图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch5 遍历问题

Ch5 主要内容

- Euler环游
- 中国邮递员问题（Chinese Postman Problem，CPP）
- Hamilton 圈
- 旅行售货员问题(travelling salesman prob., TSP)

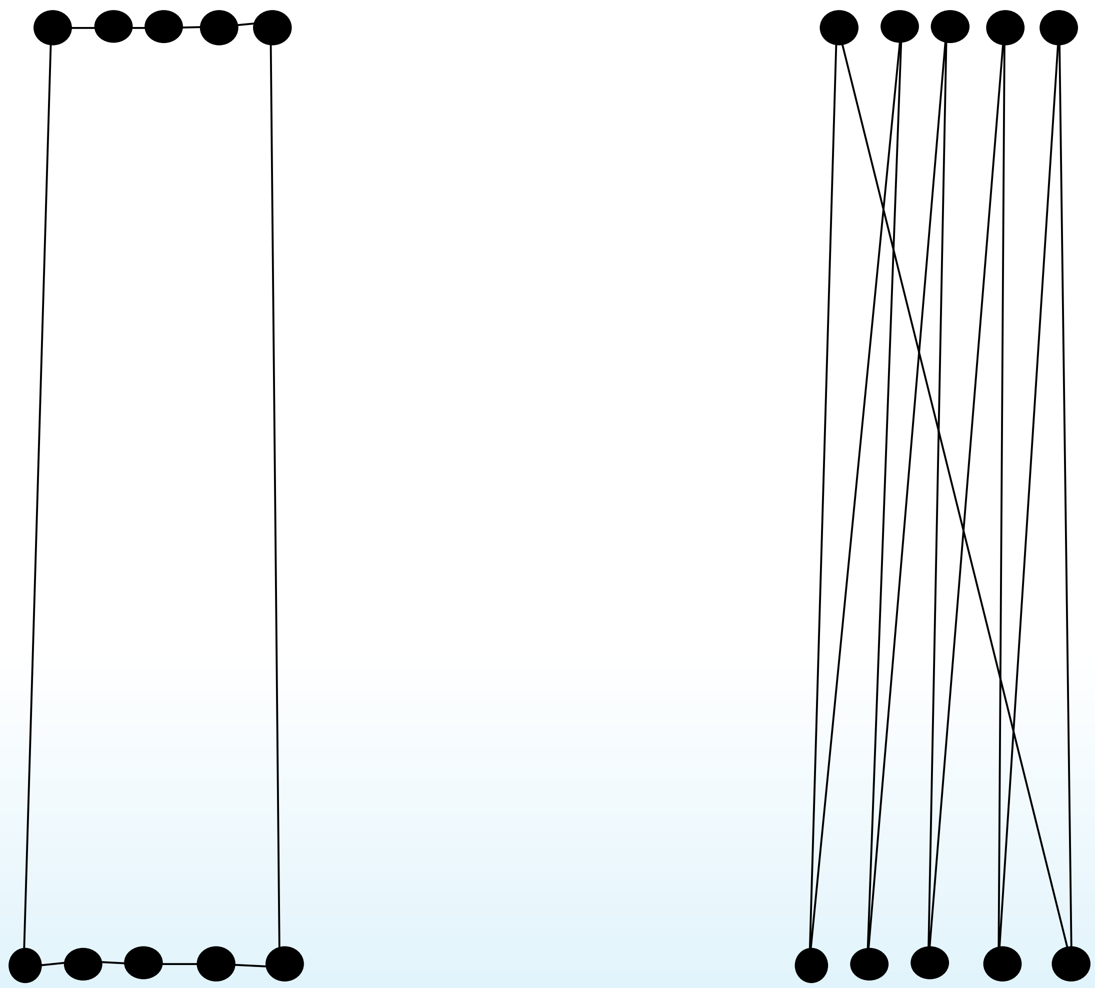
问题:

- 有一个售货员，从他所在的城市出发去访问其他*n*-1个城市，要求经过每个城市恰好一次，然后返回原地，问他的旅行路线怎样安排才最经济（即线路最短或旅费最省）？

- 任给一图G，G是否为**Hamilton**图？**(NP-hard)**
- 如果是，怎样安排旅行路线才最经济？**(NP-hard)**

- 图论问题：在任给一赋权完全图G中，求最小（最大）权**Hamilton**圈（最优圈（**optimal cycle**））。

对于一个Hamilton图，不同Hamilton圈的权重差别会很大。



- 一般的TSP是NP-hard Problem.
- 当城市数为n时，可能的路线数为：(n-1)! ，或简单情况为：(n-1)! /2
  - 为了比较权的大小，对每条Hamilton圈要做 *n* 次加法，故加法的总数为：n! /2
  - 对于权重全为1或无穷大的“简单情况”仍是NP-hard Problem
  - 理论上已经证明：除非P＝NP，不存在多项式时间近似算法，使相对误差小于或等于 ε

