图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

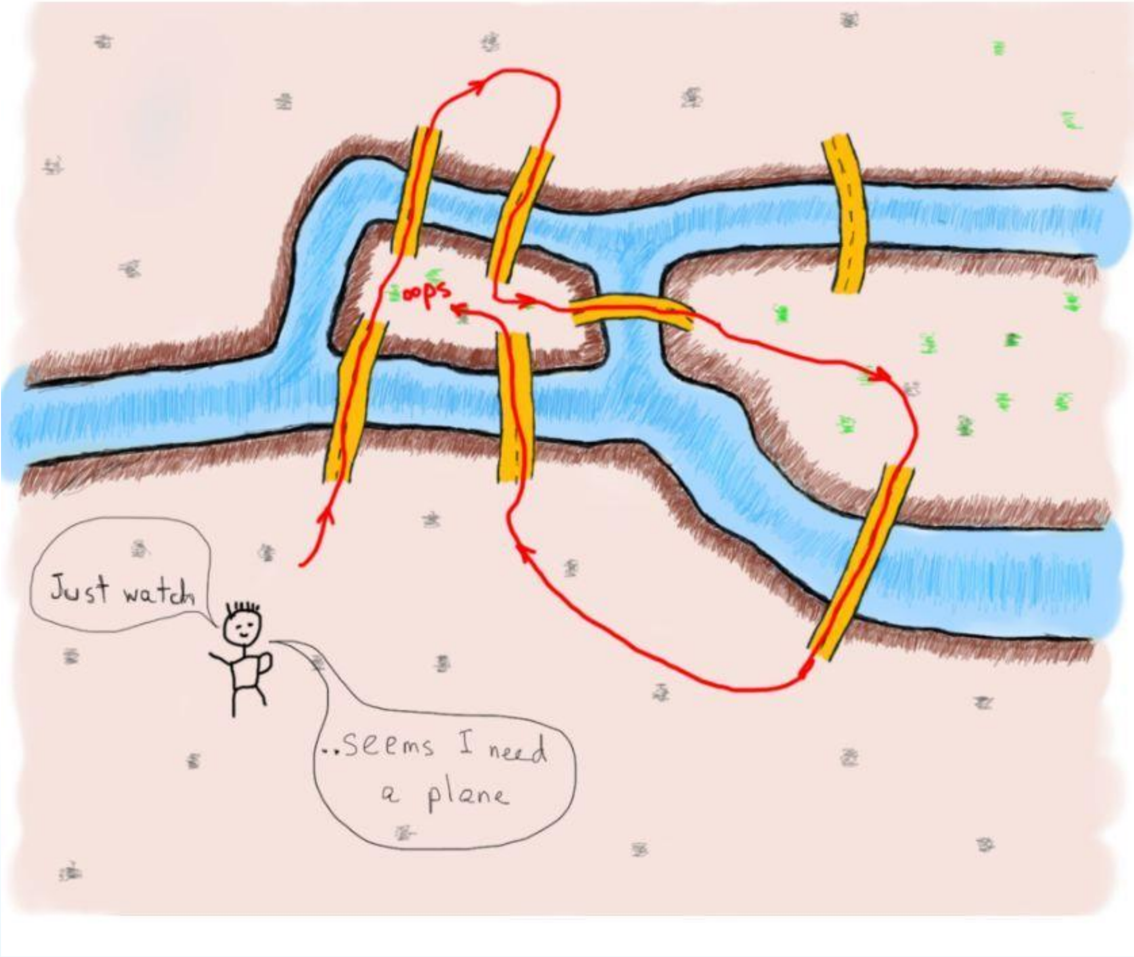
Ch5 遍历问题

Ch5 主要内容

- Euler环游
- 中国邮递员问题（Chinese Postman Problem，CPP）
- Hamilton 圈
- 旅行售货员问题(travelling salesman prob., TSP)

