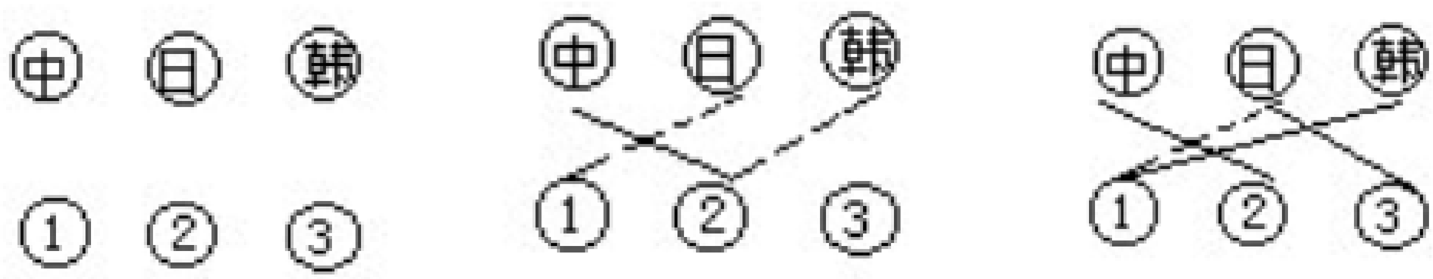
图论及其应用

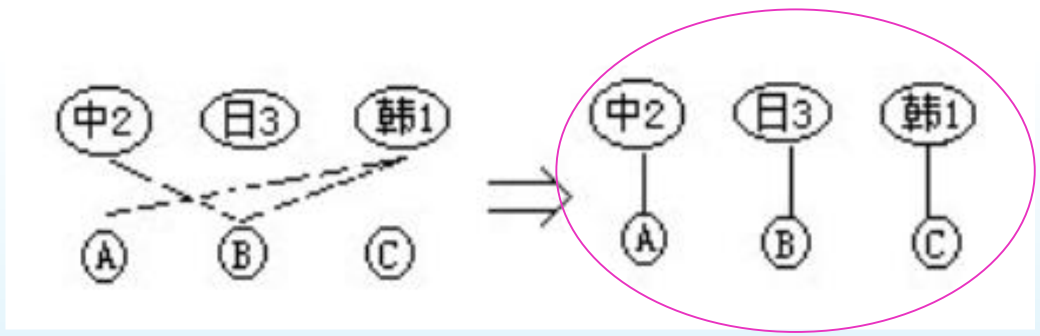
北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch4 匹配与覆盖

引例：

先看一个例题. 中、日、韩三个足球队进行比赛，已知 A 不是第一名，B 不是韩国队，也不是第二名，第一名不是日本队，中国队第二. 问 A、B、C 各代表哪国队？各是第几名？





Ch4 主要内容

- 匹配
- 独立集、团、覆盖和匹配；及其之间的关系
- 偶图的匹配和覆盖，（应用场景，算法）
- 完美匹配*
- 匹配的应用（偶图的完美匹配，最优匹配，稳定匹配）

