SOK-2011 Seminar 1

OECD skriver årlige rapporter om den økonomiske situasjonen i verden. En av de indikatorer som rapportene tar opp er investeringsraten (spareraten) i enkelte land.

Oppgave a)

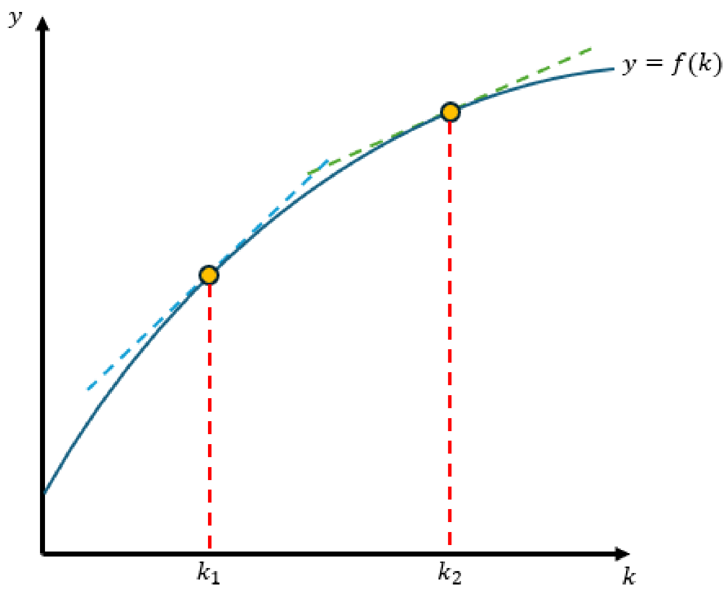
Bruk grafisk analyse for å analysere hvordan en økt investeringsrate (sparerate) påvirker produksjon per arbeider i et land på midlertidig og lang sikt (steady State).

For å forstå hvordan økt investeringsrate (sparerate) påvirker produksjon per arbeider i et land på midlertidig og lang sikt (Steady State), må vi først forstå hva investeringsrate (sparerate), produksjon per arbeider og Steady State er.

Den grunnleggende Solow-modellen antar at produksjonen (Y) skjer ved bruk av to produksjonsfaktorer, kapital (K) og arbeid (L). Vi vet også at produksjonen er karakterisert av konstant skala-utbytte og avtakende marginalproduktivitet. Alle i befolkninger (P) er i arbeid, altså $L = P$. Vi vet også at befolkingen vokser med en konstant, og eksogent gitt rate (n), altså $L(t) = L_0 e^{n \times t}$. Spareraten (netto) er eksogent gitt, lik for alle, og kan beskrives som en andel av total inntekt, altså $0 \leq s \leq 1$.

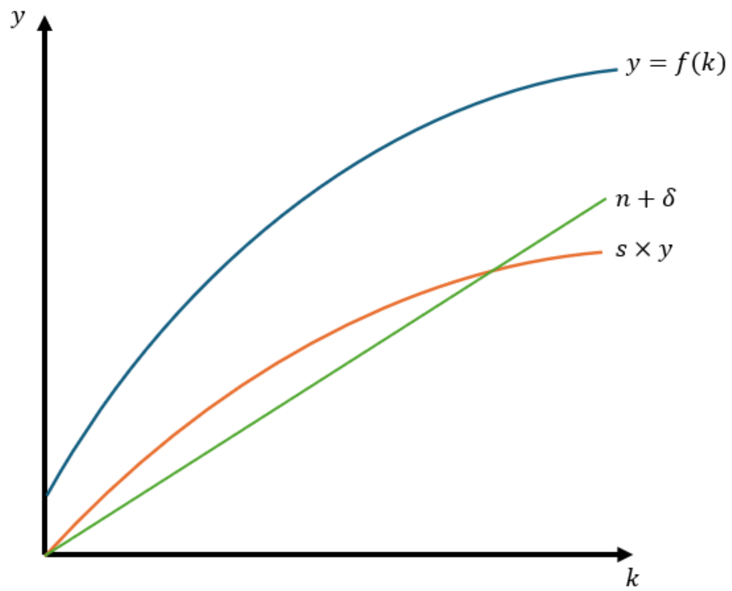
Gjennom oppgaven vil vi bruke en Cobb-Douglas produksjonsfunksjon, altså $Y = K^a \times L^{1-a}$, hvor $0 < a < 1$. Det betyr altså at produksjon per arbeider er gitt som $y = \frac{K^a \times L^{1-a}}{L}$. Dermed kan vi også si at kapital per arbeider er gitt som $k = \left(\frac{K}{L}\right)^a$. Vi skal først se på produksjon per arbeider grafisk.