七桥问题

在加里宁格勒（Kaliningrad）有七座桥，连接着由普雷戈里亚（Pregolya）河分割而成的两个岛屿和两大陆地。

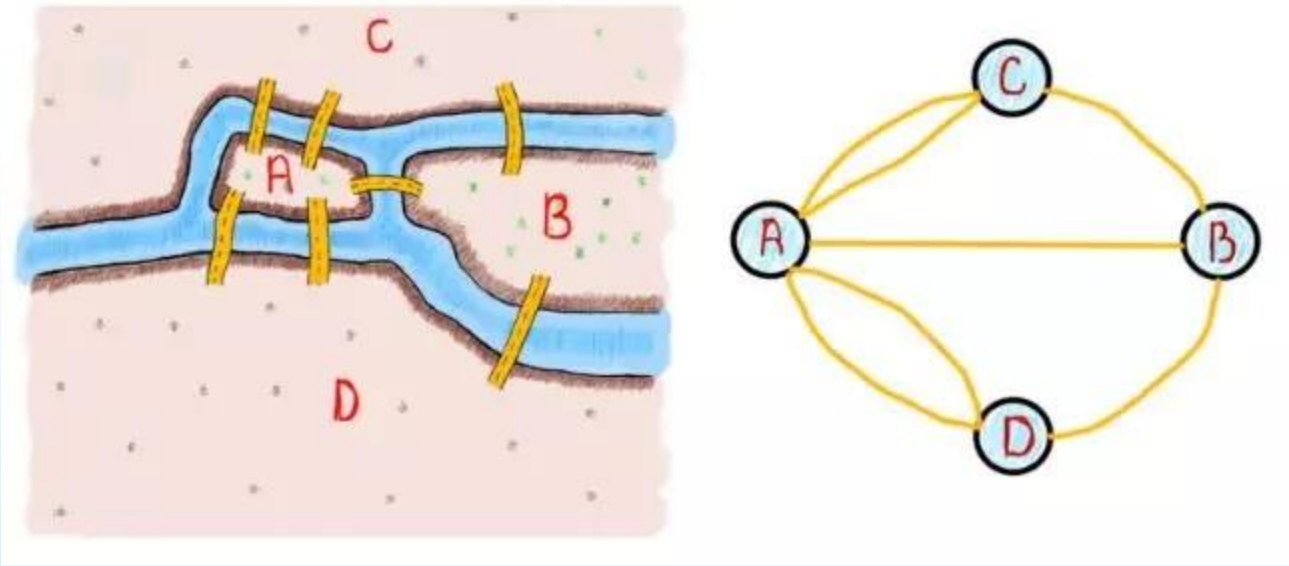


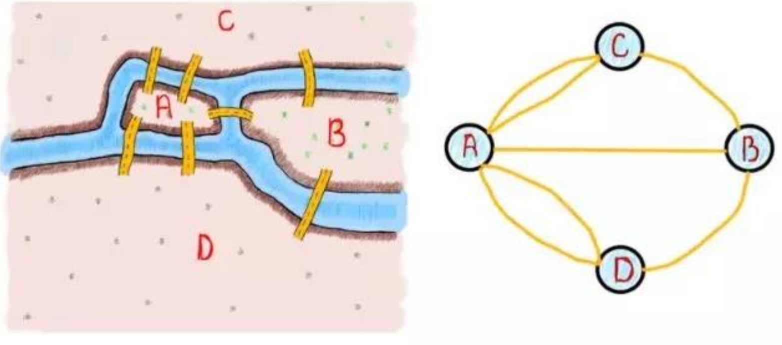
尝试：在穿过每座桥仅一次的情况下穿过这个城市。

Leonhard Euler

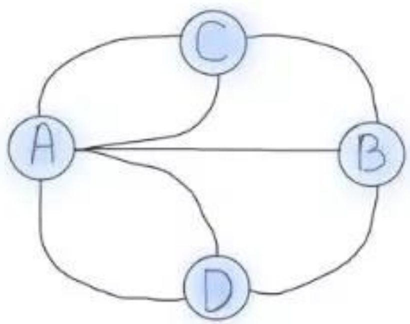
他没有试图解决这一问题，而是证明其不可解决！

Euler 首先把陆地和桥转化成我们看得懂的图

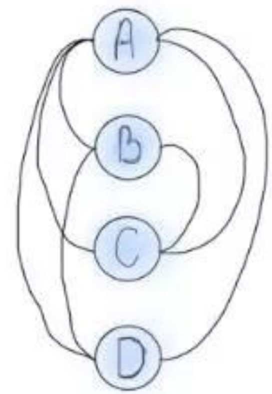




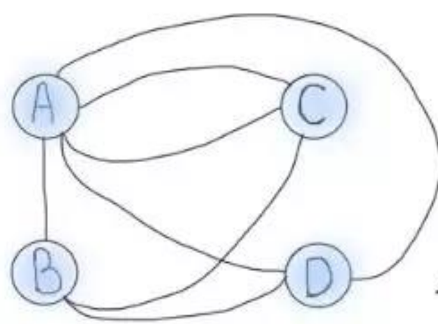
下面的图也全是七桥问题的抽象



