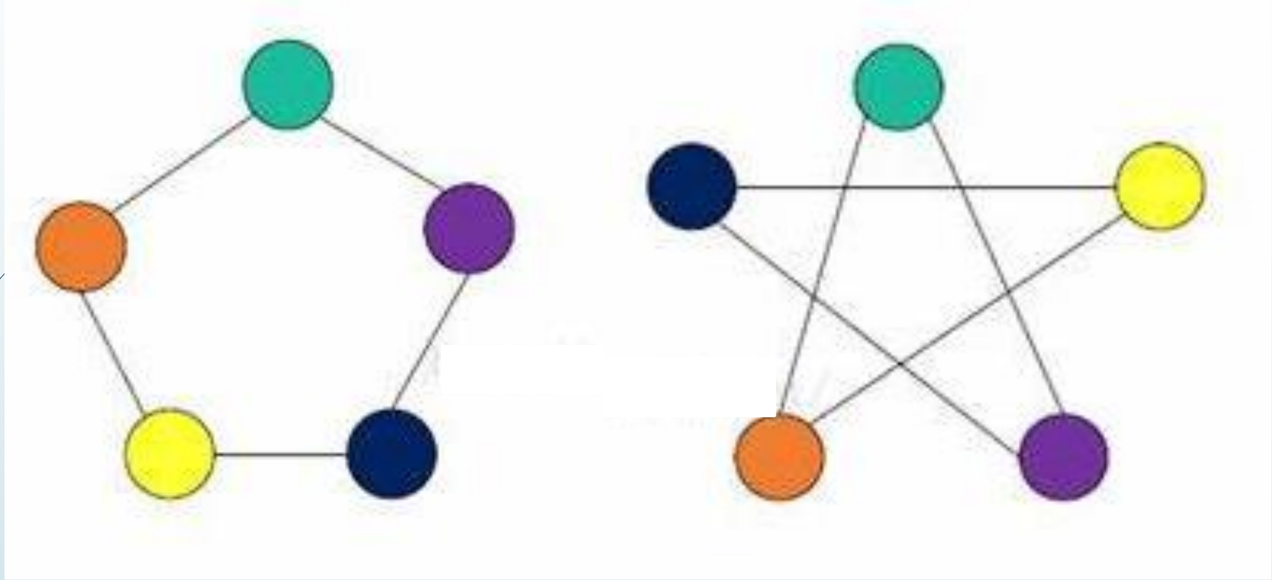
图论及其应用

北京邮电大学理学院

1.2. 图的同构



图恒等

图恒等：

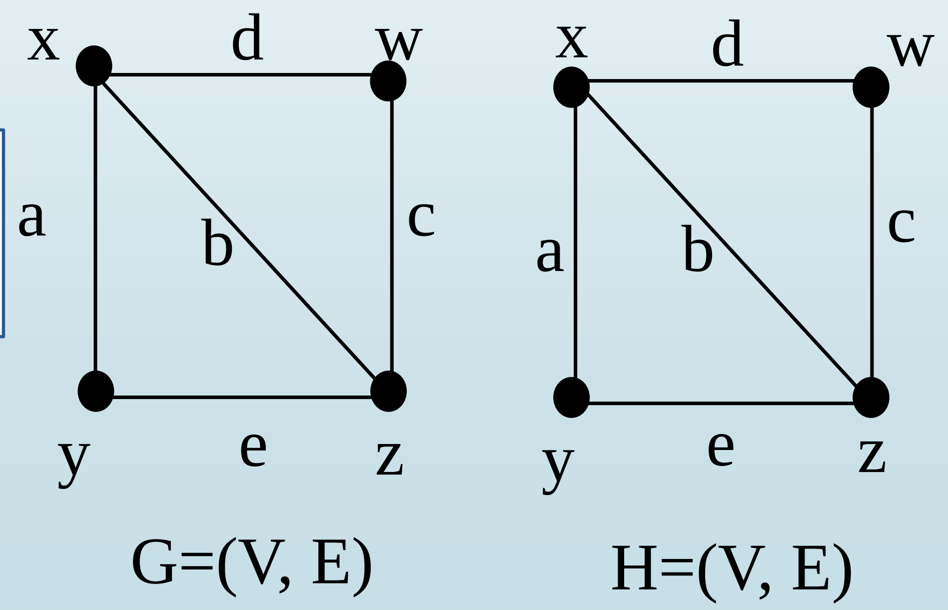
“相同”

两个图: G=(V(G),E(G)), H=(V(H),E(H))

若V(G)=V(H)，E(G)=E(H)同时成立，则称图G和图H是恒等的(identical) .

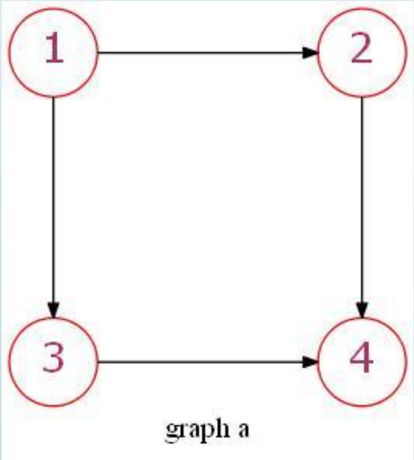
图G恒等于图H (记为 **G = H**)

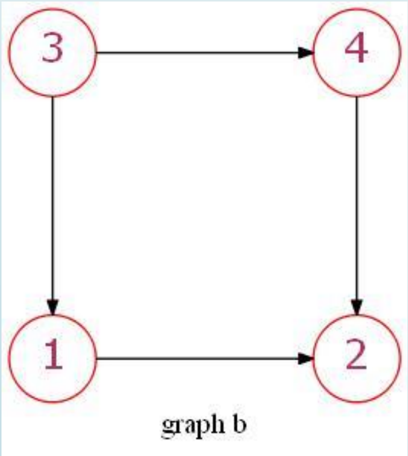
⇔ VG)=V(H)，E(G)=E(H).



