图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch3 树与最优树

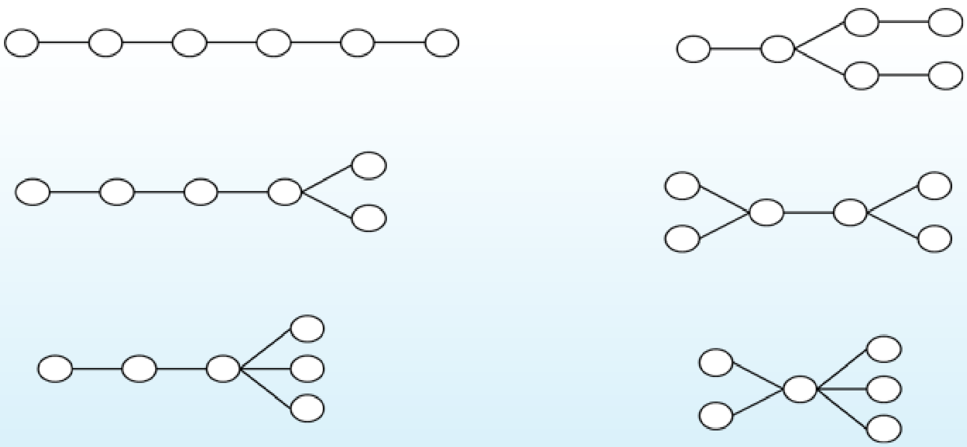
Ch3 主要内容

- 树的概念
- 生成树、余树和健
- 生成树的计数及Cayley公式
- 树的应用

3.1 树的概念

北京邮電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

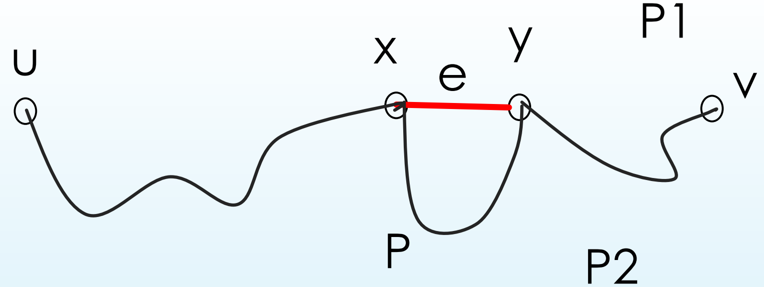
- 不含圈的图，称为无圈图（acyclic g.）；又称作森林或林（ forest ）
- 树（tree）：连通的无圈图
- 例3-1：所有6个顶点的且互不同构的树 (共六种)



定理3.1: 树中任意两顶点间有唯一的路相连。

证明：反证，假设存在树G，其中存在二顶点u与v，其间有二不同(u, v)-路P_1和P_2相连。因$P_1 \neq P_2$，一定存在，例如，P_1的一条边e = xy，它不是P_2的边。

显然，图 $P_1 \cup P_2 - e$是连通的，从而其中包含一条(x, y)-路P。于是P + e 是G中的一 圈，这与G为无圈图相矛盾。



定理3.4: G是树 $\Rightarrow$ $\varepsilon = \nu - 1$

- 证明：对 ν 进行归纳。当 $\nu = 1$时，$G = K_1$，成立。假设定理对小于 ν个顶点的树成立，而G为 ν 个顶点的树。

任取G的一边uv 。它是G中的一条路，由定理3.1知，G - uv 不连通，且它恰有二分支（习题5），设为G_1与G_2。它们都是连通无圈图，因此是树。又，它们的顶点数都小于 ν 。由归纳假设知$\varepsilon(G_l) = \nu(G_l) - 1$　　$l = 1,2$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \varepsilon(G) &= \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 \\ &= \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1 \\ &= \nu(G) - 1 \end{aligned}$$

推论3-1 每棵非平凡树至少有两个度为1的顶点（悬挂点）。

- 证明：由于G为非平凡连通图，

  $d(v) \geq 1$， $\forall v \in V$。

  再由定理3.4 及2.1.2知，

$$2v-2=2\varepsilon=\sum_{v\in V} d(v)=k+\sum_{d(v)\geq 2} d(v)\geq k+2(v-k)=2v-k$$

所以推论成立。

- 树叶：对于非平凡树G，度为1的顶点，也称为树叶。
- 一棵非平凡树至少有两个树叶。

推论3-2：恰只包含两个度为1顶点的树是路。

- 证明：设树G为恰只包含两个树叶的树，所以其他不是树叶的顶点v都有d(v)>= 2.