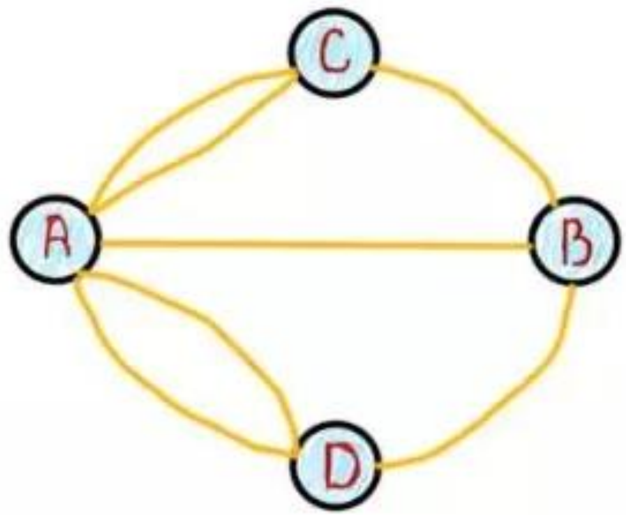
same



same

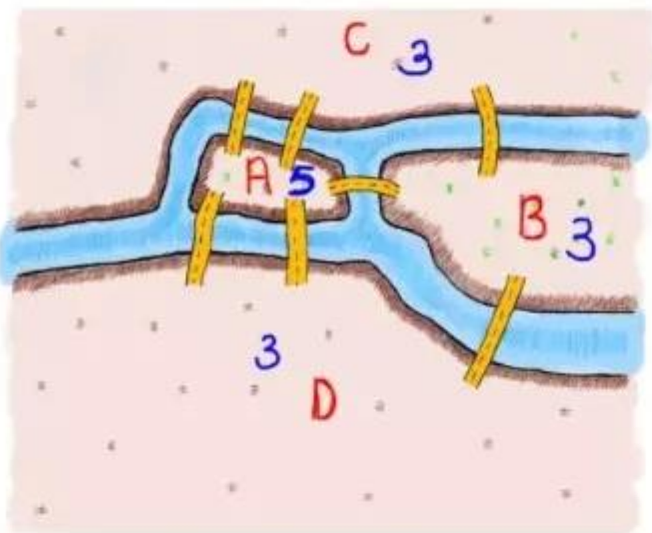


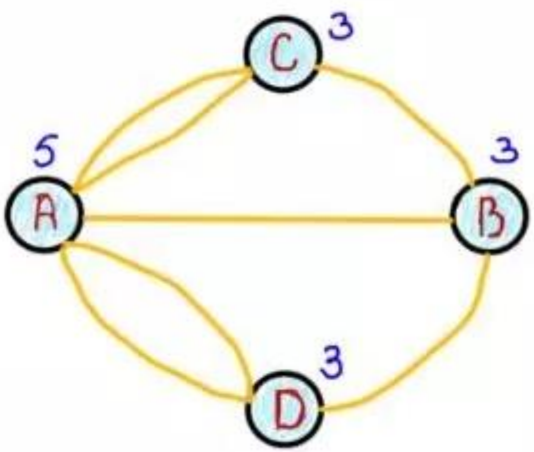
same



著名的“七桥问题”转化为是否能够用一笔不重复的画出过此七条线的问题了。

Euler证明了在图上（城市里）每次只走过一条边（桥）并且走过每一条边是严格取决于节点自由度。

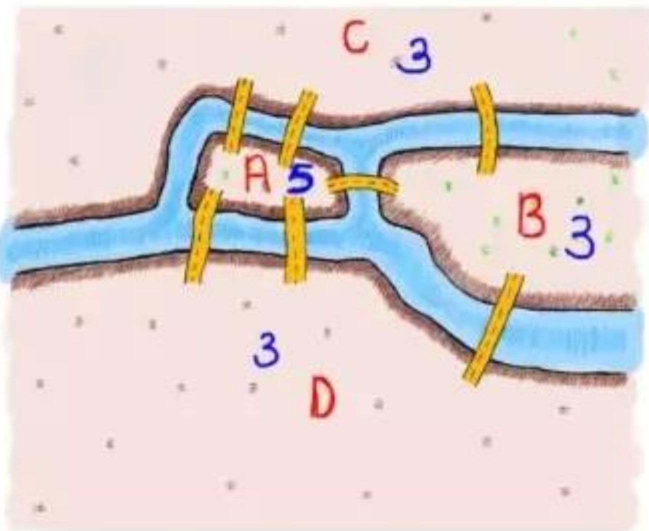


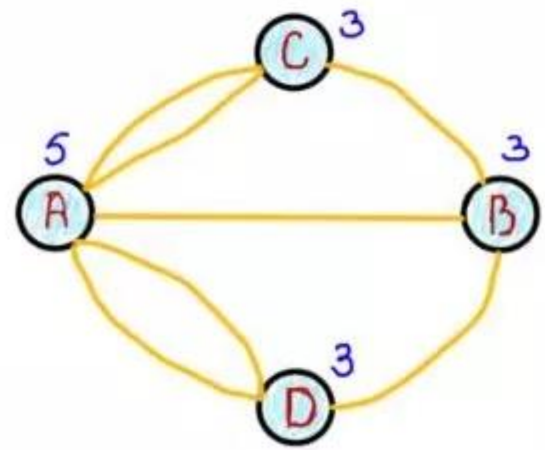


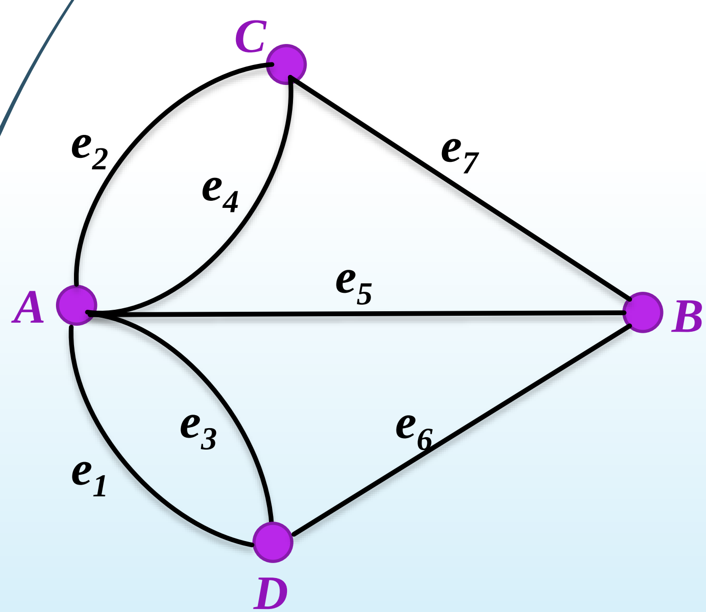
要使得一个图形可以一笔画，必须满足如下两个条件：