Som nevnt tidligere har produksjon per arbeider positiv og avtakende marginalproduktivitet til kapital-intensiteten, det betyr at når kapitalintensiteten øker vil også produksjon per innbygger øke (positiv grenseproduktivitet), men desto høyere kapitalintensiteten er, desto mindre effekt vil en økning i kapitalintensiteten ha på produksjon per arbeider, visualisert nedenfor:



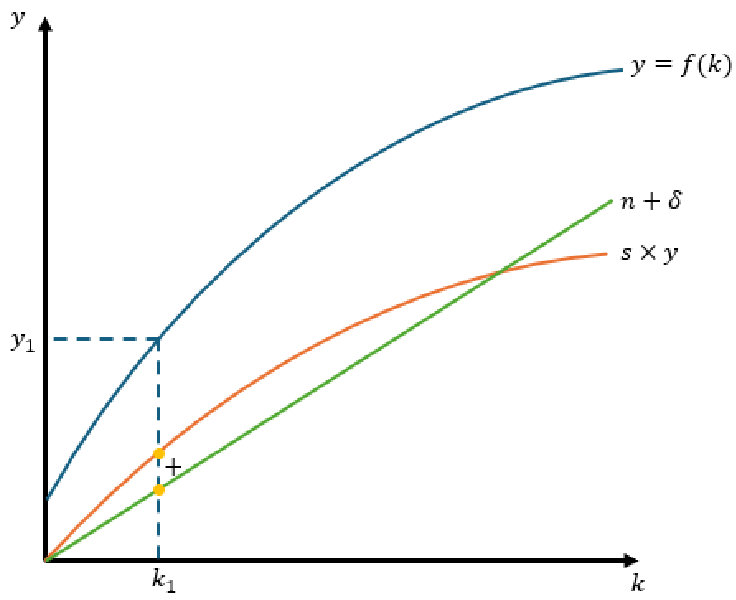
Som vi kan se fra figuren vil økt kapital per person gir økt produksjon per person, men med avtakende effekt. Helningen til produksjon per person funksjonen er gitt ved: $\frac{\partial y}{\partial k}$. Helningen av økt kapitalintensitet er gitt ved: $\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}$.

I denne enkle modellen drives veksten i produksjon per arbeider kun av veksten i kapitalintensiteten. Altså for å finn ut hva som driver veksten i produksjon per arbeider, må vi finne ut hva som driver veksten i kapitalintensiteten. Kapitalintensiteten styres av to «variabler», altså faktiske nettoinvesteringer per arbeider ($+$) som består av spareraten (s) og produksjon per arbeider (y), og nødvendige investeringer ($-$) for å erstatte nye arbeider med kapital, som består av nye arbeidere (n) i hver tidsperiode som trenger ny kapital for at effektiviteten ikke skal gå ned og slitasje (δ) på gammel kapital. Vi kan bruke følgende formel: $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \times y(t) - (n + \delta)k$. Dersom $s \times y(t) > n + \delta$ vil kapitalintensiteten øke og produksjon per innbygger øker. Dersom $s \times y(t) < n + \delta$ vil kapitalintensiteten min og produksjon per innbygger minker. Altså så lenge kapitalintensiteten vokser, vil også produksjon (BNP) per arbeider (innbygger) vokse. Vi kan nå se på dette grafisk:

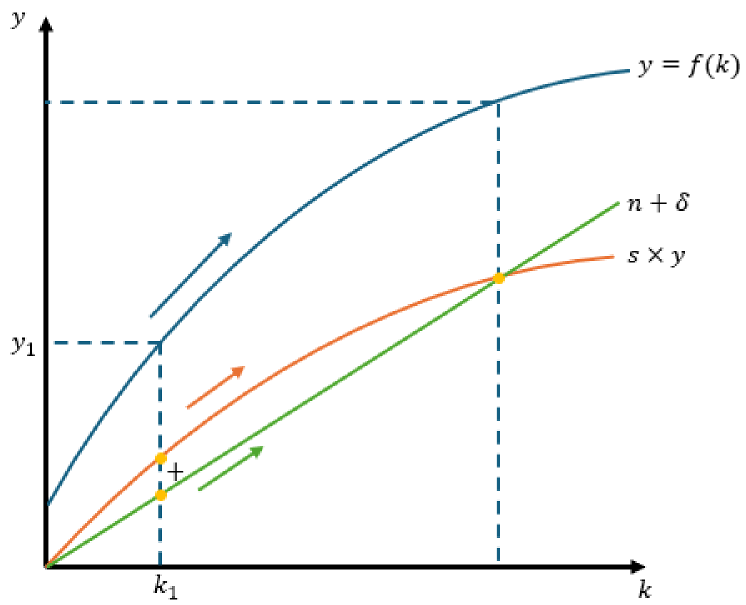


På grafen ovenfor kan vi se tre grafer, hvor den ene er den samme som i forrige figur, altså produksjonen per innbygger. Den andre grafen $s \times y$ representerer de faktiske investeringene. Den siste grafen $n + \delta$ representerer de nødvendige investeringene, og disse øker med nivået på kapitalintensiteten, men økningen er konstant. Det vil si at dersom kapitalintensiteten øker med en enhet, vil de nødvendige investeringene øke med befolkningsvekstraten og slitasjeraten. Mens helningen av produksjonsmulighetskurven og investeringskurven vil være lik grenseproduktiviteten. Vi kan nå analyse hvordan økt investeringsrate (sparerate) påvirker produksjonen per arbeider.

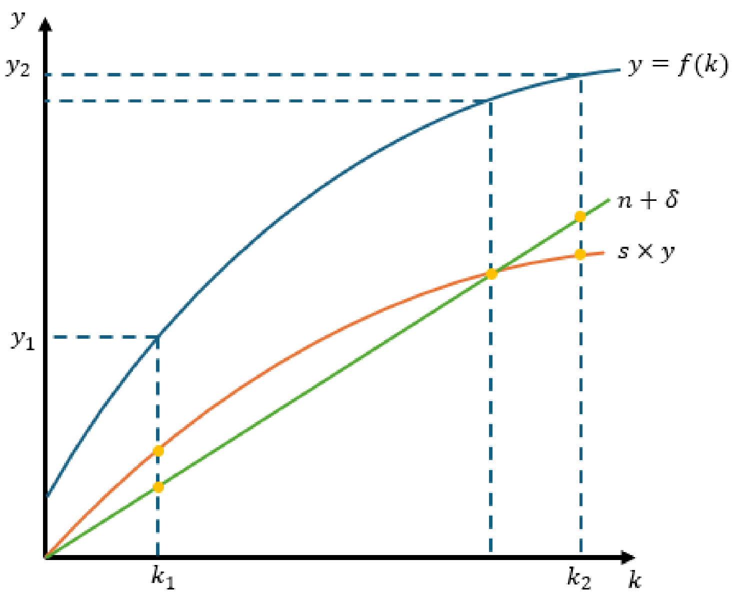
Dersom vi antar at et land har en investeringsrate lik k_1 kapital per arbeider, så ser vi fra grafen under at de faktiske investeringene er høyere enn de nødvendige investeringene, og vi har en total produksjon lik y_1



