图论及其应用

北京邮电大学理学院

Ch2 最短路问题

Ch2 主要内容

- 最短路问题
- Dijkstra 算法
- **Bellman-Ford算法**
- Floyd-Warshall算法
- 最短路问题的应用

2.2 Bellman-Ford 算法

- 权重有负数，但没有负有向圈的有向图，不能用**Dijkstra**算法。**Why**？
- 适用：一般权重，无负有向圈
- 顶点v_0到其他各点（$v_1, \ldots, v_{v-1}$）的最短有向路的长度和路线
- **Ford**，**1956**年提出的，是最早提出的一种标号修正算法。

算法原理

- $u_j^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, v-2)$ 表示第k次迭代得到的顶点 $v_j (0 \le j \le v-1)$ 的临时标号，w_{ij} 表示顶点 v_i 到 v_j 的有向弧的权重

$$
\begin{cases}
u_i^{(1)} = w_{0,i} & i = 0, 1, \cdots, \upsilon - 1 \quad , \\
u_i^{(k+1)} = \min\{u_i^{(k)}, \min\limits_{0 \le j \le \upsilon-1, j \ne i} \{u_j^{(k)} + w_{j,i}\} & i = 0, 1, \cdots, \upsilon - 1 \quad 。
\end{cases}
$$

最后得到的 $u_i^{(\upsilon-1)}$（$i=0,1,\cdots,\upsilon-1$）就是从起点 $\mathbf{v}_0$ 到其它各点 v_i（$i=0,1,\cdots,\upsilon-1$）的最短有向路的路长。

$$\begin{cases} u_i^{(1)} = w_{0,i} & i=0,1,\cdots,\upsilon-1 \quad , \\ u_i^{(\mathrm{k}+1)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(\mathrm{k})} + w_{j,i}\} & i=0,1,\cdots,\upsilon-1 \quad 。\end{cases}$$

算法的正确性

- 定理2-1

标号 $u_i^{(k)}$（$i=1,\cdots,\upsilon-1$，$k=1,2,\cdots,\upsilon-1$）是第 k次迭代得到的从起点 v0到顶点vi 所经过的弧数不超过 k时最短有向路的路长。

证明：归纳法。从v0到顶点vi 所经过的弧数不超过 k+1的最短路有两种情况: (1)不超过k条弧 $u_i^{(k)}$ ；

（2）恰巧k+1条弧，设最后一条弧为（vj vi）则，$u_j^{(k)}$ +w(j,i)

两者取小者，证毕。

- 算法过程得：$u_i^{(k)}$ 随着迭代的增加是非增的；
- 无负圈的图，最短路中弧数不超过ν-1,故算法迭代ν-1次收敛。

复杂性分析——好算法

- 共循环$\boldsymbol{\nu}$-2次($\boldsymbol{\nu}$-1次中除去第1次迭代的赋值)
- 每次循环中，对$\boldsymbol{\nu}$个顶点更新标号：加法和比较至多各$\boldsymbol{\nu}$次，
- 计算量至多$O(\nu^3)$

- 注意到，更新点的标号=检查一次弧
- 计算量为$O(\boldsymbol{\nu\epsilon})$ $(\boldsymbol{\epsilon} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1}))$，好于$O(\nu^3)$ 差于$O(\nu^2)$。

注：

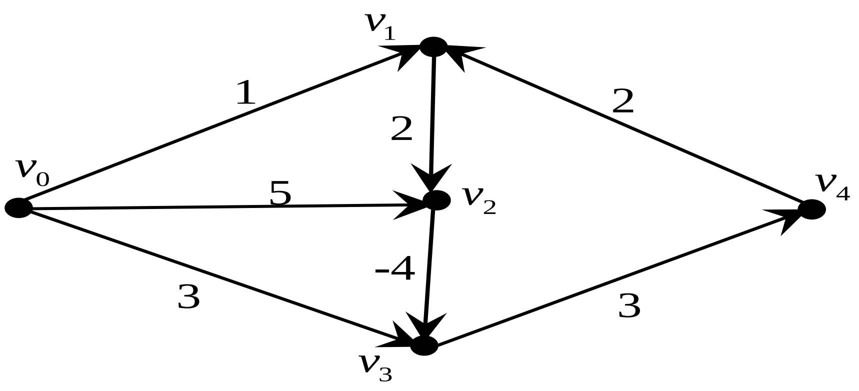
- 需要求解v0到所有点的最短路，而且要将ν-2次迭代进行完，即一定要求出指标$u_i^{\nu-1}$，才能保证正确。Dijkstra不同
- 修改Pr(v),可得多条最短路、次最短路等，额外计算量
- 正权重无向图，计算最短路，（边=>两弧）

