rooster en parallellen horizontale lijnen.



Figuur 2.2: De aarde afgebeeld op een plat vlak

2.4 Op het aardoppervlak staan parallellen en meridianen loodrecht op elkaar. Blijft dat nog steeds zo als we het aardoppervlak op bovenstaande manier afbeelden?

☞ **2.5** **(a)** In een plat rooster is de afstand tussen twee verticale lijnen overal hetzelfde. Is dit ook zo met meridianen op een boloppervlak?

(b) Wat heeft dit voor gevolgen als we meridianen en parallellen als verticale en horizontale lijnen in een vlak rooster afbeelden?

Deze manier van het afbeelden van de Aarde op een vlakke kaart heeft dus duidelijke nadelen. Daarom gaan we later in dit hoofdstuk kijken naar verschillende manieren om de Aarde af te beelden.

2.2 De weg vinden met een kompas

Lange tijd was het kompas een van de belangijkste navigatieinstrumenten en het wordt nog steeds regelmatig gebruikt. Een kompas is een eenvoudig apparaatje dat bestaat uit een metalen naald die vrij kan draaien, meestal boven een schijf waarvan richtingen kunnen worden afgelezen. Een kompas werkt onder invloed van het aardmagnetisch veld en de naald van het kompas zal altijd richting het noorden wijzen.

Richtingen op een kompas worden vaak aangegeven met de windrichtingen, bijvoorbeeld N (Noord), ZW (Zuidwest) of ZZW (Zuid-zuidwest). Naast windrichtingen is de richting ook uit te drukken in graden, van 0° tot 360°. De richting van 0° komt overeen met N (en met 360°).

2.6 **(a)** Welke windrichting komt overeen met 180°?

(b) Welke windrichting komt overeen met 225°?

(c) Hoeveel graden horen er bij de windrichting ONO (oost-noordoost)?

Een pad waarop constant dezelfde (kompas)koers wordt gevolgd wordt een "loxodroom"genoemd.

2.7 **(a)** Is er tussen twee punten op het aardoppervlak slechts één loxodroom of zijn er meerdere? Waarom?

(b) Als je tussen twee punten reist en een zo kort mogelijke afstand wil afleggen, moet je dan een loxodroom volgen? Waarom wel/niet?

★ **2.8** **(a)** Bekijk de vlakke kaart van de Aarde in figuur 2.2. Is een rechte lijn op deze kaart altijd een loxodroom? In welke gevallen wel en in welke gevallen niet?

(b) Is de kaart uit de vorige sectie geschikt om kompaskoersen mee uit te zetten?

Een kleine (of niet zo kleine, afhankelijk van waar je je bevindt) complicatie in het gebruik van een kompas is dat de magnetische noordpool van de Aarde niet hetzelfde is als de ware noordpool. Deze plaatsen liggen enige afstand uit elkaar. De as tussen magnetische noorden en magnetische zuiden is wat gekanteld ten opzichte van de rotatie-as van de Aarde, die door de ware noord- en zuidpool loopt.

Om deze reden zal een kompas dan ook vaak een afwijking hebben ten opzichte van het ware noorden.

2.9 **(a)** Waar denk je dat deze afwijking het grootst is?

(b) Kun je plekken bedenken waar er juist geen afwijking is en het kompas ook naar het ware noorden wijst?

In werkelijkheid wordt de afwijking van een kompas niet alleen bepaald door het verschil tussen magnetische noorden en ware noorden, maar ook door allerlei magnetische eigenschappen van materialen die in de grond zitten. Moderne navigatie met behulp van een kompas maakt daarom gebruik van complexe kaarten waarop overal op Aarde de kompasafwijking wordt aangegeven. Deze afwijking verandert ook nog eens met de tijd, waardoor zo nu en dan nieuwe correctiekaarten moeten worden gemaakt.

2.3 Kaartprojecties

Na dit intermezzo over het kompas, gaan we weer terug naar onze pogingen om het aardoppervlak op een kaart af te beelden.

Het afbeelden van de ronde Aarde op een plat vlak wordt ook wel een "kaartprojectie"genoemd. Er zijn veel verschillende kaartprojecties met elk hun eigen voordelen en nadelen. In de vorige sectie ben je er al eentje tegengekomen. Deze projectie heeft vele namen, waaronder "vierkante platkaart" en "meridiaangetrouwe cilinderprojectie".

De term "meridiaangetrouw"slaat op het feit dat met deze projectie lengtes van stukken die langs een meridiaan lopen (niet noodzakelijkerwijs dezelfde meridiaan) op schaal zijn. Dat wil zeggen dat twee stukken die elk een meridiaan volgen en op de kaart dezelfde lengte hebben, ook op de Aarde zelf dezelfde lengte hebben.

2.10 **(a)** Is deze kaartprojectie ook "parallelgetrouw"?

(b) Hoe zit het met afstanden van stukken die niet precies een meridiaan of een parallel volgen? Worden deze afstanden met constante schaal afgebeeld?

Hoewel de vierkante platkaart een makkelijke projectie is om te maken en hij erg geschikt is om te werken met lengte- en breedtegraden van punten, heeft deze kaartprojectie een aantal belangrijke nadelen.