1. 图形必须是连通的。

2. 图中节点自由度为奇数的节点个数是**0**或**2**。



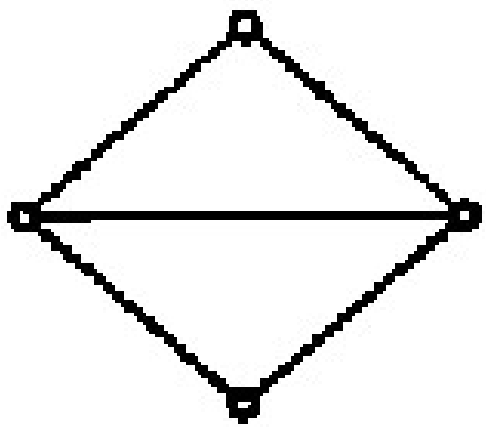


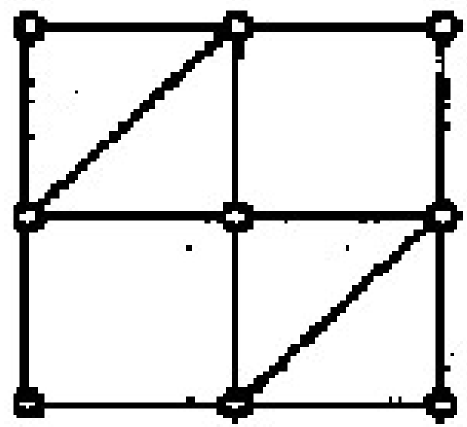


“七桥问题”中的4个点全是自由度为奇数的节点，可知图不能“一笔画出”，也就是不存在不重复地通过所有七桥的路径。

- *环游（tour）* ⇔ 通过图中每边至少一次的闭途径。
- ***Euler环游*** ⇔ 通过图中每边恰一次的闭途径。
- ***Euler迹*** ⇔ 通过图中每边的迹。
  ⇔ 通过图中每边恰一次的途径。（可“一笔画成”。）
- ***Euler图*** ⇔ 包含Euler环游的图
  ⇔ 包含Euler闭迹的图。
  ⇔ 本身为闭迹的图。

