UiT The Arctic University of Norway

Fakultetet for biovitenskap, fiskeri og økonomi

Bærekraftig økonomisk vekst – Solow-modellen teoretisk analyse

Mappeoppgave, utfordring 1

Kandidat nummer: 89

SOK-2011, Vår 2024

Innholdsfortegnelse

Informasjon om utfordring 1

I denne utfordringen skal det gjennomføre en teoretisk analyse av Solow-modellen. Den teoretiske analysen vil redegjøre for matematikken, illustrere grafisk og gi økonomisk intuisjon. Det vil også bli gjort rede for antakelsene som ligger bak teorien. Denne besvarelsen tar utgangspunkt i forelesningsnotater, videoer, pensumboken (primært kap. 1 og 7) og er gjennomført uten bruk av kunstig intelligens. Se vedlagt dokument for kode til figurene.

Utfordring 1.1 – Den grunnleggende Solow-modellen

Solow-modellen predikerer at nivået på spareraten og befolkningsvekstraten er helt sentrale for nivået på produksjonen per arbeider på lang sikt (steady state). Oppgave D fra oppgavesettet vil bli besvart i løpet av oppgave B og C.

Oppgave A)

Gjør rede for antakelsene i den grunnleggende Solow-modellen (uten teknologisk utvikling) og uten naturressurser.

Solow-modellen er en økonomisk modell for langsiktig økonomisk vekst. Modellens produksjon uten teknologisk utvikling og naturressurser, tar ifølge Andrea Mannberg sin video (2019, 13. august) utgangspunkt i følgende antakelser:

1. **Alle bedrifter i økonomien produserer et homogent gode.** Et homogent gode er et gode hvor konsumenten er likegyldig til hva de velger mellom to bedrifters goder. Det vil si at man kan tenke seg at hele økonomiens produksjon, som at det er et selskap som produserer et gode, og at den totale produksjonen som selskapet produserer, blir lik brutto nasjonal produkt (BNP). Altså $Y = BNP$.
2. **I den grunnleggende Solow-modellen skjer produksjonen (Y) med bruk av de to produksjonsfaktorene fysisk kapital (K) og arbeidskraft (L).** Fysisk kapital (K) referer til kapital i fysiske ting som f.eks. maskiner, bygninger, utstyr, osv. Arbeidskraften (L) reflekterer antall arbeidere/innbyggere i samfunnet/nasjonen.
3. **Den fysiske kapitalen (K) slites ut med en konstant og eksogent gitt rate.** Det betyr at f.eks. maskiner får fysisk slitasje og dermed mister sin effektivitet. Denne slitasjen er konstant og bestemmes utenfor modellen (eksogent). Raten for slitasjen er betegnet med δ og ligger mellom 0 og 1. Altså $0 < \delta < 1$. Det betyr at dersom f.eks. $\delta = 0.03$, kan man anta at 3% av den fysiske kapitalen (K) må erstattes hvert år, for at den fysiske kapitalen (K) ikke skal minke.
4. **Alle i økonomien sparer en fast og eksogent gitt andel av inntekten.** Det vil si at hele befolkningen sparer en konstant prosentandel av inntekten sin, og denne andelen bestemmes utenfor modellen (eksogent). Sparingen er betegnet med S og ligger mellom 0 og 1. Altså $0 \leq S \leq 1$. Det betyr at dersom f.eks. $S = 0.03$, kan man anta at 3% av inntekten går til sparing hvert år, uavhengig av deres inntekt.

5. **Alle i økonomien er i arbeid.** Arbeidskraften (L) representere antall arbeidere i økonomien. Man kan dermed si at L representerer hele befolkningen, ettersom at alle i økonomien arbeider. Man vet også at produksjonen (Y) er lik BNP. Dersom man deler produksjonen (Y) på hele befolkningen (L) finner man BNP per person/arbeider. Altså $\frac{Y}{L} =$ BNP per person.
6. **Arbeidskraften/befolkningen (L) vokser med en eksogent gitt rate.** Altså vil L vokse med en rate som bestemmes utenfor modellen, og denne raten vil bli betegnet med n.
7. **Produksjonsfaktorene har avtakende grenseproduktivitet.** Det betyr at dersom f.eks. kapitalen (K) øker vil grenseproduktiviteten til kapitalen (K) minke. Altså vil kapitalen (K) gi ett positivt tilskudd til produksjonen (Y), men dette tilskuddet vil minke desto høyere kapitalen (K) blir. Det samme gjelder for arbeid (L).
8. **Produksjonen er karakterisert av konstant skala avkastning.** Det betyr at dersom kapitalen (K) og arbeidet (L) øker med 10%, så vil også produksjonen (Y) øker med 10%.
9. **Perfekt konkurranse.** Under perfekt konkurranse vil profitten være lik 0, altså $\pi = 0$. Profitten til en bedrift vil være gitt som prisen (p) multiplisert med produksjonen (Y), minus lønnen (w) multiplisert med mengden arbeid (L), minus kostnad for kapital (R) multiplisert med mengden brukt kapital (K). Altså: $\pi = p \times Y - w \times L - R \times K \ \rightarrow \ Y - wL - rK = 0$. Dermed vet man også at produksjonen vil være lik produksjonsfaktorene, altså: $Y = wL - rK$.

Den grunnleggende Solow-modellen har også antakelser som handler om konsum og den offentlige sektoren, disse er:

10. **All inntekt går til konsum eller sparing**, og siden produksjonen er lik inntekten kan man si at produksjonen (Y) er lik konsum (C) og sparing (S), altså $Y = C + S$. Man vet også at vi har en fast sparerate som gjør at vi kan skrive dette som $Y = C + s \times Y$.
11. **Ingen handel – lukket økonomi.** Det vil si at det er ingen eksport (X) eller import (IM), altså $X + IM = 0$.
12. **Ingen offentlig sektor.** Det vil si at man har ingen offentlige investeringer eller konsum, altså $G = 0$.