图同构

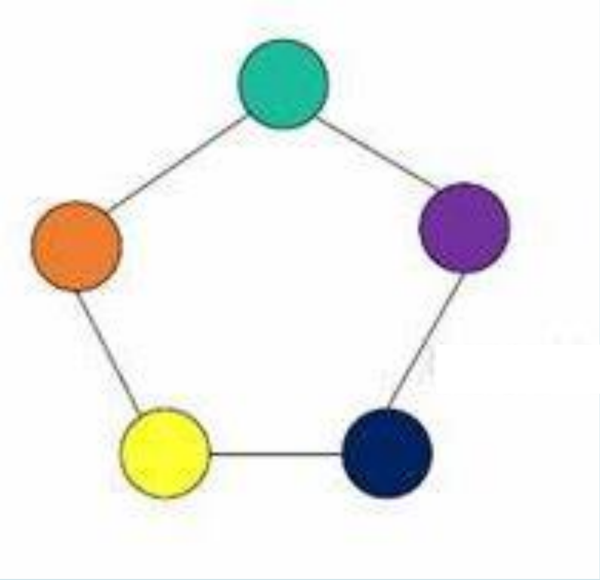
对于同一个图，我们可以用各种不同的形式来描述，这些形式都具有相同数目的边，具有相同数目的顶点，它们有着一一对应的关系，对应的顶点具有相同的连接性。这些图的不同形式，我们称之为图同构(**graph isomorphism**).

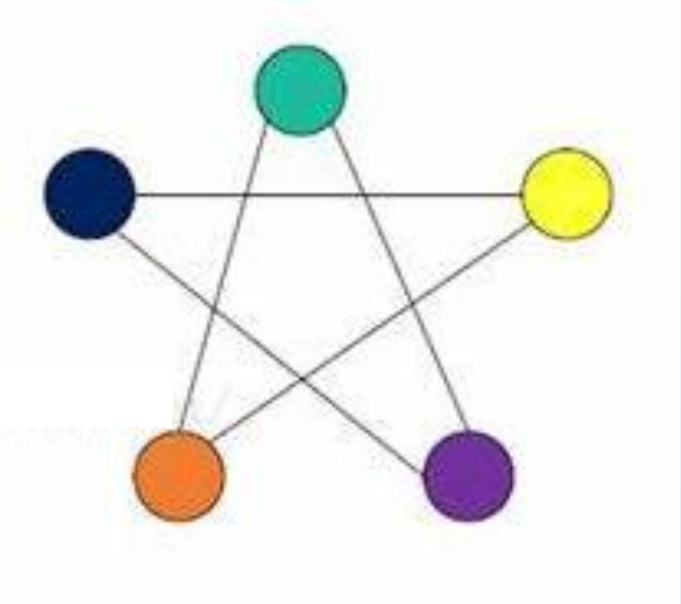




直观来说，如果图G1和G2顶点和边数量相同，且边（具有方向性，即有向图）的连接性相同，这两个图定义为同构。

可以认为，G_1的点是由G_2中的点映射得到。





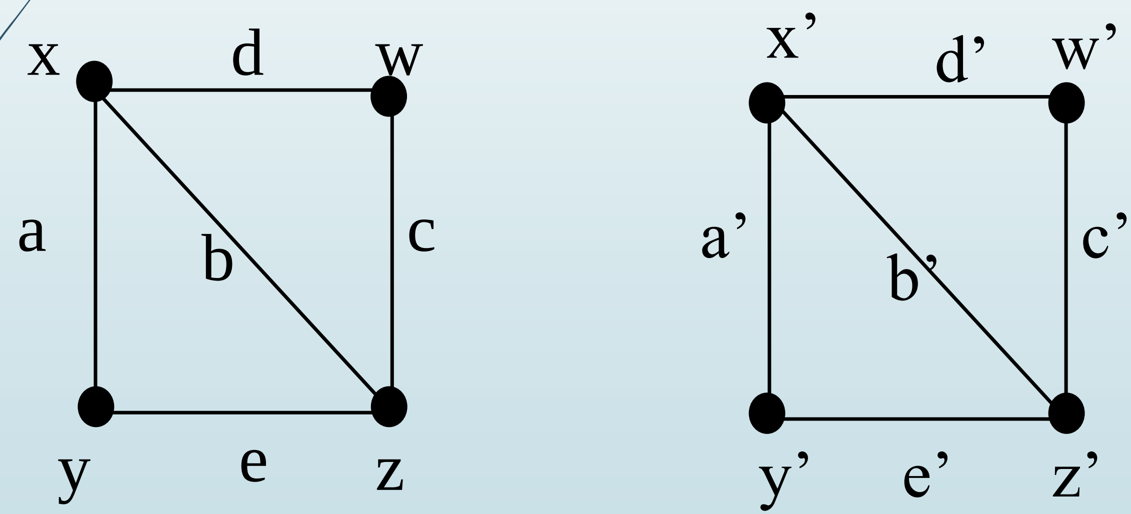
图G同构于图F （记为 G ≅ F ）

⇔ V(G)与V(F)，E(G)与E(F)之间各存在一 一映射，

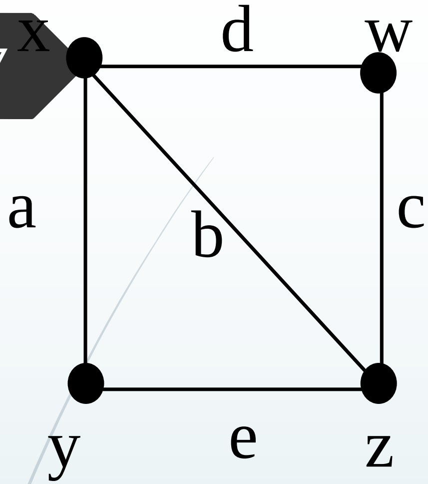
$\Psi : V(G) \to V(F)$ 及 $\Phi : E(G) \to E(F)$