应用

- 如一工厂需要经过n道工序$j_1, j_2, \ldots, j_n$周而复始地生产某种产品，而从工序 j_i 到 j_k 的调整时间为$t_{i,k}$(设$t_{i,k} = t_{k,i}$)，如何安排加工顺序，使总调整时间为最短？

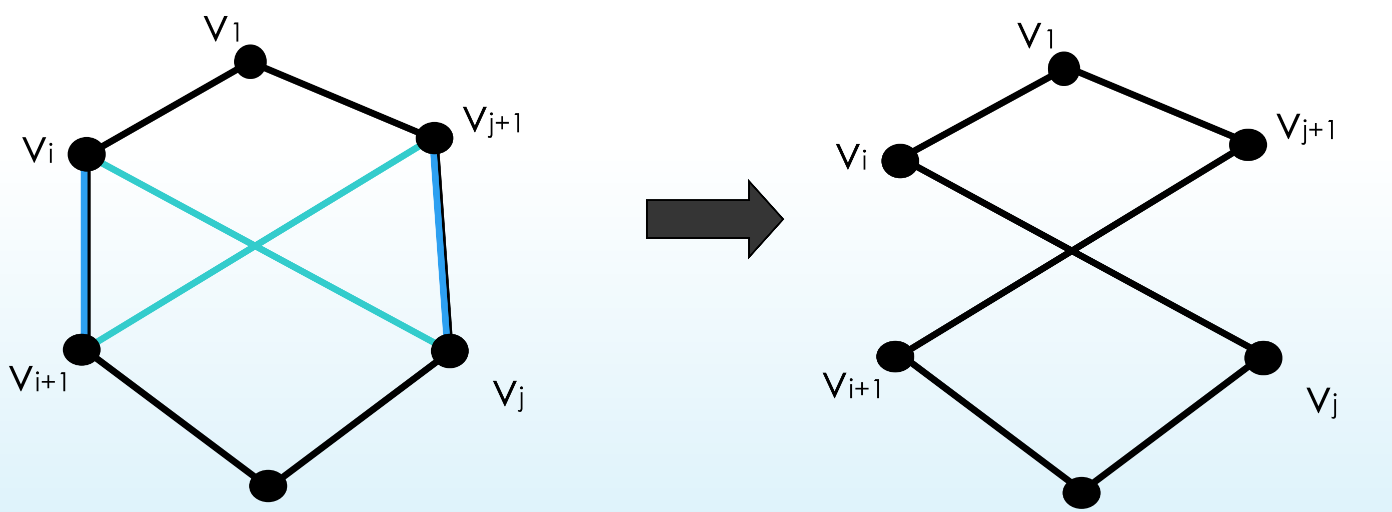
近似　（剪刀差方法）

- 先找一Hamilton 圈$C=v_1v_2\ldots v_\nu v_1$，再加以改进：

对任i与j, $1<i+1<j<\nu$,若有

$$w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1}),$$

则Hamilton 圈 $C_{ij} = v_1v_2\ldots v_iv_j v_{j-1}\ldots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\ldots v_\nu v_1$ 是C的一个改进。



- 反复进行上述步骤，直到不能再改进为止。
- 所得**Hamilton** 圈一般不会是最优圈，但可能是“比较好的”。上述步骤也可从不同的**Hamilton** 圈作为开始，反复进行之。
- 令**W’**为所求得最小权，它可作为最优圈**C***的权的上界，即**w(C*)** ≤ **W’**。

