



北京邮电大学  
Beijing University of Posts and Telecommunications

# 图论及其应用

北京邮电大学理学院



# Ch2 最短路问题



## Ch2 主要内容

- ➡ 最短路问题
- ➡ Dijkstra 算法
- ➡ Bellman-Ford算法
- ➡ Floyd-Warshall算法
- ➡ 最短路问题的应用



## 2.4 最短路问题的应用

✚

**例 2-5: 最可靠路线问题** 在一个通讯网络中, 任意两个中继线  $i$  和  $j$  之间的线路可靠概率为  $p_{ij}$  ( $p_{ij} > 0$ ), 对于  $s$  到  $t$  的任意 (有向) 路  $L = v_1 v_2 v_3 \cdots v_{t-1} v_t$ , 其可靠性为  $M = p_{12} p_{23} \cdots p_{(t-1)t}$ ,  $s$  到  $t$  的有向路可能有多条, 怎样找到可靠性最大的 (有向) 路线? ✚

对任意的 (有向) 路, 其可靠性为  $M = p_{12} p_{23} \cdots p_{(t-1)t}$ , 取  $-\ln$  得: ✚

$$-\ln M = -\ln p_{12} - \ln p_{23} - \cdots - \ln p_{(t-1)t} \quad \text{✚}$$

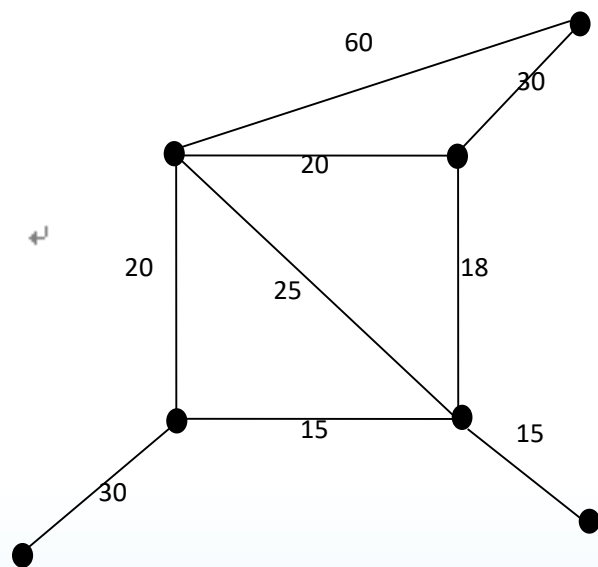
如果再将  $-\ln p_{ij}$  作为中继顶点  $i$  和  $j$  之间的边 (弧) 的权重, 则最可靠路线的问题可以转化为求两点之间的最短路问题 (当然也可以直接由  $\ln M$  转化为求两点之间的最长路问题)。✚



**例 2-7:** 已知某地区的交通路线如图 2-13 所示, 其中点代表居民生活区, 边代表公路, 边旁边的权重为居民生活区间公路距离, 问区中心医院应建在哪个居民生活区, 可使离医院最远的居民生活区居民就诊时所走的路程最近? ↵

先求出  $v_1$  到其它各点的最短路长  $d_{1j}$  ( $j=2, L, 7$ ), 令: ↵

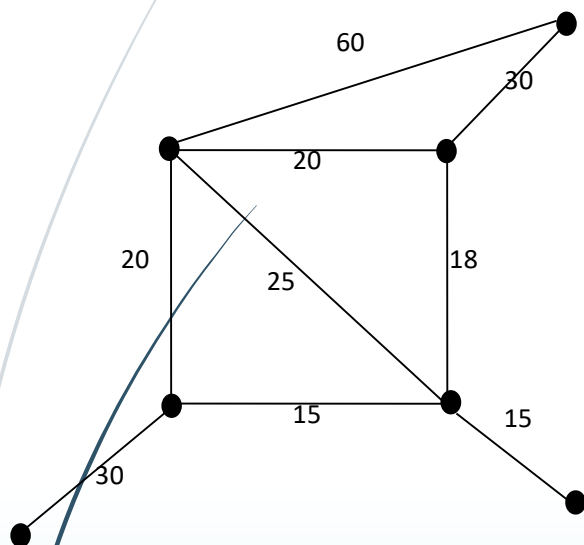
$$D(v_1) = \max\{d_{11}, d_{12}, L, d_{17}\} \quad \leftarrow$$



表示若医院建在  $v_1$ , 则距离医院最远的居民生活区距离为  $D(v_1)$ 。再依次计算  $v_2, L, v_7$  到其余各点的最短路, 类似求出  $D(v_2), L, D(v_7)$ 。求此七个值中最小者即为所求建设医院的位置。 ↵