概念

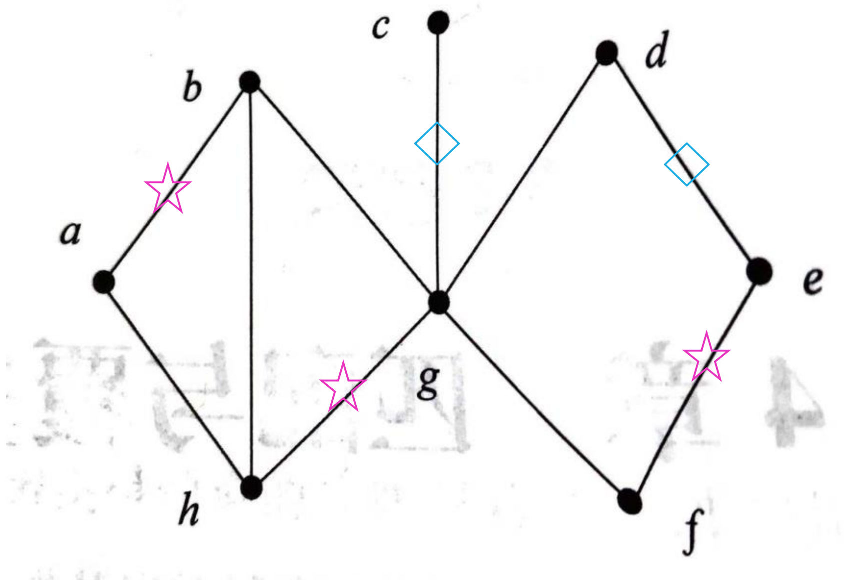
- *匹配*（matching） $M \subseteq E$

  $\Leftrightarrow$ M中的边都是link，且互不相邻接。

- 当边uv $\in$ M时，称u与v在M下***相匹配***；称**M** *饱和*（saturated） u与v, 也称u与v为***M-饱和的***。
- 顶点x为***M-不饱和***: 和x相关联的边都不在M里。

6

例：



M1={ab, gh, ef}，　M1是匹配

　abghef顶点是M1饱和的；cd两点M1非饱和；

M2={cg, de}，M2是匹配

　cgde顶点是M2饱和的; a b h f 为M2非饱和；

M3={ab}　M3是匹配

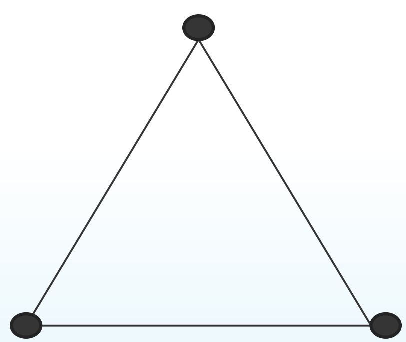
完美匹配

- M为图G的*完美匹配* ： G中每个顶点都是M-饱和的。
- M包括了图G 中所有顶点的匹配
- 是最大匹配的一种

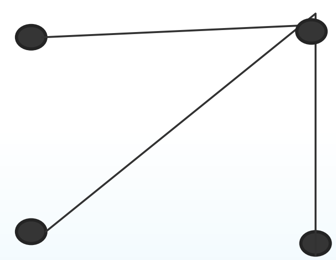
北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

完美匹配

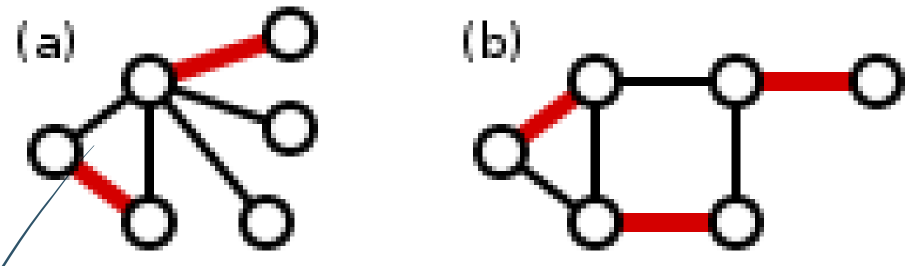
- 完美匹配的边数多少呢？ 恰好是点数的一半
- 怎样的图可能有完美匹配？
- 怎样的图一定没有完美匹配？



奇数个点的图一定没有

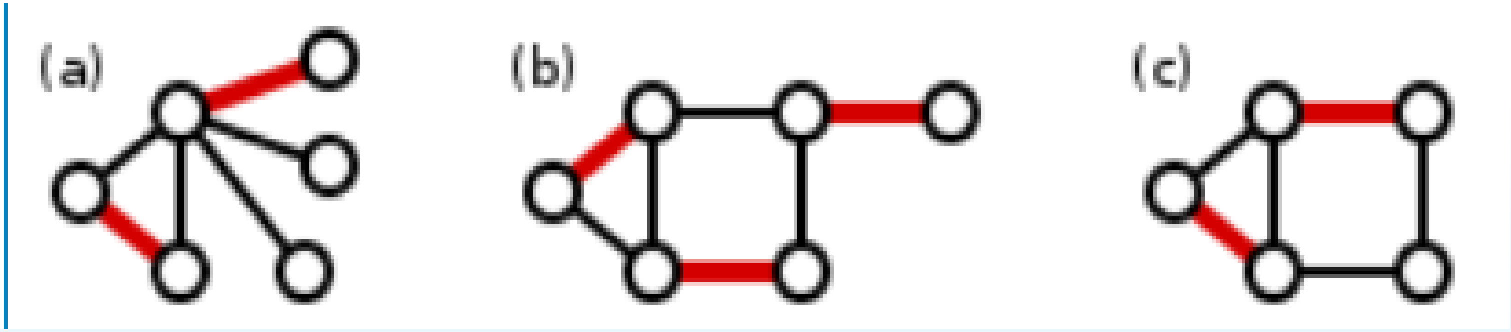


偶数个点的图不一定有


(a)
(b)
(c)