且这二映射保持关联关系，即：

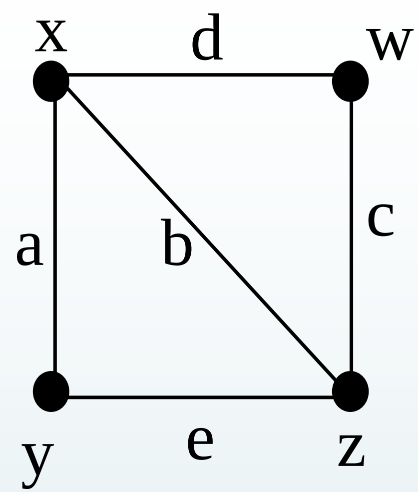
$$\Phi(e) = \Psi(u)\Psi(v),\ \forall e = uv \in E(G)$$



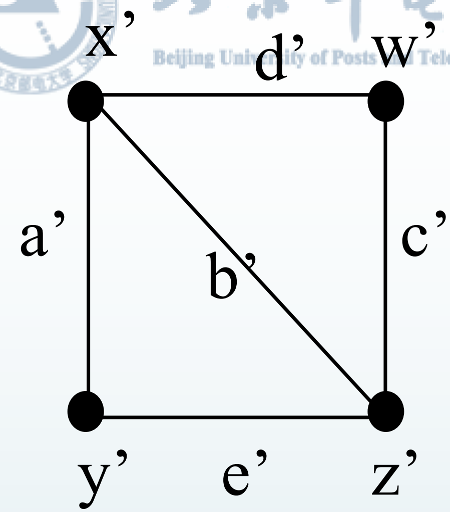
G=(V, E)　　F=(V’, E’)



G=(V, E)



H=(V, E)



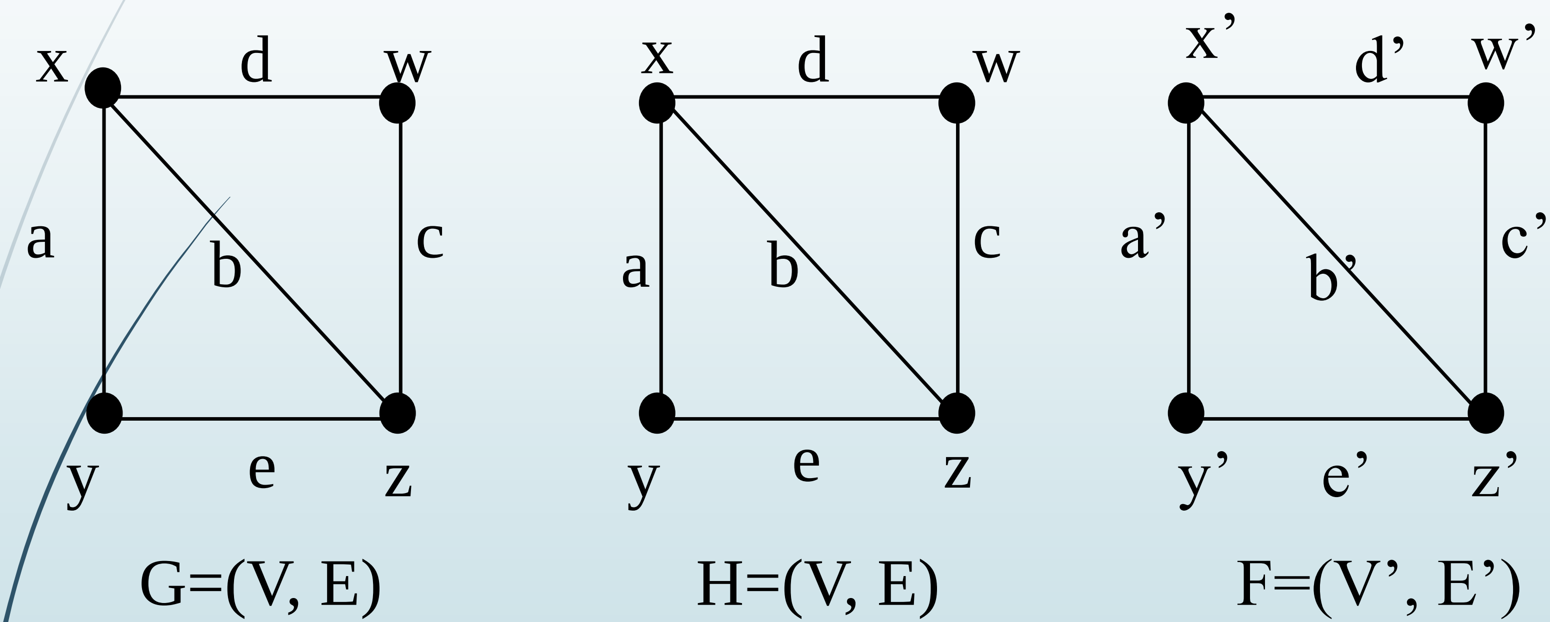
F=(V’, E’)