- 下界的估计式

设v为最优圈C*上任取的一个顶点，则C* - v为G - v中的一个生成树。令T为G - v 中的最优树，则有

$$w(T)+w(e)+w(f) \le w(C^*) ,$$

其中e，f为G 中与v相关联的边中权之和最小的两边。

- 所以 w(T)+w(e)+w(f) 可作为最优圈C*的下界。

- 设赋权完全图G的权满足三角不等式，即对任$x,y,z \in V$，都有 $w(xy) + w(yz) \geq w(xz)$ 。

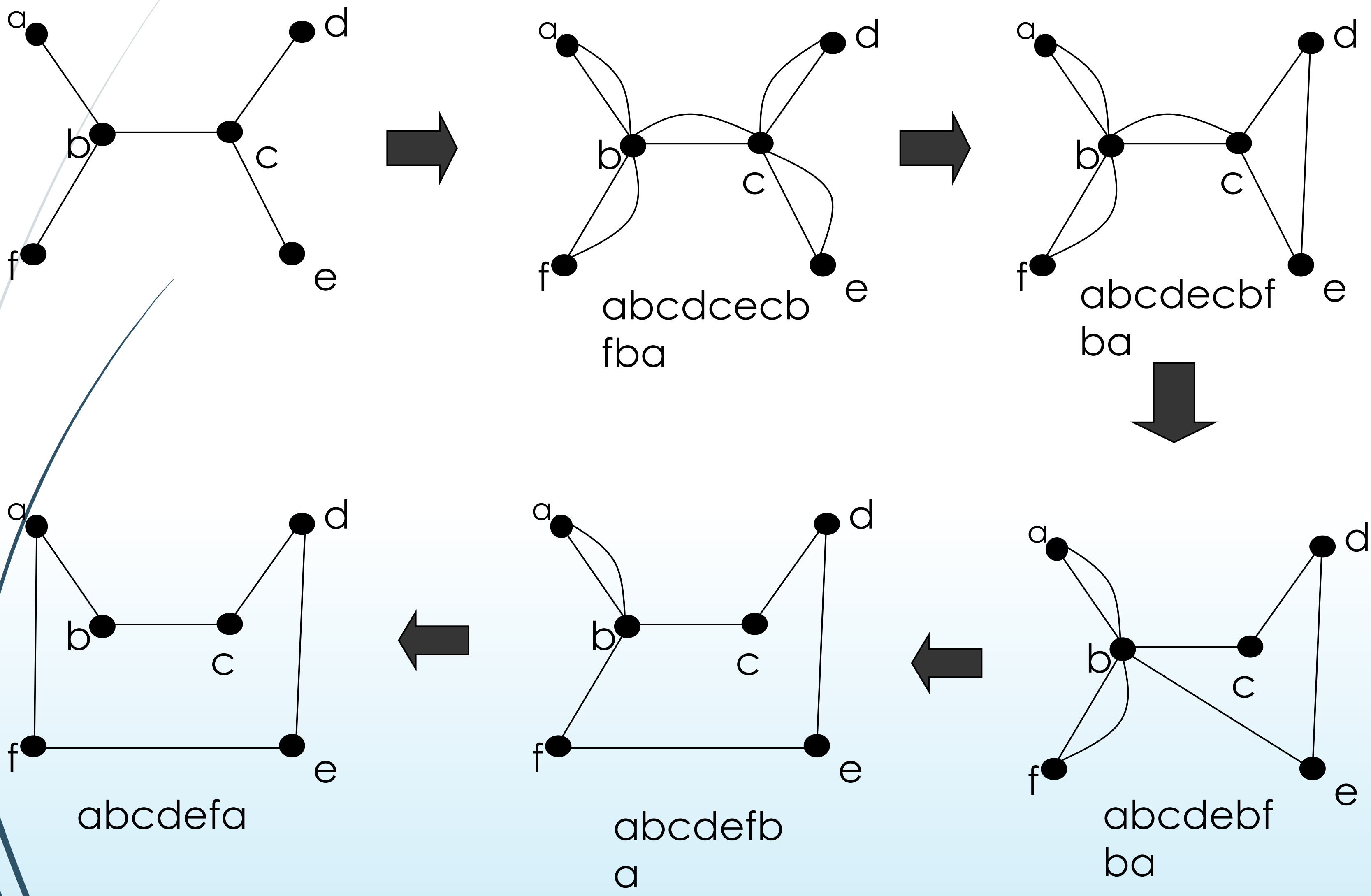
我们介绍一种用最小生成树求最优圈的近似算法。

（1）求G中的一棵最小生成树*T*。

（2）将*T*中各边均加一条与原边权值相同的平行边，设所得图为*G*'，显然*G*'是欧拉图。

（3）求*G*'中的一条欧拉回路*E*。

（4）在*E*中按如下方法求从顶点**v**出发的一个**Hamilton圈** ***H***：从**v**出发，沿*E*访问*G*'中各个结点，在没有访问完所有结点之前，一旦出现重复出现的结点，就跳过它走到下一个结点。（称这种走法为抄近路走法。）


abcdcecb
fba
abcdecbf
ba
abcdebf
ba
abcdefb
a
abcdefa

- $w(H)$作为最优圈的长度($w(C^*)$)的近似值，则：

$$w(T) \le w(C^*) \le w(H) \le 2\,w(T),$$

其中T 是G中的一最优树。

- TSP是算法与复杂性领域著名的测试问题。