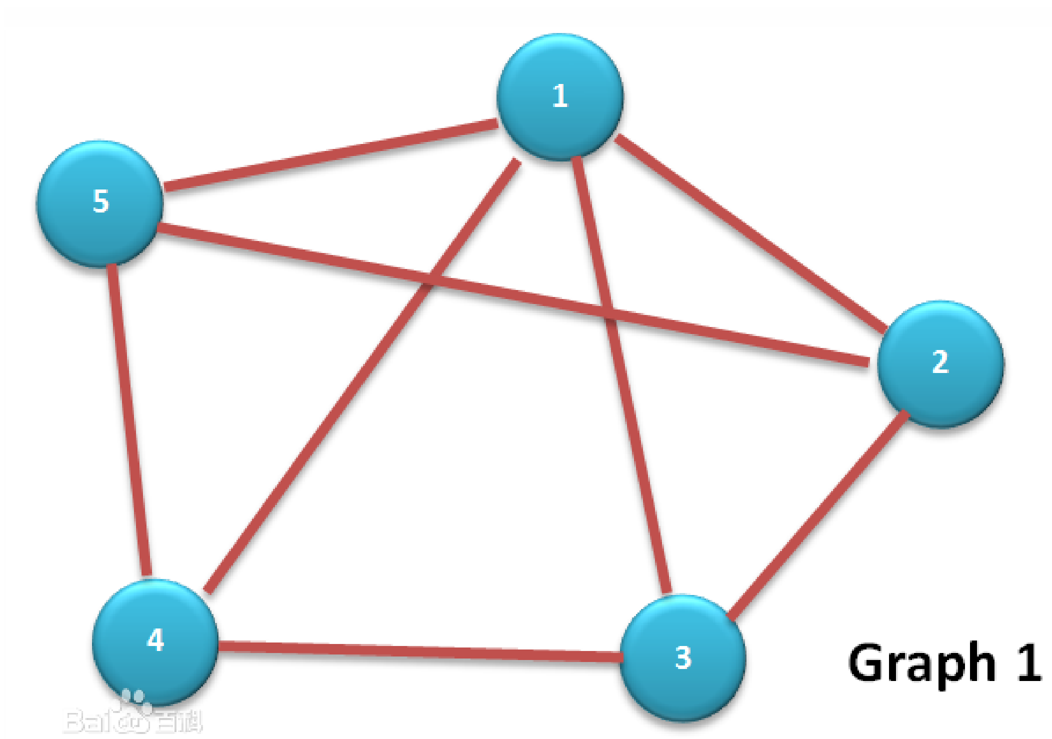
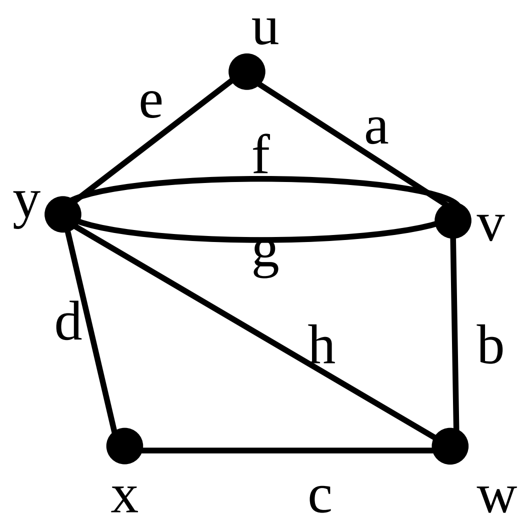
图论及其应用

北京邮电大学理学院

1.4 路和连通性



途径（walk）



例如图G的(u,x)-途径

W = ueyfvgyhwbvgydxdydx

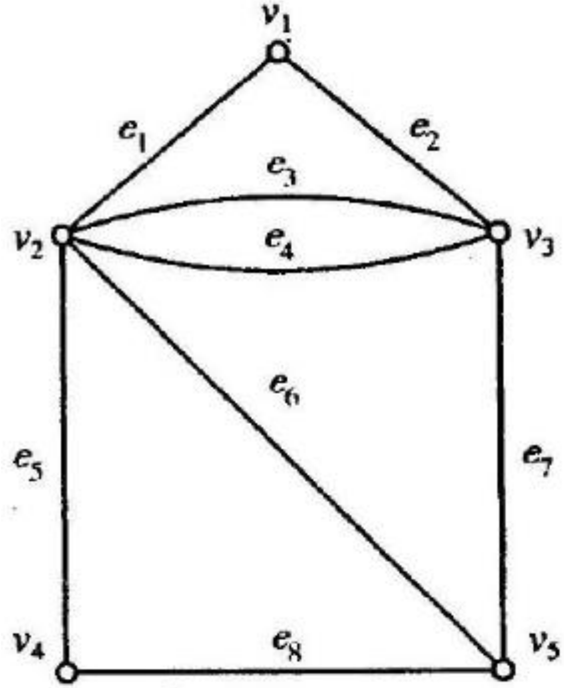
(有限非空序列)

= uyvywvyxyx

(简写法---当不引起混淆时)

- *起点*（origin） u 。
- *终点*（terminus） x。
- *内部顶点*（internal vertex） y, v, w, x。

  （注意，中间出现的x也叫内部顶点。）
- *长* ⇔ 边数（重复计算）。
- *节*（段，section）。 例如W的(y, w)-节=yvw 。
- ***W-1*** （逆途径），
- **WW'**（两条途径W与W'相衔接。要求：W的终点=W'的起点）。
- *迹*(trail) ⇔ 边各不相同的途径（顶点可重复出现）。例如，yvwyx 。
- *路* (path) ⇔ 顶点各不相同的途径。（边也一定不重复出现。路可当作一个图或子图）。例如， yvwx 。
- *距离* $d_G(u, v)$ = 图G中顶点u与v之间最短路的长。



有连接v_5到v_3的路 $v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3$，这也是一条迹；

路 $v_1e_1v_2\,e_3v_3$是一条通路；

路$v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_2e_1v_1$是一 条回路， 但不是圈；

路$v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$是一条回路， 也是圈。

定理1.5.1
G中存在(u, v)-途径 ⇔ G中存在(u, v)-路。

证明：⇐是显然的；

⇒：设G中存在(u,v)-途径$W = v_0, v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n$
其中$v_0 = u, v_n = v$