Det er viktig å presisere at antakelsene i modellen er forenklinger av virkeligheten og «perfekt», men dette er nødvendig for å gjøre det enklere å utale seg om den materielle velferden i et land. F.eks. vil BNP per innbygger og BNP per arbeider være den samme i modellen, men i virkeligheten er dette to forskjellige mål.

Oppgave B)

Utled steady-state-nivået på kapital og produksjon i den grunnleggende Solow-modellen matematisk. Gå ut ifra at teknologien er konstant og eksogent gitt.

Før man kan utlede steady state-nivået på kapital og produksjon i den grunnleggende Solow-modellen må man definere produksjonsfunksjonen. Det finnes flere typer produksjonsfunksjoner, men det vanligste er å benytte typen Cobb-Douglas. Fra antakelsene vet man at produksjonen kun avhenger av kapital (K) og arbeidskraft (L), samt at funksjonen skal ha positiv grenseproduktivitet, avtakende grenseproduktivitet og konstant skala avkastning. Det matematiske beviset av produksjonsfunksjonen vil ikke bli gitt, men fra Andrea Mannberg sin video (2019, 26. august) vet man at a og β må oppfylle følgende:

$$0 < a, \beta < 1, \qquad a + \beta = 1$$

Man kan dermed skrive produksjonsfunksjonen på følgende måte:

$$Y(t) = K(t)^a \times L(t)^\beta = K(t)^a \times L(t)^{1-a}$$

Denne produksjonsfunksjonen oppfyller alle antakelsene fra oppgave a.

Videre må man definere hva steady state er. Steady state (ss) er den langsiktige likevekten i Solow-modellen, altså at all tilpasning som skjer «automatisk» i modellen, har skjedd. Det vil si at dersom det ikke skjer noe med våre eksogene gitte variabler, så vil økonomien holde seg stabil (Mannberg, 2019, 15. august).

Når man skal undersøke steady state er det produksjon per innbygger og kapital per innbygger som er interessant, disse er gitt som henholdsvis:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} \qquad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

Dermed får man at produksjon per arbeider er gitt som:

$$y(t) = \frac{K(t)^a \times L(t)^{1-a}}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^a = k(t)^a, \qquad 0 < a < 1$$

Altså er produksjon per arbeider i den grunnleggende Solow-modellen bestemt av kapital per arbeider, eller kapitalintensiteten opphøyd med alfa. Vi kan finne vekstraten i produksjon per arbeider ved å logaritmere og deretter derivere med hensyn på tiden (t):

$$y(t) = k(t)^a$$

$$\log\big(y(t)\big) = a \times \log\,(k(t))$$

$$\frac{1}{y(t)} \times \frac{dy(t)}{dt} = a \times \frac{1}{k(t)} \times \frac{dk(t)}{d(t)}$$

Man kan skrive om dette utrykket ved å bruke forkortelser for den tidsderiverte, og dermed får man at vekstraten til produksjon per innbygger er lik:

$$g_y = a \times g_k$$

Man vet at $0 < a < 1$, noe som betyr at så lenge $g_k \neq 0$, så vil $g_y \neq 0$. Dette betyr også at dersom $g_k > 0$, så vil $g_y > 0$, og vice versa dersom $g_k < 0$. Man kan altså si at når kapitalintensiteten er konstant ($g_k = 0$), vil vekstraten i produksjon per arbeider være konstant ($g_y = 0$), altså er dette vårt vilkår for steady state.

Man må altså finne ut når er $g_k = \frac{\dot{k}}{k} = 0$, for å identifisere steady state. For å finne ut av det må man finne ut hva som definerer $k(t)$, som vi vet er gitt ved $\frac{K(t)}{L(t)}$. For å finne ut hva som bestemmer vekstraten i kapitalintensiteten, gjør man det på samme måte som ved produksjon per arbeider:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

$$\log\big(k(t)\big) = \log\big(K(t)\big) - \log\,(L(t))$$

$$\frac{1}{k(t)} \times \frac{dk(t)}{dt} = \frac{1}{K(t)} \times \frac{dK(t)}{dt} - \frac{1}{L(t)} \times \frac{dL(t)}{dt}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Fra antakelsene i oppgave a, vet man at vekstraten i befolkningen $\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$ er gitt ved n. Det vil si at $\dot{K}$ er gitt som $s \times Y - \delta \times K$, fordi sparing ($s$) multiplisert med total produksjon (Y) er inntektene til kapitalen, mens kapitalslitasje (δ) multiplisert med den fysiske kapitalen (K) er slitasjen på den fysiske kapitalen. Altså får man at:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s \times Y - \delta \times K}{K} - n = s \times \frac{Y}{K} - \delta - n$$

Videre ønsker man å skrive om denne funksjonen som en funksjon av k. For å gjøre dette kan man benytte seg av at $\frac{1/L}{1/L} = 1$, altså:

$$\frac{\dot{k}}{k} \times 1 = s \times \frac{Y/L}{K/L} - (n + \delta) = s \times \frac{y}{k} - (n + \delta)$$

Dersom man multipliserer med k, får man:

$$\dot{k} = s \times y - (n + \delta) \times k$$

Videre kan man dele opp dette utrykket i to, altså $s \times y$ som er lik de faktiske investeringene, og $(n + \delta) \times k$ som er lik de nødvendige investeringene. Det betyr altså at kapitalintensiteten avhenger av de faktiske investeringene som gjøres i hver periode og de nødvendige investeringene som kreve for å holde kapitalintensiteten konstant.