$$2v-2=2\varepsilon=\sum_{v\in V}d(v)=2+\sum_{d(v)\geq 2}d(v)\geq 2+2(v-2)=2v-2$$

$$\therefore \quad \sum_{d(v)\geq 2}d(v)=2(v-2)$$

故，其他不是树叶的顶点v都有d(v)= 2，所以连通无圈的树只能是路。

割边

- 称边e为图G的*割边*(cut edge)

  $\Leftrightarrow$ ω(G-e) > ω(G) （分支数）。

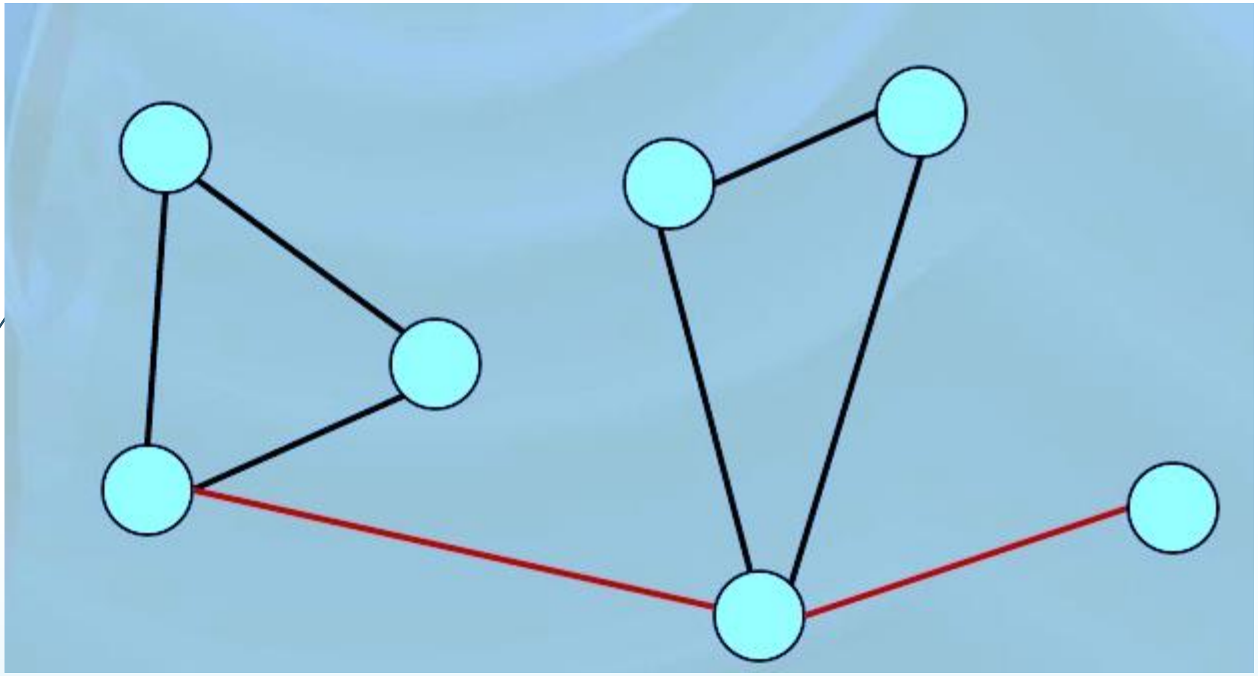
  (或即 ω(G-e) = ω(G) + 1 ）

- 一条边有两个端点，而这两个端点至多在一个图中的两个分支中，所以这条边的加最多将两分支连成一个分支。

- 非割边：称边e为图G的*非割边*

  $\Leftrightarrow$ ω(G-e) = ω(G) 。

找出割边、非割边



割点

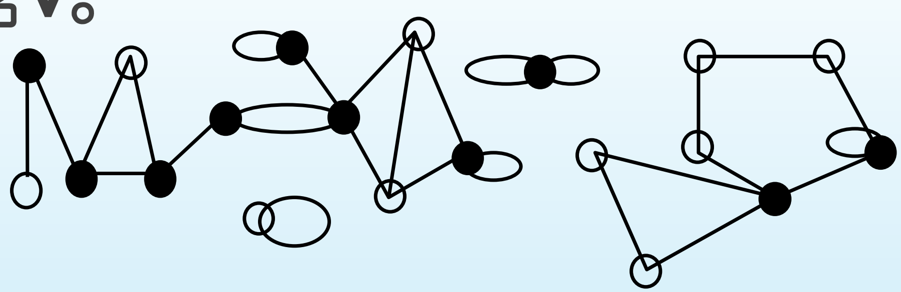
称顶点v为G的*割点*(cut vertex)