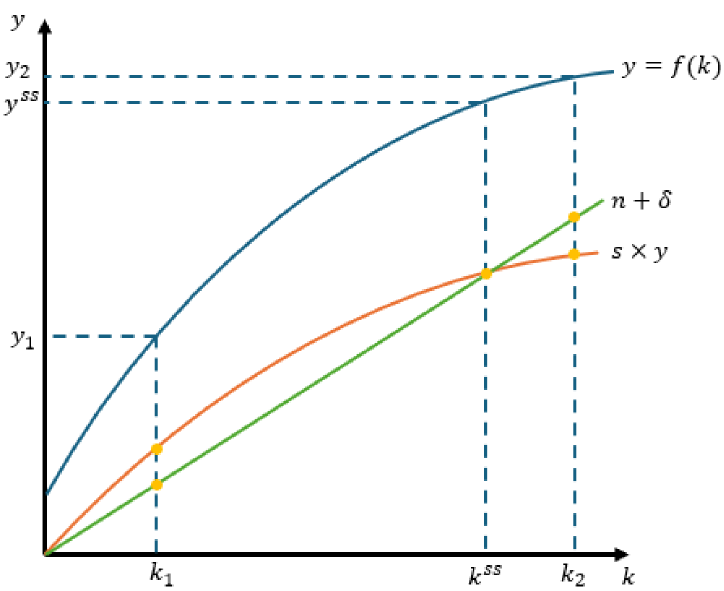
Siden det er et positivt forhold mellom nødvendige- og faktiske investeringen vil kapitalintensiteten til å øke, altså er $k > 0$. Når kapitalintensiteten øker, vil også produksjonen per arbeider øke og når produksjonen per arbeider øker vil også de faktiske- og nødvendige investeringene øke. Denne positive økningen vil skje helt frem til de faktiske- og nødvendige investeringene er lik hverandre. Illustrert nedenfor:



Visst vi nå snur situasjonen og antar at landet har en for høy sparingsrate, altså lik k_2. Da ser vi fra grafen under at vi er overgått likevekts punktet fra forrige oppgave og at vi har produksjon per arbeider lik y_2:



I denne situasjonen kan vi se at de faktiske investeringene lavere enn de nødvendige investeringene, altså $k < 0$. Dette fører til at investeringene er mindre enn det som kreves for nye arbeider og slitasje av kapital. Noe som fører til at kapitalintensiviteten minker og vi får en negativ vekst i kapital per person, og i produksjon per person, noe som videre minker faktisk- og nødvendig investeringer, helt frem til likevekts punktet hvor de nødvendig- og faktiske investeringene er lik, altså $k = 0$. I likevekts punktet er alle variablene konstant, altså $y = 0$, $k = 0$, noe som fører til at kapitalintensiteten ikke føres noen plass, og vi kaller dette for Steady State (k^{ss})(y^{ss}). Altså vi landet produsere y^{ss} på lang sikt, med en kapitalintensitet på k^{ss} på lang sikt.



Oppgave b)
Bruk matematisk analyse til å analysere effekten av en økt sparerate i Steady State.