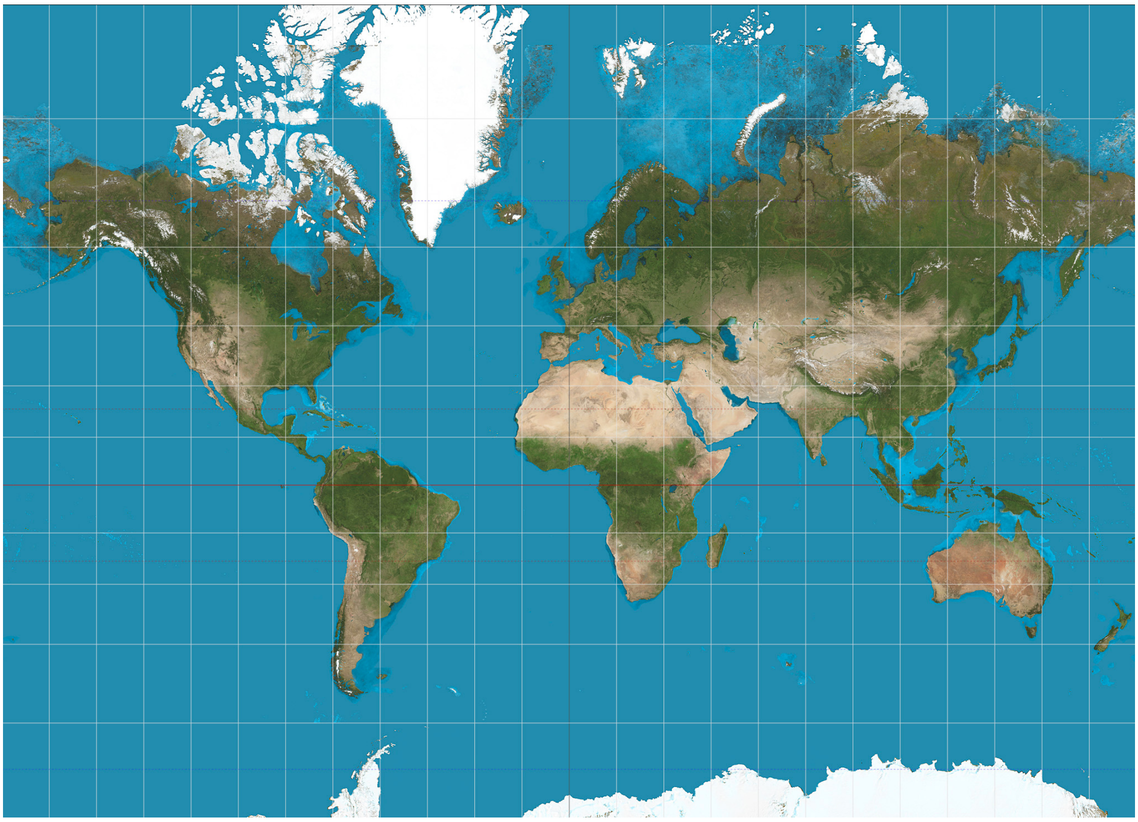
Een alternatieve kaartprojectie is de zogenaamde Mercator-projectie, genoemd naar de Belgische cartograaf Gerardus Mercator, die deze projectie als eerste heeft geïntroduceerd. Hieronder staat een voorbeeld van de Mercator-projectie.

Een bijzondere eigenschap van de Mercator-projectie is dat deze richtingsgetrouw is. Dat betekent dat alle loxodromen rechte lijnen vormen op de kaart.

2.11 Als je als kapitein van een schip (zonder moderne hulpmiddelen) een route naar je bestemming moet vinden, gebruik je dan liever een vierkante platkaart of een Mercator-projectie? Waarom?

2.12 **(a)** Is de Mercator-projectie meridiaangetrouw?

(b) Is de Mercator-projectie parallelgetrouw?



Figuur 2.3: Mercator-projectie

Hoewel de Mercator-projectie dus bepaalde voordelen biedt boven de vierkante platkaart, zijn er ook nadelen. Dit geldt voor alle projectie-methoden: Elke projectie heeft voordelen en nadelen. Omdat het aardoppervlak niet zonder vervorming is af te beelden op een platte kaart, moeten er altijd keuzes worden gemaakt. Afhankelijk van de gewenste eigenschappen kan de meest geschikte projectie worden gekozen.

2.13 Zoek op de Mercator-projectie Nederland op en zoek een ander punt op grote afstand van Nederland, maar wel op het noordelijk halfrond (bijvoorbeeld in Noord-Amerika of Azië). Probeer de kortste afstand tussen deze twee punten op het aardoppervlak te tekenen.

Tot slot maken we kennis met de zogenaamde "gnomonische projectie". Dit is een bijzondere projectie waarin grootcirkels worden afgebeeld als rechte lijnen. Een grootcirkel is een cirkel over het aardoppervlak die het middelpunt van de Aarde als middelpunt heeft. Zo'n cirkel is de grootste mogelijke cirkel die over het aardoppervlak kan lopen.

2.14 Geef een voorbeeld van grootcirkel op het aardoppervlak.

Een belangrijke eigenschap van grootcirkels is dat het kortste pad tussen twee punten op een boloppervlak (in dit geval dus het aardoppervlak) altijd op een grootcirkel ligt.

2.15 De gnomonische projectie beeldt grootcirkels af op rechte lijnen. In welke situaties is dat handig?

Hieronder staat een voorbeeld van een kaart met gnomonische projectie. Merk op dat deze projectiemethode minder dan de helft van de Aarde in één keer kan afbeelden en dat naarmate je dichter bij de rand komt, vervormingen steeds sterker worden.

Figuur 2.4: Gnomonische projectie

2.16 Zoek op de kaart met gnomonische projectie dezelfde twee punten op die je in opgave 2.13 ook al hebt opgezocht. Teken nu het kortste pad tussen deze twee punten en kijk terug naar wat je op de Mercator-projectie als kortste pad hebt aangegeven. Zat je dicht in de buurt met je eerste poging?

Hoofdstuk 3

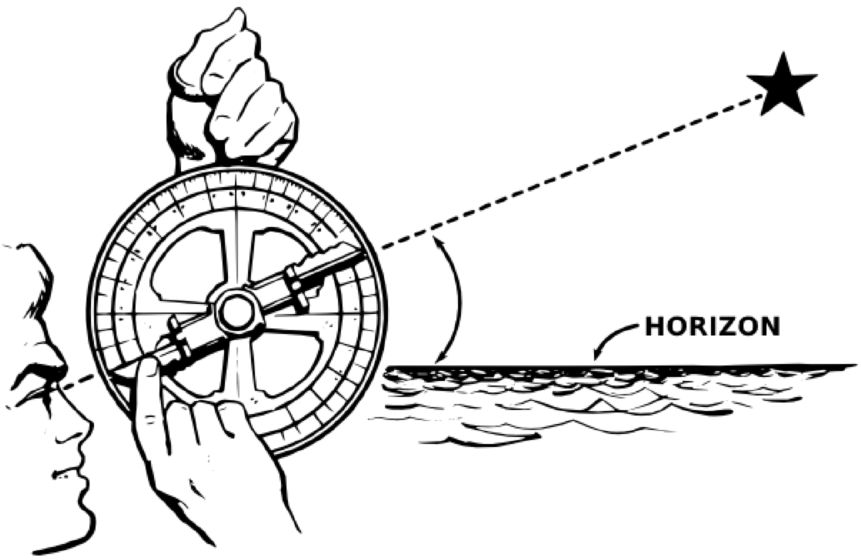
Astrolabium

In dit hoofdstuk ga je aan de slag met het *astrolabium*, een van de oudste navigatie-instrumenten. Je gebruikt het astrolabium zoals in figuur 3.1. Er bestaan twee varianten van het astrolabium, het sterrenkundig astrolabium en het zeemansastrolabium, dat versimpeld was en makkelijker te gebruiken op het dek van een schip. Het astrolabium dat wij gebruiken is een sterrenkundig astrolabium.