⇔ E可划分为二非空子集E_1及E_2，使$G[E_1]$与$G[E_2]$只有一公共顶点v。

当G无环时，

v为割点 ⇔ $\omega(G-v) > \omega(G)$ （删除某一点和与它连接的所有的边）

⇔ 存在二顶点x及y，使G中任一(x, y)-路一定包含v。



图G

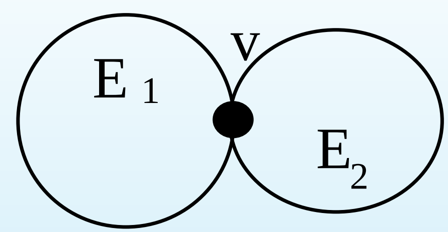
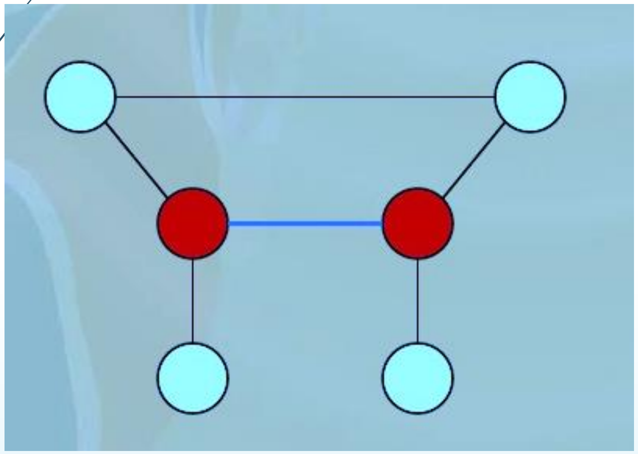
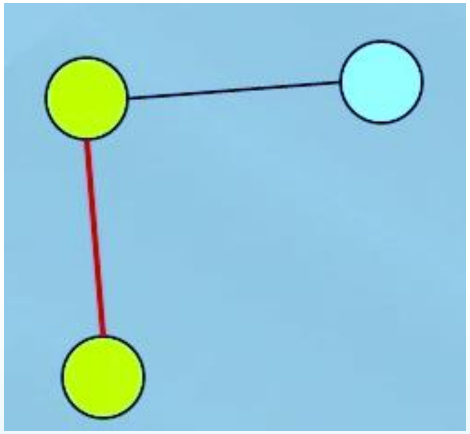


图 G

割点和割边之间的关系

- 猜想：两割点间的边是割边吗？割边的两个端点是割点吗？





答案都是否定的！

割边

- 定理3-2： e为G的割边 ⇔ e不在G的任一圈中。
- 证明：令 e = xy， 则 x 与 y在G的同一分支中。于是,

e 为G的割边

⇔ $\omega(G\text{-}e) = \omega(G) + 1$

⇔ x与 y不在G-e的同一分支中

⇔ G-e 中无 (x,y)-路

⇔ G中无含e的圈。

- 定理3-2的逆否命题： e为G的非割边 $\Leftrightarrow$ e在G的某一圈中。
- 证明：令 e = xy，则 x 与 y在G的同一分支中。于是,