  修改后可以求最长路。
- 负有向圈存在，u_i^{ν}不收敛（存在 j, $u_j^k \to -\infty$, $k \to \infty$）

  j 在负圈上，并不需要事先判断是否有负圈。

例2-2

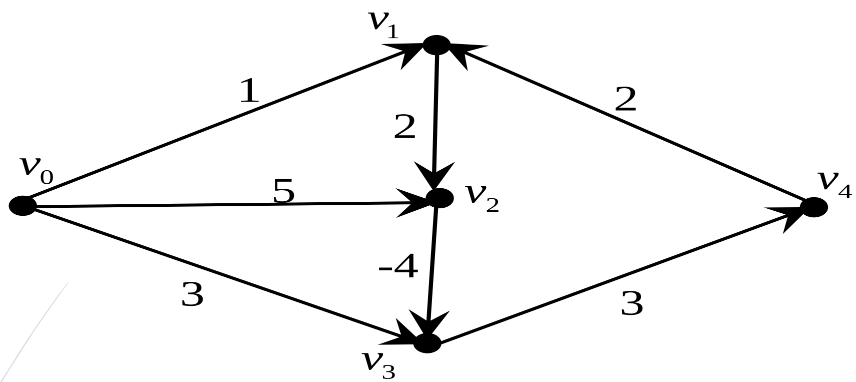
- 求下面的赋权图中点v0到其他所有点的最短有向路的路长及路线。



共v个点，

迭代v-1次

验证1次



解：（1） $u_0^{(1)}=w_{0,0}=0,\Pr(0)=0$；$u_1^{(1)}=w_{0,1}=1,\Pr(1)=0$；$u_2^{(1)}=w_{0,2}=5,\Pr(2)=0$；

$u_3^{(1)}=w_{0,3}=3,\Pr(3)=0$； $u_4^{(1)}=w_{0,4}=\infty,\Pr(4)=0$。

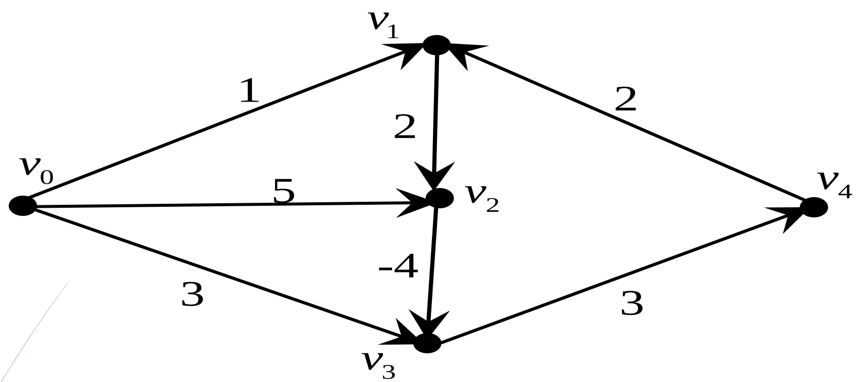
（2） $u_0^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,0}\}=\min\{0+0,1+\infty,5+\infty,3+\infty,\infty+\infty\}=0,\Pr(0)=0$

$u_1^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,1}\}=\min\{0+1,1+0,5+\infty,3+\infty,\infty+2\}=1,\Pr(1)=0$；

$u_2^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,2}\}=\min\{0+5,1+2,5+0,3+\infty,\infty+\infty\}=3,\Pr(2)=1$；

$u_3^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,3}\}=\min\{0+3,1+\infty,5-4,3+0,\infty+\infty\}=1,\Pr(3)=2$；