若W中的顶点互不相同，则W就是(u, v)-路；不然，设其中有$v_i = v_j$（$i \neq j$），则

$$W' = v_0, v_1, \cdots, v_i, v_{j+1}, \cdots, v_n$$

也是一条 (u,v)-途径，长度比W短。若其中仍有重复顶点出现，则继续上述过程。由于W长度的有限性，上述过程必停止于一(u, v)-路。

例题（渡河问题） 一个摆渡人，要把一只狼、一只羊和一捆干草运过河去，河上有一只木船，每次除了人以外，只能带一样东西。另外，如果人不在旁时，狼就要吃羊，羊就要吃干草。问这人怎样才能把它们运过河去？

解: 用F表示摆渡人， W表示狼， S表示羊， H表示干草。

若用$FWSH$表示人和其它 3 样东西在河的左岸的状态。

这样在左岸全部可能出现的状态为以下16种:

$FWSH$	FWS	FWH	FSH
WSH	FW	FS	FH
WS	WH	SH	F
W	S	H	φ

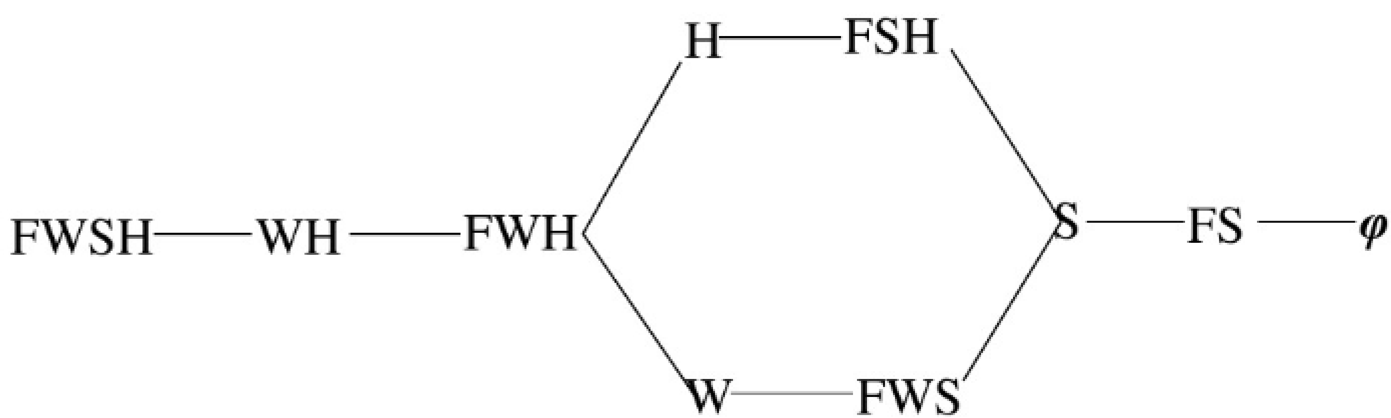
这里φ表示左岸是空集， 即人、 狼、羊、 干草都已运到右岸去了。

$FWSH$	FWS	FWH	FSH
WSH	FW	FS	FH
WS	WH	SH	F
W	S	H	φ

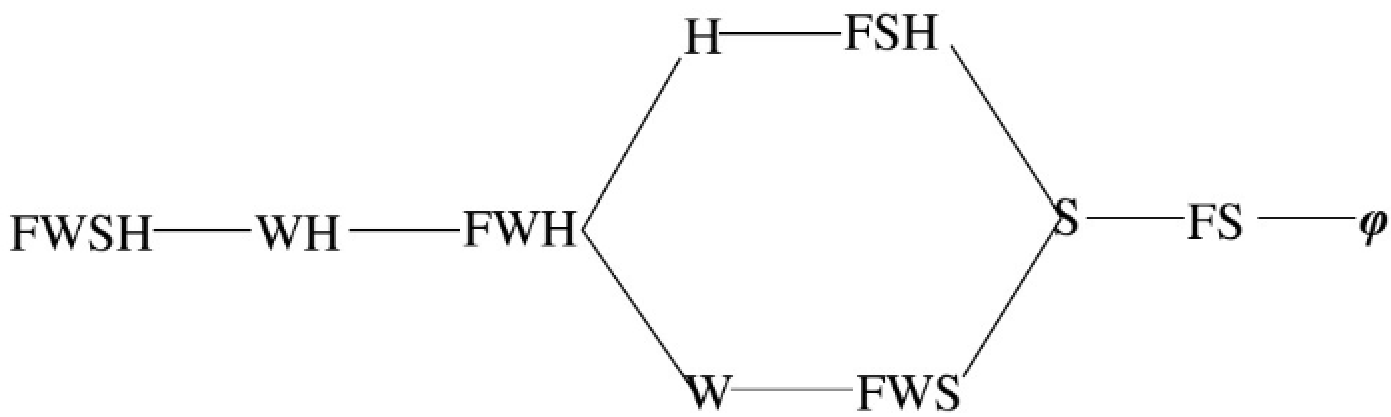
根据题意检查一下就可以知道， 这16种情况中有 6 种情况是不允许出现的。它们是： WSH、 FW、 FH、 WS、 SH、 F。 如FH表示人和干草在左岸， 而狼和羊在右岸， 这当然是不行的。因此， 允许出现的情况只有10种。