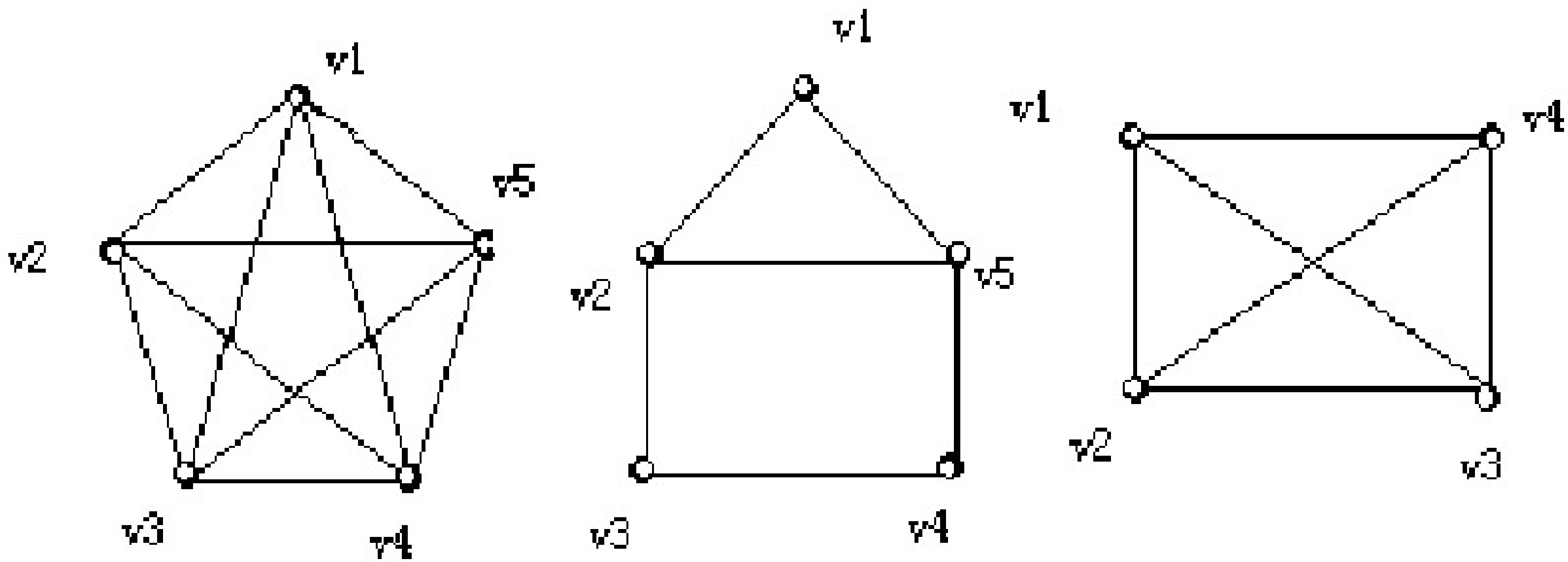
判断是Euler图吗？





（1）不是Euler图，（2）是Euler图

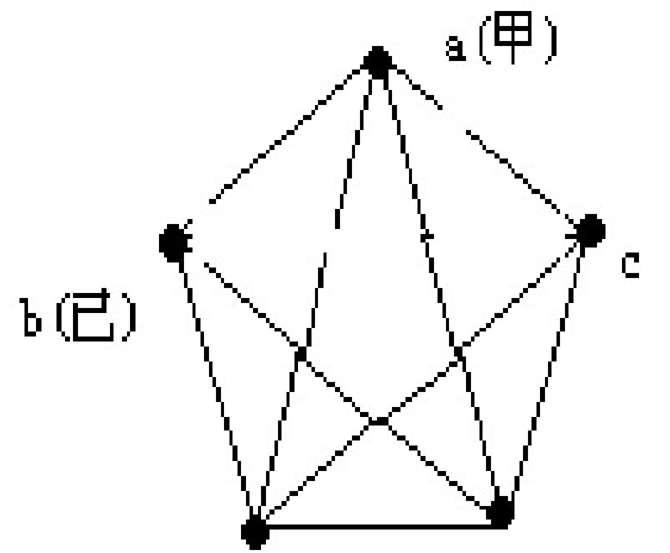
判断是Euler图吗？



（1）是；（2）不是；（3）不是

蚂蚁比赛

- 甲乙两只蚂蚁分别位于如下图种的节点a,b处，并设图中的边长度是相等的。甲乙进行比赛：从他们所在的结点出发走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？



定理5.1 设G为非空连通图，则G为Euler图 $\Leftrightarrow$ G中没有度为奇数的顶点。

证明：$\Rightarrow$：令$C = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \ldots e_\varepsilon u_\varepsilon$ ($u_\varepsilon = u_0$)为G的一Euler环游，起点为u_0。则对任一顶点$v \neq u_0$，当v每次作为内部顶点出现于C时，C上有二边与v相关联。由于C上包含了G的所有边且不重复，因此d(v)=偶数。类似地，$d(u_0)$=偶数。

定理5.1 设G为非空连通图，则G为Euler图 $\Leftrightarrow$ G中没有度为奇数的顶点。

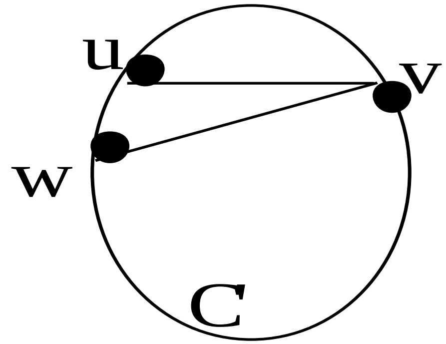