注 两个图同构是指”它们有相同的结构”，仅在顶点及边的标号上或两个图的画法上有所不同而已。往往将同构概念引伸到非标号图中，以表达两个图在结构上是否相同。

注 判定两个图是否同构是个未解决的困难问题（open problem）。

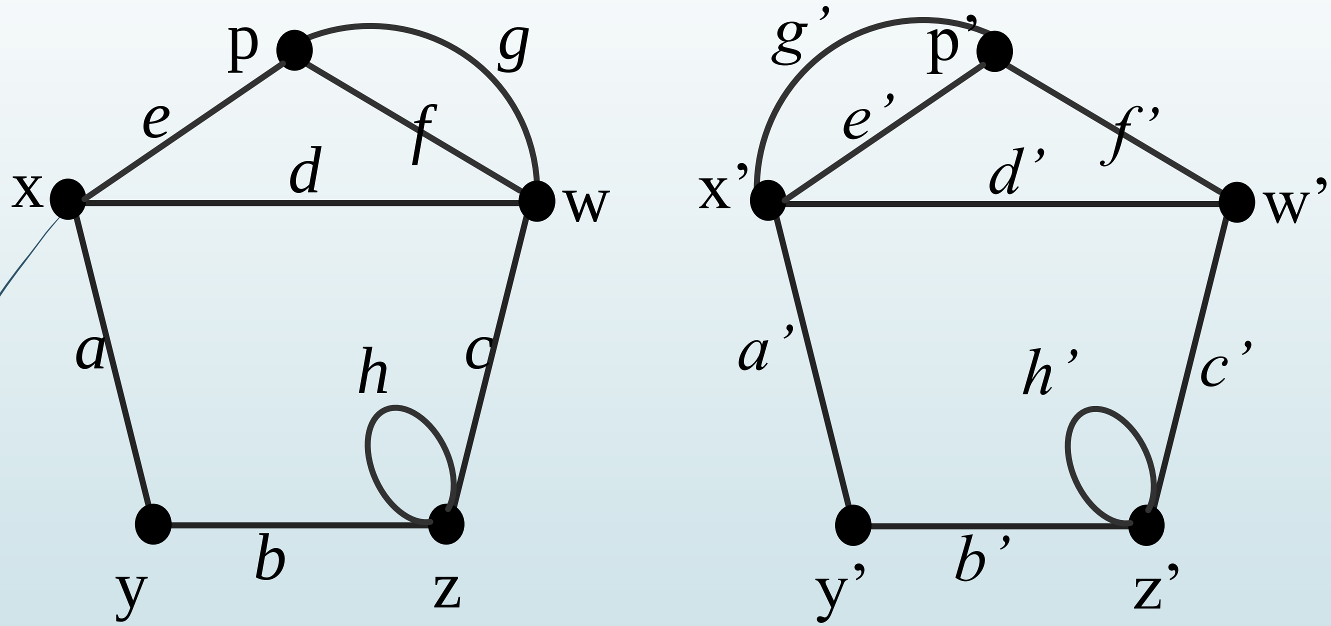
例题 1-5

证明下面的图G与图H，图F是同构的.



例题 1-6

证明下面的图G与图H是不同构的.

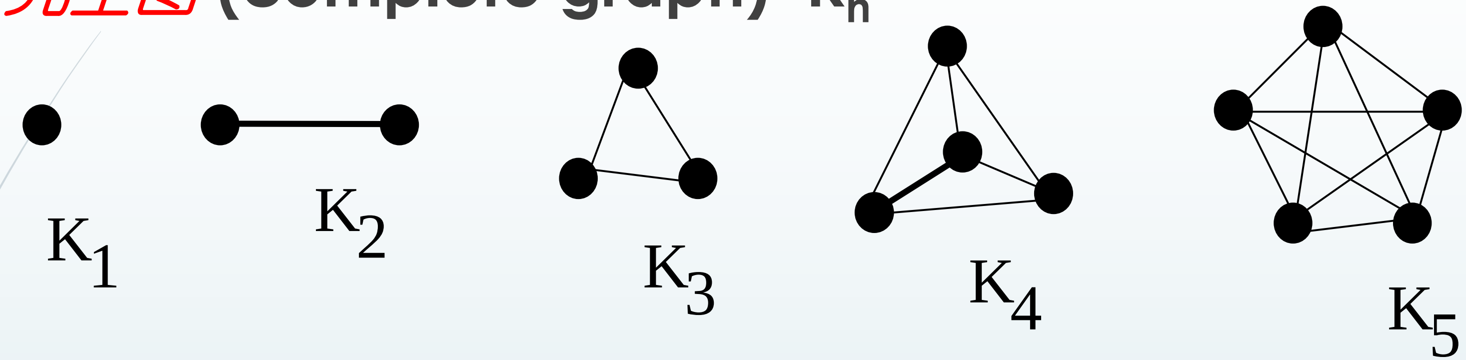


G=(V, E)

H=(V', E')

- [图同构](Graph isomorphism)是NP问题，但是既没有人找到多项式算法(证明是P问题)，也没有人能证明是NP-complete问题。

- **完全图 (complete graph) K_n**



- **空图 (empty g.)** $\Leftrightarrow$ $E = \varnothing$。

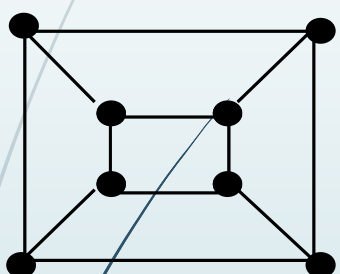
  V' ($\subseteq V$) 为独立集 $\Leftrightarrow$ V'中任二顶点都互不相邻。

- **二部图 (偶图，bipartite g.)**

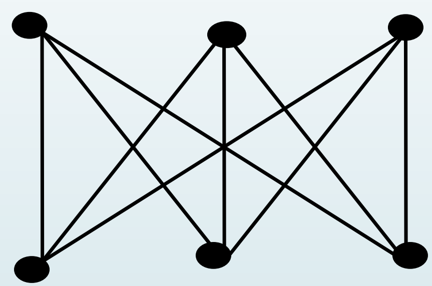
  $G = (X, Y ; E)$ $\Leftrightarrow$存在 $V(G)$ 的一个 2-划分 (X, Y)

  (即$V(G)=X \cup Y$，且$X \cap Y=\phi$)，使X与Y 都是独立集。

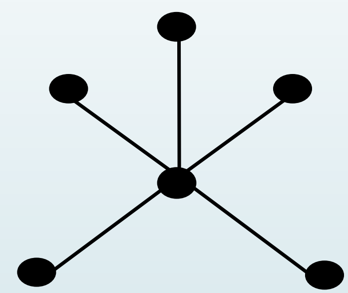
- *完全二部图* $K_{m,n}$ $\Leftrightarrow$ 二部图G = (X, Y; E)，其中X和Y之间的每对顶点都相邻，且 $|X| = m$， $|Y| = n$ 。



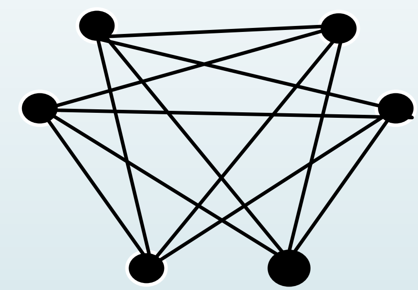
二部图



$K_{3,3}$



$K_{1,5}$



$K_{2,2,2}$

- 类似地可定义，*完全三部图*（例如， $K_{m,n,p}$），完全 n-部 图等。

如何判断是二部图

- 用定义？
-

- 定理1-1（握手定理）设G=<V,E>为任意无向图，V={v1,v2,…,vn}，|E|=ε，则所有顶点的度数和等于2ε.