北京邮電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

我们构造一个图， 它的结点就是这10种状态。若一种状态可以转移到另一种状态，就在表示它们的两结点间连一条边，这样就画出图 G。



图G



图G

本题就转化为找结点*FWSH*到结点φ的通路。

从图 中得到两条这样的通路，即有两种渡河方案。

例题 简单图G中，$\delta \geq k$，证明：图G中有长度至少为k的路。

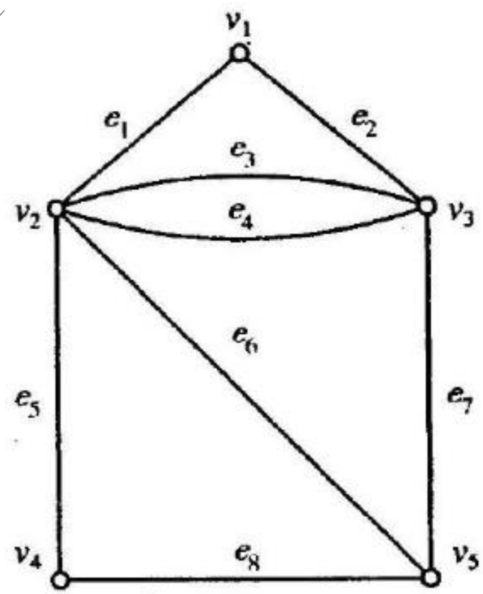
证明：

取G中任一最长路P，设P的起点（或终点）为u，则G中任意与u相邻的点 x 都在 P 上（否则，x 与 P 构成比 P 更长的路，矛盾），因此 P 的顶点数至少为

$$d_G(u)+1 \geq \delta+1 \geq k+1,$$

也就是P的长度至少为k。

定义 在图G中，若结点v_i到v_j有路连接（这时称v_i和v_j是连通的），其中长度最短的路的长度称为v_i到v_j的距离，用符号$d(v_i,v_j)$表示。若从v_i到v_j不存在路径,则$d(v_i,v_j)=\infty$。



$d(v_1, v_4)=2$。

注意: 在有向图中, $d(v_i,v_j)$不一定等于$d(v_j,v_i)$,

但一般地满足以下性质:

(1) $d(v_i,v_j)\geq 0$;

(2) $d(v_i,v_i)=0$;

(3) $d(v_i,v_j)+d(v_j,v_k)\geq d(v_i,v_k)$。 三角不等式

图的连通性

称G中顶点u *与v 为连通的*(connected) ⇔ G中存在 (u, v)-路（ ⇔ G中存在(u, v)-途径。）

容易验证，V上的连通性是V上的等价关系，它将 V划分为一些等价类：

$$V_1\ ,\ \ldots,\ V\omega$$

使每个Vi中的任二顶点都连通（即存在(u, v)-路）；

而不同V_i与V_j之间的任二顶点都不连通。

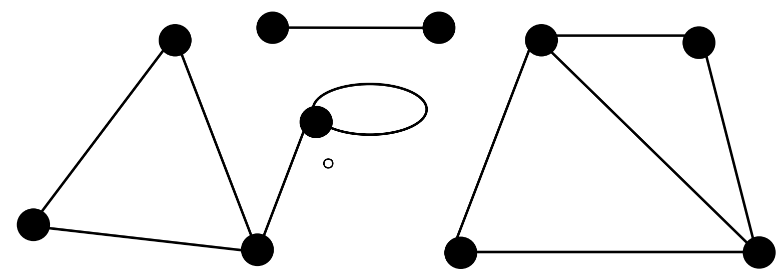


图 G

- 称每个

$$G[V_i] \quad i=1,2,\ldots\ldots\omega$$

为G的一个分支（component）；称ω(G)为G的*分支数*。

- 称 G为*连通图* $\Leftrightarrow$ $\omega(G) = 1$

  $\Leftrightarrow$ G中任两点间都有一 条路相连。

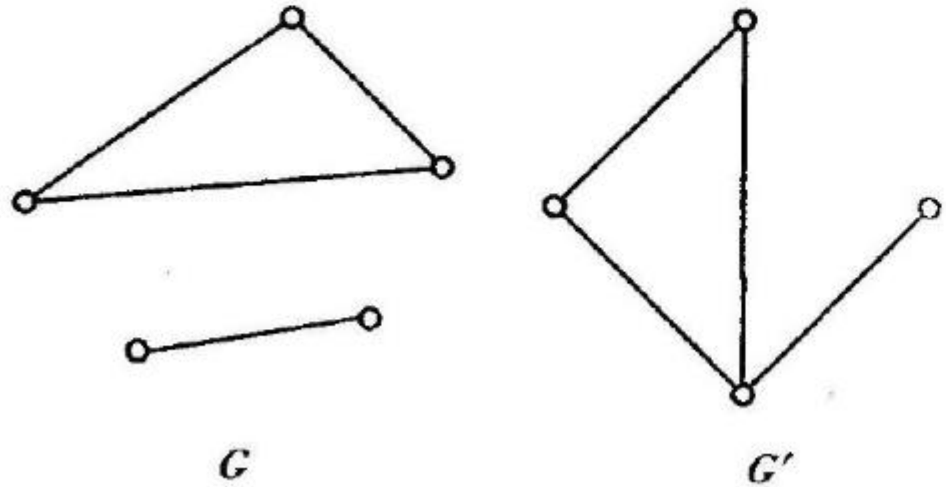
- 称 G为*非连通图* $\Leftrightarrow$ $\omega(G) > 1$。

定义 在无向图如果一个图的任何两个结点之间都有一条路，那么我们称这个图是连通的，否则是不连通的。

*规定：任何点到自身有路。n=1时是连通图。

定义 图G的一个连通的子图G'（称为连通子图）若不包含在G的任何更大的连通子图中，它就被称作G的连通分支。我们把图G的连通分支数记作 $\omega(G)$ 。

*连通关系是等价关系。



G是不连通的， $\omega(G)=2$，

而G'是连通的， $\omega(G)=1$。

定义 在有向图中,若从结点u到v有一条路，则称u可达v。

规定：任何顶点到自身总是可达的。

可达关系具有：自反性，传递性，一般无对称性。

定义 设有有向图G，

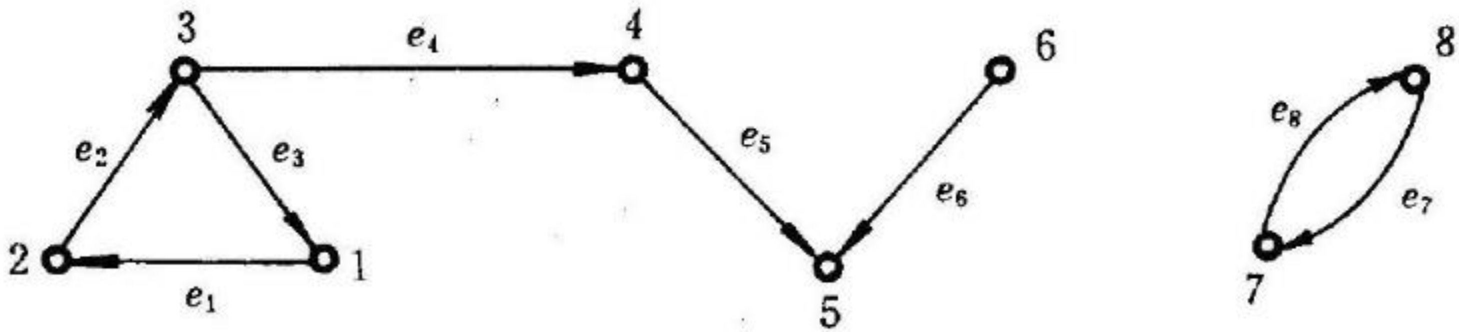
1)若G的任意两个结点中,至少从一个结点可达另一个结点,则称图G是单向连通的;

