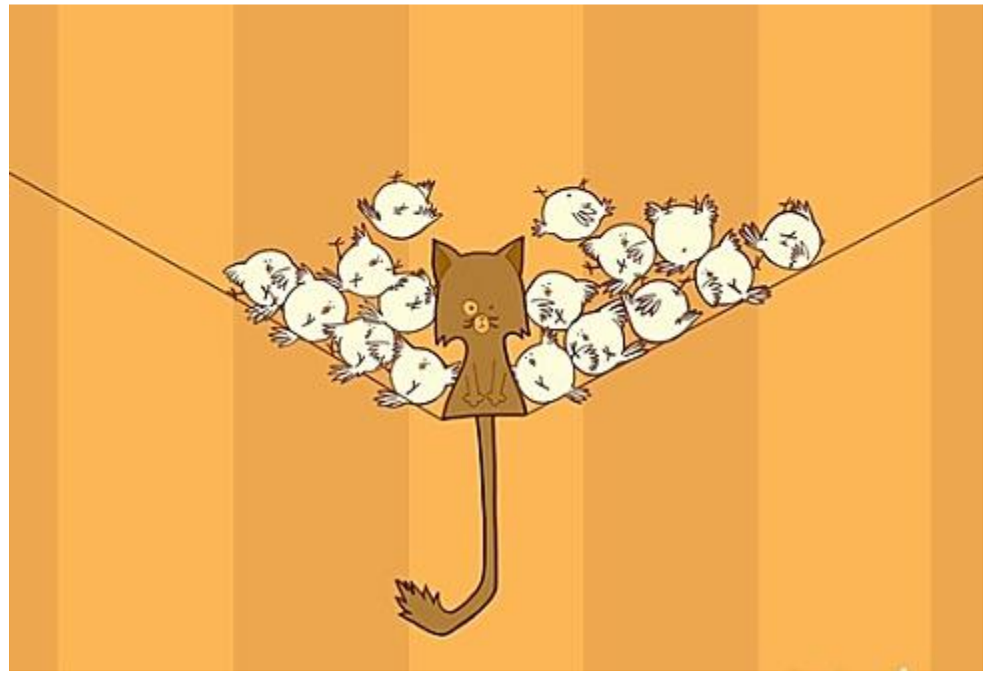
图论及其应用

北京邮电大学理学院

0. 引例

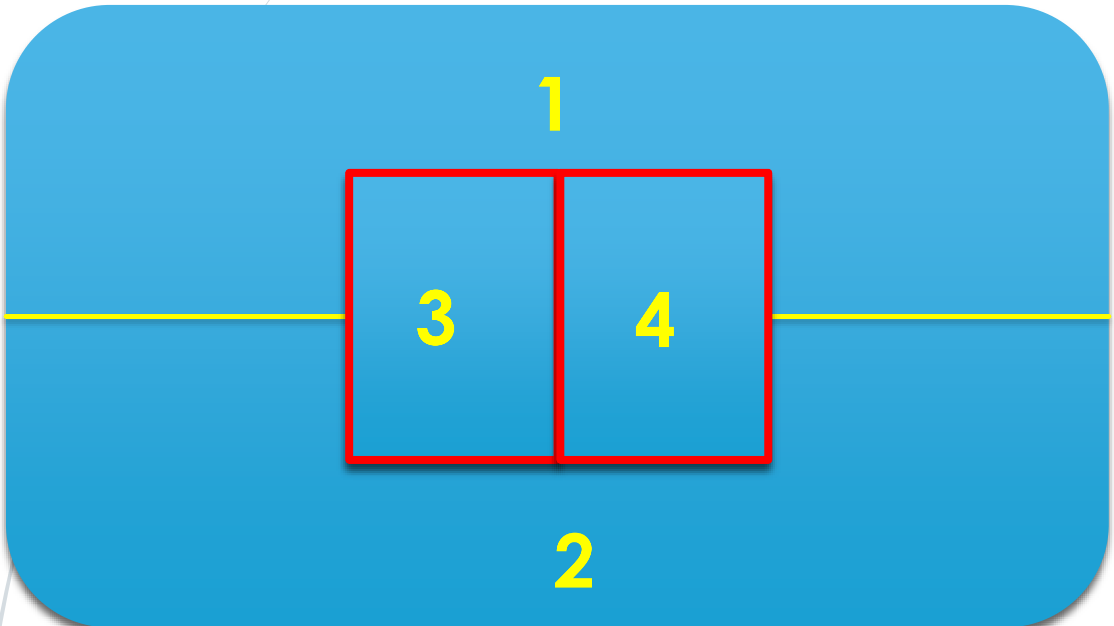
有趣的图



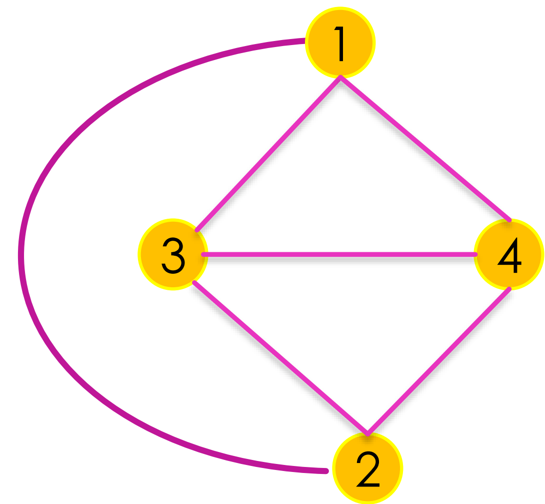
有趣的问题

四个王子的问题

一个国王有四个儿子，他有一个愿望，他希望在他死后它的王国能被分成**4**个地区，每一个儿子都有一个地区，并且每个地区都和其他三个地区中的任何一个有公共的边界。国王的愿望怎样实现了？



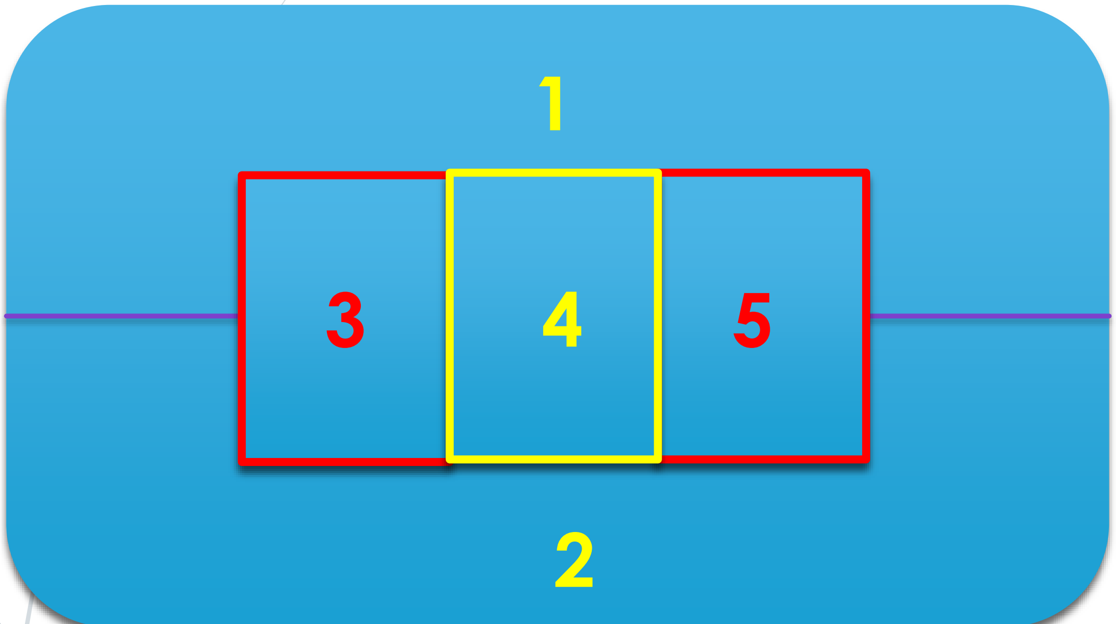
一次成功的尝试

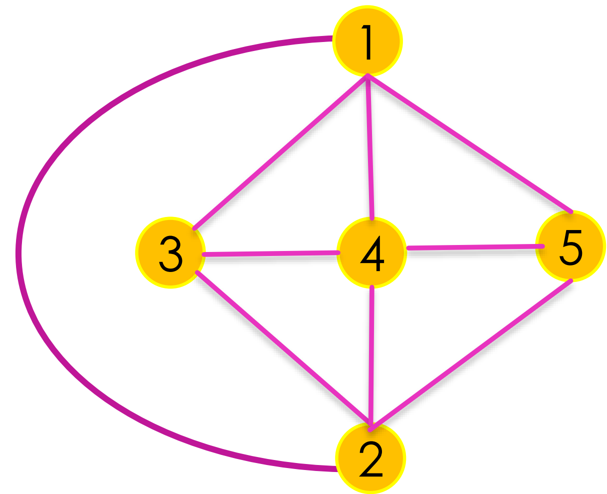


四阶完全图

五个王子的问题

若国王有五个儿子，他有一个愿望，他希望在他死后它的王国能被分成5个地区，每一个儿子都有一个地区，并且每个地区都和其他四个地区中的任何一个有公共的边界。国王的愿望能够实现吗？