- 推论1-1设G=<V,E>为任意图，奇数顶点的个数总是偶数（包括0）.

- 推论1-2 在任意凸多面体上，边数是奇数的面的个数一定偶数.

- 定理1-2

设D=(V,A)是一个有向图，则：各顶点入度之和等于各顶点的出度之和，且同时等于弧的个数。

设V（G）$=\{v_1, v_2, v_3\ldots v_n\}$， 则称$(d(v_1), d(v_2), d(v_3) \ldots d(v_n))$为图G的度序列。

- 例1-7

证明：非负整数序列$(d(v_1), d(v_2), d(v_3)\ldots d(v_n))$为某图的度序列的充要条件是该非负整数序列的和为偶数。

➨ 例1-8

证明：在人数大于1的任何一个群体中，一定有两个或者两个以上的人在该群体中有相同的朋友数。

例1-9

用染色法判定二部图。用红蓝两种颜色进行顶点标号如下：任取一顶点v 标以红色。再将v的所有相邻顶点都标以兰色。这时称v为已扫描顶点。若尚存在一已标号未扫描顶点u，将它的所有相邻顶点，（若不出现矛盾）都标以（其相异色）红色，并称u为已扫描顶点。如此继续下去，直到或者所有顶点都已标号，从而该图为一二部图；或者在标号过程中出现矛盾，该图为非二部图。

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

记V（$V \neq \varnothing$）为图G的顶点集合，令C为图G中已染色的顶点集合，置C=$\varnothing$；令S为图G中已扫描的顶点集合，置S=$\varnothing$；

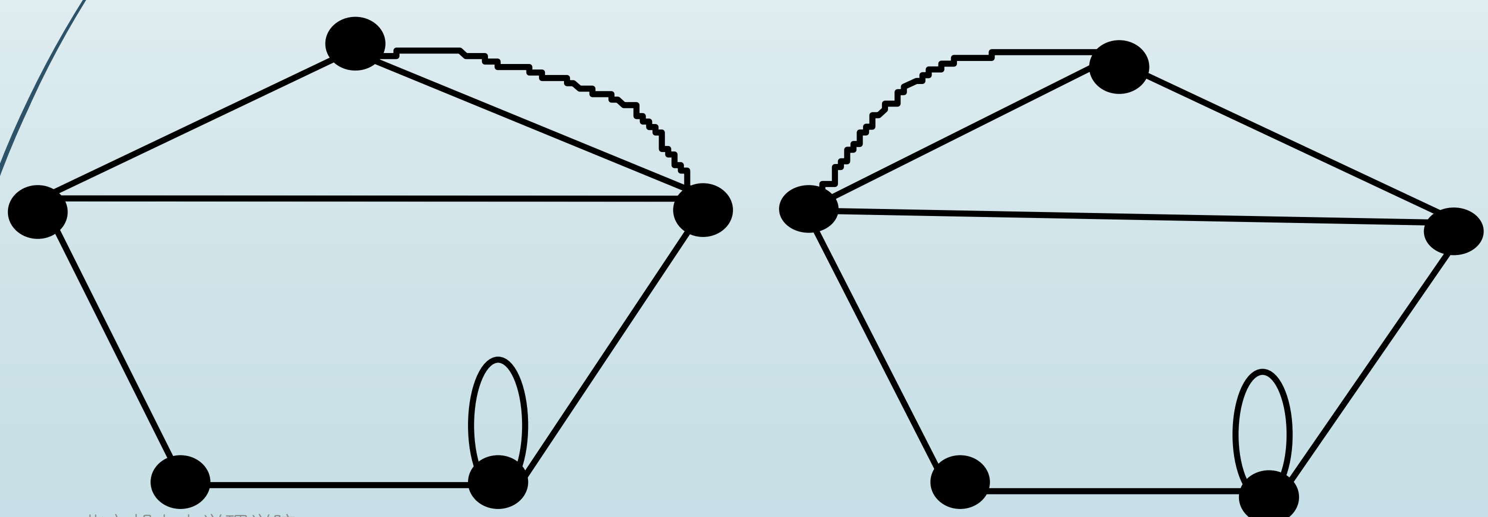
1. 任取一顶点$v \in V \setminus C$染以红色，令$C = C \cup v$。
2. 如果$S = V$，则图G为二部图，算法结束。否则（此时$S \subset V$），转3。
3. 如果S=C（此时$S = C \subset V$），转1；否则（此时$S \subset C \subset V$），转4.
4. 取任意$w \in C \setminus S$（w为一个已染色但未扫描顶点），对w进行扫描如下：取出图G中与点w相邻的任意顶点t，如果$t \notin C$，对t染以与w相异的颜色，令$C = C \cup t$；

   如果$t \in C$，查看t所染颜色，t所染颜色与w所染颜色相异，则不作改变，继续查找图G中与点w相邻的其他顶点；如果t所染颜色与w所染颜色相同，则算法停止，图G就是非二部图。扫描完成后，令$S = S \cup w$。转2。

习题

1.2.1 $G \cong H \Rightarrow \nu(G) = \nu(H)$，$\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$。 并证明其逆命题不成立。