- $\Leftarrow$：反证，假设存在非空连通图，它的每个顶点的度都是偶数，但却不是Euler图。在这种图中选取G使其边数最少。由于 $\delta(G) \geq 2$，G包含圈。令C为G中的最长闭迹。由假设，C不会是 Euler环游。因此G - E(C)中一定有一分支G' 使ε(G')>0。由于C本身为 Euler图，（由定理的必要条件知）C中每个顶点的度都是偶数，因此G'中无度为奇数的顶点。但ε(G') < ε(G)由G的选择知，G'中含一Euler环游 C'。 又，由于G连通，C与C'至少有一公共顶点，设为v，不妨设它同时为它们的起点。于是，CC'是G的一闭迹，其长大于C的长，矛盾。

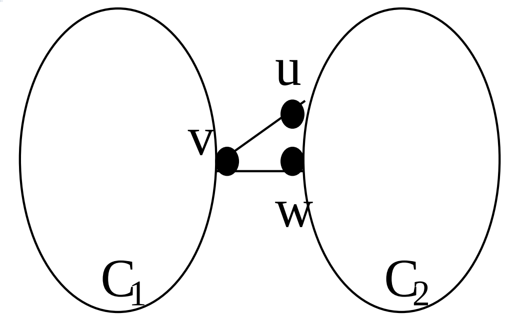
定理5.1证明新法（J.G.T.Fall 1986)

- 只需要证充分性
- $\Leftarrow$ 对边数 ε 进行归纳。当ν =2时，显然成立。只要再考虑$\nu \geq 3$情形。假设对 $\varepsilon < q$成立，而 $\varepsilon(G)=q$ 。选取顶点v，使v有二不同顶点u及w与它相邻。考虑图

$$H = (G - \{uv,vw\})+uw$$

（uw 为一新加边——不管G中是否有以u，w为两端点的边）





显然,

$\omega(H) \leq 2$，

$\varepsilon(H) = q-1$，

$d_H(x) =$偶数 $\forall x \in V$ 。

(i) 当$\omega(H)=1$时，由归纳假设，H中有Euler环游 C'。

把C' 中一边uw代之以路uvw,即得G的Euler环游 。

(ii) 当$\omega(H)=2$时，由归纳假设，H的二分支各有其Euler环游 C1 及C2 。不妨设uw在C2 中。将C2中的边uw代之以迹 uvC1vw, 即得G的Euler环游 。