极大匹配

- 极大匹配M不可能是图G 的任何一个匹配的真子图。
- 如果M 是图G 的一个极大匹配，那么不可能有另一个匹配包含M 的全部边，而不等于M。

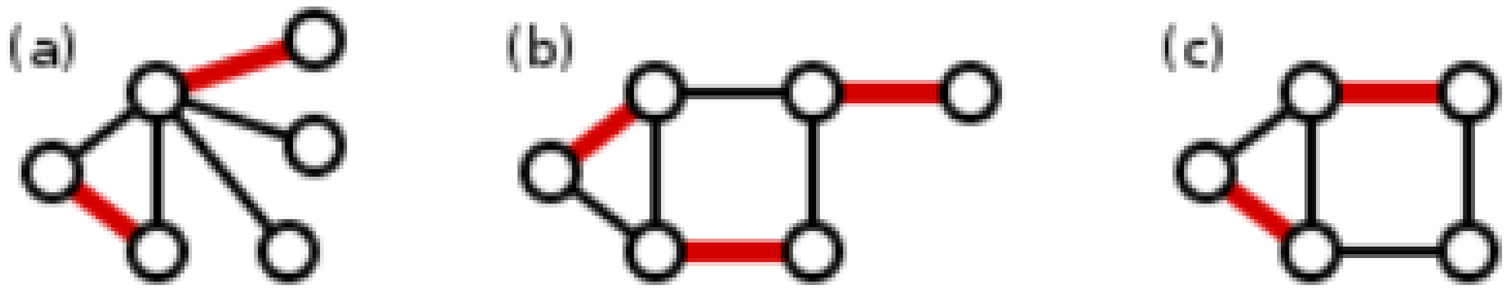


极大匹配吗？

是

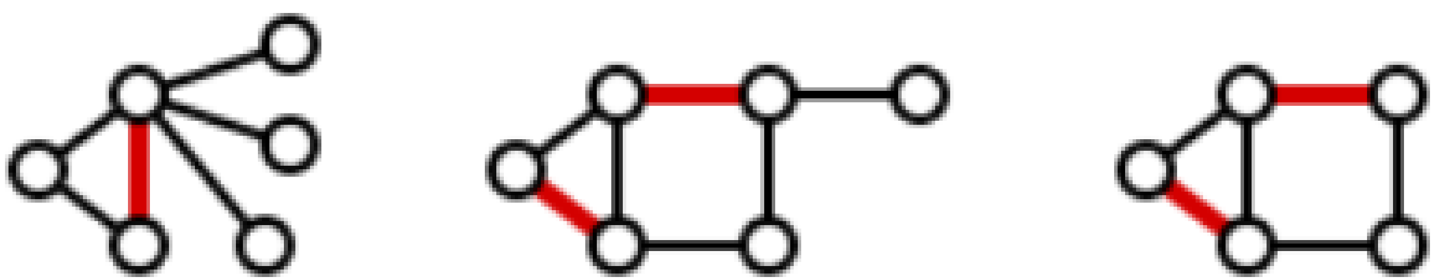
例：

是极大匹配

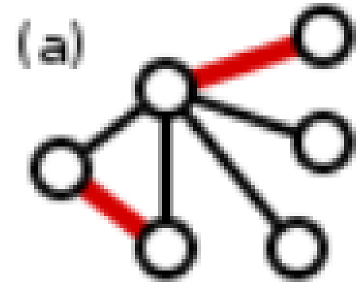


极大匹配吗？

是



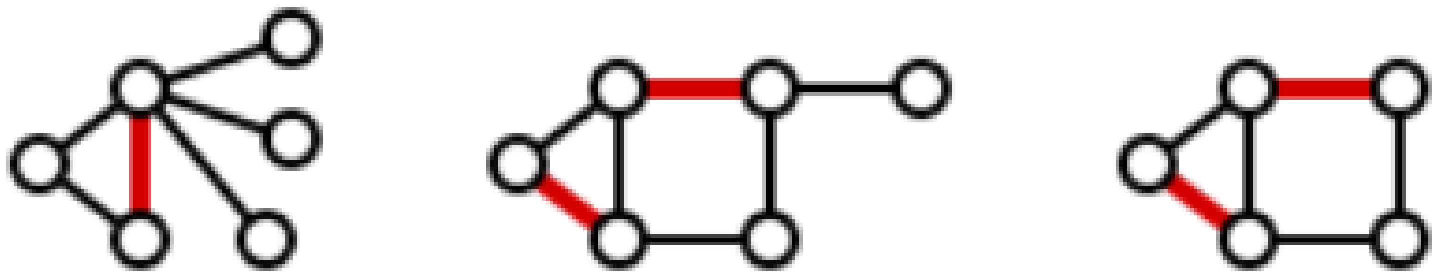
最大匹配

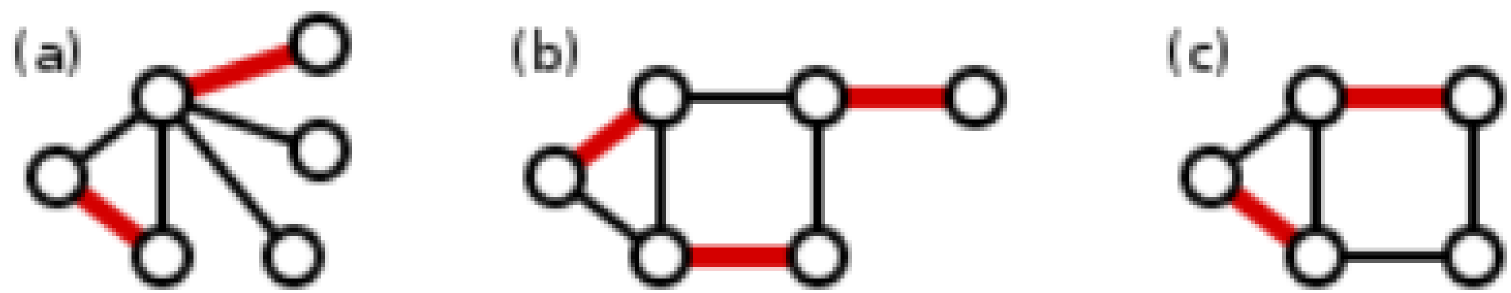


- M为图G的*最大匹配*（**maximum matching** ）
  ⇔ 边数最多的匹配
- 最大匹配可能有不止一个，但最大匹配的边数是确定的，并且不可能超过图中顶点数的一半。
- 任何一个图都有最大匹配；完美匹配一定是最大匹配；
- 区别于极大匹配…