1..2.2 证明下面两个图不同构：



1.2.3 证明下面图1与图2是同构的；而图1与图3是不同构的：

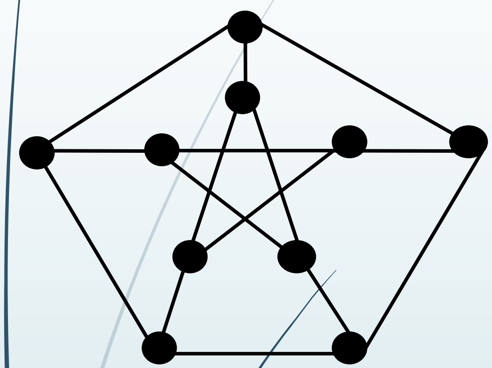


图 1

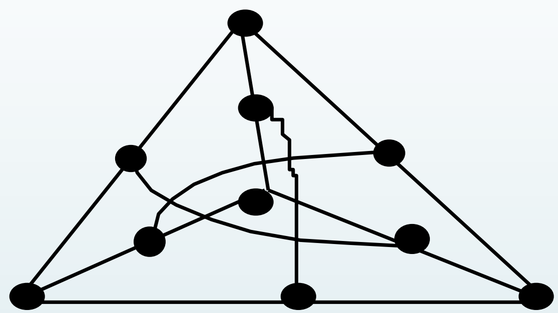


图 2

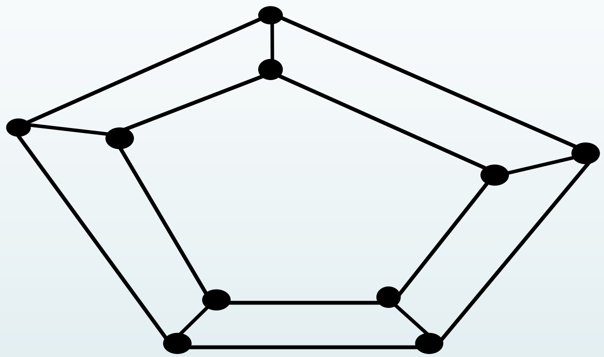


图 3

- **1.2.4** 证明两个简单图G和H 同构 $\Leftrightarrow$ 存在一一映射 f : V(G) $\rightarrow$V(H)，使得 uv $\in$ E(G)当且仅当 f(u)f(v) $\in$ E(H)。

1.2.5 证明：(a). $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$;

(b). 对简单二部图有 $\varepsilon \le \nu^2/4$.

- 1.2.6 记$T_{m,n}$为这样的一个完全m-部图：其顶点数为n，每个部分的顶点数为[n/m] 或{n/m}个。证明：

(a). $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$ 其中 k =[n/m] .

(b)*. 对任意的n顶点完全m-部图G，一定有$\varepsilon(G) \le \varepsilon(T_{m,n})$，且仅当$G \cong T_{m,n}$ 时等式才成立。

- 1.2.7 所谓k-方体是这样的图：其顶点是由0与1组成的有序k-元组，其二顶点相邻当且仅当它们恰有一个坐标不同。证明k-方体有2^k个顶点，$k*2^{k-1}$条边，且是一偶图。