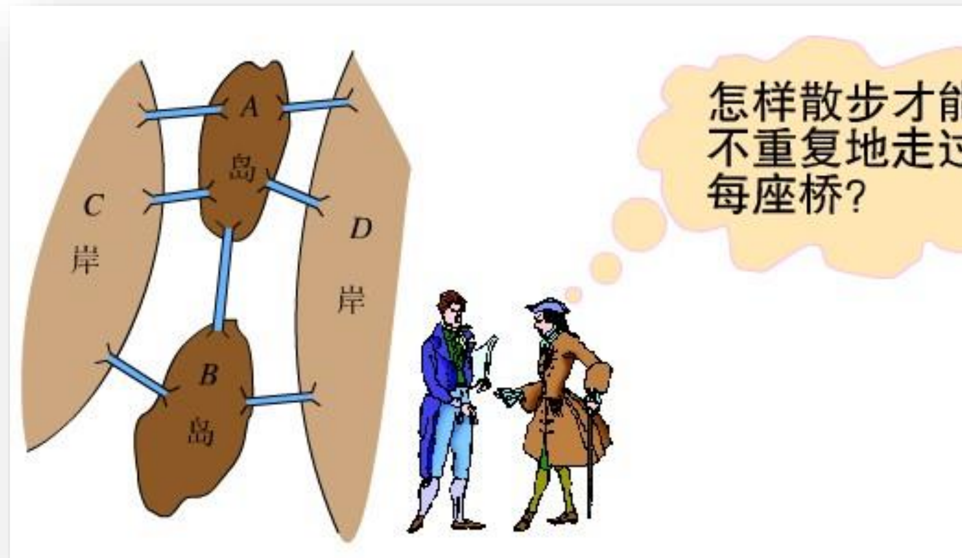


一次不成功的尝试

顶点3和5之间没有连线（边）

第一章 图的概念

- ◆引论
- ◆什么是图
- ◆图的同构
- ◆子图
- ◆路和连通性
- ◆圈
- ◆图的数据结构



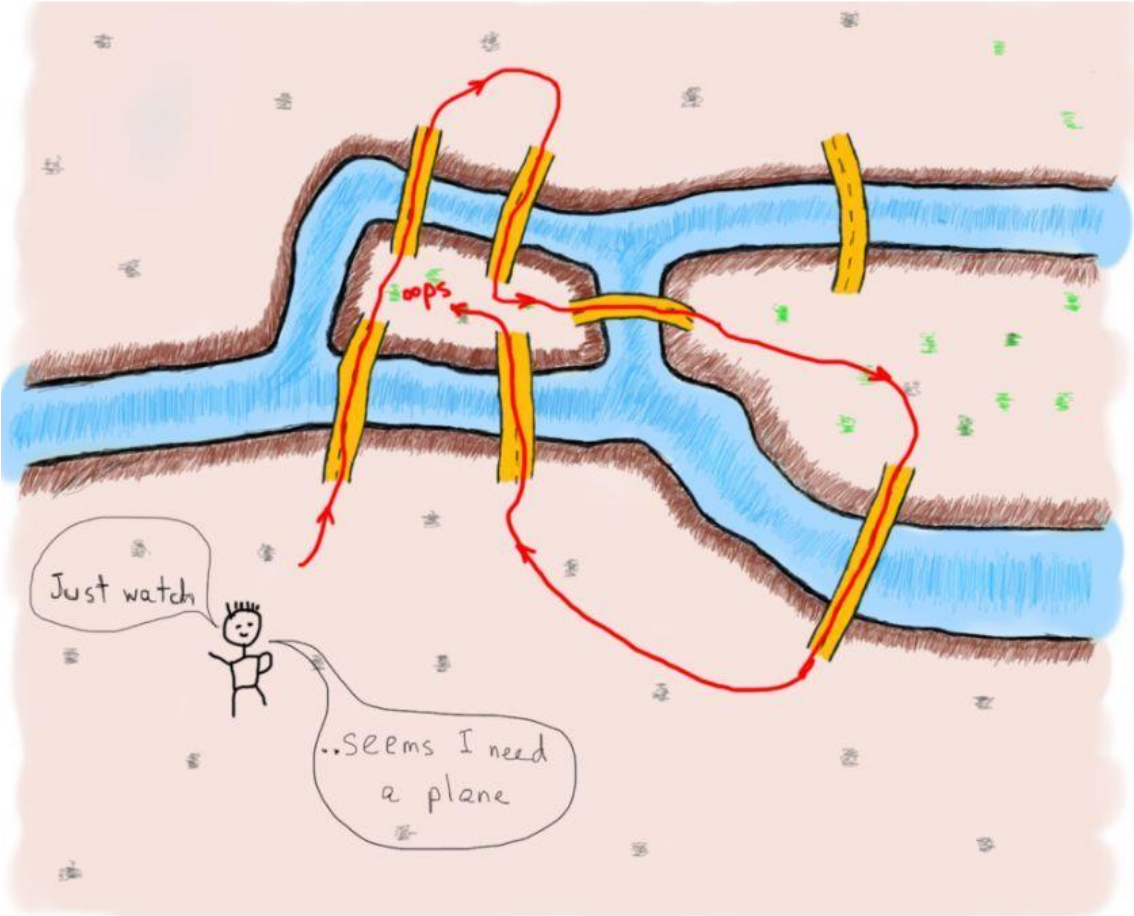
北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