## 计算结果



小区号 $v_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$D(v_i)$
$v_1$	0	30	<u>50</u>	<u>63</u>	93	45	60	93
$v_2$	30	0	<u>20</u>	<u>33</u>	63	15	30	63
$v_3$	50	20	0	20	<u>50</u>	<u>25</u>	40	50
$v_4$	63	33	20	0	<u>30</u>	<u>18</u>	33	63
$v_5$	93	63	50	30	0	<u>48</u>	63	93
$v_6$	45	15	25	18	<u>48</u>	0	15	48
$v_7$	60	30	40	33	<u>63</u>	<u>15</u>	0	63

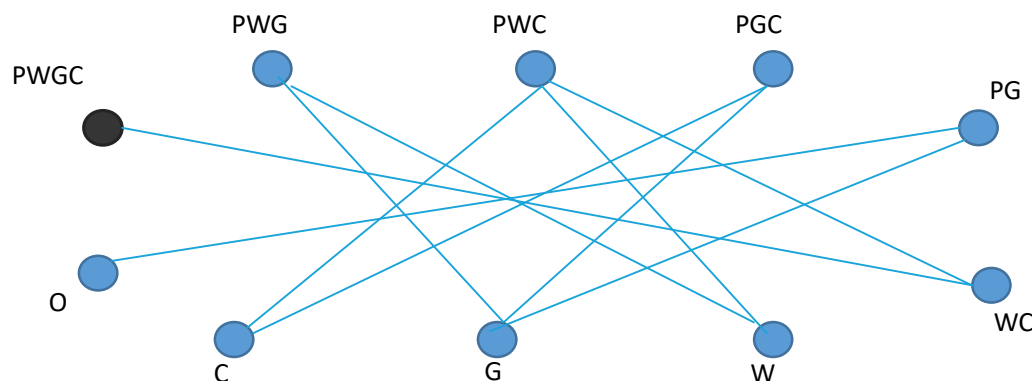
表 2-2

结论：所以医院应建在  $v_6$ ，此时离医院最远的居民生活区（ $v_5$ ）距离为48（公里）。



**例 2-10: 渡河问题:** 一个摆渡人 P 希望用一条小船把一只狼 W、一头羊 G 和一篮白菜 C 从一条河的的一岸运到对岸去。船只能容纳 P、W、G、C 中的两个, 在无人看守的情况下, 不能留下狼和羊在一起或者羊和白菜在一起, 应该如何选择渡河方案, 使得四者都能渡河? ↵

**解:** 可以将此问题转化为最短路问题, 然后用 Dijkstra 算法 (或其他算法) 求解。考虑在河的同岸上, 人狼羊菜四种东西的任意组合, 共  $2^4 = 16$ , 其中狼 W 羊 G 和菜 C, 羊 G 和菜 C, 狼 W 羊 G, 三种情况不允许出现, 因而, 人 P, 人 P 狼 W, 人 P 菜 C, 三种情况也不会出现。这样, 河的同岸上只会出现 10 种情况, 将这 10 种情况分别看作顶点, 两顶点之间连上一条边的充分必要条件是相应的两种情况如果可以通过小船运输 (每次只能运输人自己或运输人和另外一种东西) 到对岸 (或从对岸运回) 从而使原河岸的一种情况转变为另一种情况。如图 2-15 所示 (其中情况 0 表示四者都已成功渡河)。(可以不用考虑权重, 或权重都是 1) ↵



用 Dijkstra 算法（或其他算法）求解，可得两条不同的最短路线：

$PWGC \rightarrow WC \rightarrow PWC \rightarrow C \rightarrow PGC \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow O$

或

$PWGC \rightarrow WC \rightarrow PWC \rightarrow W \rightarrow PWG \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow O$

相应的第一个渡河方案为：人狼羊菜通过小船运走人和羊，变为剩下狼和菜，人驾船返回，变为人狼和菜，通过小船运走人和狼，变为剩下菜，人和羊驾船返回，变为人羊和菜，通过小船运走人和菜，变为剩下羊，人驾船返回，变为人和羊，通过小船运走人和羊。成功渡河。





## 2.4习题

- 1. 某二人有一只8升装满了酒的酒壶，还有两只空壶，分别为5升和3升。试问只用这三只酒壶将酒平分的最简单方法该怎么分？
- 2. 请将背包问题转化为最短路问题。
- 3. 请将智力游戏“华容道”、“九连环”转化为最短路问题。