2)如果G的任意两个结点都是相互可达的,则称图G是强连通的;

3)如果略去边的方向后， G成为连通的无向图，则称图G是弱连通的。

从定义可知：若图G是单向连通的，则必是弱连通的；若图G是强连通的，则必是单向连通的，且也是弱连通的。但反之不真。

定义 在有向图$G=\langle V,E\rangle$中，G'是G的子图，若G'是强连通的(单向连通的，弱连通的)，没有包含G'的更大子图G''是强连通的(单向连通的，弱连通的)，则称G'是G的强分图（强连通分支）.是G中具有强连通性质的最大子图。



强连通分支集合构成的G的划分是:

{ ⟨{1,2,3},{e_1,e_2,e_3}⟩ , ⟨{4},φ⟩ , ⟨{5},φ⟩ , ⟨ {6} ,φ⟩ , ⟨ {7,8} ,{e_7,e_8}⟩ }

单向连通分支集合是:

{ ⟨{1,2,3,4,5},{e1,e2,e3,e4,e5}⟩ , ⟨{6,5},{e_6}⟩ , ⟨ {7,8} ,{e_7,e_8}⟩ }

弱连通分支集合是:

{ ⟨{1,2,3,4,5,6},{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6}⟩ , ⟨ {7,8} ,{e_7,e_8}⟩ }

- 记号： 对任一非空 $S \subset V$，令 $\overline{S} = V \setminus S$, 记 $[S, \overline{S}]_G$ = G中两端分别在S及 $\overline{S}$ 中的一切边的集合。
  (后文中将称为*边割*)

容易证明：

- 定理1-4　G连通 $\Leftrightarrow$

  对任 $S \subset V$ 都有 $[S,\overline{S}] \neq \varnothing$

- 例　简单图G中，$\delta \geq k \Rightarrow$ G中有长 $\geq k$ 的路。

  （注意到，G中任一最长路P的起点（终点）的所有邻接点全在P上。）

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

例题

设有 $2n$ 个电话交换台，每个台与至少其他 n 个台有直通线路，则该交换系统中任二台均可实现通话。

证明：

构造图 G 如下：以交换台作为顶点，两顶点间连边当且仅当对应的两台间有直通线路。

问题化为：

已知简单图 G 有 $2n$ 个顶点，且 $\delta(G)\geq n$，求证图 G 连通。

Beijing University of Posts and Telecommunications

事实上，假如G不连通，则至少有一个连通分支的顶点数不超过n，

在此连通分支中，顶点的度至多是$n-1$。这与$\delta(G)\geq n$矛盾。

定理1-5

图G的顶点数至少为2，边数至多为顶点数减2，则图G不连通。

用数学归纳法

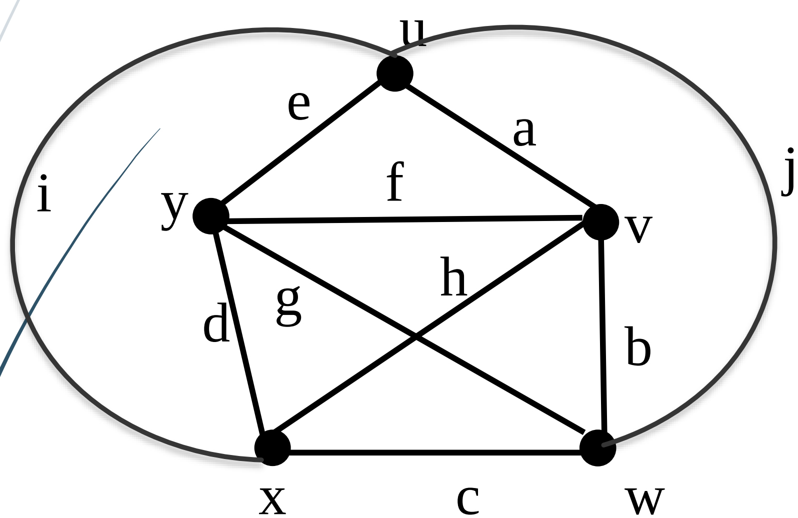
如果图G连通，则图G的边数至少为顶点数减去1.

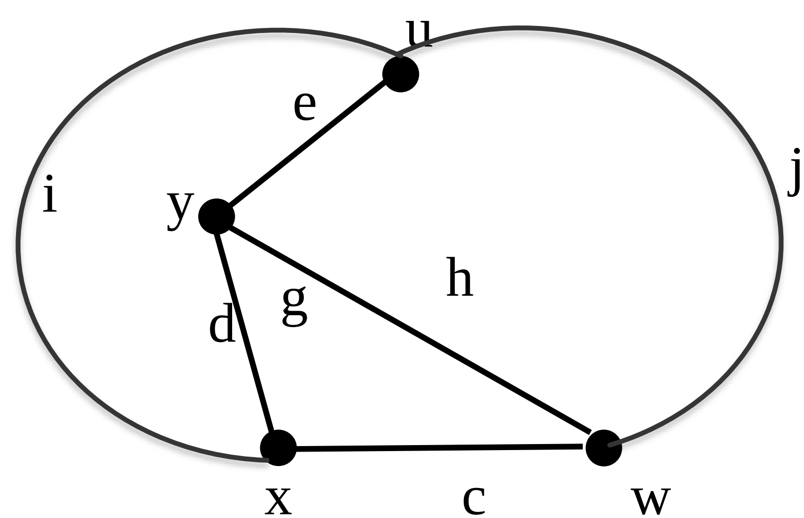
北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理1-6