Som nevnt tidligere ønsker man å finne når $\dot{k} = 0$, for å finne steady state (ss). Dette gjør man ved å sette utrykket for $\dot{k}$ lik 0, altså:

$$s \times y - (n + \delta) \times k = 0$$

Før man kan løse ligningen må man skrive om y til k^a som ble løst tidligere i oppgaven, og dermed løser for k:

$$s \times k^a - (n + \delta) \times k = 0$$

$$s \times k^a = (\delta + n) \times k$$

$$\frac{s \times k^a}{k^a} = \frac{(\delta + n) \times k}{k^a}$$

$$s = (\delta + n) \times k^{1-a}$$

$$\frac{s}{(\delta + n)} = \frac{(\delta + n) \times k^{1-a}}{(\delta + n)}$$

$$\frac{s}{(\delta + n)} = k^{1-a}$$

$$\left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{1-a}} = (k^{1-a})^{\frac{1}{1-a}}$$

$$\left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{1-a}} = k^{ss}$$

Dette utrykket er altså utrykket for kapitalintensiteten i steady state, i den grunnleggende Solow-modellen. Man kan bruke dette utrykket for å finne produksjonen per arbeider i steady state, på følgende måte:

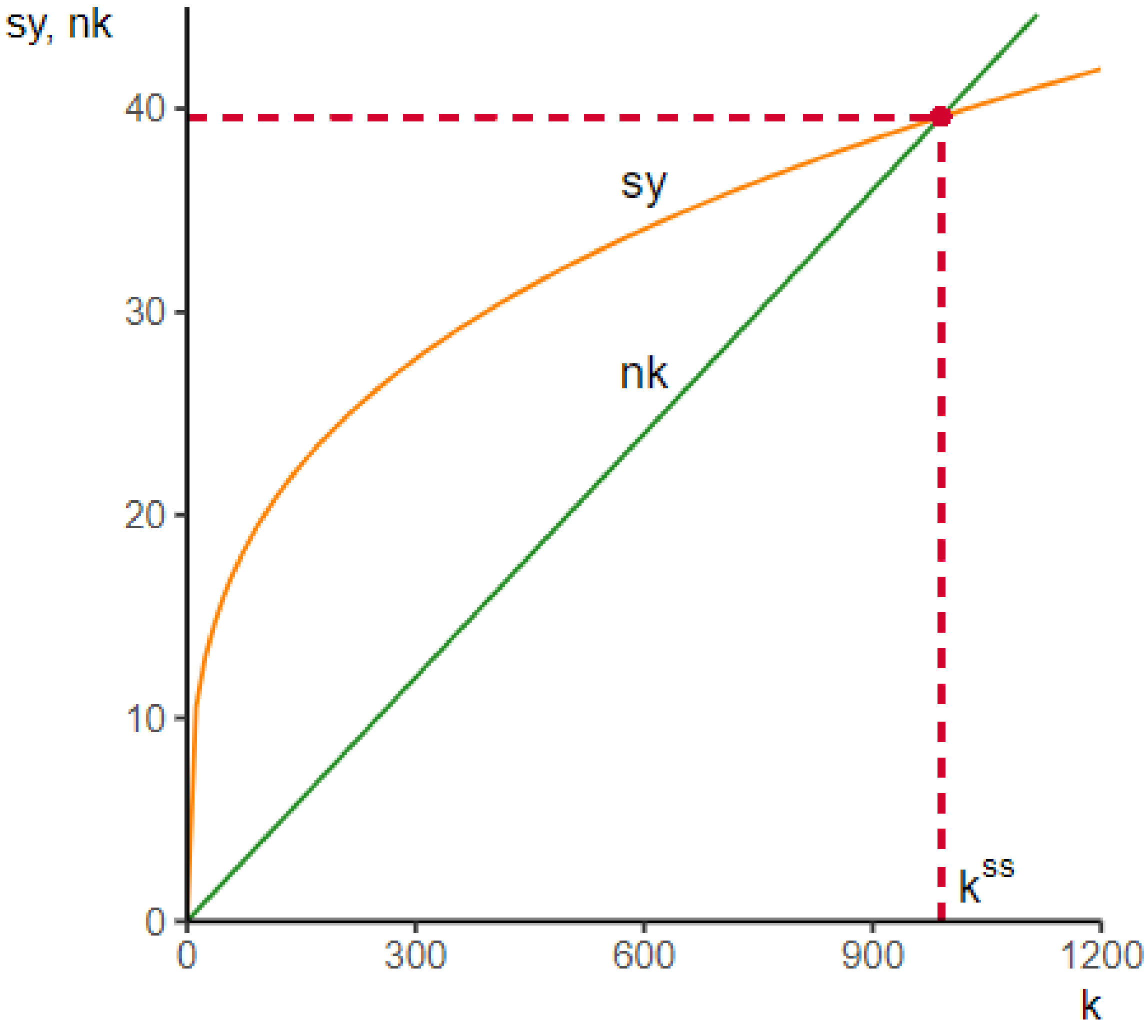
$$y^{ss} = (k^{ss})^a = \left(\left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{1-a}}\right)^a = \left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

Gjennom å identifisere steady state, identifiserer man det økonomiske langsiktige holdbare produksjonsmuligheten og veksten i disse produksjonsmulighetene. Altså hvilke materiell velferd denne økonomien kan oppnå gitt deres forutsetninger. Fra utrykket for produksjon per arbeider i steady state (y^{ss}) ser vi at faktorer som sparingsraten i økonomien (s), befolkningsveksten (n) og kapitalslitasjen (δ) er viktige faktorer for produksjonen. Man kan også se at dersom f.eks. kun sparingsraten (s) øker, vil også produksjonen øke (Mannberg, 2019, 15. august).