$u_4^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,4}\}=\min\{0+\infty,1+\infty,5+\infty,3+3,\infty+0\}=6,\Pr(4)=3$。



u_j^2 = 0, 1, 3, 1, 6, j = 0,…,4

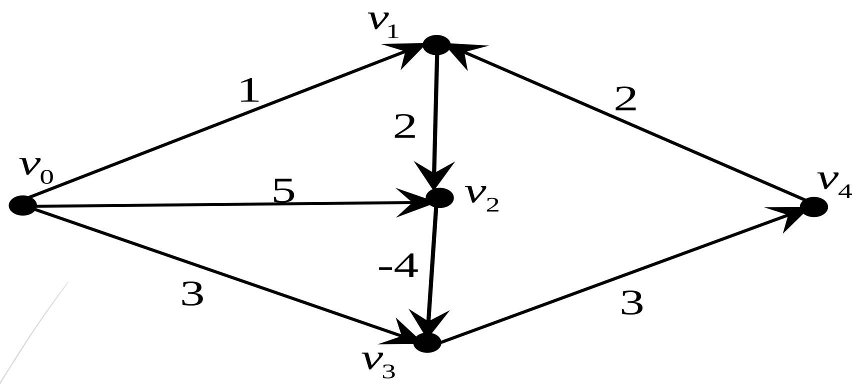
(3) $u_0^{(3)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)} + w_{j,0}\} = \min\{0+0, 1+\infty, 3+\infty, 1+\infty, 6+\infty\} = 0, \Pr(0) = 0$

$$u_1^{(3)} = \min_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)} + w_{j,1}\} = \min\{0+1, 1+0, 3+\infty, 1+\infty, 6+2\} = 1, \Pr(1) = 0;$$

$$u_2^{(3)} = \min_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)} + w_{j,2}\} = \min\{0+5, 1+2, 3+0, 1+\infty, 6+\infty\} = 3, \Pr(2) = 1;$$

$$u_3^{(3)} = \min_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)} + w_{j,3}\} = \min\{0+3, 1+\infty, 3-4, 1+0, 6+\infty\} = -1, \Pr(3) = 2;$$

$$u_4^{(3)} = \min_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)} + w_{j,4}\} = \min\{0+\infty, 1+\infty, 3+\infty, 1+3, 6+0\} = 4, \Pr(4) = 3。$$



$u_j^3 = 0,\ 1,\ 3,\ -1,\ 4, \quad j = 0,\dots,4$

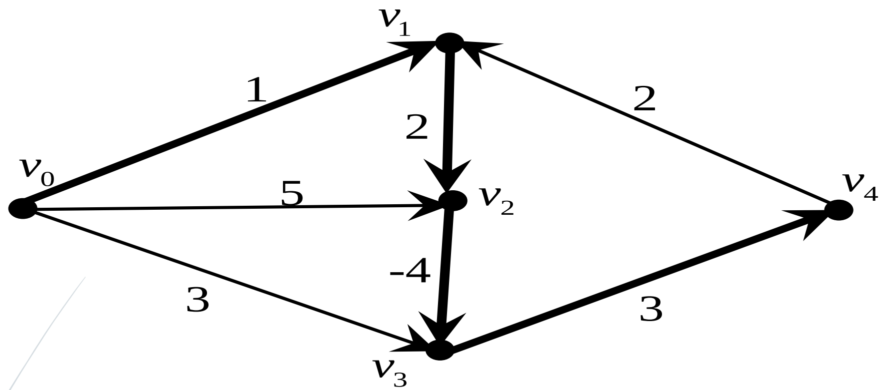
（4） $u_0^{(4)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(3)} + w_{j,0}\} = \min\{0+0, 1+\infty, 3+\infty, -1+\infty, 4+\infty\} = 0, \Pr(0) = 0$；

$u_1^{(4)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(3)} + w_{j,1}\} = \min\{0+1, 1+0, 3+\infty, -1+\infty, 4+2\} = 1, \Pr(1) = 0$；

$u_2^{(4)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(3)} + w_{j,2}\} = \min\{0+5, 1+2, 3+0, -1+\infty, 4+\infty\} = 3, \Pr(2) = 1$；

$u_3^{(4)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(3)} + w_{j,3}\} = \min\{0+3, 1+\infty, 3-4, -1+0, 4+\infty\} = -1, \Pr(3) = 2$；