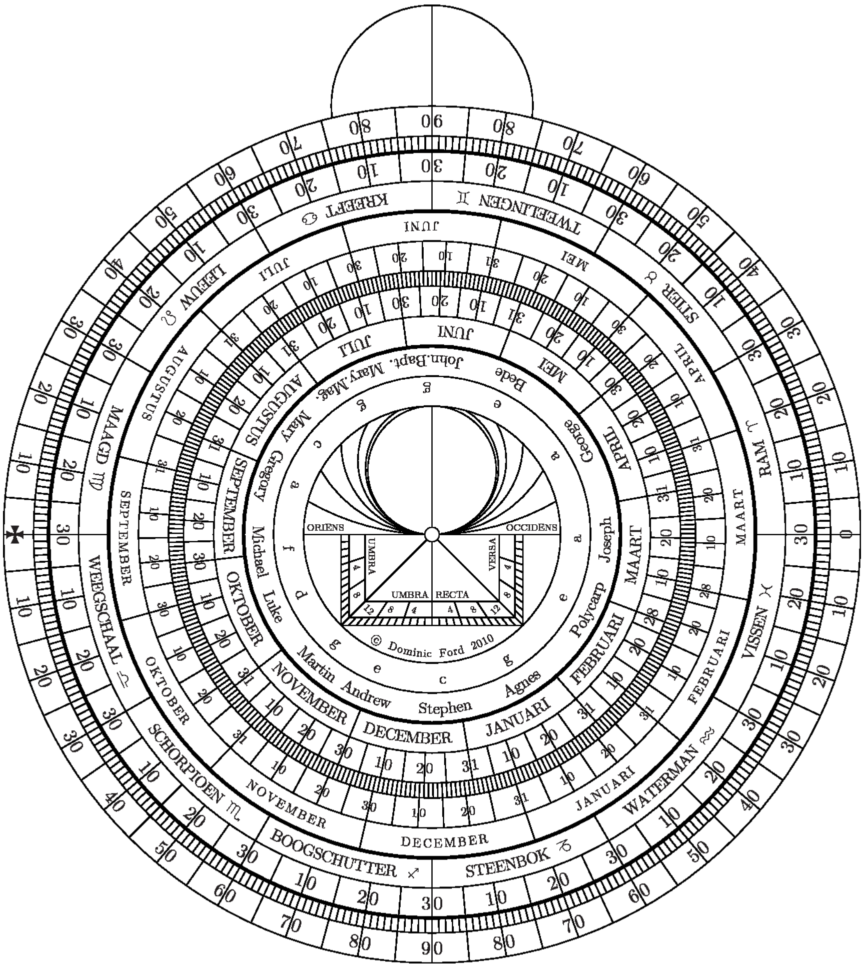
Je bouwt eerst je eigen astrolabium, daarvoor krijg je een werkblad met de onderdelen van het astrolabium uitgedeeld. Allereerst kijken we naar de achterkant van het astrolabium (figuur 3.2).

De ringen, van buiten naar binnen, geven het volgende weer:

- Schaal om de hoogte van een ster te bepalen.
- Dagen van de sterrenbeelden.
- Namen van de sterrenbeelden (de tekens van de dierenriem).
- Kalender passend bij het jaar 1394 (deze loopt negen dagen voor op de kalender voor onze tijd).



Figuur 3.1: Zo houdt je het astrolabium vast.

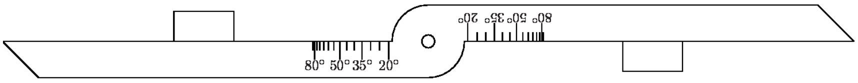


Figuur 3.2: De achterkant van het astrolabium

- Kalender passend bij onze eigen tijd. Deze kun je inkleuren met kleurpotlood of highlighter om aan te geven dat dit de kalender is die je moet gebruiken.
- In de volgende twee ringen worden traditioneel de naamdagen van katholieke of anglicaanse heiligen weergegeven. Deze zijn weggelaten in ons astrolabium.
- De binnenste ring (schaduwschaal) zullen we niet gebruiken.

De wijzer (alidade) (figuur 3.3) draait over de achterkant van het astrolabium. Naast de alidade op je werkblad wordt ook een tweede wijzer, de *rule*, afgebeeld. Deze zullen we niet gebruiken.

De voorkant van het astrolabium heeft het alfabet (de letters J, V en W ontbreken) en een gradenboog rondom de *plaat*. De plaat is gemaakt voor 52° Noorderbreedte, de breedtegraad van Nederland. Voor een andere breedtegraad heb je een andere plaat nodig. Het alfabet geeft de tijd aan, het kruis ✠ is middernacht, de **A** is één uur, de **M** is 12 uur ’s middags, enzovoort.



Figuur 3.3: De alidade

Op de plaat zie je cirkels rondom een punt dat niet het middelpunt van het astrolabium is. Dit punt heet het *zenit*, en het geeft het punt recht boven je hoofd (als je rechtop staat) weer. Eromheen zijn de cirkels genaamd *almucantaren*. De almucantaar die gemarkeerd is met 0° is de *horizon*. De verticale lijn tussen de **M** en ✠ is de noord-zuid meridiaan (het zuiden ligt bij **M**), en de lijn tussen **S** en **F** is de oost-west lijn.