Oppgave C)

Bruk R-studio eller Python til å tegne 3 figurer.

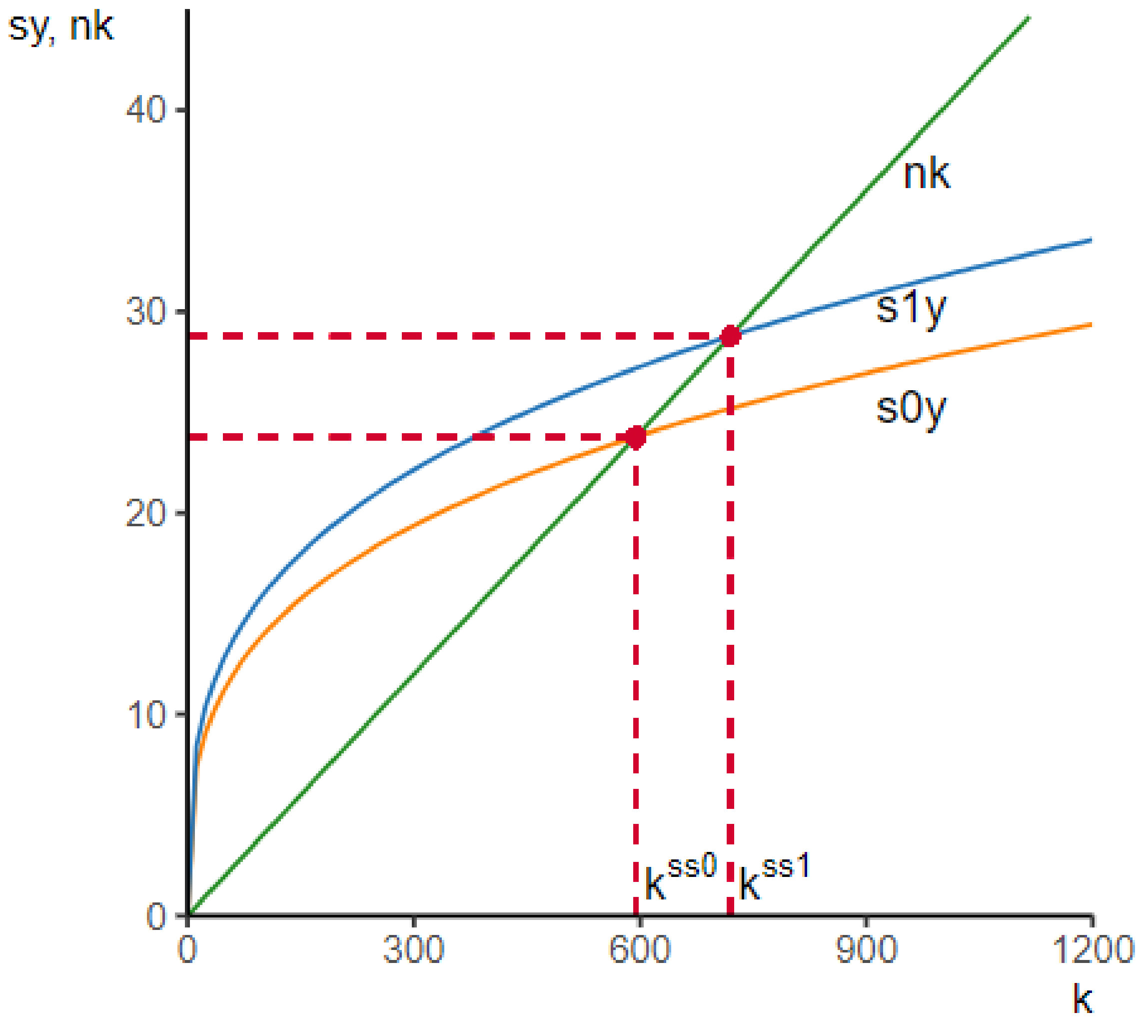
Figur 1: en figur som identifiserer langsiktig likevekt i en økonomi som kan beskrives ved bruk av den grunnleggende Solow-modellen.



Figur 1.1: steady state

Fra figur 1.1 kan man se de faktiske investeringene (sy) og de nødvendige investeringene (nk). De faktiske investeringene (sy) bidrar positivt til kapitalintensiteten og består av spareraten (s) og produksjon per arbeider (y). De nødvendige investeringene (nk) bidrar negativt til kapitalintensiteten og består av befolkningsveksten (n) og ny kapital (k). De nødvendige investeringene består også av kapitalslitasje (δ), men for enkelhetens skyld er dette ikke tatt med. Punktet som er markert defineres som steady state (ss) og viser hvor de faktiske investeringene (sy) er lik de nødvendige investeringene (nk), og hvor denne økonomien vil tilpasse seg på lang sikt. I dette punktet er det ingen «krefter» som driver kapitalintensiteten noen vei, og dermed vil kapitalintensiteten og produksjonen holdes konstant.