Som vi ser fra forrige oppgave, er Steady State det punktet hvor nødvendige- og faktiske investeringer er lik hverandre. Dette punktet gir oss hvor landet vil tilpasse seg på lang sikt både mtp. produksjon per arbeider (y^{ss}) men også kapital per arbeider (k^{ss}). Altså kan vi kalle dette for langsiktig likevekt. Med langsiktig likevekt mener vi at all tilpasning som skjer automatisk i modellen allerede har skjedd. Med det mener vi at dersom det ikke skjer et eksogent sjokk så vil økonomien være fast i denne situasjonen (Steady State). Men hvorfor er det interessant å undersøke Steady State? Gjennom å identifisere Steady State, identifiserer vi en økonomisk langsiktig holdbar produksjonsmulighet. Altså hvilken materiell velferden denne økonomien vil oppnå, gitt alle parameterne. Vi kan også identifisere hvilken vekst i disse produksjonsmulighetene de har. Så det hjelper oss å identifisere hvilken faktorer som påvirker den langsiktige materielle velferden i et land.

Før vi kan analyse Steady State må vi først avgjøre hvilken variabler vi skal analysere Steady State for. Det vi ønsker å analysere er nivået på BNP per innbygger, eller $y(t)$. Vi definerer BNP per innbygger som $y(t) = k(t)^a$, altså BNP per innbygger er lik kapital per innbygger opphøyd med alfa, hvor $0 < a < 1$. Altså bestemmes nivået på BNP per innbygger av nivået på kapitalintensiteten. Derfor vil også veksten i BNP per innbygger bestemmes av veksten i kapitalintensiteten. For å vise at dette er sant kan vi analysere det matematisk:

Produksjon per arbeider: $y(t) = k(t)^a, \quad 0 < a < 1$

1) $\log\big(y(t)\big) = a \times \log\,(k(t))$
2) $\frac{1}{y(t)} \times \frac{dy(t)}{dt} = a \times \frac{1}{k(t)} \times \frac{dk(t)}{dt}$
   $\frac{\dot{y}}{y} = a \times \frac{\dot{k}}{k}$, hvor $\frac{\dot{y}}{y}$ er lik g_y og $\frac{\dot{k}}{k}$ er lik g_k. Så lenge $g_k \neq 0 \;\rightarrow g_y \neq 0$, hvis $g_k > 0 \;\rightarrow g_y > 0$, og $g_k < 0 \rightarrow k_y < 0$. Kun når $g_k = 0 \rightarrow g_y = 0$, vekstraten er lik null (og konstant). Altså vil $g_y = g_k = 0$ være vårt vilkår for Steady State.

Når er vilkår for Steady State: $g_y = g_k = 0 \rightarrow g_k = \frac{\dot{k}}{k} = 0$ oppfylt?

Vi vet at lille k er gitt som total kapital delt på antall arbeidere, $k = \frac{K(t)}{L(t)}$. Vi skal nå se på hva som påvirke lille k, eller kapital per arbeider:

1) $lok(k) = \log(K) - \log\,(L)$
2) $\frac{1}{k} \times \frac{dk}{dt} = \frac{1}{k} \times \frac{dK}{dt} - \frac{1}{L} \times \frac{dL}{dt}$
   $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$

Vi vet at $\frac{\dot{L}}{L}$ er lik vekstraten til arbeidskraften eller befolkningen som er lik n.

Vi vet også at $\dot{K}$ basert på våre antakelser, altså $\dot{k} = s \times y - \delta \times K$.

Vi kan skrive om utrykket og dermed får vi at:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s \times y - \delta \times k}{k} - n = s \times \frac{y}{k} - \delta - n$$

Videre kan vi benytte oss av at $\frac{1/L}{1/L} = 1$ for å skrive om utrykket som en funksjon av bare lille k.

$$\frac{\dot{k}}{k} \times 1 = s \times \frac{y/L}{k/L} - (\delta + n) = s \times \frac{y}{k} - (\delta + n) \rightarrow \ \dot{k} = s \times y - (\delta + n) \times k$$

Når kjenner vi igjen formelen som $s \times y$ er faktiske investeringer, og $(\delta + n) \times k$ er nødvendige investeringer. Men videre må vi finne ut av når kapitalintensiteten er lik null, altså $\dot{k} = 0$. For å finne ut av det setter vi utrykket likt null.