Het laatste onderdeel, gemaakt van doorzichtig plastic, maar in vroeger tijden vaak een gouden of koperen plaat met veel uitsparingen, is de *spin* (op het werkblad heet dit de *rète*, maar in het Nederlands is het de spin). Op de spin staan een sterrenkaart en uren afgebeeld. De cirkel met daarin de namen van de sterrenbeelden is het *zonnepad*. Ook staan er drie cirkels op afgebeeld. De buitenste (aan de rand van de spin) geeft de Steenbokskeerkring aan (dit is een parallel op $23,5^\circ$ zuiderbreedte). De kleinere cirkel is de evenaar, en de kleinste cirkel (gedeeltelijk bedekt door het zonnepad) is de Kreeftskeerkring (de parallel op $23,5^\circ$ noorderbreedte). Als je de spin met de klok mee draait, zie je de sterren opkomen in het oosten en ondergaan in het westen.

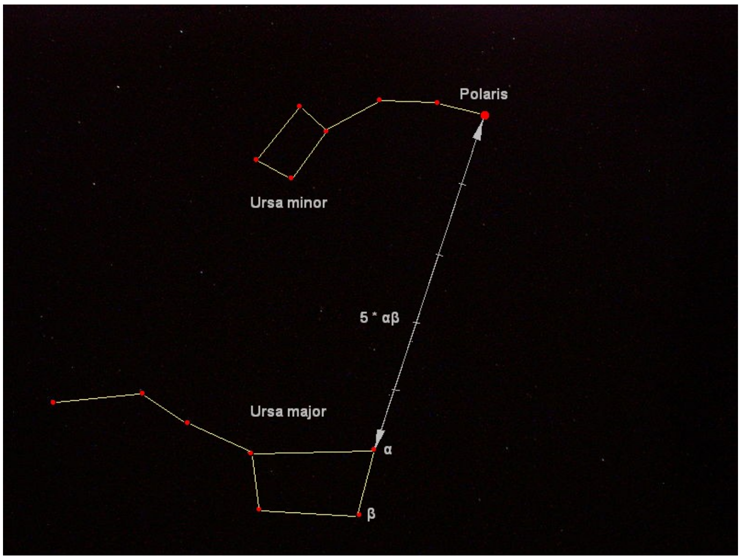
De voorkant en de achterkant zijn niet helemaal cirkelvormig: aan de bovenkant zit nog een ring waaraan je het astrolabium kan vasthouden.

✄ **3.1** Knip nu alle onderdelen van het astrolabium uit. Lijm de voorkant en de achterkant op elkaar zodat de ring van beide onderdelen op elkaar zit, en je alle tekst kan lezen. Met een splitpen bevestig je de alidade op de achterkant en de spin op de voorkant van het astrolabium.

3.1 Bepaal de breedtegraad met het astrolabium

Het bepalen van de breedtegraad met het astrolabium is niet moeilijk, je gebruikt slechts een klein deel van de mogelijke metingen die je met het astrolabium kan doen. Je kan dit ook doen met simpeler instrumenten zoals de sextant, de octant of de Jakobsstaf, het principe is hetzelfde. Je kan zo'n instrument zelf knutselen met een geodriehoek of gradenboog en een rietje om doorheen te kijken.

Als je 's nachts de breedtegraad wil bepalen, gebruik je de Poolster. Deze kun je vinden door eerst het sterrenbeeld Grote Beer (Ursa Major) te vinden. In Nederland wordt deze ook wel het Steelpannetje genoemd. Bekijk ook de figuur 3.1 hieronder om de Poolster te vinden:



Figuur 3.4: Vind de Poolster met behulp van de Grote Beer.

Als je de Poolster hebt gevonden, kun je als volgt de hoogte bepalen: houd het astrolabium aan de ring vast, zodat het vrij hangt voor je. Draai de wijzer zodat je precies langs de wijzer naar de Poolster kijkt (de ster moet precies tussen de flapjes van de wijzer zichtbaar zijn). Op de buitenste schaalverdeling aan de achterkant van het astrolabium kun je nu zien hoe hoog de Poolster staat. Dit is de breedtegraad.

3.2 Maak een tekening van deze situatie: laat zien hoe de aarde, de waarnemer, het astrolabium en de ster zich bevinden ten opzichte van elkaar. Leg nu uit waarom de breedtegraad en de hoogte van de Poolster hetzelfde zijn.

Herinnering: kijk nooit recht in de zon!

✄ **3.3** Sta met je rug naar de zon toe. Houd het astrolabium aan de ring vast, voor je, zodat het vrij hangt. Draai de wijzer zodat het evenwijdig is met de zonnestralen - de flapjes mogen geen schaduw geven. Nu kun je op de buitenste schaalverdeling aan de achterkant de hoogte van de zon aflezen.

(a) Wat is de hoogte van de zon?

3.4 Waarom is het belangrijk dat je de maximale hoogte van de zon bepaalt?

3.5 Op het midden van de dag staat de zon op het hoogste punt - en precies in het Zuiden. Als je de maximale hoogte van de zon bepaald hebt, is dat echter niet hetzelfde als de breedtegraad. Waarom niet?

3.6 Hoe vind je dan wel de breedtegraad, als je de maximale hoogte van de zon weet?

3.7 Meet de breedtegraad met je astrolabium.

(a) Wat is de uitkomst van je meting?

(b) Heino ligt op $52,4$ graden Noorderbreedte. Wat is het verschil met jouw meting? Hoe denk je dat dit verschil veroorzaakt wordt?

3.2 Tijdsbepaling met het astrolabium

Op de spin zie je een ring met de namen van de twaalf sterrenbeelden van de dierenriem. Ieder sterrenbeeld hoort bij bepaalde data in het jaar:

Sterrenbeeld	Data
Ram	21 maart – 21 april
Stier	21 april – 21 mei
Tweelingen	21 mei – 21 juni
Kreeft	21 juni – 21 juli
Leeuw	21 juli – 21 augustus
Maagd	21 augustus – 21 september
Weegschaal	21 september – 21 oktober
Schorpioen	21 oktober – 21 november
Boogschutter	21 november – 21 december
Steenbok	21 december – 21 januari
Waterman	21 januari – 21 februari
Vissen	21 februari – 21 maart

Je hoeft deze tabel niet uit je hoofd te leren, je kan namelijk op de achterkant van het astrolabium zien welk sterrenbeeld bij welke datum hoort. Let op dat je de binnenste kalender gebruikt! We gaan nu eerst het tijdstip van zonsopgang en zonsondergang van vandaag bepalen.

