

Elaboration d'un algorithme de recherche des règles de Golomb

L'optimalité des règles de Golomb est reliée à celle des ensembles de Sidon étudiés par les mathématiciens hongrois Erdős et Turan. J'ai été intéressée par leur amusante problématique qui s'énonce simplement mais pour laquelle il n'existe pas à ce jour de formule générale.

Une règle de Golomb est une règle pour laquelle chaque paire de graduation permet de mesurer une distance entière différente. Une telle règle permet par exemple de séparer une salle par des cloisons de distances différentes afin d'optimiser son utilisation voire d'assurer de bonnes conditions sanitaires.

Positionnement thématique (ETAPE 1)

MATHEMATIQUES (Algèbre), INFORMATIQUE (Informatique Théorique).

Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>combinatoire</i>	<i>combinatorics</i>
<i>dénombrement</i>	<i>counting</i>
<i>Règle de Golomb</i>	<i>Golomb ruler</i>
<i>algorithme</i>	<i>algorithm</i>
<i>complexité</i>	<i>complexity</i>

Mots-clés (ETAPE 2)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Combinatoire</i>	<i>Combinatorics</i>
<i>Règle de Golomb</i>	<i>Golomb ruler</i>
<i>Algorithme Shift</i>	<i>Shift algorithm</i>
<i>Optimisation</i>	<i>Optimization</i>
<i>Complexité</i>	<i>Complexity</i>

Bibliographie commentée

Les règles de Golomb ont été introduites par le mathématicien américain Solomon W. Golomb. La détermination par Erdős et Turan (1941) d'un majorant du cardinal d'un ensemble de Sidon dont les entiers appartiennent à un intervalle de taille donné permet d'affiner la recherche des règles de Golomb optimales [1][2]. Les règles de Golomb optimales sont les règles de Golomb de plus petite longueur pour un nombre de graduations données.

On ne dispose pas de formule permettant de dire à coup sûr si une règle de Golomb est optimale : il est nécessaire d'utiliser des méthodes exhaustives. C'est ainsi que Distributed.net calcule actuellement une règle de Golomb optimale à 28 graduations [3].

Trouver une règle de Golomb optimale nécessite deux étapes. La première est de déterminer une règle de Golomb qui a le potentiel pour être optimale à un ordre donné, à l'aide de constructions mathématiques comme celle de Bose-Chowla [4]. La deuxième est de tester exhaustivement toutes

les règles de longueur inférieure. Pour avoir tout de même une complexité raisonnable il faut être capable d'éliminer les règles qui n'ont clairement aucune chance d'être de Golomb. De nombreux algorithmes visant à accélérer les calculs ont été développés comme par exemple le "Shift Algorithm" [5]

Problématique retenue

Comment développer un algorithme de recherche de règles de Golomb optimales, de complexité en temps raisonnable ?

Objectifs du TIPE

Mes objectifs sont les suivants :

- élaborer un algorithme de recherche de règle de Golomb
- déterminer la complexité en temps et la complexité en espace de cet algorithme et ses optimisations éventuelles
- étudier d'autres algorithmes existants et comparer leurs efficacités

Références bibliographiques (ETAPE 1)

- [1] PAUL ERDÖS, JÁNOS SURÁNYI : Topics in the Theory of Numbers : *Springer(2003) ISBN-13 : 978-0387953205*
- [2] PAUL ERDÖS : Quelques problèmes de théorie des nombres (1957-58), exercice 31 : https://www.bsmath.hu/~p_erdos/1963-14.pdf
- [3] DISTRIBUTED.NET : Présentation des avancées dans le calcul de règle de Golomb optimale (actuellement : règle d'ordre 28) : https://www.distributed.net/Main_Page
- [4] KONSTANTINOS DRAKAKIS : A review of the available construction methods for Golomb rulers : *Advances in Mathematics of Communications 3, No. 3, 2009, 235–250, doi: 10.3934/amc.2009.3.235 Volume*
- [5] A. DOLLAS, W.T. RANKIN, D. MCCracken : A new algorithm for Golomb ruler derivation and proof of the 19 mark ruler : *IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 44, NO. 1, JANUARY 1998 DOI : 10.1109/18.651068*

Références bibliographiques (ETAPE 2)

- [1] NICK BERRY : <https://datagenetics.com/blog/february22013/>

DOT

- [1] Juin 2021 : Choix du sujet « Ensembles de Sidons et règle de golomb ». Réalisation d'une présentation, et passage à l'oral avec mon professeur de mathématiques de MPSI.
- [2] Septembre-Octobre 2021 : Choix de la problématique. Réalisation du premier algorithme de recherche de règles de Golomb optimales en python. Cet algorithme était trop long à partir d'une règle d'ordre 8. Discussions régulières avec mon professeur de mathématiques, encadrant du TIPE.
- [3] Janvier 2022 : Discussion à propos de l'algorithme Shift [5] avec mon professeur

d'informatique, qui me permet de bien comprendre le fonctionnement de l'algorithme. Choix de coder le deuxième algorithme en langage OCaml, car celui-ci est bien adapté au parcours d'arbre en profondeur, qui est utilisé dans l'algorithme Shift.

[4] *Mars 2022 : Difficulté rencontrée pour coder le deuxième algorithme : OCaml a un entier maximal. Nécessité de redéfinir les opérations sur des nombres plus grands. Mise au point de l'algorithme Shift par mon professeur d'informatique.*

[5] *Mai-Juin 2022 : Amélioration du premier algorithme pour le rendre plus clair. Problème rencontré : ma distribution Wincaml ne fonctionnait plus. Prise de contact avec un chercheur de INRIA spécialiste en OCaml qui me conseille d'installer Ubuntu grâce à WSL, puis de réinstaller OCaml. Résolution du problème.*