$u_4^{(4)} = \min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(3)} + w_{j,4}\} = \min\{0+\infty, 1+\infty, 3+\infty, -1+3, 4+0\} = 2, \Pr(4) = 3$。



u_j^4 = 0, 1, 3, -1, 2, j = 0,…,4

- 计算 u_j^5 = 0, 1, 3, -1, 2, j = 0,…,4 验证同 u_j^4

v_0 到顶点 v_1 的最短有向路路长为 1，路线为 v_0v_1；

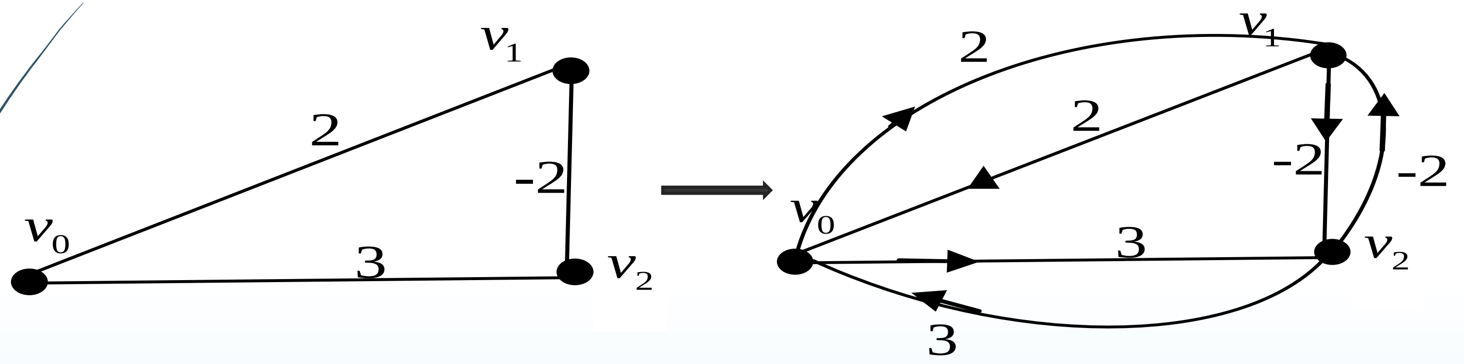
v_0 到顶点 v_2 的最短有向路路长为 3，路线为 $v_0v_1v_2$；

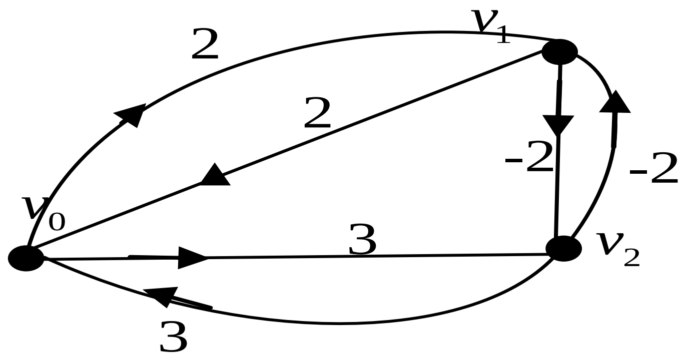
v_0 到顶点 v_3 的最短有向路路长为-1，路线为 $v_0v_1v_2v_3$；

v_0 到顶点 v_4 的最短有向路路长为 2，路线为 $v_0v_1v_2v_3v_4$；

例2-3

- 下面的赋权图用**Bellman-Ford**算法得不到正确的**v0**点到其他所有点的最短有向路的路长及路线。





（1） $u_0^{(1)}=0,\Pr(0)=0$； $u_1^{(1)}=w_{0,1}=2,\Pr(1)=0$； $u_2^{(1}$

负圈v1->v2->v1

（2） $u_0^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,0}\}=\min\{0+0,2+2,3+3\}=$ $\Pr(0)=0$；

$u_1^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,1}\}=\min\{0+2,2+0,3-2\}=1,\Pr(1)=2$；

$u_2^{(2)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(1)}+w_{j,2}\}=\min\{0+3,2-2,3+0\}=0,\Pr(2)=1$。

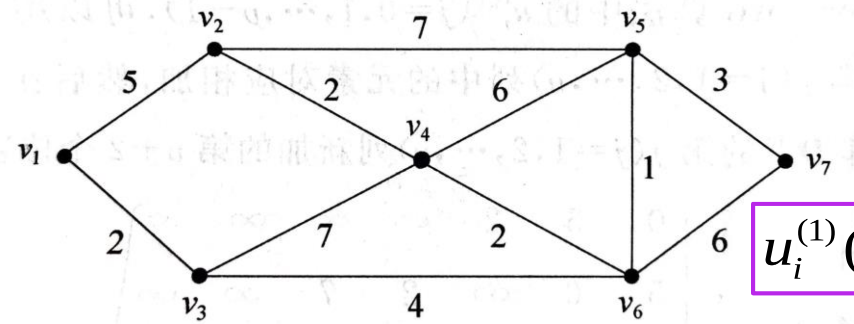
（3） $u_0^{(3)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)}+w_{j,0}\}=\min\{0+0,1+2,0+3\}=0,\Pr(0)=0$；