1.2.8 简单图G的补图G ^{c} 是指和G有相同顶点集V的一个简单图，在G ^{c}中两个

顶点相邻当且仅当它们在G中不相邻。

(a). 画出K^c_n和 $K^c_{m,n}$。

(b). 如果$G \cong G^c$则称简单图G为自补的。证明：若G是自补的，则 $v \equiv 0, 1 \pmod 4$ 。

- 1.2.9 设 $V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，且

$$v_iv_j \in E(H) \Leftrightarrow d_G(u_i)+d_G(u_j)=\text{奇数},$$

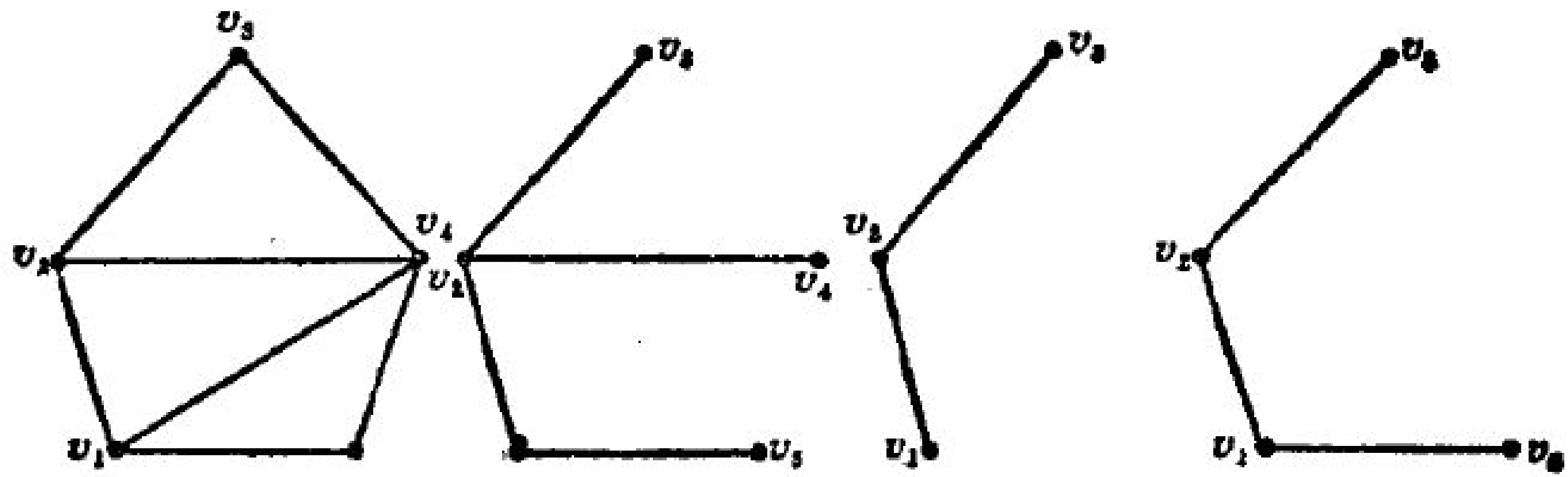
则H一定是个完全二部图。

- 1.2.10 若$v \geq 2$ 的简单图 $G=(V,E)$中如下性质成立

$$uv, vw \notin E \Rightarrow uw \notin E, \qquad \forall u,v,w \in V$$

则G一定是个完全（某）m部图。

1.3 子图

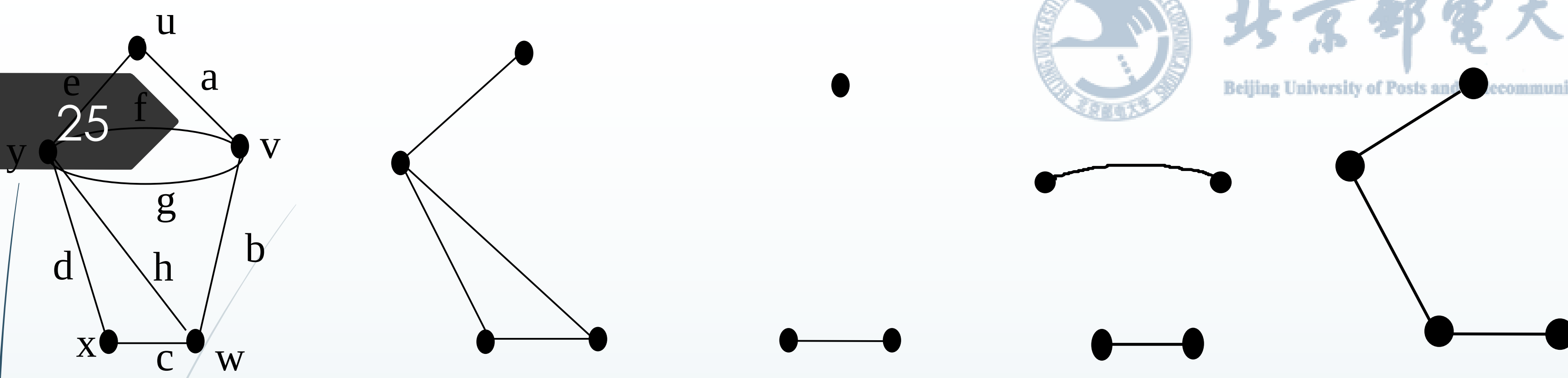


G $\quad G_2 \quad G_3 = G[\{v_1, v_2, v_3\}] \quad G_3 = G - v_4$

- 子图(subgraph)　$H \subseteq G \Leftrightarrow V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ 。
- 真子图　$H \subset G \Leftrightarrow H \subseteq G$ 且$H \neq G$ 。母图（super graph）。
- 生成子图（spanning subg.）　$H \Leftrightarrow H \subseteq G$ 且$V(H) = V(G)$。
- 生成母图。
- 基础简单图（underlying simple g.）：从一图中去掉其所有重边及环后所得的剩余（简单图）图称之为其基础简单图。
- 导出子图（induced subgraph.）$G[V']$,　(非空 $V' \subseteq V$)

  $\Leftrightarrow$ 以V'为顶点集，以G中两端都在V'上的边全体为边集构成的G的子图
- 边导出子图　$G[E']$　(非空$E' \subseteq E$)

  $\Leftrightarrow$ 以E'为边集，以E'中所有边的端点为顶点集的的子图。

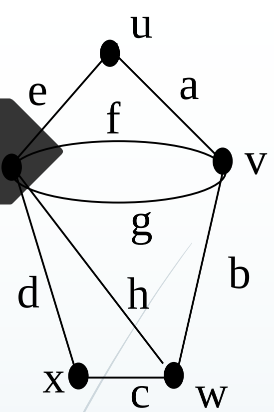


G=(V, E) G[{u,w,x,y}] G[{u,w,x}] G[{f, c}] G[{c,d,e}]

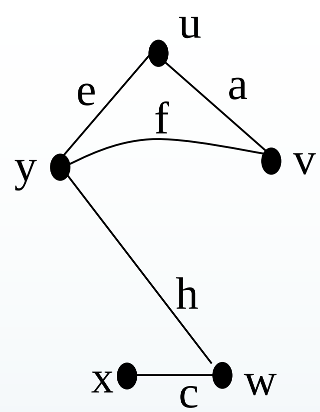
G[V’], G[E’] 两种子图对应于取子图的两种基本运算。

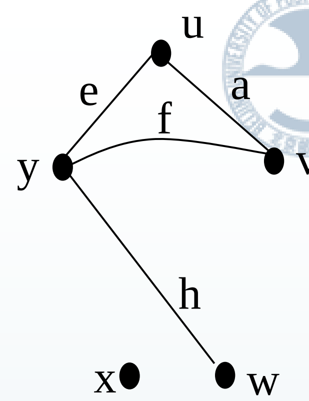
下面是取子图的另两种基本运算：

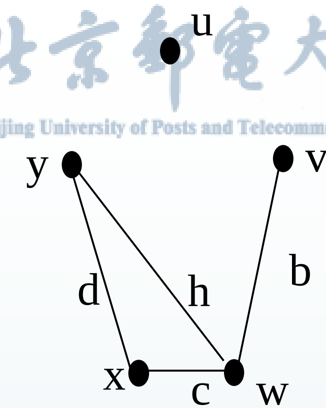
- G - V’ ⇔ 去掉V’及与V’相关联的一切边所得的剩余子图. ⇔ 即 G[V \ V’]
- G - E’ ⇔ 从中去掉E’ 后所得的生成子图



G=(V, E)







➨ 例：G - {b, d, g}, (= G[E \ {b, d, g}])

G - {b, c, d, g}, (≠ G[E \ {b, c, d, g}])

G - {a, e, f, g}. (≠ G[E \ {a, e, f, g}])

注意 G[E \ E’] 与G - E’

虽有相同的边集，但两者不一定相等：后者一定是生成子图，而前者则不然。

- 上述四种运算是最基本的取子图运算，今后经常会遇到，一定要认真掌握好。关于子图的另一些定义还有：

G + E' $\Leftrightarrow$ 往G上加新边集E' 所得的（G的）母图。

为简单计，今后将

$G \pm \{e\}$ 简记为 $G \pm e$ ；

$G - \{v\}$ 简记为 $G - v$ 。

设 G_1，$G_2 \subseteq G$，称G_1与G_2为

- 不相交的（disjiont） $\Leftrightarrow$ $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$