3.8 Gebruik een stift of highlighter om, op het zonnepad (op de spin) een stip te zetten bij de datum van vandaag. Dit stipje is de zon. Nu draai je de spin zodat de zon op de oostelijke horizon ligt (dus op de linkerhelft van de plaat). De lijn die door het midden van de plaat en de zon gaat wijst nu een letter op de buitenrand van de plaat aan. Deze letter geeft het uur van zonsopgang aan. Hoe laat is dit?

3.9 Bereken nu op dezelfde manier het tijdstip van zonsondergang vandaag. Gebruik hiervoor de westelijke horizon (de rechterkant van het astrolabium).

We gaan nu het tijdstip bepalen. Hiervoor is het belangrijk dat je niet recht in de zon kijkt!

3.10 Bepaal de hoogte van de zon, op dezelfde manier als je deed bij het bepalen van de breedtegraad (opgave 3.3)

(a) Wat is de hoogte van de zon?

Draai nu de spin zo dat het stipje op de almucantaar (de gebogen lijnen op de plaat, zie ook de uitleg in het begin van dit hoofdstuk) met dezelfde hoogte staat. Bepaal nu de hoek tussen de zon en de noord-zuid meridiaan. Het tijdstip wordt nu gegeven door de volgende formule:

$$\text{Tijdstip} = 12 \pm \frac{24 \times \text{hoek}}{360}$$

waarbij de $\pm$ betekent dat je moet optellen als het middag is, maar aftrekken als het ochtend is.

(b) Hoe laat is het volgens deze formule?

(c) Reken dit om naar zomertijd. Klopt het met de tijd op de klok?

3.11 Je hebt in de vorige opgave de hoek tussen de zon en het zuiden bepaald. Wijs nu de richting van het zuiden aan. Ben je het eens met je groepje? Verschillen jullie antwoorden meer of minder dan in het horlogepracticum?

3.12 In de bovenstaande opgaven zijn we uitgegaan van het noordelijk halfrond. Wat moet je aanpassen voor het zuidelijk halfrond?

3.3 Bepaal de lengtegraad met het astrolabium

Stel je nu voor dat je de navigator op een 17^e-eeuws schip bent.

3.13 Wat kan er mis gaan op een schip als de navigator niet de precieze lengtegraad weet?

3.14 Een primitieve techniek om de lengtegraad te bepalen ging uit van de snelheid van het schip. Zeelieden gebruikten een touw met knopen erin, die ze vanaf de achterkant van het schip naar beneden lieten, en dan met een zandloper maten ze de hoeveelheid knopen die in een bepaalde tijd in het water verdween.

(a) Wat is het probleem met deze techniek?

(b) Kun je een betrouwbare manier bedenken om de snelheid te bepalen, met technieken die in de 17^e eeuw of eerder beschikbaar waren?

3.15 Omdat de aarde iedere dag volledig om zijn as draait, ziet een waarnemer op lengtegraad A gedurende een dag dezelfde sterren als een waarnemer op lengtegraad B (zolang de lucht niet bewolkt is en de breedtegraden gelijk zijn). Ziet waarnemer A om middernacht, lokale tijd, dezelfde sterren op hetzelfde tijdstip als waarnemer B om middernacht, lokale tijd?

3.16 Hoeveel graden draait de aarde in één uur?

3.17 Als je nu op een schip bent, je weet niet waar, en je weet de precieze tijd op de nulmeridiaan (de meridiaan die door Greenwich/Londen loopt), kun je dan de lengtegraad van je eigen locatie bepalen met het astrolabium? Hoe?

3.18 Vraag je begeleider om de precieze tijd in Greenwich op te zoeken. Bepaal nu de tijd en lengtegraad in Heino met je astrolabium.

In 1735 vond John Harrison een betrouwbare scheepsklok uit, maar pas in 1800 hadden de meeste schepen een goede klok aan boord.

3.19 Leg in je eigen woorden uit waarom het belangrijk is een betrouwbare klok aan boord van een schip te hebben.

Hoofdstuk 4

Moderne navigatie

Hoewel navigatie met behulp van de sterren en instrumenten zoals een kompas en astrolabium eeuwenlang behoorlijk effectief was, kijken we in dit hoofdstuk naar een modernere vorm van plaatsbepaling en navigatie. Als je van een aantal punten exact de locatie weet, dan kun je dat gebruiken om zelf te bepalen waar je bent met behulp van een wiskundige techniek die "trilateratie"heet.

4.1 Touwtjes-trilateratie

4.1 Pak samen met iemand anders in jouw groepje een stuk touw en ga zo staan dat elk het touw bij het uiteinde vast heeft en het touw tussen jullie strak staat.

Als je precies weet wat de positie is van de andere persoon en wat de lengte is van het touw, weet je dan ook precies wat jouw positie is? Waarom wel/niet?

4.2 Zoek nu een derde persoon uit jouw groepje en een tweede stuk touw. Eén persoon houdt van beide touwen een van de uiteinden vast en de twee andere personen houden elk van één van de touwen het andere uiteinde vast. Ga zo staan dat beide touwen strak staan.

Als je precies weet wat de posities van de twee personen die één touw vasthouden zijn en wat de lengte van beide touwen is, heb je dan voldoende informatie om de positie van de derde persoon te bepalen?

4.3 Herhaal het proces uit de vorige twee opgaven, maar nu met 3 stukken touw en 4 personen. Één persoon houdt van alle touwen één uiteinde vast en de overige personen van elk touw ieder één uiteinde.

Kan de persoon met alle uiteindes in handen nu zijn of haar positie bepalen als de touwen allemaal strak staan en de posities van de overige personen en de lengtes van de touwen bekend zijn?

Waar je in deze opgaven mee bezig bent geweest heet "trilateratie". Dit is een techniek om de positie van een onbekend punt te bepalen aan de hand van de posities van enkele andere punten en de afstand tot deze punten.

Trilateratie staat aan de basis van de techniek die vrijwel iedereen tegenwoordig gebruikt voor plaatsbepaling en navigatie: GPS. Voordat we verder gaan met GPS, kijken we eerst nog even verder naar trilateratie.