e 为G的非割边

$\Leftrightarrow$ $\omega(G-e) = \omega(G)$

$\Leftrightarrow$ x与 y在G-e的同一分支中

$\Leftrightarrow$ G-e 中有 (x,y)-路

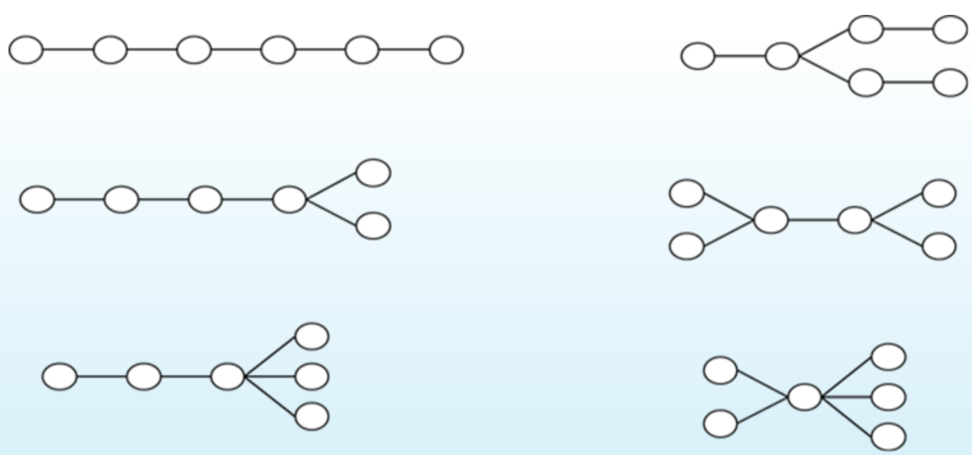
$\Leftrightarrow$ G中有含e的圈。

割边

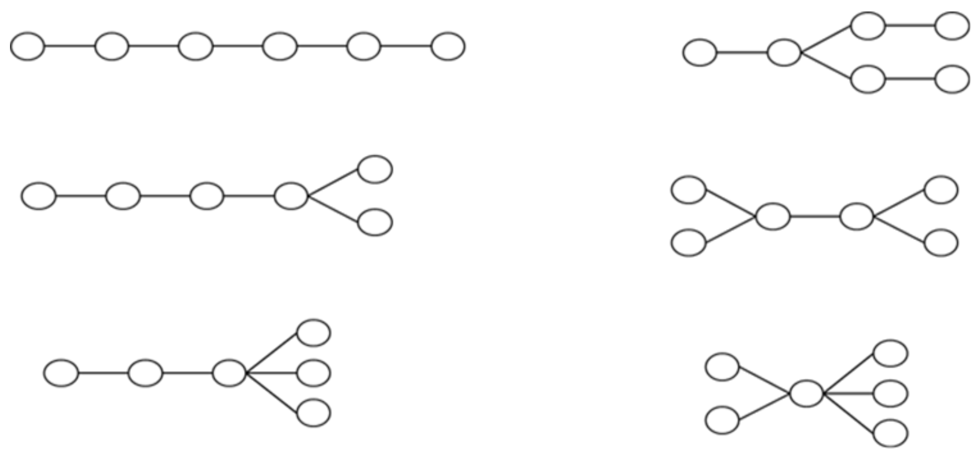
- 定理3-3：图G连通，且每边是割边 ⇔ G为树
- 证明：注意到以下事实即可，

  G无圈 ⇔ G 中每边不在任一圈中

  ⇔ G中每边是其割边。



割点：定理3.5：在树G中 v为割点 ⇔ d(v) > 1



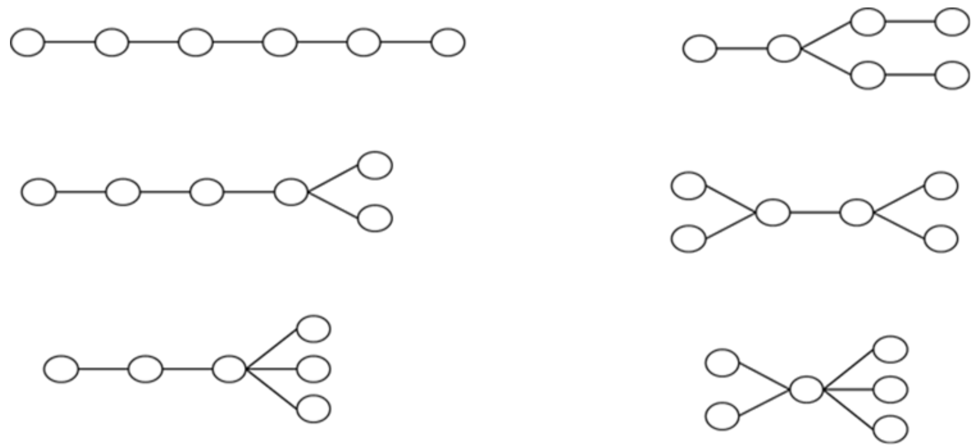
证明：

(i) 若d(v) = 0，则G ≅ K1， v不是割点。

(ii) 若 d(v) = 1，则G -v 仍然是树。

因此ω(G- v)= 1 = ω(G)，从而 v不是割点。

割点：定理3.5：在树G中 v为割点 ⇔ d(v) > 1



证明：(iii)若 d(v) > 1，则G中存在与v相邻接的二不同顶点u, w 。由定理2.1知，uvw是G中的唯一 (u, w)-路，因此G-v中不含(u, w)-路，（即G-v中u与w不连通）