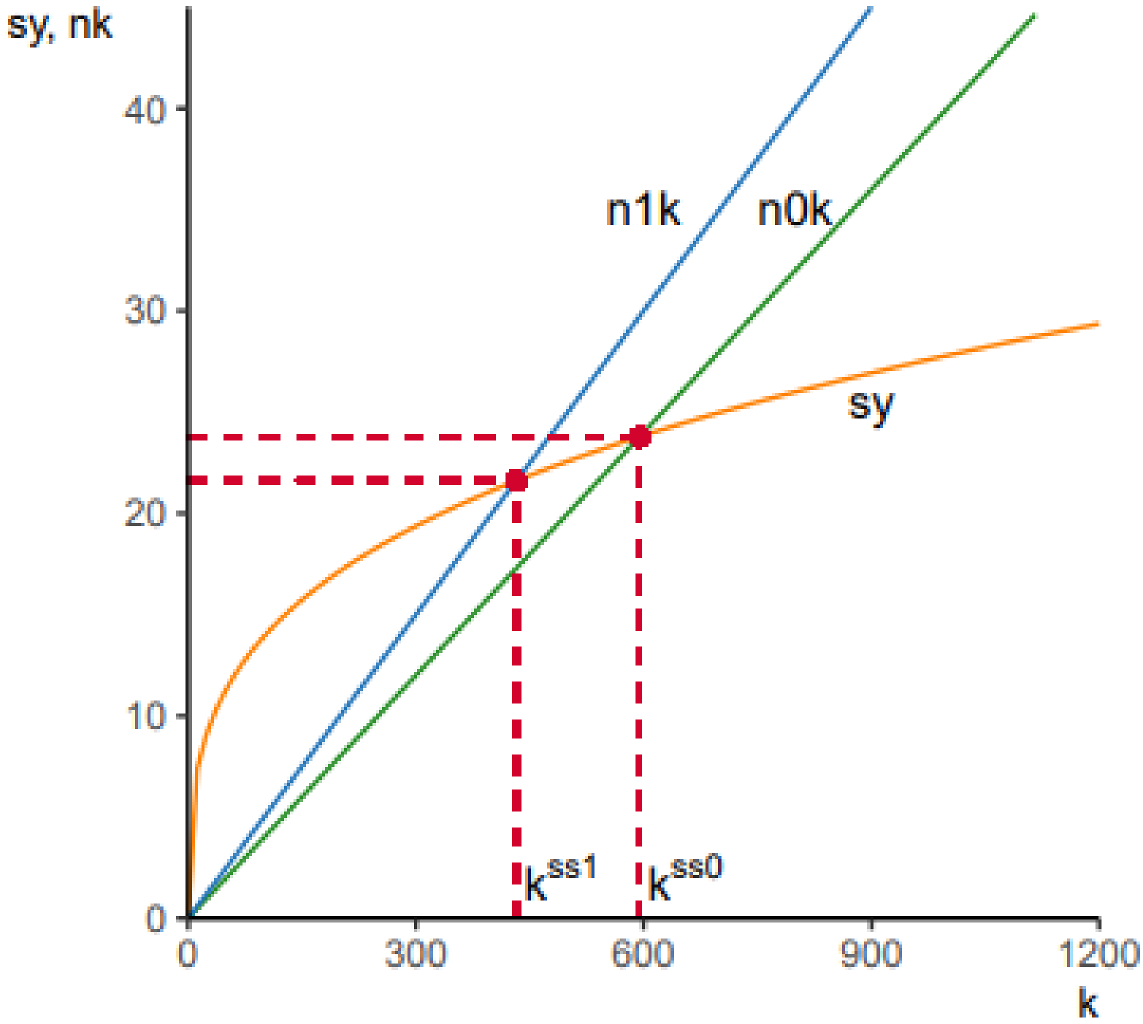
Figur 2: en figur som illustrer hva som skjer dersom sparerateten øker.



Figur 1.2: økning i sparerateten

Fra figur 1.2 ser man to faktiske investeringskurver ($s0y$ og $s1y$), altså en for det opprinnelige sparerate nivået ($s0y$), og en for et høyere sparerate nivå ($s1y$). Man kan se at en økning i sparerateten (s) forskyver de faktiske investeringene oppover ($s0y \rightarrow s1y$). Dette fører til at man får et nytt likevekts punkt med den uendrede kurven for nødvendige investeringer (nk). Dette skjer fordi dersom man holder produksjon per arbeider (y) konstant og øker sparerateten (s) vil dette resultere i et høyere nivå på de faktiske investeringene (sy), men dette vil også øke de nødvendige investeringene (nk), bare ikke med samme vekstrate. Man ser at det nye nivået for kapital per arbeider i steady state (k^{ss1}) er høyere enn det opprinnelige (k^{ss0}), noe som viser at en økning i sparerateten, fører til en høyere akkumulasjon av kapital per arbeider (k) og dermed også en høyere steady state produksjon per arbeider (y^{ss}), siden man vet at $y^{ss} = (k^{ss})^a$. Altså at en økning i sparerateten, også vil øke den materielle velferden i økonomien.

Figur 3: en figur som illustrer hva som skjer dersom befolkningsvekstraten øker.



Figur 1.3: økning i befolkningsvekstraten

Fra figur 1.3 kan man se to nødvendige investeringskurver ($n0k\ og\ n1k$), altså en for det opprinnelige befolkningsvekstraten ($n0k$), og en for et høyere befolkningsvekstrate ($n1k$). Man ser at når befolkningsvekstraten (n) øker, forskyves kurven som representerer de nødvendige investeringene ($n0k \rightarrow n1k$) for å opprettholde kapitalintensiteten. Det nye likevekts punktet med kurven som representerer faktiske investeringer (sy), indikerer et lavere steady state nivå av kapital per arbeider (k^{ss1}), sammenlignet med det opprinnelige nivå (k^{ss0}). Dette skjer fordi for hver ekstra arbeider, kreves det nå større faktiske investeringer for å opprettholde den samme kapitalintensiteten, på grunn av den raskere voksende befolkningen. Dette fører til at dersom de faktiske investeringene ikke øker (men holdes konstant), vil det medfølge at kapital per arbeider vil minke ($k^{ss0} \rightarrow k^{ss1}$), og dermed vil produksjonen per arbeider minke (y^{ss}), siden man vet at $y^{ss} = (k^{ss})^{a}$.

