图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch5 遍历问题

Ch5 主要内容

- Euler环游
- 中国邮递员问题（Chinese Postman Problem，CPP）
- Hamilton 圈
- 旅行售货员问题(travelling salesman prob., TSP)

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

管梅谷

运筹学科普公众号

2006年10月，因中国邮递员问题的研究，管梅谷先生荣获第五届中国运筹学会科学技术奖——终身成就奖。

➨问题 在一赋权图G中，求一最小权环游 （即最优环游）

- 当G 为Euler图时，其任一Euler环游都是最优环游，
- 此时有求最优环游的好算法，**Fleury**算法
- 若G不是Euler图，怎么办？
- 必定通过某些边不止一次！

中国邮递员问题

管梅谷1960年证明：G中的边在G*中最多出现两次。（定理5.1）

只需要考虑怎样选取图G中总权重最小的一些边，

将这些边重复后得到G的最小Euler母图就行了。

Edmonds及Johnson(1973)找到多项式时间的算法。

中国邮递员问题

⇔ 在一赋权图G中，求一最小权环游 （即最优环游）

⇔ (i) 找赋权连通图G的一个Euler生成母图G*，它是由重复（duplicated）G的一些边而得，且使

$$w(\,E(G^*) \setminus E(G)\,) = \min\;;$$

(ii) 在G*中找出其Euler环游 。

上述(ii)可用Fluery（好）算法来解决；

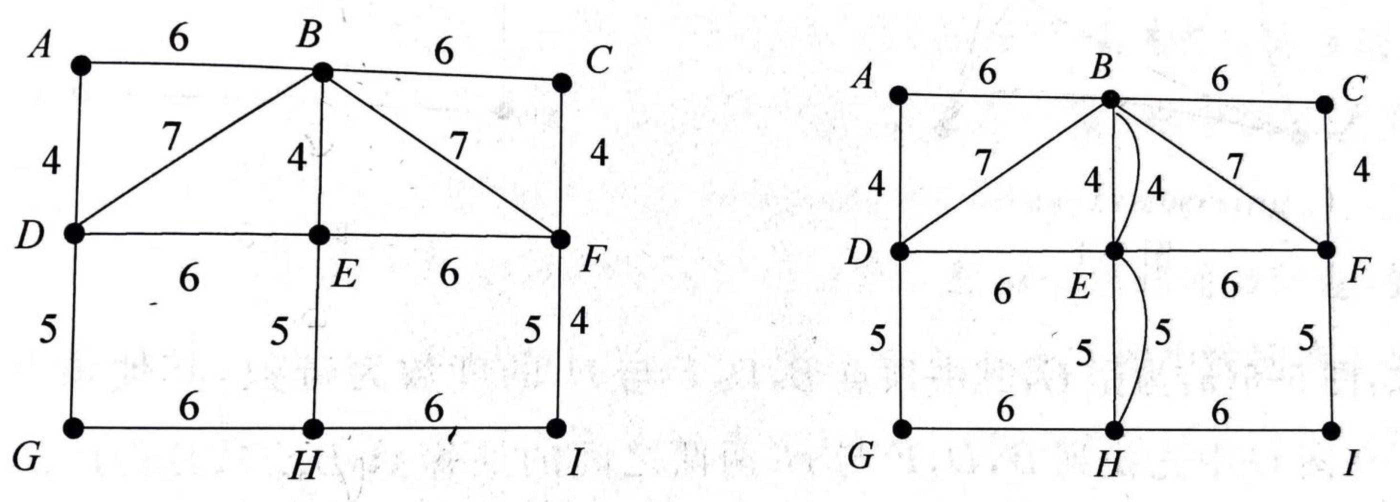
- 而(i)已由Edmonds及Johnson(1973)找到好算法。
- 下面仅就最简单的情形，即赋权图G中恰只有两个度为奇数顶点u, v时,讨论求该G*问题：
- 来证，**G*可由G加上(重复)G中的最短 (u, v)-路P而得。**
- 证明：

易见，$G_1^* = G^*[E^* \setminus E]$ 为一简单图；且其中只有u, v 为奇点，它们一定在G_1^*的同一分支中。令P*为任意的（u，v）-路，则有

$$w(E^* \setminus E) \geq w(P^*) \geq w(P) 。$$

但G+P 也是G的一Euler生成母图，故 G*= G+P 。

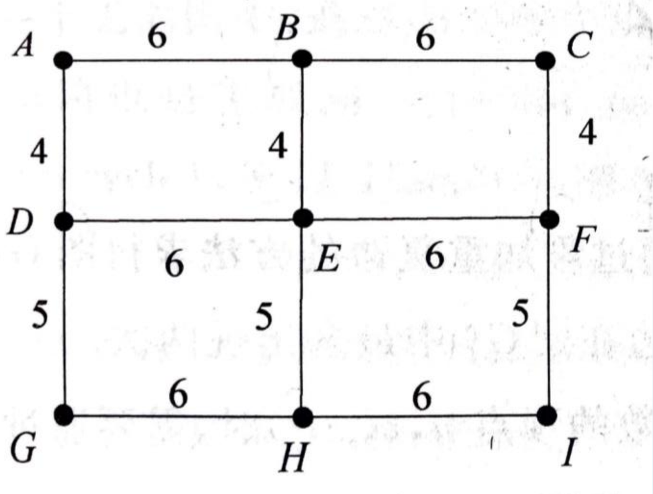
只有两个度为奇数顶点



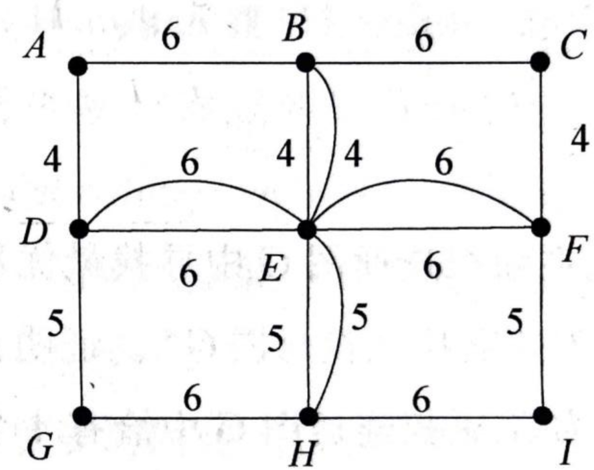
(a) (b)

四个度为奇数的顶点

- 四个点的两两最短路
- 得一个K4图，边的权重就是最短路的权重
- K4的最优匹配
- 权重最小的Euler赋权母图G*
- 求G*的Euler环游



(a)



(b)

中国邮递员问题

➨有向图：街道都是单向道

1973年， **Edmonds**及**Johnson**也有多项式时间算法

➨ 既有单向道，又有双向道：

1976年，**C.H. Papadimitrious** 证明是**NPC**

很多问题：快递配送、数据结构中的数据搜索等