  $(\therefore E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing)$
- 边不相交 （edge-distjiont，边不重的）

  $\Leftrightarrow$ $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$ 。

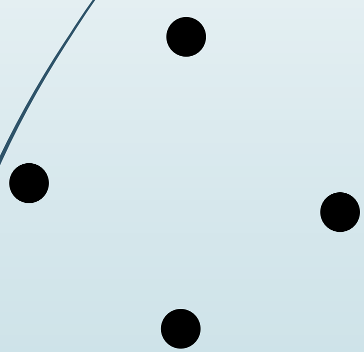
  (但这时G_1与G_2仍可能为相交的）。
- 并图 $G_1 \cup G_2$，当不相交时可简记为 G_1+G_2.
- 交图 $G_1 \cap G_2$.

正则图是指各顶点的度均相同的无向简单图。

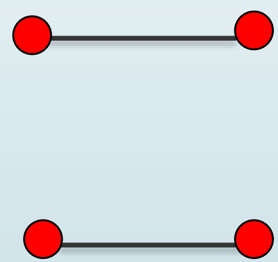
在图论中，正则图中每个顶点具有相同数量的邻点；即每个顶点具有相同的度。 正则的有向图也必须满足更多的条件，即每个顶点的内外自由度都要彼此相等。

具有k个自由度的顶点的正则图被称为k度的**k-正则图**。

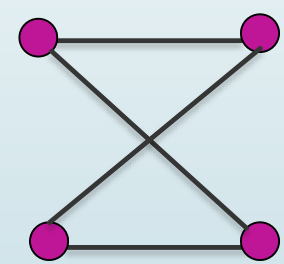
奇数程度的正则图形将包含偶数个顶点。



G1:0-正则图



G2:1-正则图



G3:2-正则图

k正则图存在的必要和充分条件是n≥k+1并且nk是偶数。 在这种情况下，通过考虑循环图的适当参数，可以很容易地构建正则图.

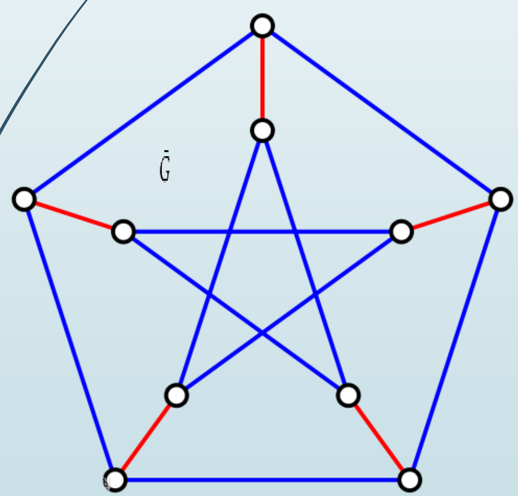
北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 例1-14 完全图K_n是(n-1)-正则图；完全偶图$k_{n,n}$是n-正则图

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

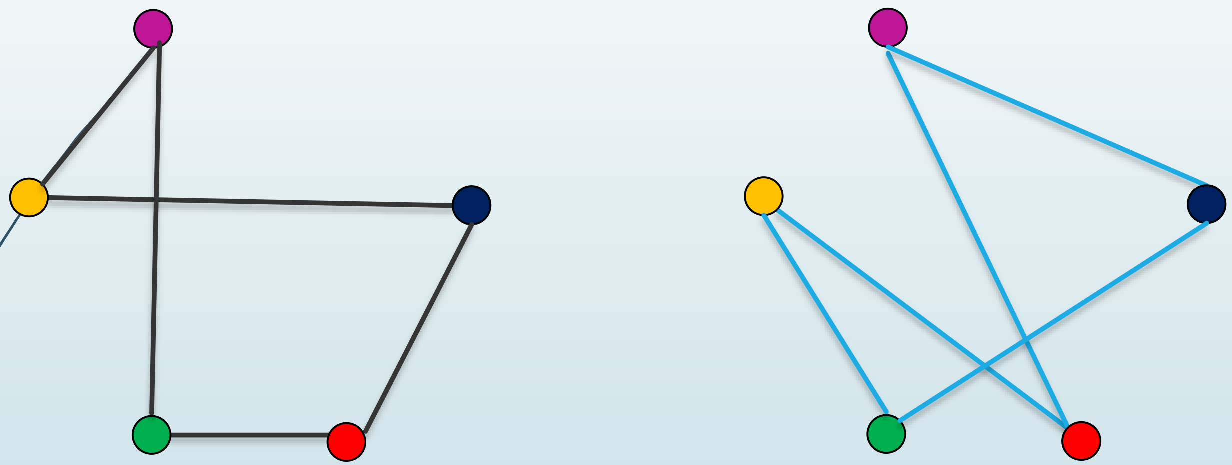
图G的补图，通俗的来讲就是完全图K_n去除G的边集后得到的图K_n-G。

一个图G的**补图**（complement））是一个图有着跟G相同的点，而且这些点之间有边相连当且仅当在G里面他们没有边相连。



一个图G的补图是指这样的一个图：节点集为G的节点集，两个节点有一条边相连，当且仅当这两个节点在G上不相邻，换句话说，它是G关于K_n的相对补图。若图G的补图与它自身同构，则称为自补图。

- 例1-15 下面的两个图互为补图



- 极大子图
- 极小子图
- 边图（线图）
- 有向子图
- 有向导出子图

习题

- 1.3.1 证明：完全图的每个导出子图是完全图；偶图的每个导出子图是偶图。

- 1.3.2* 设G为一简单图，$1 < n < \nu - 1$。证明：若 $\nu \geq 4$，且G中每个n顶点的导出子图均有相同的边数，则 $G \cong K_\nu$ 或 K^c_ν。