引例

- 七桥问题
- 电网络
- 四色猜想
- 哈密尔顿问题

七桥问题

在加里宁格勒（Kaliningrad）有七座桥，连接着由普雷戈里亚（Pregolya）河分割而成的两个岛屿和两大陆地。

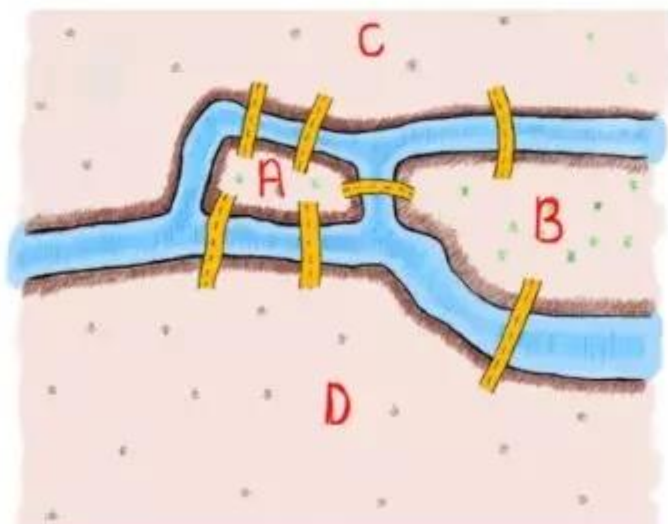


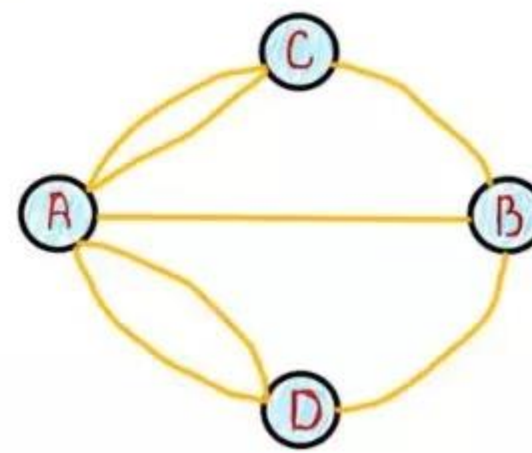
尝试：在穿过每座桥仅一次的情况下穿过这个城市。

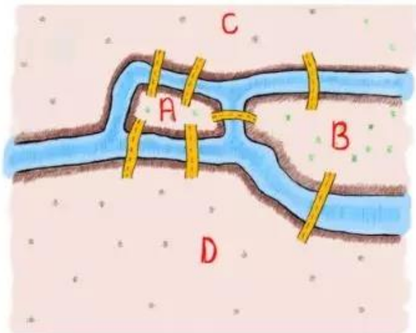
Leonhard Euler

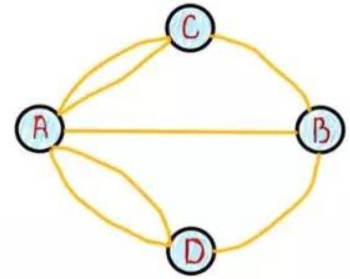
他没有试图解决这一问题，而是证明其不可解决！

Euler 首先把陆地和桥转化成我们看得懂的图

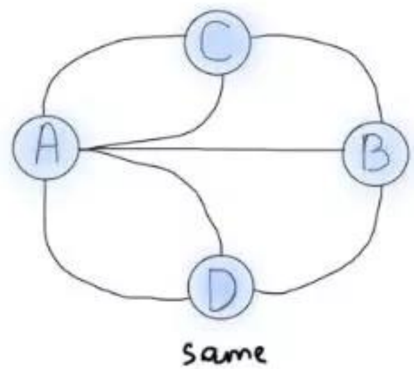


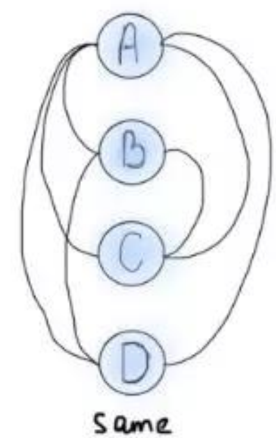


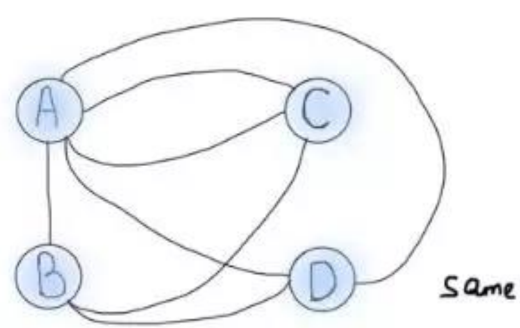


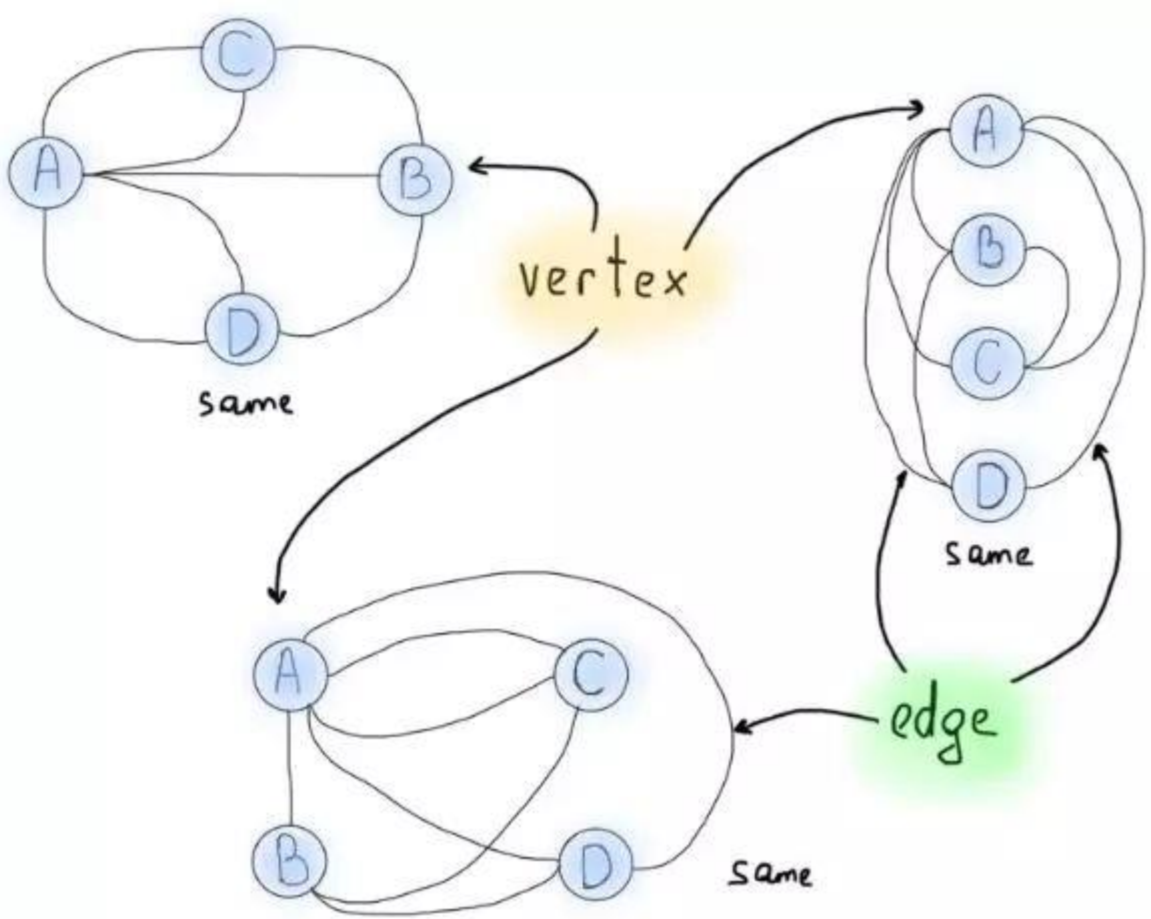


下面的图也全是七桥问题的抽象



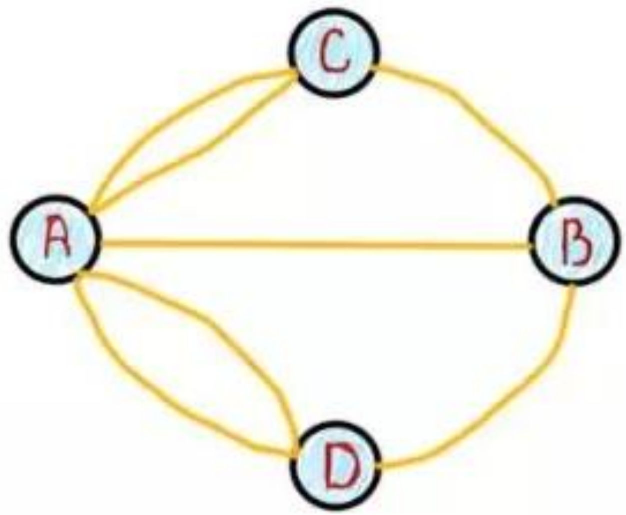






我们命名圈为节点（或节点），连接他们的线为边。

图中，V 是节点（vertex），E 是边（edge）。

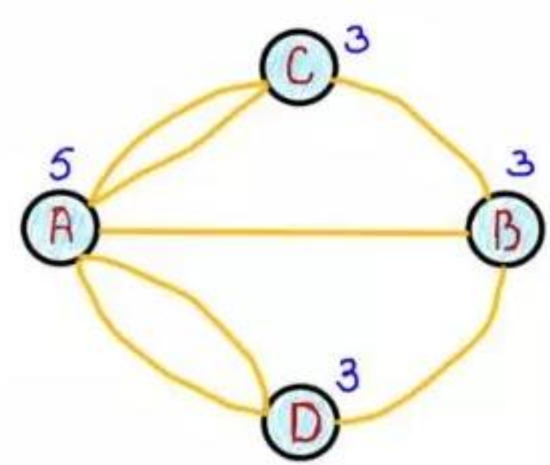


著名的“七桥问题”转化为是否能够用一笔不重复的画出过此七条线的问题了。

Degree of a vertex is the number of edges incident to the vertex.