G连通，且 $d(v)$=偶数，$\forall v\in V$

$\Rightarrow \quad \omega(G-v)\le d(v)/2, \quad \forall v\in V.$

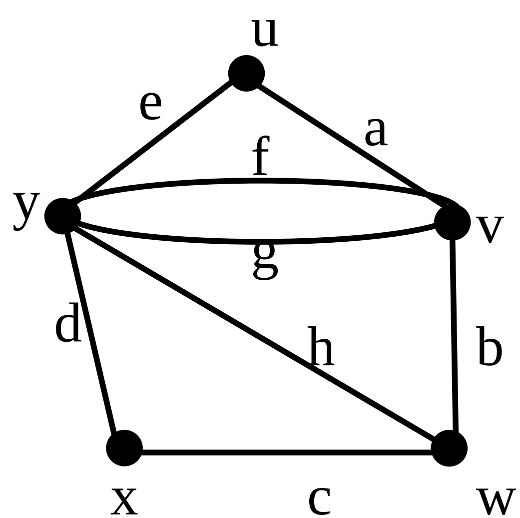




$\omega(G-v)=1$

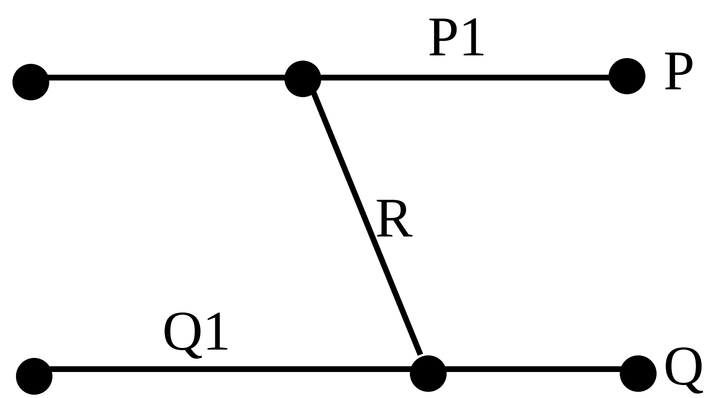
定理1-7

对任一图的任三个顶点 u, v, w 都有 $d(u,v)+d(v,w) \geq d(u,w)$。

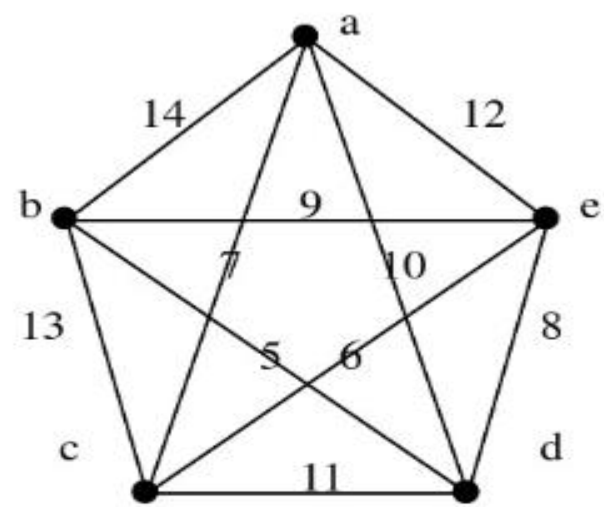


➡定理1-8

连通图中，任二最长路必有公共顶点。



设G=(V, E)是有限图, 如果对E中的每一条边e, 都有一个实数W(e)附着其上, 则称G为**赋权图**, 则称W(e)为边e的**权**.

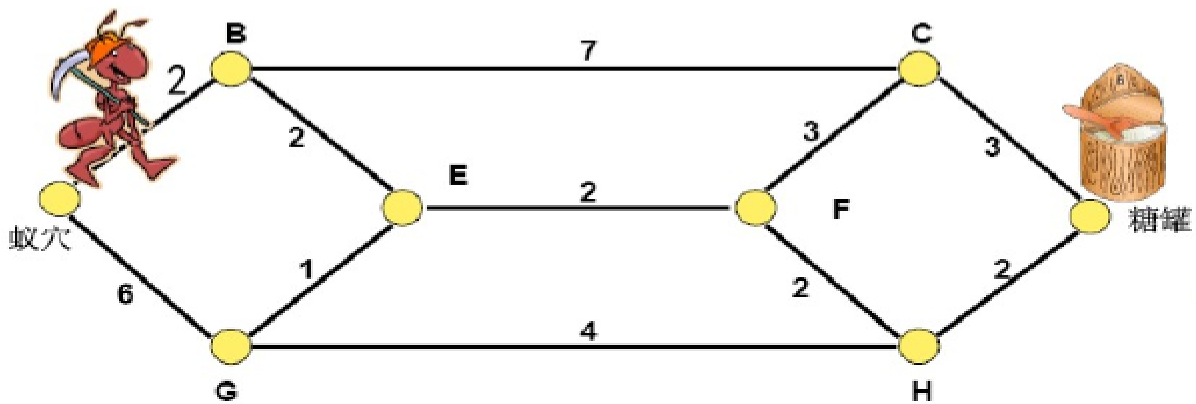


对于赋权图 G=(V, E), 规定:

设赋权图 G=(V, E), u, v∈V, 从u到v所带权的总和最小的通路, 称为u到v的**最短通路**.

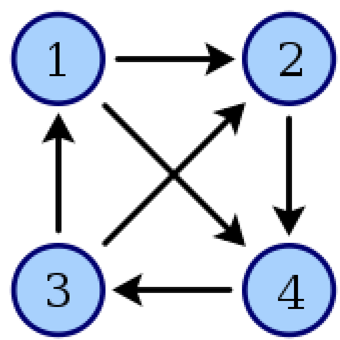
北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