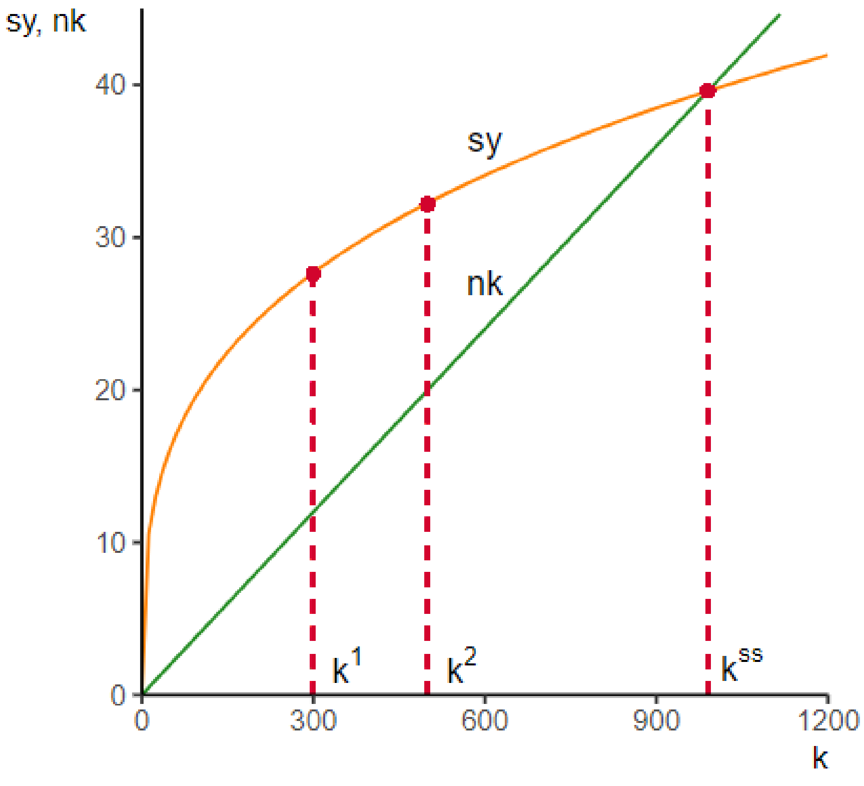
Utfordring 1.2 – Konvergens-teorien

Hva predikterer konvergens-teorien? Illustrer grafisk og forklar mekanismene bak konvergens.

Konvergens-teori forutsier at fattige land vokser raskere enn rike land. Som følge av dette bør forskjellene i inntekt per innbygger avta over tid (Hess, 2016, s. 243). Man kan skille mellom betinget- og ubetinget konvergens. Alle modellene i denne oppgaven vil ta utgangspunkt i den grunnleggende Solow-modellen uten teknologi og naturressurser, noe som betyr at det ikke vil være forskjell i kvaliteten på arbeid og kapital.

Ubetinget konvergens

Ubetinget konvergens sier at alle land vil konvergere mot samme steady-state-nivå over tid, uavhengig av deres utgangspunkt, men forutsatt at alle land har samme produksjonsfunksjon, sparerate, befolkningsvekstrate og at alle land er på et nåværende nivå som er under steady state. Landene som er lengst unna steady-state nivået vil ha større vekst i BNP per innbygger enn landene som er nærmere steady state nivået (Hess, 2016, s. 243). Dette er illustrert i figur 2.1.

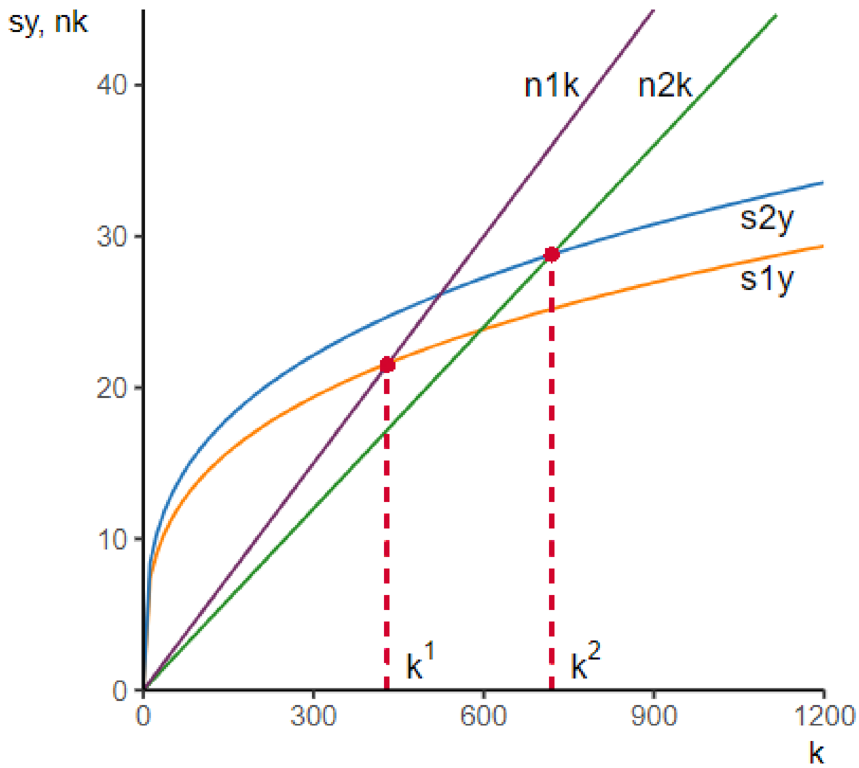


Figur 2.1: Ubetinget konvergens

Fra figur 2.1 kan man se to land (k^1 og k^2) med samme produksjonsfunksjon ($y = f(k)$), samme spare-rate, og samme befolkningsvekstrate. Begge landende befinner seg også under steady state, $k^1 < k^2 < k^{ss}$. Land k^1 har altså lavere BNP per innbygger enn land k^2 og vil ifølge ubetinget konvergens vokse raskere i starten, men avta desto nærmere steady state nivået dem befinner seg. På lang sikt vil begge landene konvergere mot samme punkt, altså k^{ss} (Hess, 2016, s. 243).