节点自由度（**Degree**）：连接到节点的边数量。

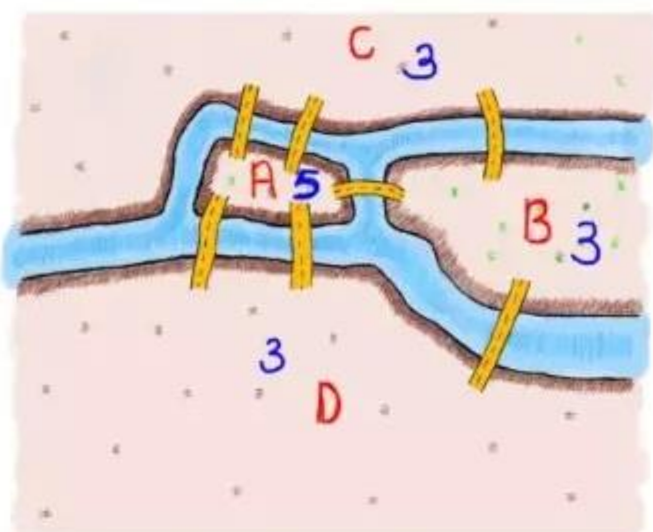
在七桥问题中，桥的数量（边的数量）可以被表达成节点的自由度。

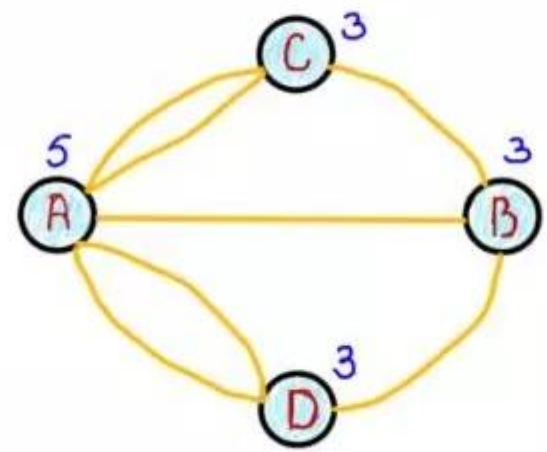


deg(A) = 5

deg(B) = deg(C) = deg(D) = 3

Euler证明了在图上（城市里）每次只走过一条边（桥）并且走过每一条边是严格取决于节点自由度。

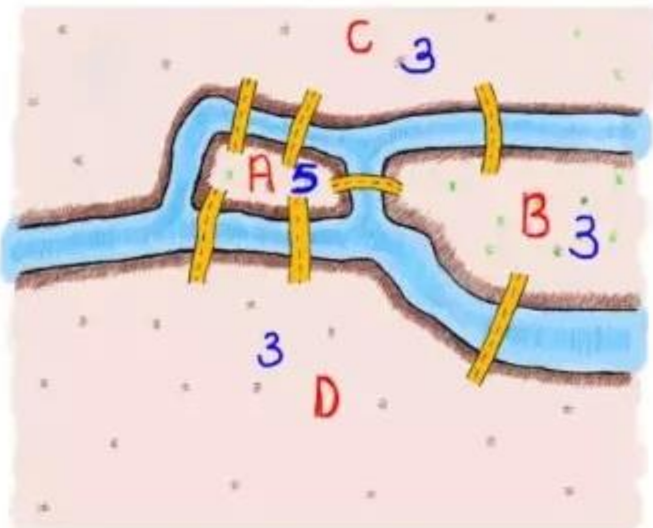


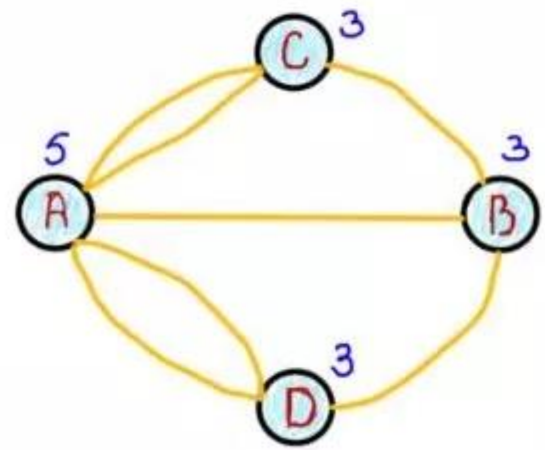


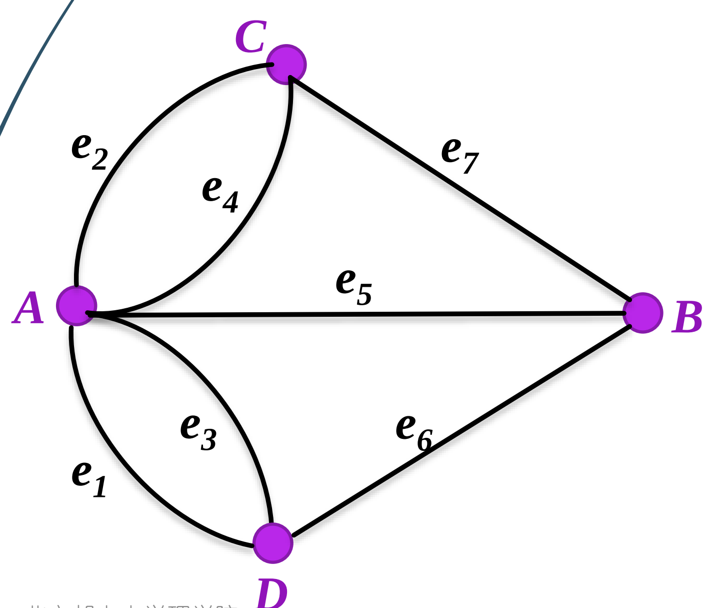
要使得一个图形可以一笔画，必须满足如下两个条件：

1. 图形必须是连通的。

2. 图中节点自由度为奇数的节点个数是**0**或**2**。



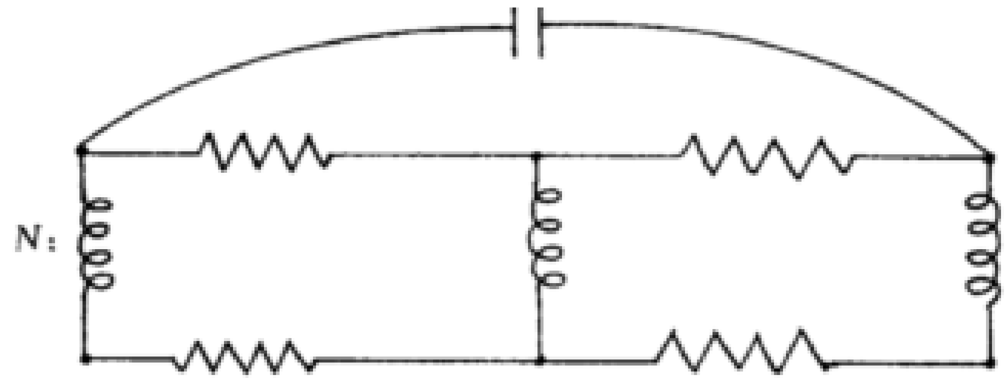


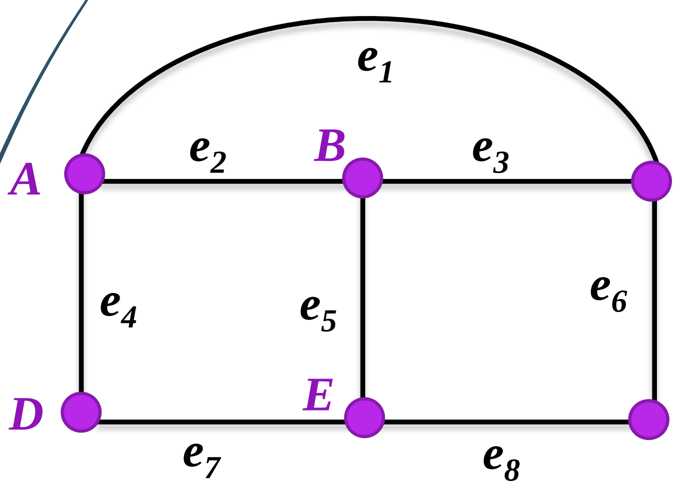


“七桥问题”中的4个点全是自由度为奇数的节点，可知图不能“一笔画出”，也就是不存在不重复地通过所有七桥的路径。

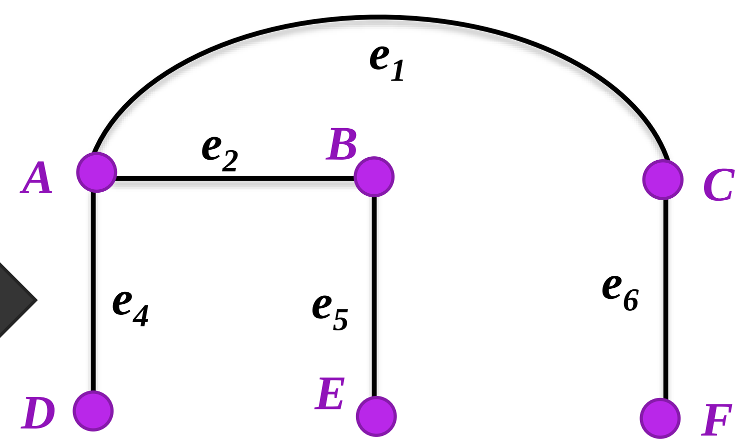
● 电网络

如何确定一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流。





图

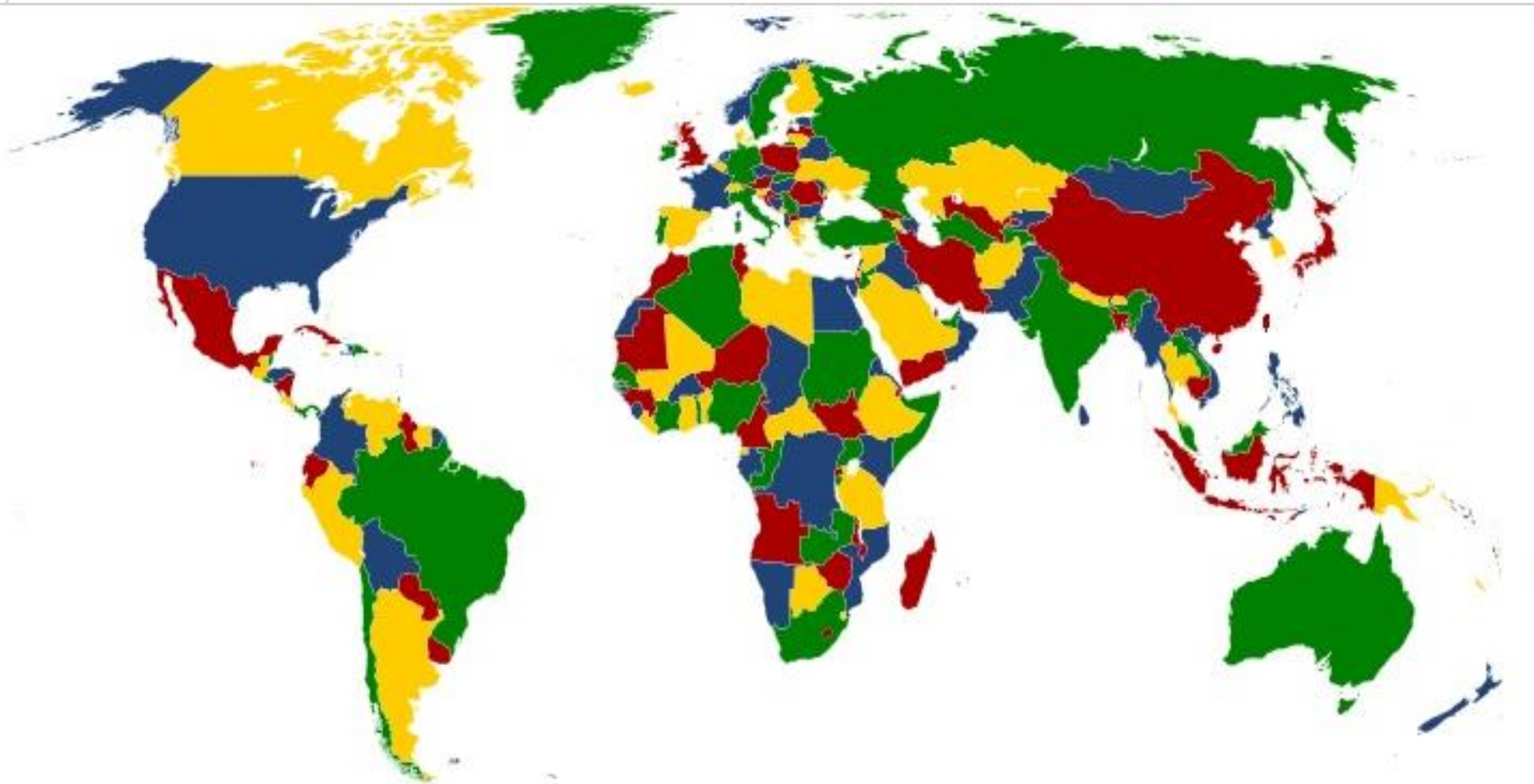


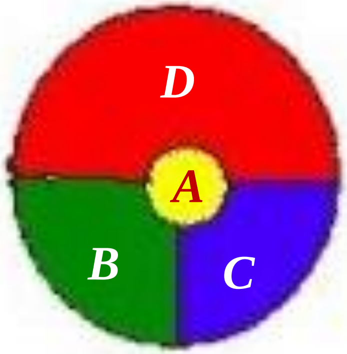
树

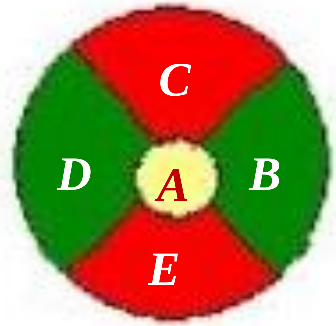
德国学者基希霍夫在研究物理问题时建立了树的理论。

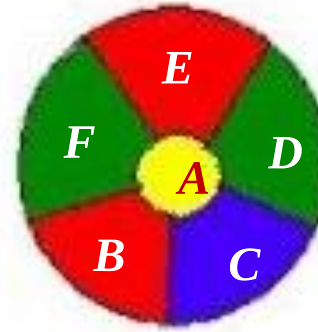
● 四色猜想