推论5.1 若G连通，则G有一Euler迹⇔G中至多有两个度为奇数顶点。

证明：⇒： 类似定理5.1中⇒：的证明。

⇐： 若G中无度为奇数顶点，则由定理5.1，G中有Euler迹。否则，G中恰有二度为奇数顶点，设为u，v 。考虑图

$$G + e \quad ,$$

其中e为连接u与v的新边。显然，G+e中 无度为奇数顶点，从而包含一Euler环游

$$C = v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \ldots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1} \quad ,$$

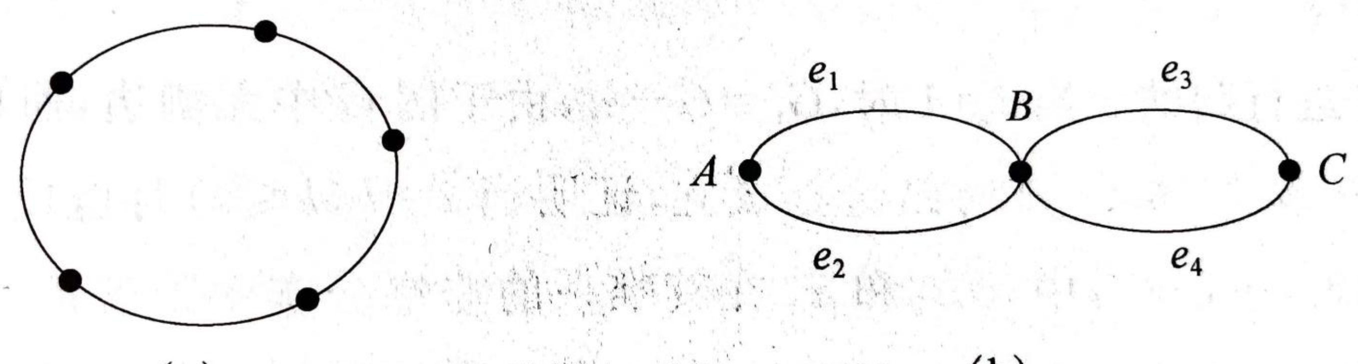
其中，$v_{\varepsilon+1} = v_0 = u$，$v_1 = v$ 。易见

$$v_1\, e_2\, v_2 \ldots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1}$$

就是G的Euler迹。

提出问题

- 如果一个图是**Euler**图，怎么找出**Euler**环游呢？
- 如果一个图能一笔画成，那么是否随便画，就能一笔画成吗？



(a) (b)

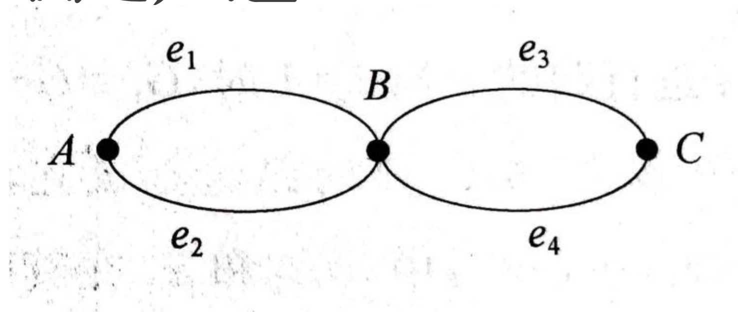
所以对一个图，即使这个图是Euler图，也可能要遵守一定的规则，才能找到Euler环游。

Fleury算法（“过河拆桥，尽量不走独木桥”）

1.任取一顶点v_0，令$w_0 = v_0$。

2.若迹$W_i=v_0e_1v_1\ldots e_iv_i$已取定，选

$e_{i+1}\in E\setminus\{e_1, \ldots, e_i\}$使



(i) e_{i+1} 与 v_i相关联；

(ii) 除非无奈，选e_{i+1} 使它不是

$G_i = G-\{e_1, \ldots, e_i\}$ 的割边。

3. 若2.不能再进行下去，停止。

定理4.7 若G为Euler图，则由Fleury算法求得的G中的迹，是G的一Euler环游。

证明：令 $W_n = v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ Fleury算法求得的G中的迹，显然

$$d_{G_n}(v_n) = 0 \ ,$$

$$\therefore \quad v_n = v_0 \ 。$$

假设W_n 不是Euler环游，令

$$S = \{ v \mid d_{G_n}(v) > 0 \},$$

$$\bar{S} = V \backslash S 。$$

易见， $S \neq \varnothing$ ； $v_n \in \bar{S}$ 。

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

令 vm 为Wn 在S中的最后一个顶点，则，显然，

$$\left[S,\bar{S}\right]_{G_m}=\left\{e_{m+1}\right\},$$

即 e_{m+1}是G_m 的割边。又， $d_{G_n}(v)$ = 偶数, ∀ v ∈ V 。因此G_n 中无割边，特别地，G_n中与v_m 相关联的任一e是G_n中的非割边，因而也是G_m中的非割边（？）