Betinget konvergens

Betinget konvergens tar hensyn til at land har ulike steady-state nivåer på grunn av forskjeller i sparerate og befolkningsvekstrate. Man antar fortsatt at landene har den samme produksjonsfunksjon ($y = f(k)$). Altså vil landene konvergere mot sitt eget steady-state nivå, og ikke til ett felles nivå, slik som ved ubetinget konvergens. Dette betyr at fattige land fortsatt kan vokse raskere enn rike land, men forskjellene i vekstraten skyldes forskjeller i sparerate og befolkningsvekstrate (Hess, 2016, s. 244). Dette er visualisert i figur 2.2.



Figur 2.2: Betinget konvergens

Fra figur 2.2 kan man se to land (k^1 og k^2) med samme produksjons funksjon ($y = f(k)$), men med ulik spare-rate og befolkningsvekstrate. I modellen har land k^1 høyere befolkningsvekstrate, $n1 > n2$, mens land k^2 har høyere sparerate, $s2 > s1$. Dette betyr at land k^1 har et lavere steady-state punkt enn land k^2, og dermed lavere BNP per innbygger (Hess, 2016, s. 244).

Utfordring 1.3 – Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Solow-modellen med teknologisk utvikling og naturressurser gir prediksjoner om hvordan ulike faktorer påvirke vekstraten i BNP per innbygger på lang sikt. Utled en ligning som beskriver vekstraten i BNP per innbygger på lang sikt (ikke nødvendigvis i steady-state). Gå ut ifra at økonomien kan beskrives ved Solow-modellen med vekst i teknologien (inklusive kvaliteten på kapital og arbeid), og med naturressurser. Bruk ligningen til å forklare prediksjonene til Solow-modellen i forhold til bestemmelsesfaktorer for økonomisk vekst på lang sikt. Gi økonomisk intuisjon.

Før man kan utlede ligningen som beskriver vekstraten i BNP per innbygger på lang sikt, må man definere produksjonsfunksjonen med teknologisk utvikling og naturressurser. Denne produktfunksjonen vil bygge videre på produktfunksjonen fra utfordring 1.1, oppgave B. Når man definerer produksjonsfunksjonen vil man betegne teknologi med A, kvalitetsindeks med q_x og naturressurser med R. Alle leddene i produksjonsfunksjonen vil være en funksjon av tiden, men for ryddighetens skyld vil man ikke skrive hele utrykket. Dermed får man produksjonsfunksjonen med teknologi og naturressurser:

$$Y = A \times (q_K \times K)^a \times (q_L \times L)^\beta \times (q_R \times R)^\gamma$$

Videre vet man at $A = A_0 \times e^{g_A \times t}$, hvor A_0 er det opprinnelige nivået på teknologi, g_A er vekstarten til teknologien, og t er tiden. $L = L_0 \times e^{n \times t}$, hvor L_0 er det opprinnelige nivået på arbeidskraften og n er vaktstarten til arbeidskraften. $R = R_0 \times e^{-u \times t}$, hvor R_0 er det opprinnelige nivået på naturressurser og $-u$ representerer at man bruker opp naturressursene (Mannberg, 2023). Man vet fra tidligere at K er ukjent, men vet at den utvikler seg over tid.

Man kjenner også til kvalitetsfaktorene, hvor $q_K = e^{j \times t}$, hvor j er vekstraten til kvaliteten på kapitalen, $q_L = e^{m \times t}$, hvor m er vekstraten til kvaliteten på arbeidskraften, og antar at både $j \ og \ m > \ 0$. Til slutt kjenner man $Q_R = e^{h \times t}$, hvor h er vekstraten til kvaliteten på naturressursene og kan være både større, mindre eller lik null (Mannberg, 2023).

Man kjenner også $\frac{dK}{dt} = S \times Y$. Altså er den deriverte av K med hensyn på tiden lik spareraten (S) multiplisert med den totale produksjonen (Y). Videre kan man skrive om produksjonsfunksjonen på en ryddigere måte, ved å trekke ut kvaliteten på kapital, arbeidskraft og naturressurser, dermed får man følgende funksjon (Mannberg, 2023):

$$Y = A \times q_K^a \times q_L^\beta \times q_R^\gamma \times K^a \times L^\beta \times R^\gamma$$

Man kan nå begynne å utlede ligningen som beskriver vekstraten BNP per innbygger. Fra videoen til Andre Mannberg (2023) vet man at brøken mellom total kapital og total produksjon vil være konstant. Det vil si at man kan skrive om venstreleddet (Y) som en funksjon av $\frac{K}{Y}$. Dette kan gjøres ved å dividere med Y^a, for så å isolere Y alene igjen ved å opphøye alle ledd med $\frac{1}{1-a}$, dermed får man:

$$Y^{1-a} = A \times q_K^a \times q_L^\beta \times q_R^\gamma \times \left(\frac{K}{Y}\right)^a \times L^\beta \times R^\gamma$$

$$Y = A^{\frac{1}{1-a}} \times q_K^{\frac{a}{1-a}} \times q_L^{\frac{\beta}{1-a}} \times q_R^{\frac{\gamma}{1-a}} \times \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{a}{1-a}} \times L^{\frac{\beta}{1-a}} \times R^{\frac{\gamma}{1-a}}$$