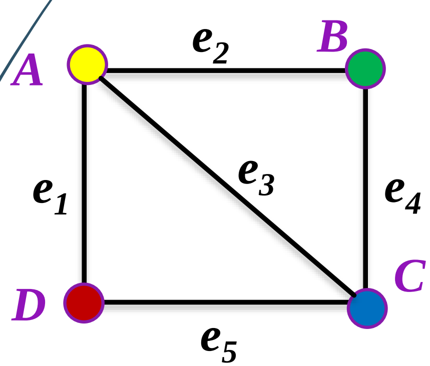
“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。”

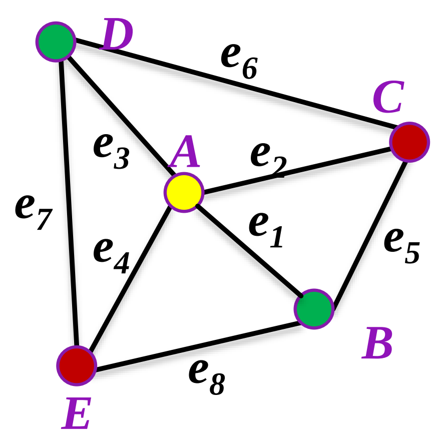


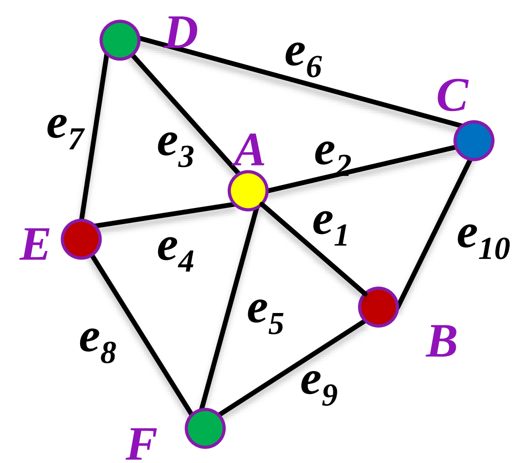

D
A
B
C


C
D
A
B
E


E
F
D
A
B
C

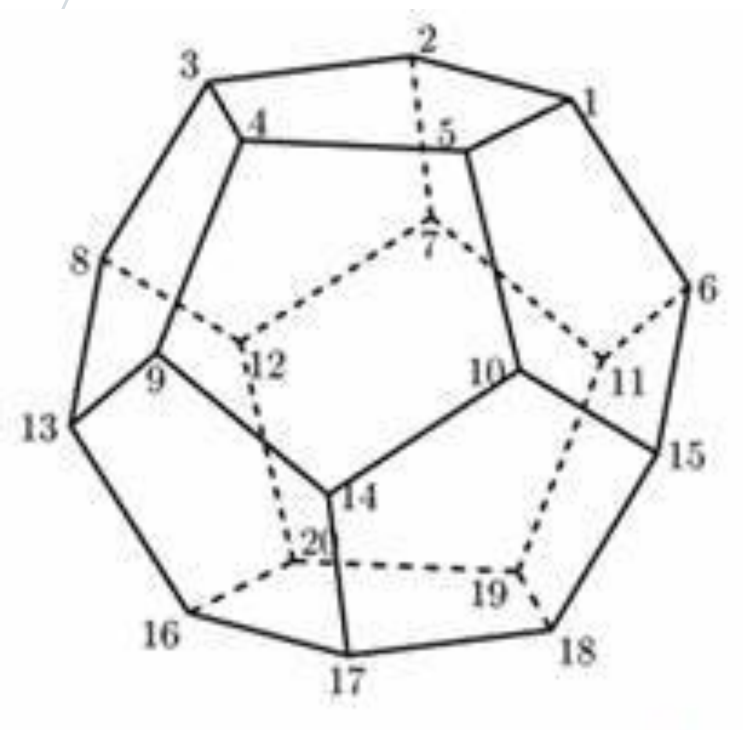

A
e_2
B
e_1
e_3
e_4
D
C
e_5


D
e_6
C
e_3
A
e_2
e_7
e_1
e_4
e_5
B
e_8
E


D
e_6
C
e_7
e_3
A
e_2
E
e_4
e_1
e_{10}
e_5
B
e_8
e_9
F

● 哈密尔顿问题

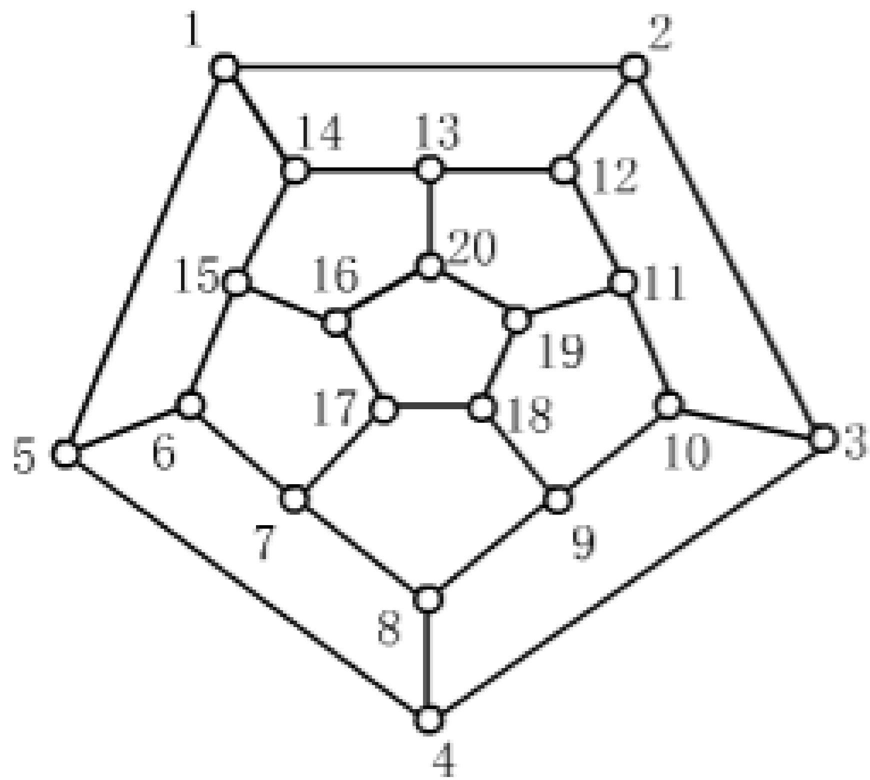
周游世界问题: **1857**年爱尔兰数学家哈密尔顿发明了“周游世界”玩具.



用一个正十二面体的**20**个顶点表示世界上**20**个大城市，**30**条棱代表这些城市之间的道路。要求游戏者从任意一个城市(即顶点)出发，延棱行走经过每个城市一次且只经过一次，最终返回出发地。

一种走法

与之等价的可以做成平面图如下：



从**1**出发，按照**1, 2，…13,20, … ,14 ,1**的方法可以完成环游世界问题。

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

一些有趣的思考题

假设在n（n≥4）个人中，任意两个人合在一起都能认识其余的n-2个人。证明他们可以围成一圈，使相邻者相互认识。

有七名科学家参加一个会议，已知A会讲将英语，B会讲英语和中文，C会讲英语、意大利语、俄语，D会将日语、中文，E会讲德语和意大利语，F会讲法语、日语、俄语，G会讲德语、法语。是否可以安排他们在一个圆周围桌，使得相邻的科学家都可以用相同的语言交流？

