图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch3 树与最优树

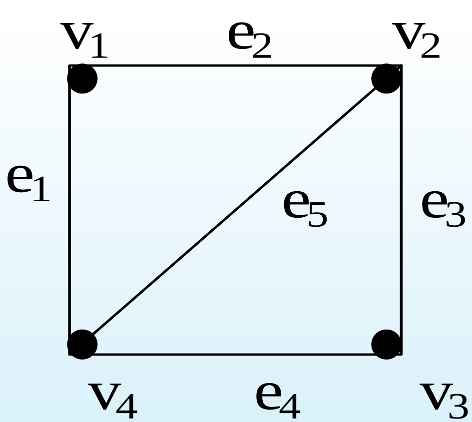
Ch3 主要内容

- 树的概念
- 生成树、余树和健
- 生成树的计数及Cayley公式
- 树的应用

3.3 生成树的计数及Cayley公式

- 本节只讨论无环连通图。
- 将图G的关联矩阵$A_{\nu\times\varepsilon}$ 中每列的两个1元素之一改为 -1，得一新矩阵，记为A_a（它是G的一个定向图的关联矩阵）。例如：

$$A_a=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



- 记A为从A_a中删去某一行所得的$(\nu -1)\times\varepsilon$ 矩阵。
- 引理1：设A1 为A的任一$(\nu-1)$ 阶子方阵，则 $\det(A1) = \pm 1 \Leftrightarrow$ A1 的列对应于G的一生成树。

证明：令划去的行对应于顶点u，记H为与A_1 所有的列相对应的边构成的生成子图。由于 $\varepsilon(H)= \nu-1$,因此有(由习题2.1.2 有)H连通 $\Leftrightarrow$ H为G的生成树。

(1) 当H不是G的生成树时，由上述知，H不连通。令S为H中不含u的一个分支的顶点集。易见，A_1中对应于S的全体行向量之和为一零向量。因此，$\det A_1 = 0$。

(2) 当H是G的生成树时，重排A1 的行、列如下：

取H的一个度为1的顶点u_1 ，并使 $u_1 \neq u$ 。记 u_1 在H中的关联边为e_1 ；再取$H-u_1$ 中的一个度为1的顶点u_2 ，并使 $u_2 \neq u$,记 u_2在$H-u_1$ 中的关联边为e2 ，…。按u1 ,u2 ,…及e_1 ,e_2 ,,,,,,,,的顺序重排A_1的行、列，得矩阵A_1'。易见，A'_1为下三角型。且主对角线元素全为 ±1 ,因此 $|\det A_1| = |\det A_1'| = 1$ 。

- **Binet-Cauchy定理 设矩阵 $P=[\,p_{ij}\,]_{m\times n}$，$Q=[\,q_{ij}\,]_{n\times m}$ ，且$m\le n$ 则**

$$\det(PQ)=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le n}\begin{vmatrix} p_{ij_1} & \cdots & p_{1j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{mj_1} & \cdots & p_{mj_m}\end{vmatrix} * \begin{vmatrix} q_{j_1 1} & \cdots & q_{j_1 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{j_m 1} & \cdots & q_{j_m m}\end{vmatrix}$$

引理2 连通图的生成树数目 = det（AAT）。

证明：由Binet-Cauchy定理知，

$\det(AA^T) = \sum(\det A_1)^2$ （对A的所有 v-1阶子方阵A_1求和） 但由引理1知

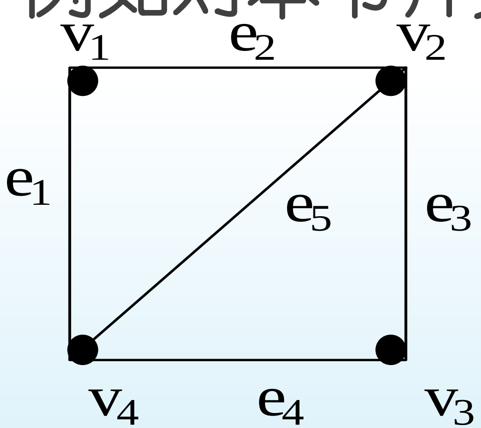
$$|\det A_1| = \begin{cases} 1 & A_1\text{的列对应于}G\text{的一生成树} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

得证。

定义无环图G的*度矩阵*为 **K = [k_{ij}]$_{\nu\times\nu}$**，其中

$$k_{ij}=\begin{cases}-\mu_{ij} & \text{当}\, i\neq j\,\text{且}\, v_i\,\text{与}\, v_j\,\text{间有}\,\mu_{ij}\,\text{条平行边}\\ d(v_i) & \text{当}\, i=j\end{cases}$$

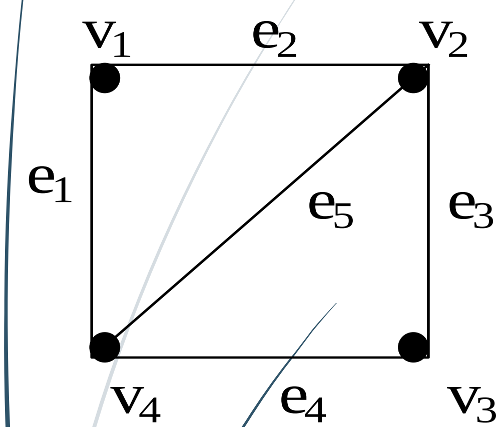
例如对本节开头的例子有



$$K=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

$$K=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}$$

$K=A_aA_a^T$



$$A_a = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

定理 连通图G的生成树数目 = K的任一元素的代数余子式

证明：容易验证，$K=A_aA_a^T$。

又，K的任一行（列）的元素的代数和 = 0，因此 K 的所有代数余子式都相等。再，设A_k为从A_a中去掉第k行所得的 $(\nu-1)\times\varepsilon$ 矩阵，易见，$A_kA^T_k$ = 从K中去掉第k行第k列后所得的子方阵。

故由引理2知本定理成立。

例

$$
\begin{array}{c}
 \\ K =
\end{array}
\begin{array}{cccc}
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
\end{array}
$$

$$
K = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccc}
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \\
\left[\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}
\end{array}
$$

前例的图的生成树数目

= K的(2,3)-元素的代数余子式

$$
= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}
$$

= 8。

定理（Cayley）K_n 中共有n^{n-2} 个不同的生成树。

证明：

用上述定理可直接证出（习题）。

3.3习题

- 2.5.1 求$K_{3,3}$的生成树数目。
- 2.5.2 若e是K_n的一条边，则$K_n - e$的生成树数目为 $(n-2)n^{n-3}$