例：

极大匹配

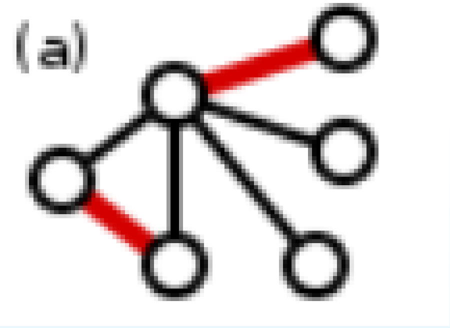




最大匹配吗？

独立集

- *独立集* 是指图 G 中两两互不相邻的顶点构成的集合。
- 当图G的最大匹配M不是G的完美匹配时，图G中M-不饱和的顶点集合是一个非空独立集。



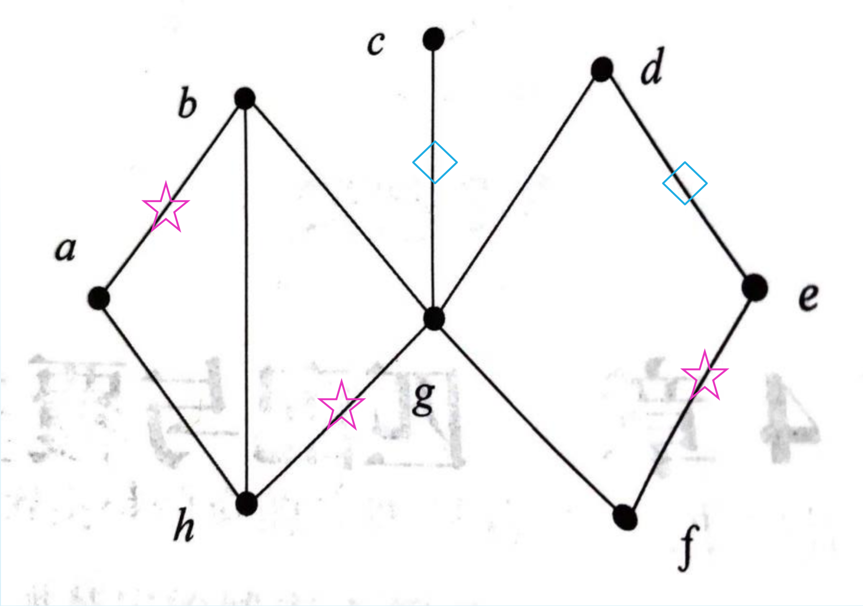
- 一般来说，对任意图，寻找完美匹配和最大匹配是比较困难的；
- 但对于偶图或者特殊的图，能够巧妙寻找完美匹配或者最大匹配。

交错路

- P为G中的**M-*交错路*** **(M-alternating path)**

  ⇔　**P**的边**交替地属于M及E\M**。

任何由一条边组成的路，都叫**M-**交错路。



路：**abhgfed**

是**M1**交错路？

是**M2**交错路？

可扩路:

- P为G中的**M-** ***可扩路***（**M-augmenting path**）⇔ **P**为**M-**交错路，且起点与终点都是**M-**不饱和的。