$u_1^{(3)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)}+w_{j,1}\}=\min\{0+2,1+0,0-2\}=-2,\Pr(1)=2$；

$u_2^{(3)}=\min\limits_{0\le j\le \upsilon-1}\{u_j^{(2)}+w_{j,2}\}=\min\{0+3,1-2,0+0\}=-1,\Pr(2)=1$；

例2-4，邻接矩阵表示

- 求下面的赋权图中 v1点到其他所有点的距离及最短路线。



$$u_i^{(1)}(i=0,1,\cdots,\upsilon-1)$$

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} \\ d_{71} & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 0 & \infty & 2 & 7 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 7 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 2 & 7 & 0 & 6 & 2 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 6 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

d_{ij} 表示第 i 个点到第 $j(j\neq i)$ 个点之间的经过一条边的路（$j=i$ 时是环）的长度

将此行重新加在矩阵 D 的下面第 $\upsilon+1$ 行，得 $D^{(1)}$：

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 0 & \infty & 2 & 7 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 7 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 2 & 7 & 0 & 6 & 2 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 6 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}_{(8,7)} \quad D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 0 & \infty & 2 & 7 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 7 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 2 & 7 & 0 & 6 & 2 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 6 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \hline 0 & 5 & 2 & 7 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}_{(9,7)}$$

$$u_j^{(2)}(j=0,1,\cdots,\upsilon-1) = \min\{\underline{d_{1k}} + \boxed{d_{kj}}, k=1,2,\cdots,\upsilon\}$$

$u_j^{(2)}(j=0,1,\cdots,\upsilon-1)$ 可以用 $D^{(1)}$ 中的第 $\upsilon+1$ 行与 D 中的第 $j(j=1,2,\cdots,\upsilon)$ 列中的元素对应相加，

类似地，最短的从v_1到第$j(j\neq 1)$个点经过不超过三条边的路（或闭途径）的长度为

$\min\{u_k^{(2)}+d_{kj}, k=1,2,\cdots,\upsilon\}$，从而可得$D^{(3)}$的第$\upsilon+3$行：

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 & 7 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

继续得到$D^{(4)}$的第$\upsilon+4$行：

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

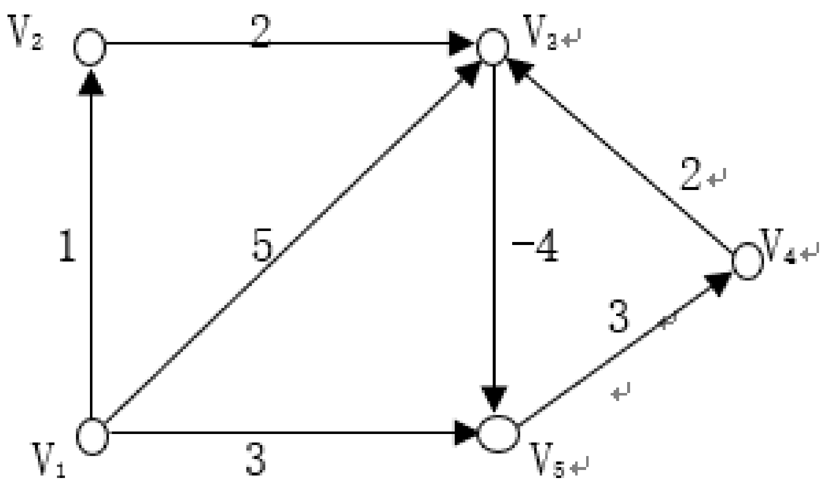
继续得到$D^{(4)}$的第$\upsilon+5$行：

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

与$D^{(3)}$的第$\upsilon+4$行相等（称作收敛）。这就说明得到了v_1点到其他所有点的距离。

习题2-2

- 用Bellman-Ford算法求下图中从V_1点到其他任意一点的最短路线及距离（边旁的数字表示一条弧的距离）：



题图 2-2