从蚁穴到糖罐的最短路径



竞赛图是通过在无向完整图中为每个边缘分配方向而获得的有向图。

也就是说，它是一个完整图形的方向，等价于一个有向图，其中每对不同的顶点通过单个有向边连接，即每对顶点之间都有一条边相连的有向图称为竞赛图。



竞赛图起源于循环赛，每个玩家恰好一次遇到每个其他玩家。如果每个玩家都对阵同样数量的其他玩家，那么这个竞赛图就被称之为常规竞赛图。

习题

- 1.4.1 证明：对简单图G有，$\varepsilon > \binom{\nu-1}{2} \Rightarrow$ G连通。

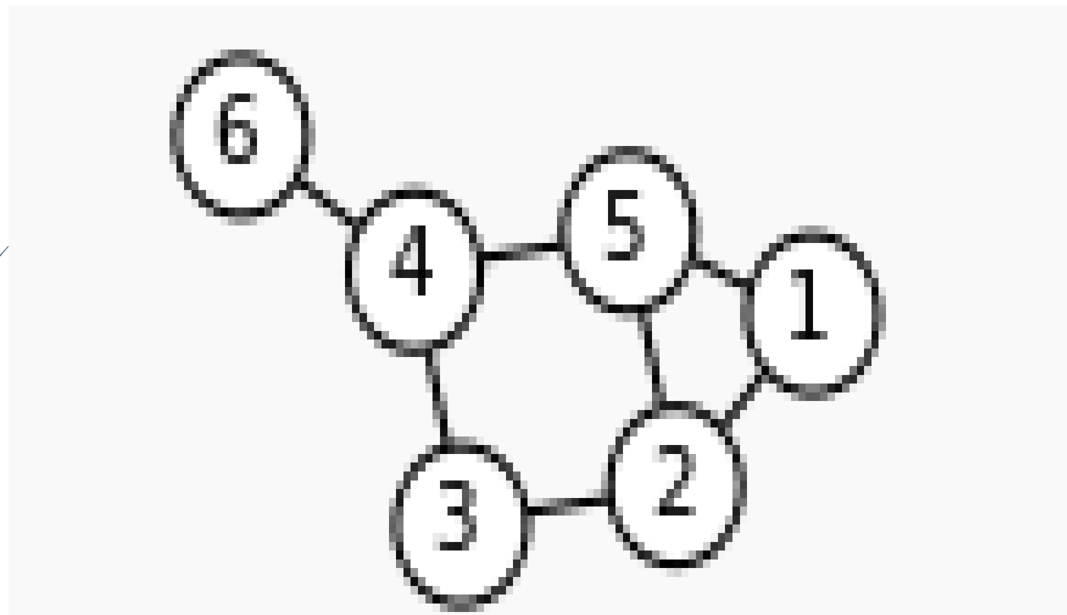
  对于ν > 1，试给出 $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ 的不连通简单图。

- 1.4.2 证明简单图G中， δ > [ν/2] - 1 ⇒ G连通。当ν是偶数时，试给出一个不连通的([ν/2]-1)正则简单图。

- **1.4.3** G不连通 $\Rightarrow G^c$ 连通。
- **1.4.4** 对任意图G的任一边e，有 $\omega(G)\le \omega(G-e) \le \omega(G)+1$ 。
- **1.4.5** G连通，且 $d(v)$=偶数，$\forall\, v\in V \ \Rightarrow\ \omega(G-v)\le d(v)/2,\ \forall\, v\in V$.
- **1.4.6** 连通图中，任二最长路必有公共顶点。
- **1.4.7** 对任一图的任三个顶点 u, v, w 都有

  $d(u, v)+d(v, w) \ge d(u, w)$。
- **1.4.8** 任一的简单、连通、非完全图中，一定有三个顶点u, v, w，使得$uv, vw\in E$ 而 $uw \notin E$。
- **1.4.9** 若图G 中恰有两个奇点u与v，则G中一定有一(u,v)路。

1.5 圈



- *闭途径*（closed walk） ⇔ 起点=终点 且长 > **0** 的途径。

- *闭迹* (closed trail) ⇔ 起点和终点相同的迹。

  也成为回路（circuit）

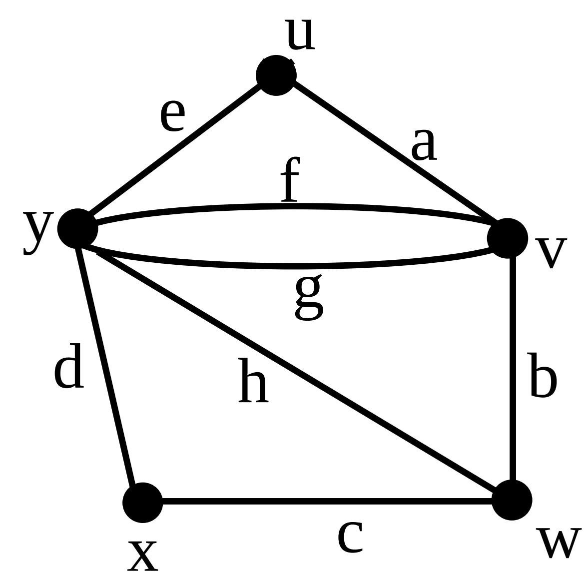
- *圈*（cycle） ⇔ 起点和终点相同的路。

圈指的是任选一个顶点为起点，沿着不重复的边，经过不重复的顶点为途径，之后又回到起点的闭合途径称为圈。

	结点重复情况	边重复情况
途径 (Wlaks)	允许	允许
迹 (Trails)	允许	不允许
路 (Paths)	不允许	不允许
回路(Circuits)	允许	不允许
圈(cycle)	不允许（除始点和终点外）	不允许

例：

- 闭途径： uyvyu；uywxywvu ； uyuyu。
- 闭迹：uyxwyvu。
- 圈： yfvgy；uywvu。
- k-圈（k-cycle）⇔ 长为k的圈。
- 奇圈 (odd cycle)。
- 偶圈 (even cycle)。



例：

- 1-圈（即一条环），
- 2-圈(由两条重边组成),
- 3-圈（又称三角形）。

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理1-11 G 为二部图 ⇔ G不含奇圈。

证明：

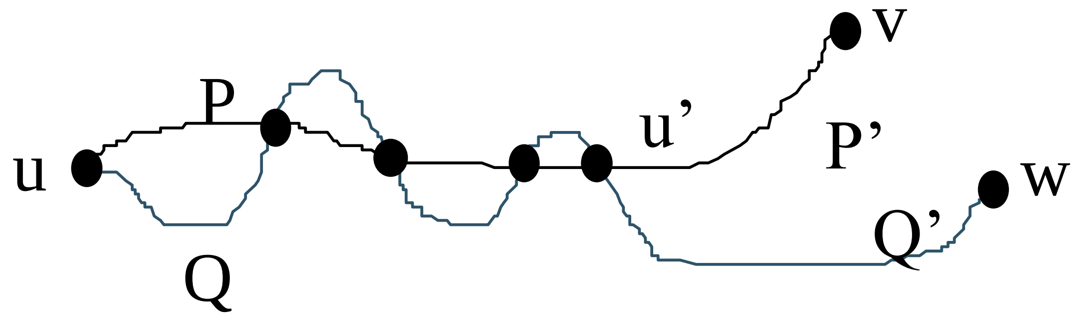
⇒：设G的2-划分为（X, Y），由G的定义，G的任一圈中，X和Y的顶点一定交错出现，从而其长必为偶数。

