图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

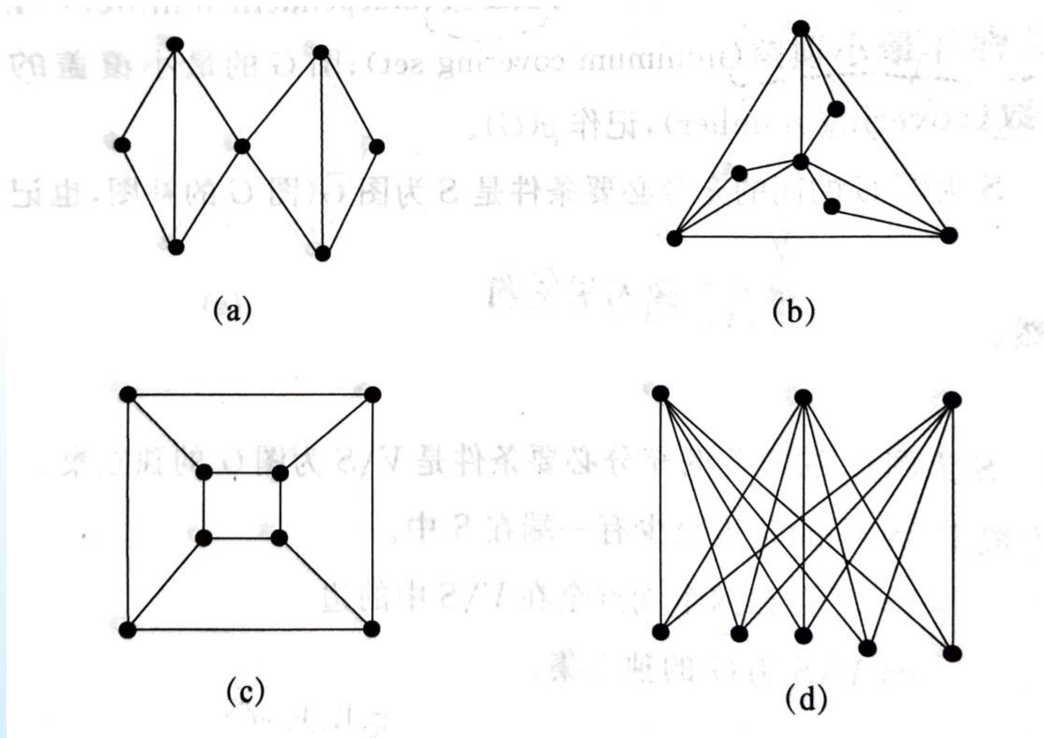
Ch4 匹配与覆盖

Ch4 主要内容

- 匹配
- 独立集、团、覆盖和匹配；及其之间的关系
- 偶图的匹配和覆盖
- 完美匹配
- 匹配的应用

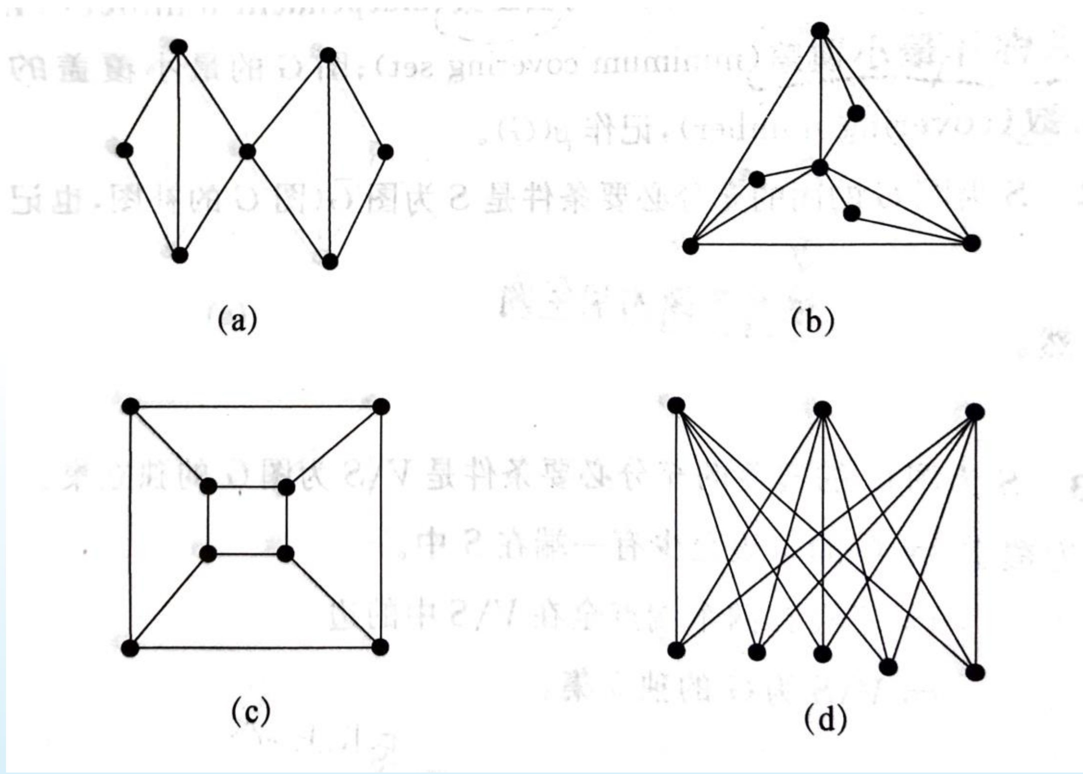
概念

- 独立集（independent set）：V的子集v’中任意两个点在图G中不相邻，称v’为G的独立集，其导出子图G[v’]为空图
- 找出右图中独立集



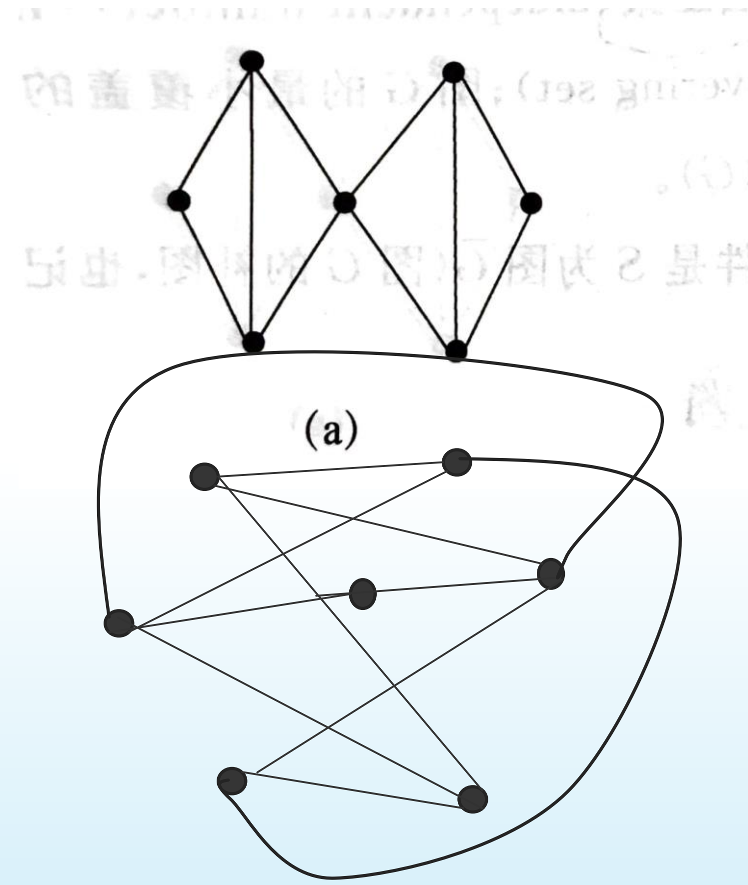
概念

- 团（clique）：V的子集S中任意两点在图G中相邻，称S为图G的团，导出子图是完全图
- 找出右图的团



团和独立集的关系：

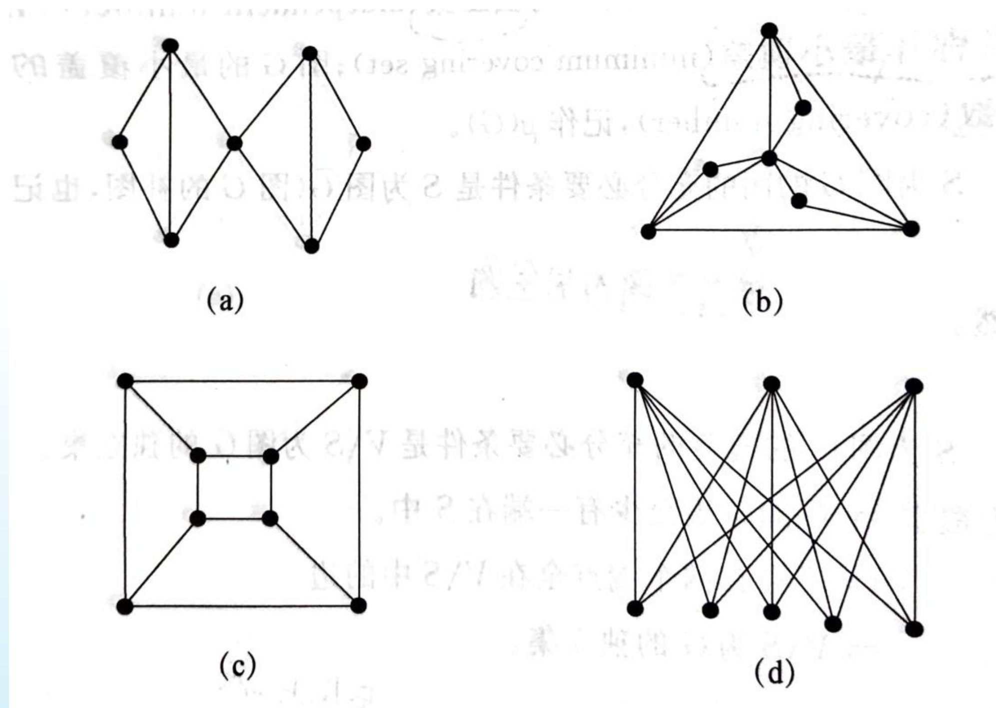
- 具体例子显示出两者之间的关系



- **S**为图**G**的团 **iff**