$$\dot{k} = s \times y - (\delta + n) \times k \ = 0$$

Ovenfor har vi to ukjente, men dersom vi bruker $y = k^a$ får vi følgende utrykk:

$s \times k^a - (\delta + n) \times k = 0$ og nå kan vi løse for lille k.

$$s \times k^a = (\delta + n) \times k$$

$$\frac{s \times k^a}{k^a} = \frac{(\delta + n) \times k}{k^a}$$

$$s = (\delta + n) \times k^{1-a}$$

Videre dividerer vi med $\delta + n$ på begge sider

$$\frac{s}{(\delta + n)} = \frac{(\delta + n)}{(\delta + n)} \times k^{1-a}$$

$$\frac{s}{(\delta + n)} = k^{1-a}$$

$$\left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{1-a}} = (k^{1-a})^{\frac{1}{1-a}}$$

$$\left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{1-a}} = k^{\frac{1-a}{1-a}} = k^1$$

Dermed har vi funnet vår kapitalintensitet i Steady State på følgende vis:

$$k^{ss} = \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Nå som vi har funnet kapitalintensiteten, kan vi også finn produksjonen per arbeider i Steady State:

$$y = k^a$$

$$y = (k^{ss})^a = \left(\left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^a = \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{a}{1-\alpha}}$$

Men hva betyr dette og hvorfor er dette interessant?

Vi kan bruke dette for å se hva som er viktig for produksjonsmulighetene til et land på lang sikt og deretter bruke denne informasjonen til å øke produksjonen til et land, og dermed også den materielle velferden. Vi kan f.eks. se at spareraten (s), befolkningsveksten (n) og kapitalslitasje (δ) i økonomien er viktig. For å svare på oppgaven vil det si at dersom spareraten øker, vil også BNP per innbygger øke i Steady State. Dersom innbyggertallet øker, uten at spareraten øker, så vil BNP per innbygger minke.

Oppgave c)
Hvilke konklusjoner kan vi trekke fra analysen i forhold til hvorfor noen land er fattig, og andre er rik?

Vi vet at en høyere BNP per innbygger fører til en høyere materiell velferd i et land, altså større rikdom og mindre fattigdom. La oss se på alle de tre viktigste faktorene fra de tidligere oppgaven:

Sparerate (s): En høy sparerate betyr at en større del av økonomiens produksjon blir reinvestert i å skape mer kapital, som maskiner og infrastruktur. Dette fører til økt kapital per arbeider, noe som øker produksjonen per arbeider. Vi kan derfor anta at rike land har ofte høyere sparerater, som bidrar til raskere akkumulering av kapital og dermed høyere inntektsnivåer. Vi kan anta at i fattige land er sparing lav på grunn av lav inntekt, noe som begrenser kapitalakkumuleringen og dermed økonomisk vekst.

Befolkningsvekst (n): Befolkningsvekt har en utvannende effekt på kapitalakkumulering. Når befolkningen vokser raskt, må en større del av investeringene brukes til å utstyre nye arbeidere med kapital, i stedet for å øke kapital per eksisterende arbeider. Dermed kan høy befolkningsvekst bremse økningen i produksjon per arbeider, noe vi kan anta er tilfelle i fattige land.

Kapitalslitasje (δ): Kapitalslitasje, eller avskriving, referer til hvor raskt kapital blir for gammel og ubrukelig. Høyere avskriving betyr at en større del av investeringene må brukes til å erstatte utdatert eller slitt ut kapital, i stedet for å øke total kapital. Land med eldre infrastruktur eller hyppige behov for erstatning av kapital, kan derfor ha vanskeligheter med å akkumulere kapital effektivt.

Det er viktig å presisere at Solow-modell kun er en forenkling av virkeligheten og tar ikke hensyn til andre faktorer som påvirker virkelige økonomier, som f.eks. utdanning, helse og politisk stabilitet.