1. 什么是图

图的代数定义

图的几何表示

图的概念和术语

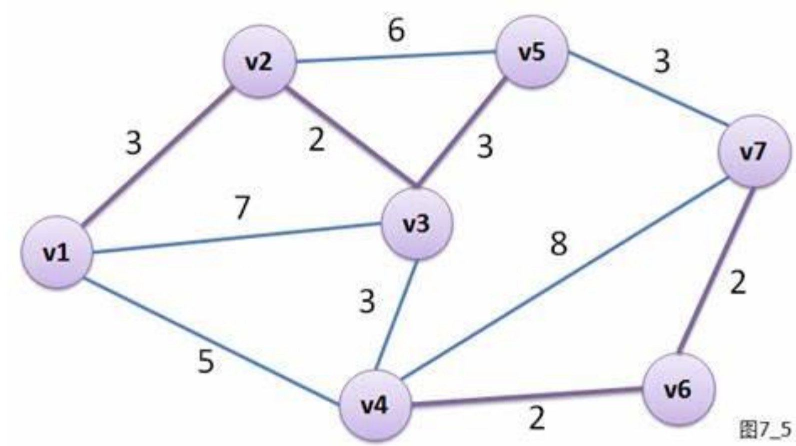


图7_5

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

图(graph):

$G = (V(G), E(G))$,

其中

顶点（节点）

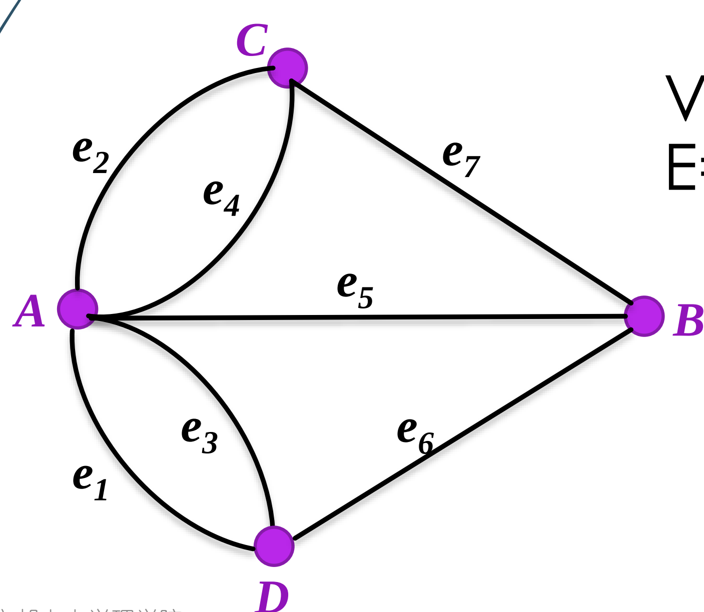
$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$　V ---顶点集，　ν---顶点数

$E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$　E ---边集，ε---边数

边

例 ➨ 七桥问题

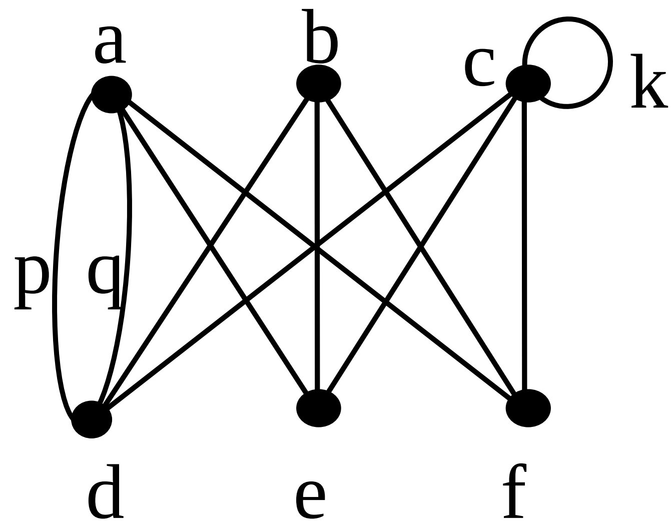
G:



$V=\{A, B, C, D\}$,

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

例



G = (V, E)

无向图

V={a, b,c,d,e,f},

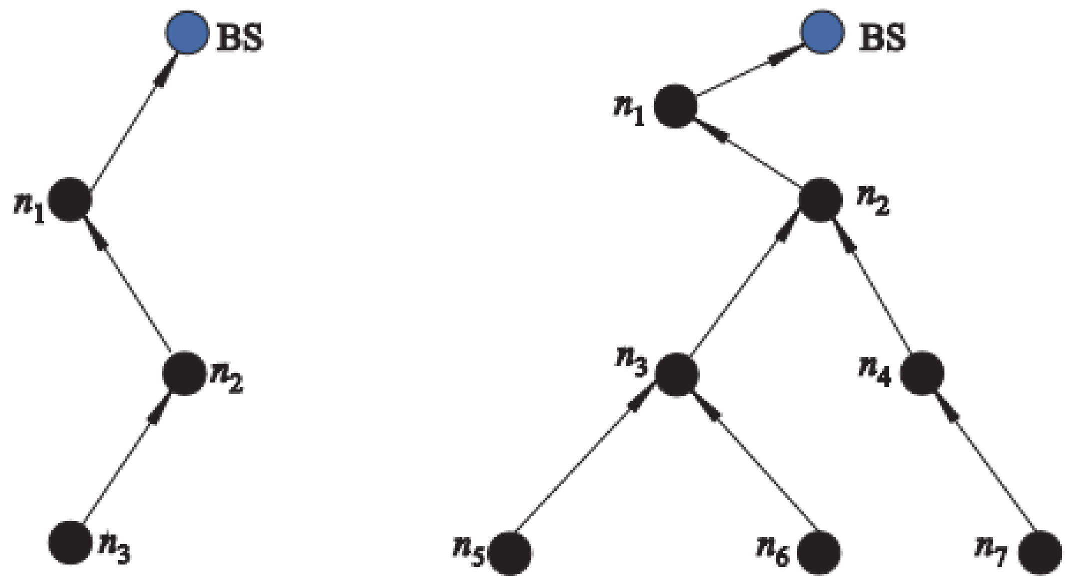
E={k, p, q, ae, af, bd, be, bf, cd, ce, cf }

在图中，若用箭头标明了边是有方向性的，则称这样的图为有向图，否则称为无向图。

● 传感器网络

一个多跳无线传感器网络由若干节点和一个基站BS组成，并由基站负责从网络中收取数据.

有向图



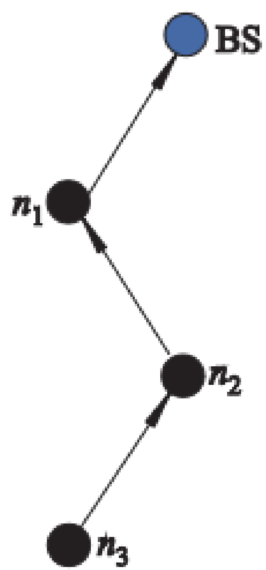
转发节点既可以从其他节点处获 取数据，也可以将接收的数据转发给路径上的下一个邻节点.

有向图 D = (V(D), A(D)),

其中

$V(D) = \{ v_1, v_2, \cdots, v_\nu \}$ V ---顶点集， ν---顶点数

$A(D) = \{ a_1, a_2, \cdots, a_\varepsilon \}$ A---弧集，ε---弧数



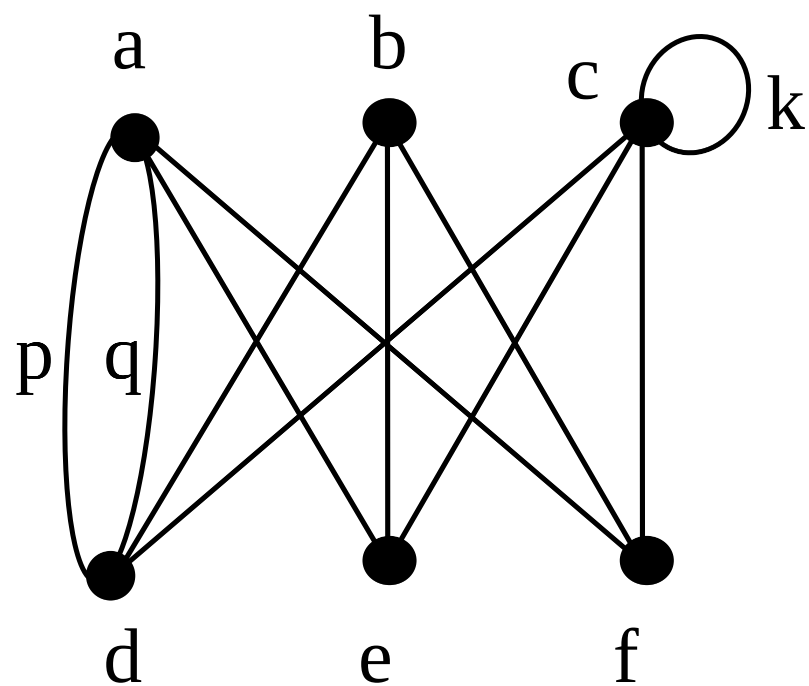
D = (V, A)