S为**G**补图的独立集

- **覆盖**（covering）：V的子集K，图G中每条边中至少有一个端点在K中，称K为G的覆盖，导出子图G[V\K]为空图或G[V\K]为独立集。



覆盖和独立集的关系

- S为图G的覆盖 iff V\S 是图G的独立集

- 证明：S为覆盖

  ⇔ G的每条边至少有一端在S

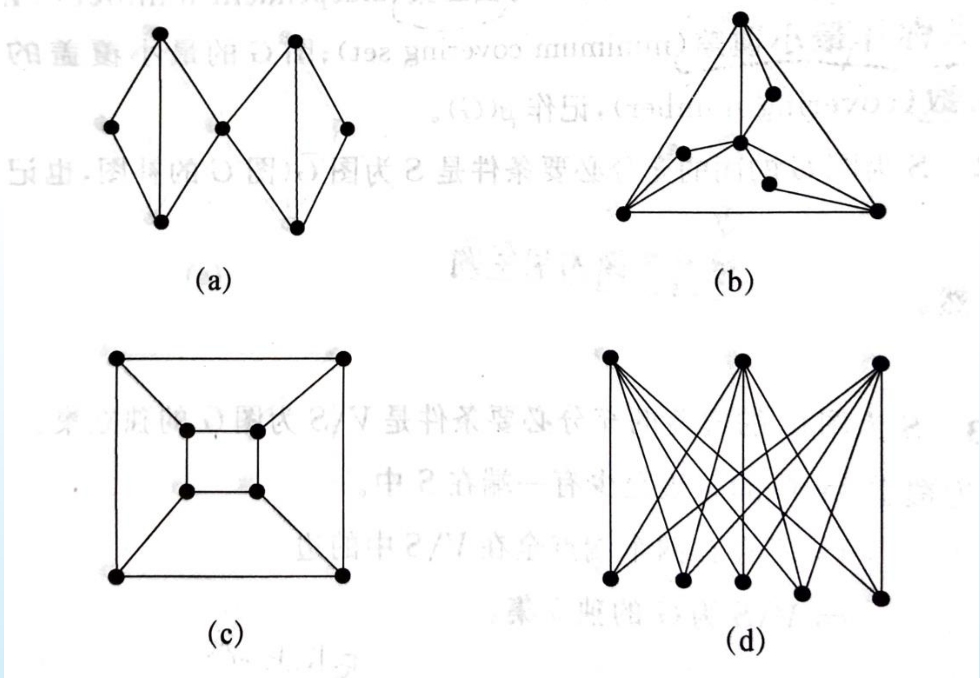
  ⇔ 不存在两个端点全在V\S中的边

  ⇔ V\S为G的独立集。

- 定理 S为图G的独立集 ⇔ V\S 为G的覆盖。
  - 证明：S为独立集
    ⇔ 不存在两端全在S中的边
    ⇔ G的每边至少有一端在V\S 中
    ⇔ V\S为G 的覆盖。 #

独立数α(G)，覆盖数β(G)

- 独立数（independent number）α(G) ⇔ 最大独立集的元素个数。
- 覆盖数（coering number）β(G) ⇔ G的最小覆盖的元素个数。



独立数α(G)，覆盖数β(G)

- 推论 $\alpha+\beta=\nu$ 。
  - 证明：设S为G的最大独立集，则V\S为其覆盖，因此
    $$\beta \le |V\backslash S| = \nu - \alpha 。$$
    又，设K为G的最小覆盖，则V\K为其独立集，因此
    $$\alpha \ge |V\backslash K| = \nu - \beta 。$$
    $$\therefore \quad \alpha+\beta=\nu 。 \qquad \#$$
- 注 由上述证明知：
  S为G的最大独立集 ⇔ V\S为G的最小覆盖

匹配和覆盖的关系

- 图G中任意匹配M； 任意覆盖K；
- 由覆盖的定义，M中每条边至少有一端属于K，M中任意两边没有公共点
- 因此|M|<= |K|
- 最大匹配M*，最小覆盖K*亦如此

$$|M^*| <= |K^*|$$

匹配和覆盖的关系

引理：设M与K分别是G的匹配与覆盖，如果 $|M| = |K|$，则M为最大匹配，K为最小覆盖

证明：$|M| <= |M^*| <= |K^*| <= |K|$

练习：

- 给出下图中最大独立集、最大团、最小覆盖、最大匹配