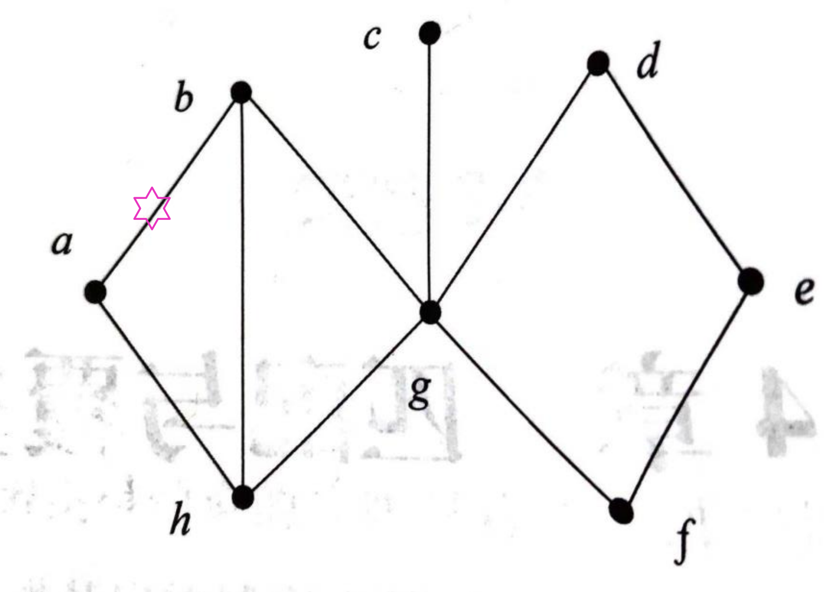
一条边组成的路什么情况下是**M-**可扩路？

M-可扩路的边数是奇数；

M-可扩路是对**M**而言的，找最大匹配**M**

例：

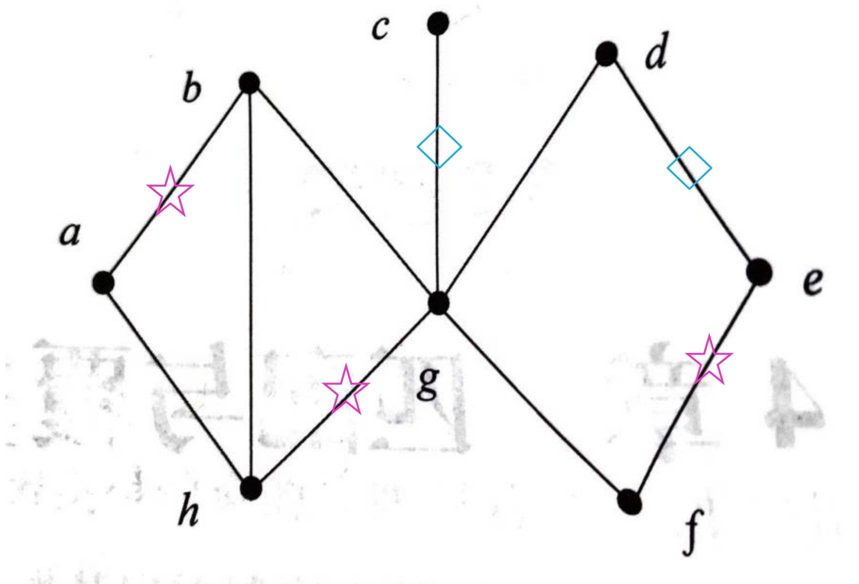
M3={ab}



- 从不饱和的点开始：

  路 habg 是M3交错路；可扩展吗？ 是

例：匹配



- 路 abhgfed 是M1交错路；可扩路吗？

最大匹配：M1

有完美匹配？：c点，还剩def：三点两边，不可能
M：cg，不含gb,gd,gh,gf; 无完美匹配

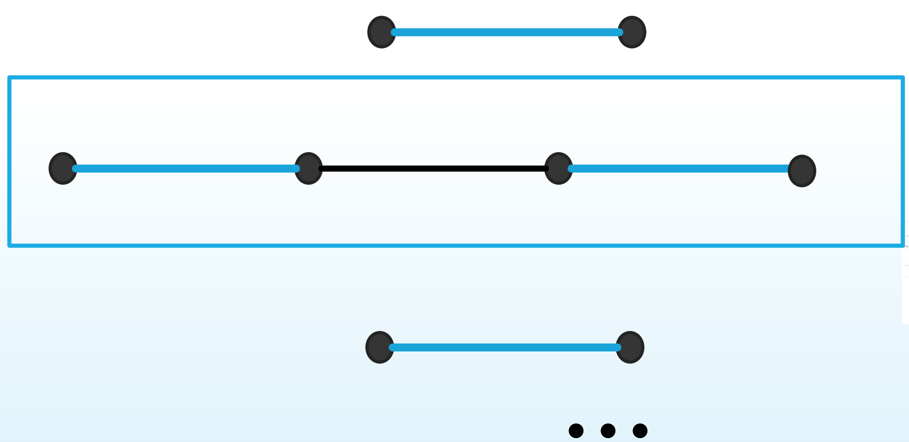
定理5.1 (Berge,1957) M为G中的最大匹配 ⇔G中不存在M-可扩路。