4.2 Snijdende Cirkels

4.4 We gaan met behulp van trilateratie de positie van een onbekend punt P bepalen.

(a) Teken in je schrift een punt A. Als je weet dat het punt P op een afstand van 3 cm van A ligt, waar zou punt P dan kunnen liggen? Teken de mogelijke locaties waar punt P kan liggen in je schrift.

(b) Teken een tweede punt B op een paar centimeter van punt A. Als je weet dat het punt P op een afstand van 4 cm van B ligt, waar zou P dan kunnen liggen? Teken de mogelijke locaties in je schrift.

(c) Hoeveel locaties zijn er die op de juiste afstand van zowel punt A als punt B liggen? Wat is er nodig om het punt P op unieke wijze vast te leggen?

In de vorige opgave heb je gezien dat in een plat vlak (zoals op een vel papier), je de positie van een punt vrijwel volledig kunt vastleggen als je de afstand tussen het punt en twee andere punten (met bekende positie) kent. De mogelijke posities zijn in dit geval de snijpunten van de cirkels rondom de punten waarvan de positie bekend is. In de meeste gevallen zullen dit twee snijpunten zijn.

4.5 Kun je een situatie bedenken waarin twee cirkels slechts één punt gemeen hebben? Wat zegt dit over de plek van het onbekende punt ten opzichte van de bekende punten?

4.6 Tot hoeveel bekende punten moet je de afstand weten om zeker te zijn dat je de locatie van een onbekend punt op unieke wijze kunt bepalen als alle punten in een vlak liggen?

In een plat vlak is een cirkel de verzameling van punten die op een gegeven afstand van een centraal punt liggen.

4.7 Hoe ziet de verzameling punten die op een gegeven afstand van een centraal punt liggen er uit in drie-dimensionale ruimte?

Als je jouw afstand tot een vast punt kent, dan is jouw mogelijke locatie een punt op het boloppervlak om het bekende punt. Ken je de afstand tot 2 bekende punten, dan ligt jouw locatie op een snijpunt van twee boloppervlakken

4.8 Hoe ziet de verzameling van de snijpunten van twee boloppervlakken er uit?

Aannemend dat we niet in het grensgeval zitten waarbij de doorsnede van de twee boloppervlakken uit exact één punt bestaat, hebben we dus nog niet voldoende informatie om de positie exact te bepalen.

☞ **4.9** Tot welke vorm krimpt de verzameling van snijpunten als we een derde vast punt met bekende afstand toevoegen?

4.10 **(a)** In drie-dimensionale ruimte, hoeveel bekende punten, waarvan je de afstand tot jouw locatie kent, zijn er nodig om altijd zeker te zijn dat je jouw locatie precies kunt bepalen?

(b) In het gunstigste geval, wat is het kleinste aantal punten dat je nodig hebt voor plaatsbepaling?

Het Global Positioning System (GPS) werkt met dit principe van trilateratie. Een flink aantal satellieten draaien in diverse banen om de aarde. Deze satellieten zenden continu een signaal uit met, onder andere, hun huidige positie. Als een GPS ontvanger (bijvoorbeeld een smartphone) de positie van deze satellieten weet en kan meten wat de afstand is tussen de ontvanger en voldoende satellieten, dan kan de ontvanger z'n positie uitrekenen.

Als de ontvanger van onvoldoende satellieten een signaal ontvangt, dan is nauwkeurige plaatsbepaling niet goed mogelijk. Toch zijn er methodes om in dergelijke situaties met redelijke aannames de plaats te bepalen.

4.11 Als de ontvanger één satelliet te weinig kan ontvangen, hoe zou deze dan alsnog z'n locatie kunnen bepalen?

4.3 Plaatsbepaling zonder tijd?

Hiervoor hebben we gezien hoe we onze locatie kunnen bepalen als we de afstand kennen tot 4 (of meer) satellieten. Maar het probleem is nu: Hoe bepaalt een GPS ontvanger de afstand tot een satelliet?

4.12 Bespreek met je groepje of je een manier kunt bedenken waarmee een GPS ontvanger de afstand tot een satelliet kan bepalen.

Het signaal van een satelliet verplaatst zich met de snelheid van het licht, ongeveer 300.000 km/s. Dus als de GPS ontvanger kan meten hoe lang het signaal onderweg is geweest van de satelliet naar de ontvanger, dan kan daarmee de afstand worden berekend.

4.13 Bedenk een manier waarop de ontvanger kan bepalen hoe lang het signaal onderweg is geweest.

GPS satellieten hebben zeer nauwkeurige atoomklokken aan boord. In het signaal van een GPS satelliet zit het tijdstip van verzenden verwerkt. Door het tijdstip van verzenden te vergelijken met het tijdstip van ontvangst kan de ontvanger bepalen hoe lang het signaal onderweg is geweest.

4.14 **(a)** Als de klok van de GPS ontvanger 0,1 seconde afwijkt van de klok van de GPS satelliet, hoe groot is dan de afwijking in de afstand die de ontvanger uitrekent?

(b) Wat is de afwijking in de afstand als de afwijking van de klok 0,01 seconde is? Of 0,001 seconde?

(c) Veel GPS ontvangers kunnen de plaats op enkele meters nauwkeurig bepalen. Maak een schatting van hoeveel een klok maximaal mag afwijken van de satellietklok om een dergelijke nauwkeurigheid te behalen. Is dit realistisch?

In plaats van het inbouwen van een zeer nauwkeurige klok in iedere GPS ontvanger, is het veel makkelijker om bij elke plaatsbepaling de tijd uit te rekenen aan de hand van de signalen van satellieten.

☞★ **4.15** Als de ontvanger geen (nauwkeurige) klok bevat, wat is er nodig voor de ontvanger om met behulp van de satellietsignalen de tijd bepalen?

Hints bij de opgaven

1.1b In maart gingen alle klokken een uur vooruit. In oktober gaan ze een uur terug.

2.5a Kijk nog eens naar je antwoorden 2 opgaven terug.

2.14 Denk aan de parallellen. Welke parallel is het grootste?

3.2 Bedenk dat, op de Noordpool, de Poolster recht boven je staat en op de evenaar de Poolster precies op de horizon staat.

3.5 Vergelijk de positie van de zon met de positie van de Poolster.

3.8 Kamp is 13 tot 17 augustus 2018, je zet dus een stipje tussen het midden en het einde van de Leeuw op het zonnepad. Vergeet niet om te rekenen naar zomertijd.