Fra antakelsene om Solow-modellen i utfordring 1.1, oppgave A, vet man at produksjonen per arbeider er gitt som $y = \frac{Y}{L}$. Det vil si at dersom man dividerer utrykket ovenfor finner man produksjon per innbygger. Siden utrykket inneholde $L^{\frac{\beta}{1-a}}$ blir det samme som å multiplisere med L^{-1}. Dermed kan utrykket for produksjon per arbeider i Solow-modellen med teknologi og naturressurser skrives som:

$$y = \frac{Y}{L} = A^{\frac{1}{1-a}} \times q_K^{\frac{a}{1-a}} \times q_L^{\frac{\beta}{1-a}} \times q_R^{\frac{\gamma}{1-a}} \times \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{a}{1-a}} \times L^{\left(\frac{\beta}{1-a}-1\right)} \times R^{\frac{\gamma}{1-a}}$$

Videre ønsker man å finne vekstraten i utrykket for produksjon per arbeider i steady state. Dette kan gjøres ved å logaritmere utrykket:

$$\log(y) = \frac{1}{1-a}\log A + \frac{a}{1-a}\log q_K + \frac{\beta}{1-a}\log q_L + \frac{\gamma}{1-a}\log q_R + \frac{a}{1-a}(\log K - \log Y) + \left(\frac{\beta}{1-a} - 1\right)\log L + \frac{\gamma}{1-a}\log R$$

Istedenfor å skrive utrykket på formen som deriverte, kan man skrive det som vekstratene som ble definert i starten av oppgaven:

$$g_y^{ss} = \left(\frac{1}{1-a}g_A + \frac{a}{1-a}j + \frac{\beta}{1-a}m + \frac{\gamma}{1-a}h\right) + \left(\frac{\beta}{1-a} - 1\right)n - \left(\frac{\gamma}{1-a}\right)u$$

Utrykket ovenfor kan deles inn i to deler, der $\left(\frac{1}{1-a}g_A + \frac{a}{1-a}j + \frac{\beta}{1-a}m + \frac{\gamma}{1-a}h\right)$ definerer veksten i kvaliteten og teknologi. I pensumboken defineres dette utrykket som θ (Hess, 2016, s. 251). Videre vet vi fra Andrea Manneberg sin video (2023) at utrykket $(\log K - \log Y)$ må være konstant under steady state, og derfor er deres vekstrate lik 0. Dermed får vi utrykket:

$$g_y^{ss} = \theta + \left(\frac{\beta}{1-a} - 1\right)n - \left(\frac{\gamma}{1-a}\right)u$$

Videre kan man forenkle utrykket $\left(\frac{\beta}{1-a} - 1\right)$ på følgende måte:

$$\frac{\beta}{1-a} - 1 = \frac{\beta}{1-a} - \frac{1-a}{1-a} = \frac{\beta - (1-a)}{1-a} = \frac{\beta - 1 + a}{1-a} = \frac{\beta + a - 1}{1-a}$$

Fra antakelsene vet man at dersom antakelsen om konstant skala avkastning er sann vil:

$$a + \beta + \gamma = 1$$

Dersom vi trekker fra $-1-\gamma$ fra begge sider får man:

$$a + \beta - 1 = -\gamma$$

Dermed kan man skrive om utrykket $\frac{\beta+a-1}{1-a}$ til $\frac{-\gamma}{1-a}$, og dermed får vi utrykket for vekstratene til Solow-modellen med teknologisk utvikling og naturressurser i steady state:

$$g_y^{ss} = \theta + \frac{-\gamma}{1-a} n - \left(\frac{\gamma}{1-a}\right) u$$

$$g_y^{ss} = \theta - \frac{\gamma}{1-a}(n+u)$$

Fra dette utrykket kan man se at dersom θ, altså utrykket for veksten i kvaliteten på ressursene og/eller teknologien, øker så vil vekstraten i produksjon per innbygger i steady state øke. Samtidig kan man se at en økning i befolkningsveksten (n) og forbruket av naturressurser (u) reduserer produksjon per innbygger. Fra figur 1.3 har vi tidligere sett på hva som skjer dersom befolkningsveksten (n) øker, men fra denne modellen ser vi også at når bruken av naturressurser øker vil det også påvirke produksjonen per arbeider negativt. Man kan altså si at desto viktigere naturressursene er, desto større vil den negative effekten være. Men fra utrykket θ, er det flere faktorer som f.eks. $\frac{\gamma}{1-a}h$ som igjen kan motvirke denne effekten (Mannberg, 2023).

Litteraturliste

Hess, P. N. (2016). *Economic growth and sustainable development*. (2. utg.). Routledge.

Mannberg, A. (2019, 13. august). *Film 1 SOK-2007 – Antakelser bak Solow-modellen (BAS)* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=JVIaH1djNrM

Mannberg, A. (2019, 15. august). *SOK-2007 – Matematisk utledning av steady-state i Solow-modellen* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=OfOLmG-sTbw

Mannberg, A. (2019, 15. august). *SOK-2007 – SOLOW – grafisk utledning av Steady State* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=wHjo7JY2qmE

Mannberg, A. (2019, 26. august). *SOK-2007 Solow BAS produksjonsfunksjon* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=aNFKSpEIBrI

Mannberg, A. (2023, 27. januar). *SOk-2011: Solowmodellen med naturressurser. Matematisk utledning av vekst i steady state* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=MuUxb7R1MKE