V={n_1, n_2,n_3,BS},

A={(n_3, n_2),(n_2 , n_1),(n_1 ,BS)}

➨ 图G的一个*几何实现*（geometric realization,代表representation）

$G = (V, E)$



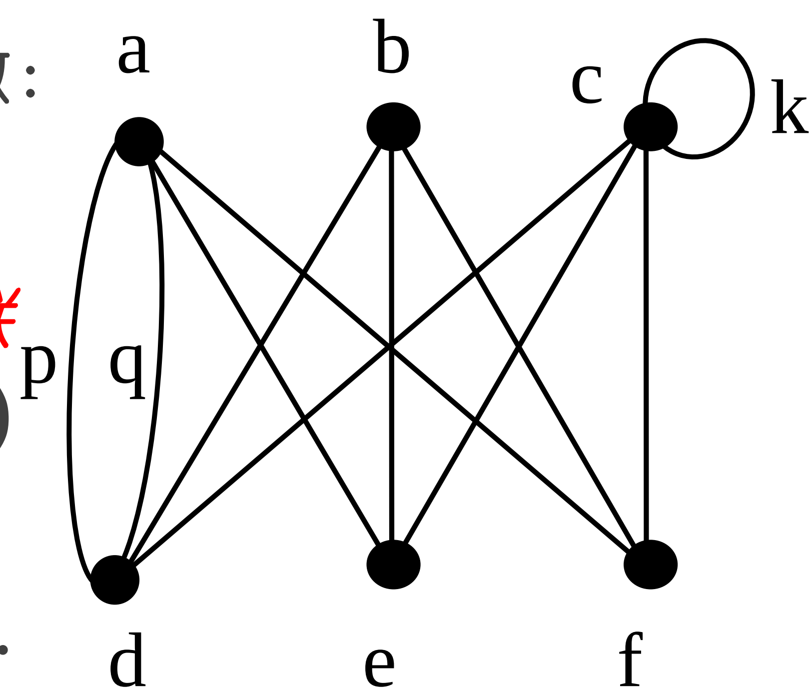
G的*几何实现*有无穷多个，随顶点位置及边的形状而不同。真正的图G是上面所给出式子，它与顶点的位置、边的形状等无关。今后对 **图G** 及其 *几何实现* 将经常不加以区别。

图的一些概念和术语

- 图的**阶（order）**指图G的点数：

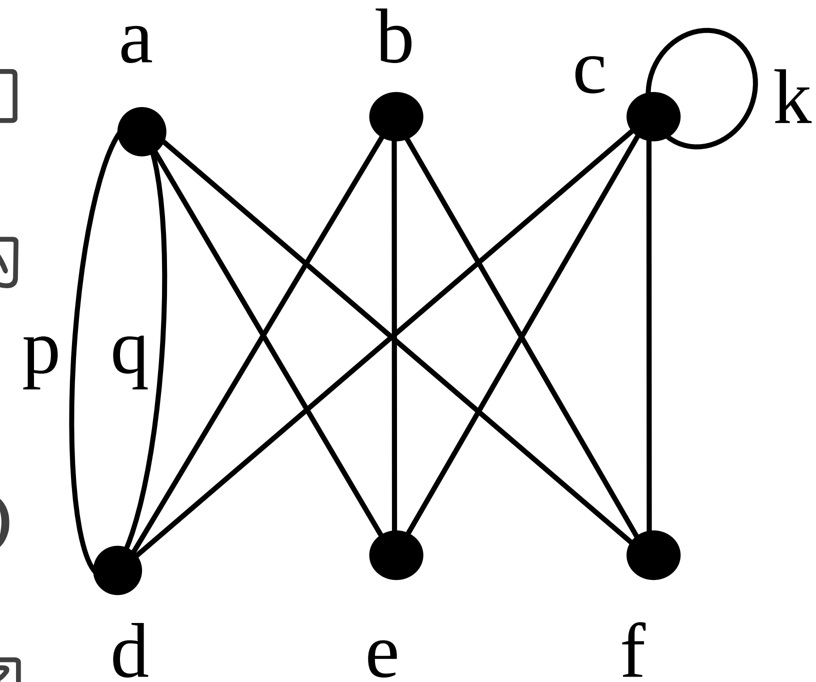
（ν ,ε）：$\nu(G)=|V(G)|,\ \varepsilon(G)=|E(G)|.$

- 称边ad与顶点a(及d)*相关联*(incident). 也称顶点 b(及 f)与边 bf *相关联*.
- 称顶点a与e*相邻*(adjacent). 也称有公共端点的一些边，例如 p与af彼此*相邻*.



G = (V, E)

- 称一条边的两个顶点为它的两个*端点*.
- *环*（loop，selfloop）：如边 k，它的两个端点相同.
- *棱*（link）：如边ae，它的两个端点不相同.
- *重边*：如边p及边q.
- *简单图*：（simple graph）无环，无重边.
- *平凡图*：仅有一个顶点的图.
- *注意*：任何一图都有 $V \neq \phi$.

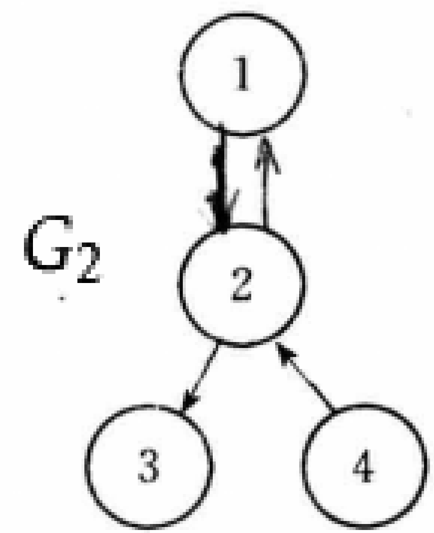


$G = (V, E)$

- 顶点 v的 度 $d_G(v)$ = G中与顶点v 相关联边数。（每一环记为2）

顶点的度是指和该顶点相连的边的条数。

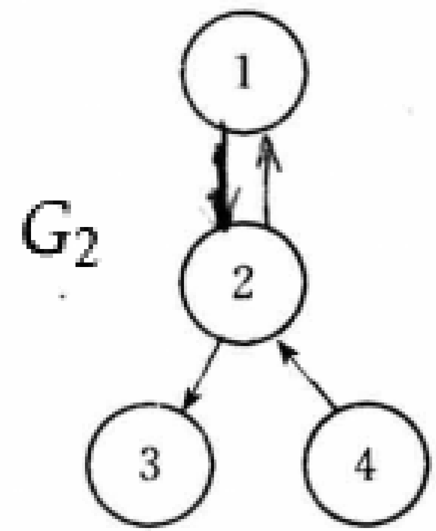
特别是对于有向图来说，顶点的出边条数称为该顶点的出度，顶点的入边条数称为该顶点的入度.



有向图 G_2 的顶点 V_2 的入度为2，出度也是2，顶点 V_2 的度则为4。

设G=<V，E>为一无向图，v∈V，称v作为边的端点次数之和为v的度数，简称为度，记做 dG(v)，在不发生混淆时，简记为d(v).

设D=<V，E>为有向图，v∈V，称v作为边的始点次数之和为v的出度，记作$d^+(v)$.称 v作为边的终点次数之和为v的入度，记作$d^-(v)$，称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数，记做d(v).



$d^+(v_2)=2$, $d^-(v_2)=2$.
$d(v_2)=4$.

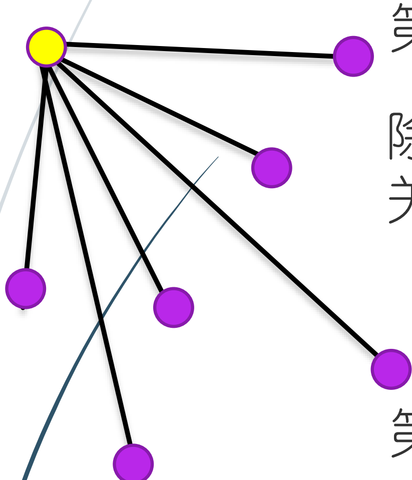
- 记号： 最大、最小度 Δ, δ 。（Δ(G)，δ(G)）

- 奇点：度为奇数的顶点；
- 偶点：度为偶数的顶点；
- 孤立点：度为0的顶点；
- 悬挂点：度为1的顶点；
- 悬挂边：悬挂点的关联边。

简单图：无环，无重边.

例题1.1 若G为简单图，则$\varepsilon \le \binom{v}{2}$.

设 $G=(V,E)$ 是n阶简单图，无环，无重边.



第一个节点至多与其余n-1个节点相关联：边数为n-1

除去第一个节点，第二个节点至多与其余n-2个节点相关联：不重复的边数为n-2

……

第n-1个节点不重复的边数至多为1

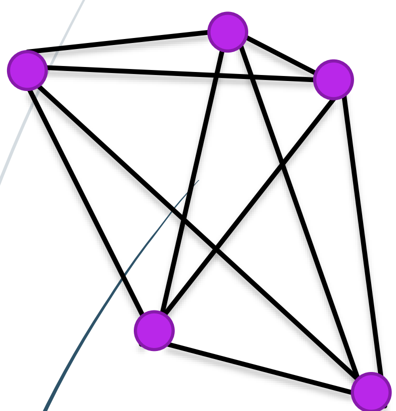
$$1+2+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \le \binom{v}{2}$$

简单图：无环，无重边.

例题1.1 若G为简单图，则$\varepsilon \le \binom{v}{2}$.

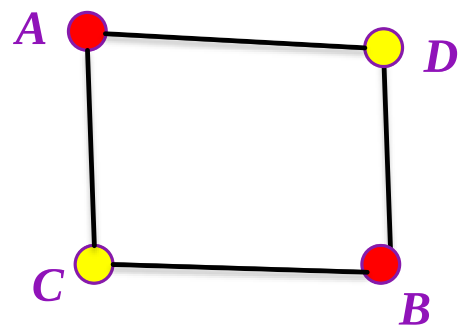
设 $G=(V,E)$ 简单图，无环，无重边.