⇐：不妨设G为 连通的。 任取一顶点u,令

$$X = \{ x \in V \mid d(u, x) = 偶数 \},$$

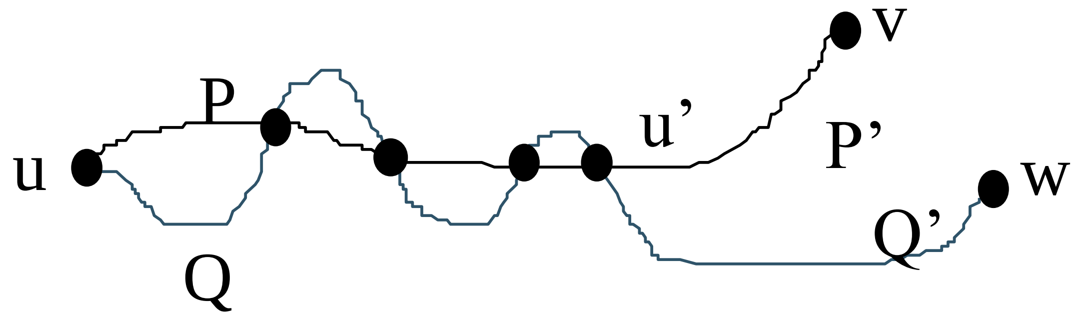
$$Y = \{ y \in V \mid d(u, y) = 奇数 \}。$$

易见，(X, Y)为V的2-划分，



所以只要再证X（和Y）都是G的独立集（ 即X（或Y）中任二顶点v， w都不相邻 ）即可。

令P与Q分别为最短(u, v)-路与最短(u, w)-路。设u'为P与Q的最后一个公共顶点； 而 P'与Q'分别为P的(u', v)-节与Q的(u', w)-节。则P'与Q'只有一公共顶点。



又，由于P与Q的(u, u')-节的长相等，P'与Q'的长有相同的奇偶性，因此v与w不能相邻，不然，v(P')−1 Q'wv 将是一奇圈，矛盾。

容易证明：

- 命题1 图G中 $\delta \ge 2 \Rightarrow$ G中含圈。
- 命题2 简单图G，$\delta \ge 2 \Rightarrow$ G含长 $\varepsilon \ge \delta+1$ 的圈。

(提示：以上两例中可考虑其最长路)

- 命题3 任一图G中 $\varepsilon \ge \nu \Rightarrow$ G含圈。

证明：反证，假设结论不成立，而G为其最小反例。则首先G是连通的，且 $\nu \ge 2$ 。再由以上第一例知，G中存在一顶点u，$d(u)=1$ 。

于是，$\varepsilon(G-u) \ge \nu(G-u)$ ，且显然G-u中也不含圈，从而G-u也是个反例，但顶点数比G少，矛盾。

习题

- **1.5.1** 若边e在G的一闭迹中，则e在G的一圈中。
- **1.5.2** 证明:

  (a). $\varepsilon \geq \nu \Rightarrow$ G含圈。

  (b)*. $\varepsilon \geq \nu + 4 \Rightarrow$ G含两个边不重的圈。
- **1.5.3** 证明：任一连通偶图G=(X, Y)的2-划分 (X, Y)是唯一的。

  (提示：不然，必有二顶点u,v，原属同一部（例如，）X，而在另一种2-划 分

  则不然。)

- **1.5.4** 证明或反证：

  (1).G中有两个不同的(u,v)路，则G中含一圈。

  (2).G中有一闭途径，在则G中含一圈。

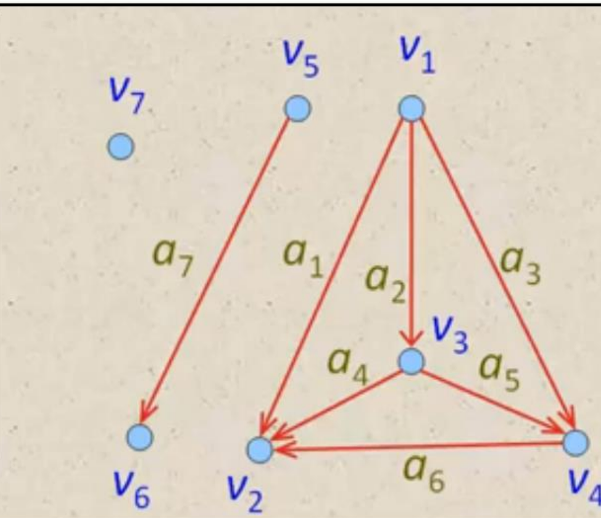
  (3).G中有一长为奇数的闭途径，在则G中含一奇圈。

- **1.5.5** 设图G 的顶点可用两种颜色进行着色，使每个顶点都至少与两个异色顶点邻，则G中一定包含偶圈。

- **1.5.6** 5×5座位的教室中，不可能让每个学生都作一上下左右移动，使每个人都换了座位。（提示：“座位图”是 一二部图）

1.6 图的数据结构

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\quad\; a_1 \quad\; a_2 \quad\; a_3 \quad\; a_4 \quad\; a_5 \quad\; a_6 \quad\; a_7
\end{array}
$$



关联矩阵即用一个矩阵来表示各个点和每条边之间的关系。

设无向图 G=(V, E)，其中顶点集 $V = v_1, v_2, \cdots, v_n$，

边集 $E = e_1, e_2, \cdots, e_m$，

用m_{ij}表示顶点v_i与边e_j关联的次数，可能取值为0, 1, 2, ...,

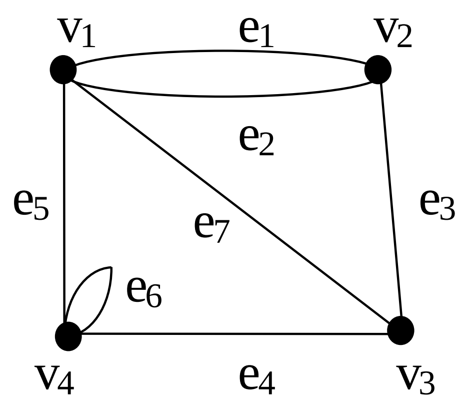
称所得的矩阵$M(G) = (m_{ij})_{n\times m}$为图G的关联矩阵

类似的，有向图D的关联矩阵的元素定义为：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是有向边}e_j\text{的始点} \\ -1, & v_i\text{是有向边}e_j\text{的终点} \\ 0, & v_i\text{是有向边}e_j\text{的不关联点} \end{cases}$$

关联矩阵: $M(G)=[m_{i,j}]_{\nu*\varepsilon}$

$m_{i,j}$ = 顶点v_i与边e_j 的关联次数= 0, 1, 2.