3.18 GMT kun je vinden op deze website: `https://time.is/GMT`.

4.9 De verzameling snijpunten van 2 boloppervlakken is een cirkel. Hoe ziet de verzameling snijpunten van een cirkel met een boloppervlak er uit?

4.15 Bedenk dat de ontvanger nu naast de coördinaten (x,y,z) ook de tijd t moet bepalen. Beschouw je tijd als een extra dimensie, dan moeten er dus eigenlijk de coördinaten (x,y,z,t) bepaald worden.

Antwoorden

1.1b Je moet een uur terug tellen van de tijd die het nu is.

1.2 Je loopt het risico om blind te worden.

1.3 Een zonnewijzer.

1.5 Bissectrice

1.7 Om 12 uur, ofwel het middaguur, staat de Zon recht in het zuiden. Op het zuidelijk halfrond staat de Zon echter in het noorden.aanvullen

1.8 Dicht bij de evenaar zijn de schaduwen korter en lijkt de zon altijd recht boven je te staan (en door de tilt van de aardas - 23.5° werkt deze methode niet tussen de Kreeftskeerkring en de Steenbokskeerkring).

1.9 Bepaal de kleinste hoek tussen de kleine wijzer en de 11. De bissectrice van deze hoek wijst nu recht naar het zuiden.

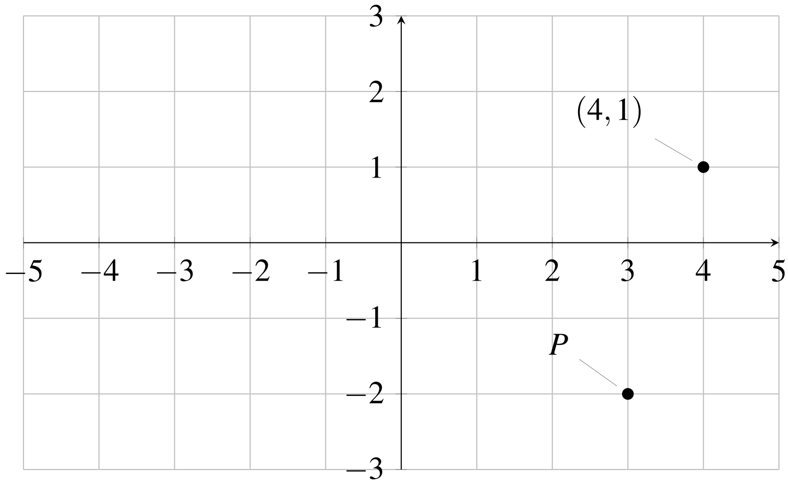
1.10 Je hoeft geen rekening meer te houden met zomertijd, de zon staat lager dus je kan makkelijker de richting van de schaduwen bepalen.

1.12 Richt de 12 van je horloge naar de zon, de bissectrice tussen de 12 en de kleine wijzer wijst nu naar het noorden.

1.13a Omdat mensen langer in de avond wakker zijn dan in de ochtend, en de zomertijd het mogelijk maakt om 's avonds langer van het zonlicht gebruik te maken.

1.13b Als overal de lokale tijd gebruikt zou worden, zou dit veel verwarring veroorzaken. Het tijdsverschil in lokale tijd tussen het oosten en het westen van Nederland is ongeveer een kwartier.

2.1a



2.1b $(3,-2)$

2.2 Neem een cirkel, deze stelt de 360° aan lengtegraden op de evenaar voor. Roteer de cirkel nu om een as die door het midden van deze cirkel loopt. Bij het roteren vormt zich een boloppervlak. Merk op dat de cirkel slechts 180° geroteerd hoeft te worden om een volledige bol te maken, niet 360°. Als de breedtegraden ook een bereik van 360° zouden hebben, dan zou ieder punt op Aarde twee sets coördinaten hebben.

2.3a 12800 km * π = 40200 km

2.3b 1/360 * 40200 km = 112 km

2.3c 24500 km

2.3d $\frac{24500}{360} = 68$ km

2.4 Ja.

2.5a Nee, de afstand tussen meridianen neemt af naarmate je verder van de evenaar komt en wordt 0 bij de polen.

2.5b Afstanden die gelijk zijn in de vlakke projectie zijn niet noodzakelijkerwijs gelijk op het boloppervlak. De projectie is dus niet afstand-behoudend.

2.6a Z (zuid)

2.6b ZW (zuidwest)

2.6c 67.5°

2.7a Er zijn er meerdere. Merk op dat een loxodroom enkel vereist dat een constante kompaskoers gevolgd wordt, niet dat het het kortste pad is. In sommige vallen zijn er wel meerdere loxodromen die het kortste pad tussen twee punten vormen. Denk bijvoorbeeld aan de 2 polen. De meridianen zijn loxodromen.

2.7b Nee. De kortste afstand tussen twee punten volgt een grootcirkel, wat meestal geen loxodroom is.

2.8a Nee. Alleen rechte lijnen die volledig verticaal of horizontaal lopen stellen loxodromen voor (met een koers van $0°, 90°, 180°, 270°$.

2.8b Nee. Omdat loxodromen niet per se rechte lijnen zijn op deze kaart, is het niet mogelijk om een directe kompaskoers te bepalen tussen twee punten. Als loxodromen wel rechte lijnen zouden zijn op de kaart, dan is het voldoende om simpelweg een rechte lijn tussen de twee punten te tekenen. Later komt een kaartprojectie aan bod waarbij dat mogelijk is. (Je kan hiervoor gedeeltelijk compenseren door gedurende korte tijd een bepaalde koers te volgen en dan je koers opnieuw te bepalen.)

2.9a Op de meridiaan die door de magnetische pool loopt, tussen de magnetische en ware pool. Als je hier richting de magnetische pool kijkt, dan bevindt de ware pool zich achter je.

2.9b Op de meridiaan die door de magnetische pool loopt, behalve op het stuk tussen beide polen. Vanuit punten op deze meridiaan gezien liggen de magnetische en ware pool in elkaars verlengde.

2.10a Nee. Dit is eerder aan bod gekomen in opgave 2.3 en 2.5.

2.10b Nee.