∴ ω(G-v) > 1 ，即v为G的割点。

非平凡、无环、连通图中，至少有两个顶点不是割点

证明：令T为G的一生成树，由推论3.1及定理3.5知，T中至少存在二顶点 u与v不是T的割点，则它们也不是G的割点：这是因为对于u (及v)有

$$1 = \omega(T-u) \geq \omega(G-u) \geq 1 ,$$

$$\therefore \quad \omega(G-u) = 1 = \omega(G) 。$$

树的性质总结：

- （1）图G是树（图G连通、无圈）
- （2）图G中无环且任意两个顶点之间有且仅有一条路
- （3）图G中无圈且 $\varepsilon = \nu - 1$
- （4）图G连通且 $\varepsilon = \nu - 1$
- （5）图G连通且每边为割边（对任意e，G-e不连通）
- （6）图G无圈且对任意边e∈ $E(\overline{G})$，图G+e恰有一个圈
- （7）树上点边的特点，割点，割边？

偏心率

顶点 v 的**偏心率(eccentricity)** $E(v)$ 是指从这个点到图 G 中距离 v 最远的顶点 w 之间的距离，即 $E(v)=\max\left\{d(v,w)\mid w\in V(G)\right\}$；

图 G 中具有最小偏心率的顶点被称作图 G 的**中心（点）(centre (point))**；

图 G 的中心点 u 的偏心率 $E(u)$ 称作图 G 的**半径(radius)** $r(G)$，

所以 $r(G)=\min\{E(v)\mid v\in V(G)\}$)；

而图 G 的最大偏心率称作图 G 的**直径(diameter)** $D(G)$，

所以 $D(G)=\max\{E(v)\mid v\in V(G)\}$ 。

定理3-6：图G是树，则图G要么只有一个中心点，要么有连个相邻的中心点

证明：对树图G的顶点数υ作归纳证明：

当$\upsilon=1$时或2时，结论显然成立。假设$2\leq\upsilon<n$时（其中$n\geq3$），结论成立，对任意顶点数$\upsilon=n$的树G，去除掉树G的树叶，得到的G'仍然是树，而且与G有同样的中心点

（设G的中心点为u，u的偏心率$E(u)$一定是u点与某树叶的距离才能达到），而且

$r(G')=r(G)-1$（事实上，G中每个非树叶的点的偏心率都比G'中相应顶点的偏心率加1

另外注意到对于顶点数至少为3的树，中心点一定不会是树叶。所以G和G'有相同的中心点。所以根据归纳假设，结论成立。

证毕。

习题3-1：

- 1.证明：在任一非平凡树中，任一最长路的起点和终点均是树叶.
- 2.一树中若 $\Delta \geq k$，则其中至少有k个度为 1 的顶点。
- 3. G为 林 $\Leftrightarrow$ $\varepsilon = \nu - \omega$
- 4. 当 $\varepsilon = \nu - 1$ 时，证明以下三结论是等价的：

(a) G 是连通图；

(b) G是无圈图；

(c) G是树。

提示：(a)⇒(b)：反证，考虑边数最少的反例G，即G是满足 条件：$\varepsilon = \nu - 1$；连通；且含圈的所有图中边数最少者)

习题3-1：

- 5.正整数序列 $(d_1, d_2, \ldots, d_\nu)$是一 棵树的度序列，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$$

- 6. 若林G 恰有2k个奇点，则G 中存在k条边不重的路P1 ,P2 ,...,Pk ,使得$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_k)$。
- 7. 饱和烃分子形如$C_m H_n$，其中碳原子的价键为4，氢原子的价键为 1，且任何价键序列都不构成圈。证明：对每个m，仅当n = 2m + 2时$C_m H_n$方能存在.

习题3-1：

- 11. 设G为 $\nu \geq 3$的连通图，证明：

  (a) 若G有割边，则G有顶点v使 $\omega(G-v) > \omega(G)$；（即，割边上必有一 端点为割点）

  (b) (a)的逆命题不成立。

- 12. 证明：恰有二顶点为非割点的简单连通图必是一条路。

- 13 在简单连通图G中证明：

  v为G的割点 $\Leftrightarrow$ G的任一生成树不以v为叶。