每两个节点之间至多只有一条边，故而

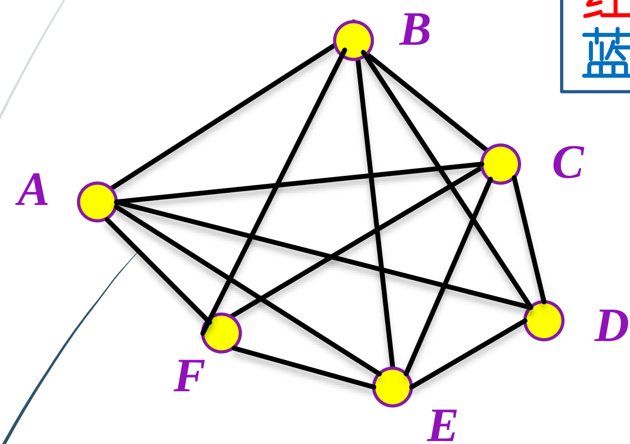
$$\varepsilon \le \binom{v}{2}$$

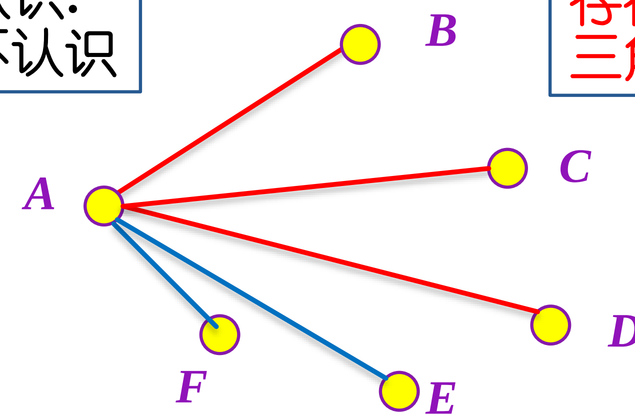
- 例题1.2 若一群人中，凡相识的两人都无公共朋友，凡不相识的两人都恰有两个公共朋友，则每人的朋友数相等(相识者互为朋友)。



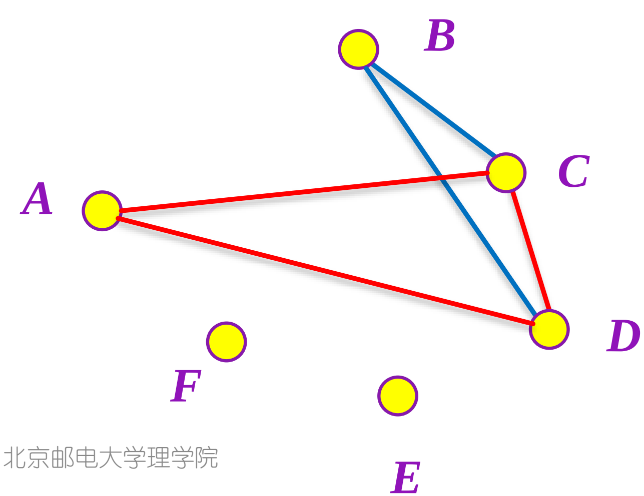
例题1.3 证明 在任意6个人的聚会上，要么有3个人互相认识，要么有3个互不认识。

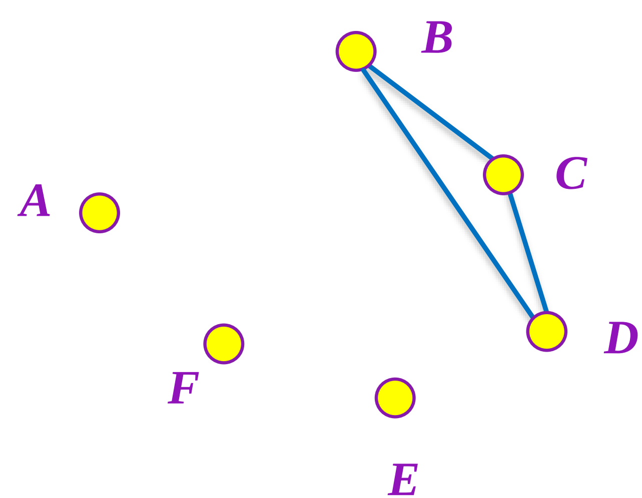
红色：认识.
蓝色：不认识





存在同色三角形





习题

- 请用其他方法证明上一个例题：

  证明在任意**6**个人的聚会上，要么有**3**个人互相认识，要么有**3**个互不认识。

Ramsey

- 虽然R(3,3)的证明十分巧妙，但是实际上已知的Ramsey数非常少，比如R(3,3)=6，R(3,4)=9，R(4,4)=18保罗·艾狄胥曾以一个故事来描述寻找拉姆齐数的难度：
- *“想像有队外星人军队在地球降落，要求取得$R(5,5)$的值，否则便会毁灭地球。在这个情况，我们应该集中所有电脑和数学家尝试去找这个数值。若它们要求的是$R(6,6)$的值，我们要尝试毁灭这班外星人了。”*

Ramsey数进展

r, s	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40 - 43
4	9	18	25	35 - 41	49 - 61	56 - 84	73 - 115	92 - 149
5	14	25	43 - 49	58 - 87	80 - 143	101 - 216	125 - 316	143 - 442
6	18	35 - 41	58 - 87	102 - 165	113 - 298	127 - 495	169 - 780	179 - 1171
7	23	49 - 61	80 - 143	113 - 298	205 - 540	216 - 1031	233 - 1713	289 - 2826
8	28	56 - 84	101 - 216	127 - 495	216 - 1031	282 - 1870	317 - 3583	317 - 6090
9	36	73 - 115	125 - 316	169 - 780	233 - 1713	317 - 3583	565 - 6588	580 - 12677
10	40 - 43	92 - 149	143 - 442	179 - 1171	289 - 2826	317 - 6090	580 - 12677	798 - 23556

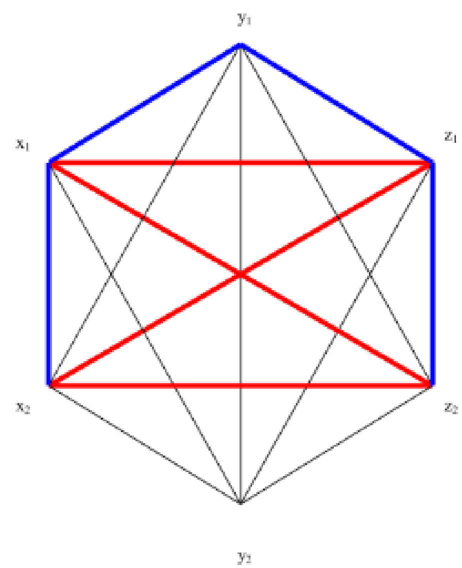
Ramsey问题的应用

二、分组交换网的设计

分组交换网是采用分组交换技术的网络，它从终端或计算机接收报文，把报文分割成分组，并按某种策略选择最佳路径在网中传输，到达目的地后再将分组合并成报文交给目的终端或计算机。分组交换技术在网络设计中被广泛采用。

https://www.doc88.com/p-954296849960.html

用顶点表示通信设备，用边表示通信链路，这样得到一个图。假定该图是完全图，即任意两点间都有一条边相连。在某些应用场合，顶点两两配对作为一个整体。我们希望保证在某些链路出故障不能使用时，任两对配对顶点间都至少有一条链路畅通无阻。



设顶点 x_1,x_2 组成一对，y_1,y_2 为一对，z_1 ,z_2 为一对，且故障发生在诸如微波塔、中继站等中间设施上。在此类设施上的故障将影响所有共享该设施的链路。对共享同一个中间设施的链路，我们用同一种颜色来标记它们.如上图表示一个有三种中间设施的通信网络。在图中，若标记红色的中间设施出了故障.那么在顶点对 x_1,x_2 和顶点对 z_1 ,z_2 之间将没有可用的链路，而这对应于下列事实:四条边(x_i,z_j)构成一个单色的 C_4(4 个顶点的回路)。**一般来说，设计一个网络需决定中间设施的数量以及哪个链路使用哪个设施。此外，在任何一个中间设施损坏时，我们希望所设计的网络中任两对配对顶点间有一个可使用的链路。**根据上面的讨论，我们应该避免出现单色的 C_4。

已知 Ramsey 数 $R(C_4,C_4)=6$。因此，如果只有两个中间设施，那

么存在一个 5 个顶点的网络使得可以安排一种不出现单色 C_4 的连接方式。已知 Ramsey 数 $R(C_4,C_4,C_4)=11$,所以存在一个 10 个顶点的网络，它使用三个中间设施且没有单色的 C_4。

前面说过，设计一个网络需要决定中间设施的数量以及哪个链路使用哪个设施。中间设施是很昂贵的，因而希望使其数量尽可能少。所以自然要问:如果有一个 n 个顶点的网络，在不出现单色 C_4 的条件下中间设施的最少个数是多少?换句话说，满足 $R(\underbrace{C_4,C_4,\dots,C_4}_{r})>n$ 的最小的 r 是多少?比如对上图，n=6，由于 $R(C_4,C_4)=6$，$R(C_4,C_4,C_4)=11$ 所以 r=3，即我们需要 3 个中间设施。

一般情况下，若 n 个顶点的图的 $n(n-1)/2$ 条边分成 r 种颜色类，由鸽巢原理，则必存在某个类至少有 $\frac{n(n-1)/2}{r}$ 条边。我们要选择 r 使得不存在包含有 $\frac{1}{2}n^{3/2}+\frac{1}{4}n$ 条边的类，因此，选 r 使其满足

$$\frac{n(n-1)/2}{r}<\frac{1}{2}n^{3/2}+\frac{1}{4}n$$

就行，即**满足上述不等式的最小 r 就是所需要的最少中间设施数。**