2.11 Een Mercator-projectie. Op deze kaart kan een koers worden bepaald door simpelweg het lijnstuk tussen oorsprong en bestemming te tekenen. Door tijdens de hele reis deze koers aan te houden, zal de bestemming uiteindelijk worden bereikt. Merk op dat deze koers niet per se de kortste route oplevert.

2.12a Nee. De projectie strekt zich in principe tot in het oneindige uit richting de polen. Dat betekent dat een afstand langs een meridiaan dicht bij een pool op de projectie willekeurig lang kan worden.

2.12b Nee. Om dezelfde reden als bij de vierkante platkaart: De kaart is overal even breed, terwijl de lengte van een parallel op het aardoppervlak niet overal gelijk is.

2.13 Het antwoord is niet relevant. Verderop werken de deelnemers met een projectie die grootcirkels op rechte lijnen afbeeldt en kunnen ze de kortste afstand direct bepalen door een rechte lijn te trekken op die kaart. Dit kan dan vergeleken worden met hun eerste gok in deze opgave. Oplettende deelnemers zullen nu al opmerken dat het kortste pad geen rechte lijn is op de Mercator-projectie, omdat rechte lijnen loxodromen voorstellen en loxodromen in het algemeen niet samenvallen met grootcirkels.

2.14 De evenaar. Ook alle meridianen zijn grootcirkels.

2.15 De kortste route tussen twee punten is eenvoudig te bepalen met behulp van een gnomonische projectie.

3.6 Breedtegraad $= 90° -$ hoogte(zon)

3.8 6 : 24.

3.9 21 : 05.

3.12 Je hebt een spin nodig met de sterrenkaart van het zuidelijk halfrond, dus met Sigma Octantis in plaats van de Poolster. Ook heb je voor iedere breedtegraad een andere plaat nodig.

3.13 Veel mogelijkheden, maar de belangrijkste is dat de navigator kan denken dat het schip in open water vaart, terwijl het in werkelijkheid in ondiep water vaart en op een rif kan lopen.

3.14a Als je tegen de stroming invaart, meet je een hogere snelheid dan het schip daadwerkelijk vaart. Als je met de stroming meevaart, meet je een lagere snelheid. In een storm is de techniek compleet onbruikbaar.

3.14b Nee.

3.15 Ja

3.16 $\frac{360°}{24\text{ uur}} = 15°$.

3.17 Met het astrolabium bepaal je de lokale tijd. De tijd op de nulmeridiaan is gegeven, dus je kan het tijdsverschil berekenen. Het tijdsverschil in uren kun je dan vermenigvuldigen met 15 om het verschil in lengtegraden te bepalen.

3.18 de lengtegraad van Heino is 6.2 graden oosterlengte

4.1 Nee, als één van de personen stil staat, kan de ander in een cirkel rondlopen.

4.2 Alleen als de touwen exact in elkaars verlengde liggen. Als dat niet zo is, dan heeft het centrale punt de vrijheid om zich te bewegen in een cirkel rondom de rechte lijn tussen beide uiteinden. Als deze beweging zich tot twee dimensies beperkt, dan zijn er 2 punten waar de centrale persoon kan staan.

4.3 Als de touwen allemaal in hetzelfde vlak liggen, dat wil zeggen, als alle uiteindes op min of meer dezelfde hoogte worden vastgehouden, dan wel. Maar oplettende deelnemers merken wellicht op dat als de centrale persoon lager of hoger is dan de andere drie (bijvoorbeeld omdat deze bukt of op een meubelstuk staat), er nog een andere positie is waarin alle touwen strak staan.

4.4a Gebruik een passer en teken een cirkel met straal 3 cm om A.

4.4b Teken een tweede cirkel met straal 4 cm van B. P kan liggen op de snijpunten van de twee cirkels.

4.4c Er zijn 2 mogelijke locaties. Een derde punt C, met bijbehorende afstand tot het onbekende punt P is nodig om de locatie van P exact te bepalen.

4.5 De cirkels raken elkaar in het ene punt. In dit geval ligt het onbekende punt op de lijn tussen de twee bekende punten.

4.6 3

4.7 Een boloppervlak.

4.8 Deze verzameling is leeg (als de bollen te ver uit elkaar liggen) of bestaat uit een cirkel. In het grensgeval tussen beide situaties is er slechts een enkel snijpunt.

4.9 0, 1 of 2 punten. Dit is in feite dezelfde situatie als aan het begin van deze sectie, waarbij we twee snijdende cirkels bekeken.

4.10a 4

4.10b 2. Als het onbekende punt zich exact tussen de twee bekende punten bevindt.

4.11 Met één satelliet te weinig zijn er 2 mogelijke locaties waar de ontvanger zich zou kunnen bevinden. Maar in vrijwel alle gevallen bevindt slechts 1 van de 2 mogelijke locaties zich op het aardoppervlak. Het andere punt kan uitgesloten worden omdat het zich diep onder de grond of hoog in de lucht bevindt.

4.13 Er zijn meerdere mogelijkheden. Een mogelijkheid is dat de satelliet op vooraf vastgestelde tijdstippen een signaal verstuurt (bijvoorbeeld iedere seconde). Een andere mogelijkheid is dat het tijdstip van verzenden als boodschap met het signaal mee wordt gestuurd. In alle gevallen is het essentieel dat de GPS ontvanger een nauwkeurige klok heeft.

4.14a $0,1s * 300000km/s = 30000km$

4.14b $3000km, 300km$

4.14c Om de afstand tot een satelliet met 1 meter nauwkeurigheid te bepalen, mag de klok van de ontvanger niet meer dan 3,3 ns afwijken van de satellietklok. Dit is veel nauwkeuriger dan niet-atoomklokken zijn, dus het is geen realistische oplossing.

4.15 In plaats van de coördinaten in drie-dimensionale ruimte, moeten de coördinaten in vier-dimensionale ruimte-tijd worden bepaald. Net zoals de overstap van 2 naar 3 dimensies betekent dat het minimale aantal bekende punten stijgt van 3 naar 4, zorgt de stap van 3 naar 4 dimensies ervoor dat het minimale aantal punten stijgt naar 5. Er zijn dus 5 satellieten nodig voor een nauwkeurige plaatsbepaling als de ontvanger geen nauwkeurige klok heeft (zonder gebruik te maken van extra aannames zoals dat de ontvanger zich dicht bij het aardoppervlak bevindt).