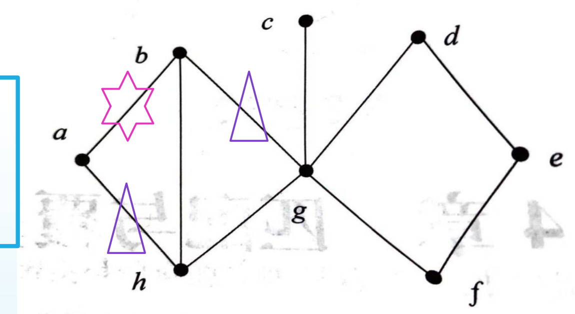
证明： ⇒ ： 反证法。假设G中有M-可扩路P，

则 $M' = M \Delta E(P)$ （对称差） 也是G的匹配，

且 $|M'| = |M| + 1$，这与M 为最大匹配相矛盾。

对称差：$A \Delta B$ = A并B - A交B





定理5.1 (Berge,1957) M为G中的最大匹配 ⇔G中不存在M-可扩路。

证明： ⇐ ：反证，假设M不是最大匹配，取G中任一最大匹配M*。

令 $H = G[M \Delta M^*]$ 。

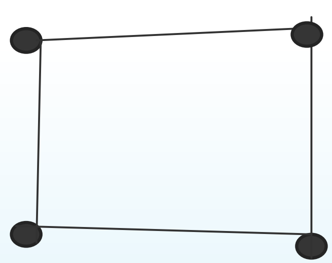
显然， $d_H(v) = 1 \text{ or } 2 \quad \forall v \in V(H)$ 。