但 $e_{m+1}\neq$ e （$\because e_{m+1}\notin G_n$ ），于是在 G_m 中，割边 e_{m+1} 与非割边e都和v_m 相关联，而迹W_n却取的是割边e_{m+1} 这与算法之 **2.(ii)** 相矛盾。

定理之另证： 其实只要再证以下断言即可：

- 断言

在算法进行过程中，每个G_i都是G的生成子图，其中只有一个分支是非空的（即其余分支每个都是孤立顶点），且v i与v0 同在该非空分支中。

➨ 证明:

- 对i进行归纳。当i=1时，$G_1 = G - e_1$，由于G中无割边，G_1连通，从而结论成立。
- 假设当i≤n-1时都成立，来证当i = n 也成立：由归纳假设，$G_{n-1} = G - \{e_1 ,\ldots\ldots,e_{n-1} \}$中，$v_{n-1}$ 和 v_0 在其唯一的非空分支中。于是，算法2.(i) 所选 vn-1的关联边e_n必在该分支中。
- 当e_n不是G_{n-1}的割边时，（对Gn）结论成立。当e_n是G_{n-1}的割边时，由算法知，G_{n-1}中与v_{n-1}相关联的边必都是G_{n-1}的割边。由习题5.1.7知，与v_{n-1}相关联的边中至多有一条割边，从而G_{n-1}中与v_{n-1}相关联的边恰只有e_n这条边。因此，G_n中原G_{n-1}的非空分支变成一个孤立顶点v_{n-1}及一个含v_n与v_0 的非空分支 。结论仍成立。

Fleury算法的复杂性

- 每次选择一条边，选择时要判断这条边是否是割边；
- 判断一条边是否是割边，什么算法？复杂度如何？

- 多项式算法O(v^2)
- 比如， u→v的最短路算法

- Fleury算法的复杂度至多O(ev^2)

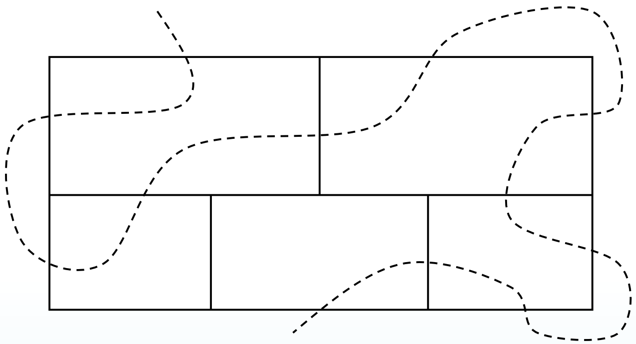
习题5.1

- 5.1.1 若可能，画出一个ν为偶数，而ε为奇数的Euler图。否则说明理由。
- 5.1.2 证明：若G无奇点，则G的每个块也是Euler图。
- 5.1.3 若G无奇点，则存在边不重的圈$C_1, C_2, \ldots, C_m$使得

  $$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \ldots \cup E(C_m)。$$
- 5.1.4 若连通图G有2k >0 个奇点，则G中存在k条边不重的迹$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$使得

  $$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \ldots \cup E(Q_k)$$

- 5.1.5 设G为非平凡Euler图， 且v ∈ V。证明：G中任一条 以v为起点的迹 都能延伸成一Euler环游 当且仅当 G-v为林。 （O.Ore）
- 5.1.6 若连通图G的任一边割边数都是偶数，则G是一Euler图。



- 5.1.7 右上图中能否引一连续曲线（如图中虚线所示），穿过每一线段恰好一次？若能，画出之；不然，证明之。

- 若连通图G中只有二奇点，则与任一奇点相关联的边中至多有一条是G的割边。
- 证明：反证法。假设该奇点为v1，有两条割边。