G = (V, E)

$$M(G)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

关联矩阵的性质

（1）每一列恰包含两个 1（环对应的列是有 1 个 2，有向图是一个 1，一个-1，有向环要特殊处理）。

（2）每一行所包含 1 的个数等于对应顶点的度（对有向图，1 的个数等于出度，-1 的个数等于入度）。

（3）无向图 G 的关联矩阵中所有元素之和等于图 G 的边的两倍（握手定理）。

（4）若图 G 是非连通图，$G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是它的连通分支。则只要适当排列顶点与边对应的行与列，即对顶点与边重新标号，G 的关联矩阵可表示成块对角形式：

$$M(G)=\begin{bmatrix} M(G_1) & & & 0 \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

其中 $M(G_i)$ 是连通分支 $G_i(1 \le i \le k)$ 的关联矩阵。

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 定理1-16

两个无向图同构的充要条件是它们的关联矩阵可通过行的对换与列的对换而相互转化。

- 定理1-17

若无向图G是无环υ阶连通图，则$M(G)$在F_2上的秩为υ-1。

- 定理1-18

若图G是无环υ阶无向图，具有k个连通分支，则$M(G)$在F_2上的秩是$\upsilon - k$。

设无向图 G=(V, E)，其中顶点集 $V=v_1,v_2,\cdots,v_n$，

边集 $E=e_1,e_2,\cdots,e_m$，

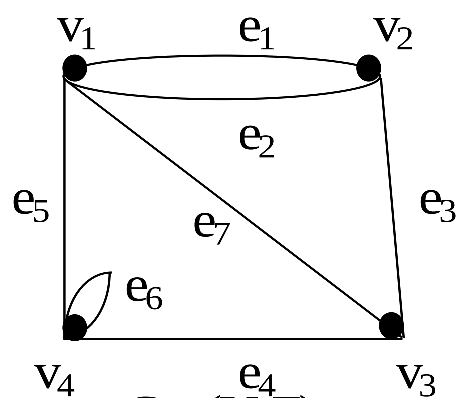
用 a_{ij} 表示顶点 v_i 与顶点 v_j 之间的边的数目，

可能取值为0, 1, 2, ...，

称所得矩阵 $A=A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 为图 G 的邻接矩阵

邻接矩阵

A(G)=[ai,j]v*v, ai,j = 连接顶点vi 与 vj 的边数。



G=(V, E)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
A(G)= & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\end{array}
$$

北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

邻接矩阵的性质

- A(G) 是对称矩阵
- 若 G 是无环图，则A(G)中第 i 行(列)的元素之和等于顶点v_i的度

类似地，有向图D的邻接矩阵$A(D)=(a_{ij})_{n\times n}$，

a_{ij}表示从始点v_i到终点v_j的有向边的条数，

其中v_i和v_j为D的顶点．

定理1-19

设图 G 为无向无权图， $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵，证明：

图 G 中长度为 k 的 (v_i, v_j)-途径的数目等于 $a_{(i,j)}^{(k)}$（ $A^k(G)$

中的 (i, j) 元素），其中 k 是大于或等于 1 的正整数。

推论1-6

设 G 是 v（$v\geq 3$）阶无向图，则 G 是连通图的充分必要条件是矩阵 $X=A(G)+A^2(G)+\cdots+A^{v-1}(G)$ 的每一个元素都非 0。

推论1-7

连通图 G 中的两个顶点 v_i 和 v_j（$i\neq j$）之间的距离等于 k 当且仅当 k 是使:

$$A^r(G)=\left[a_{ij}^{(r)}\right]$$ 中的元素不为 0 的最小正整数。

定理1-20

设 A 是有向无权图 $D=(V,E)$ 的邻接矩阵，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_\upsilon\}$，

则 D 中长度为 k 的 (v_i,v_j)-有向途径的总数目就是 A^k 中的 $a_{(i,j)}^{(k)}$，

（其中 $a_{(i,i)}^{(k)}$ 为 D 中长度为 k 的 (v_i,v_i)-闭有向途径的总数）。

推论1-8

设 A 是有向无权图 $D=(V,E)$ 的邻接矩阵，

$V=\{v_1,v_2,\dots,v_\upsilon\}$，令 $B_k=A+A^2+\dots+A^k (k\geq 1)$

，则 D 中长度小于等于 k 的 (v_i,v_j)-有向途径的数目，

就是 B_k 中的元素 $b_{(i,j)}^{(k)}$，（其中 $b_{(i,i)}^{(k)}$ 为 D 中长度小于等

于 k 的 (v_i,v_i)-有向闭途径的数目）。

习题

1.6.1

已知图 G 的关联矩阵为 $M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

请考虑如下问题：

（1） 给出图 G 的一个几何实现；

（2） 给出图 G 的邻接矩阵。

习题 1.6.2

设有向图 $D=(V,E)$ 的邻接矩阵 $A(D)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，

请考虑如下问题：

（1）给出图 D 的一个几何实现；

（2）写出图 D 的关联矩阵（不考虑环）；

（3）计算邻接矩阵的 $A^k, k=2,3,4$；

（4）给出 D 中长为 $k, k=2,3,4$ 的 (v_i, v_j)-有向途径（$i, j=1,2,3,4$）的数目；

（5）给出 D 中长为 $k, k=2,3,4$ 的有向闭途径的数目；

（6）给出 D 中长度小于 5 的所有有向途径的数目，并说明其中的闭途径的数目。

习题 1.6.3

设图 G 是无向简单图，M 是图 G 的关联矩阵，A 是图 G 的邻接矩阵，证明：MM^T 与 A^2 的对角线上的元素均是图 G 对应顶点的度数。