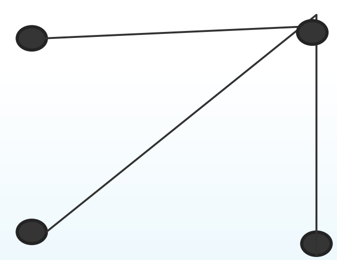
因此，H的每个分支都是一圈或路(圈的边数一定是偶数，路可能是奇数边，也可能是偶数边)，且由M及M*的边交错组成。但| M*| > | M |，H中一定有一分支是一条路P（该路上的M*中的边数比M的边数多），且其起点与终点都是M*饱和的。从而P是G中的M-可扩路，矛盾。

应用：

- 考虑两个人在图G上做游戏。两个人交替地选取不同的顶点$v_1 v_2$，…，对每个 i>1，都有点v_i与v_{i-1}相邻。最后一个顶点的选择者获胜。

证明：第一个选点的人获胜的策略的充分必要条件是图G没有完美匹配。





应用：

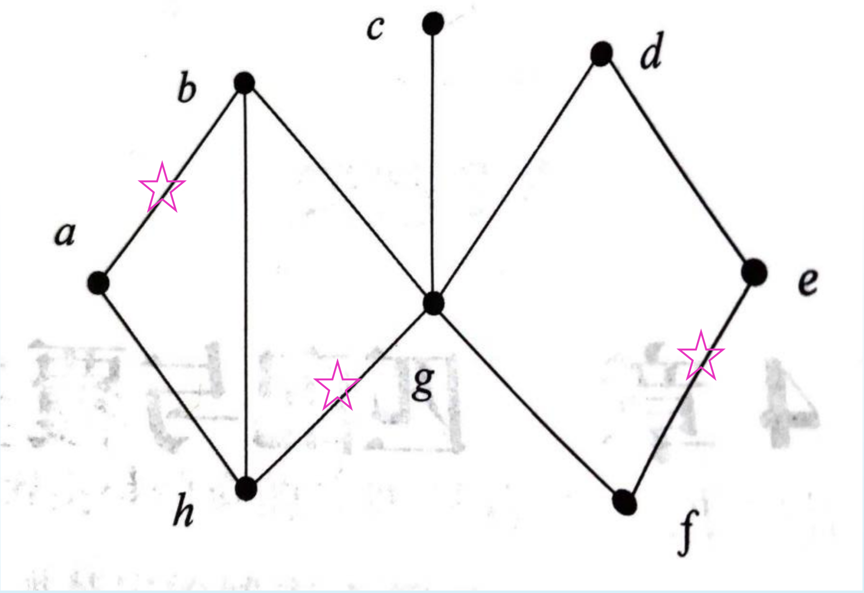
证明：第一个选点的人获胜的策略的充分必要条件是图G没有完美匹配。

- 证明： $\Rightarrow$ 假设有完美匹配M，注意到M饱和G的每个顶点。第一人选v_1后，第二人取饱和v_1的M中边的另一个端点v_2；第一人选了v_3，第二人…结果是第一个人找不到点；

应用

证明：第一个选点的人获胜的策略的充分必要条件是图G没有完美匹配。

- 证明：$\Leftarrow$ 图G没有完美匹配，要证第一人获胜。取G的最大匹配M。由于无完美匹配，所以M不是完美匹配，存在M不饱和顶点。



应用

证明：第一个选点的人获胜的策略的充分必要条件是图G没有完美匹配。

- 证明：$\Leftarrow$ 图G没有完美匹配，要证第一人获胜。取G的最大匹配M。由于无完美匹配，所以M不是完美匹配，存在M不饱和顶点。

✓ 取胜策略是：第一人选M不饱和点v_1，第二人选v_2，且是M饱和的；第一人取饱和v_2的M边的另一个端点v_3。如果点v_3没有未曾取过的相邻顶点，则第二人输，否则第二人选的v_4，一定与v_3相邻，且为M饱和的（否则就找到$v_1v_2v_3\ v_4$的M可扩路，与M最大匹配矛盾）。如果进行，最后一定是第二人选不到顶点而输。