图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

Ch3 树与最优树

Ch3 主要内容

北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

- 树的概念
- 生成树、余树和健
- 生成树的计数及Cayley公式
- 树的应用

树的性质总结：

- （1）图G是树（图G连通、无圈）
- （2）图G中无环且任意两个顶点之间有且仅有一条路
- （3）图G中无圈且 $\varepsilon = \nu - 1$
- （4）图G连通且 $\varepsilon = \nu - 1$
- （5）图G连通且每边为割边（对任意e，G-e不连通）
- （6）图G无圈且对任意边e$\in E(\bar{G})$，图G+e恰有一个圈
- （7）树上点边的特点:

  图G连通，且每边是割边 $\Leftrightarrow$ G为树

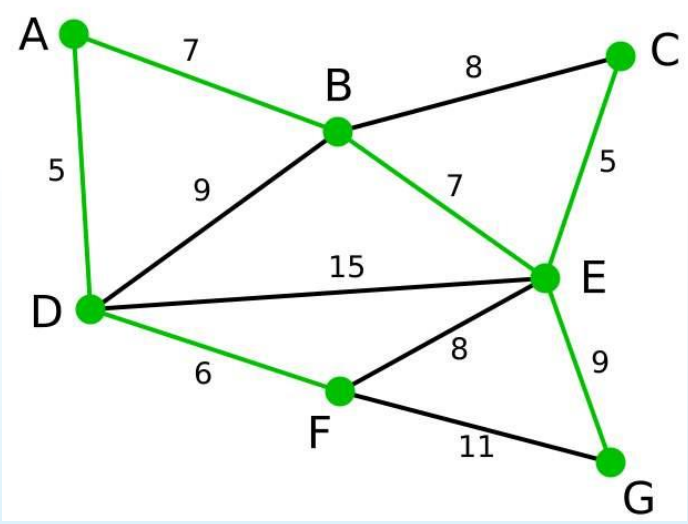
  树G中 v为割点 $\Leftrightarrow$ $d(v) > 1$

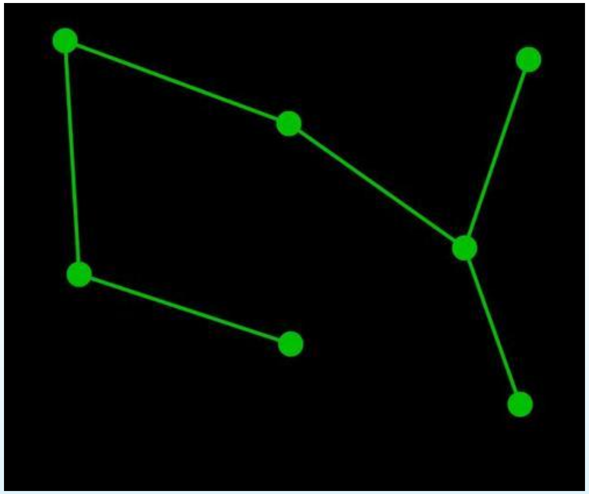
3.2 生成树

- 称T为连通图G的*生成树*（spanning tree ）

  ⇔ T为 G的生成子图，且为树

- 生成子图：T是图G的子图且v(T)=v(G).





定理3-7： 每个连通图G都有一生成树。

证明：求生成树的方法1—— “破圈法”

令 T 为G的极小(minimal)连通生成子图 （即 T 的任一真子图都不是G的连通生成子图）

方式：由定义知，T 可在保持连通性的前提下，用逐步从G中去边的办法求出；

（∵所去的边一定在一圈中（即非割边）

（∵每步至少破坏一圈））。

由T的定义知，$\omega(T) = 1$， $\omega(T - e) = 2$ $\forall e \in E(T)$。

即 T 的每边为割边，故由定理3.2 知T为树。

- 求生成树的方法2——“避圈法”
- 也可用G的极大无圈（生成子图）子图（即G的子图H若为该子图的真母图，则H一定含圈）来求生成树 T。
- 方式：由V上的空图开始，在保持无圈的前提下，逐步由G中取边的办法求出。

定理3-7： 每个连通图G都有一生成树。

- 推论3-3：若图G连通，则$\varepsilon \geq \nu - 1$

定理3-8： 设 T 为G的一生成树，e为G中不属于T的边，则T+e 含唯一的圈。

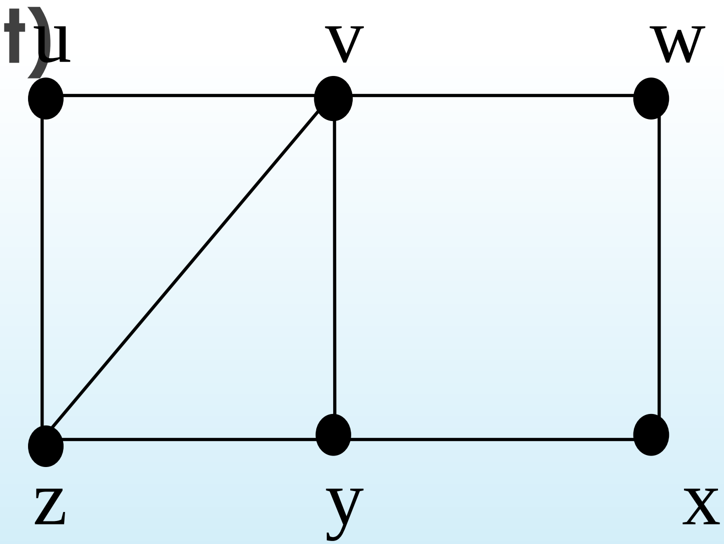
证明： 若e为环（即1-圈），结论显然成立。

若e为图中的棱，两个端点分别为点u和点v，则由定理3.1，在图T 中，点u和v之间有唯一的一条路P相连。所以，T + e 中有圈P+e。又由于T中无圈，所以 T + e 中的所有圈都包含e，即P+e是图T+e中的唯一的圈。

边割

- 边割，（它是割边的一个推广）对S ⊂ V记 $[S, \bar{S}]$ = G中全体一端在S，另一端在 $\bar{S}$ 中的边的子集合，称之为图G的*边割*（edge cut）

- 特别地，[{v},V\{v}]: 图G的关联边割 (incidence edge cut)



- 例：右图G中，

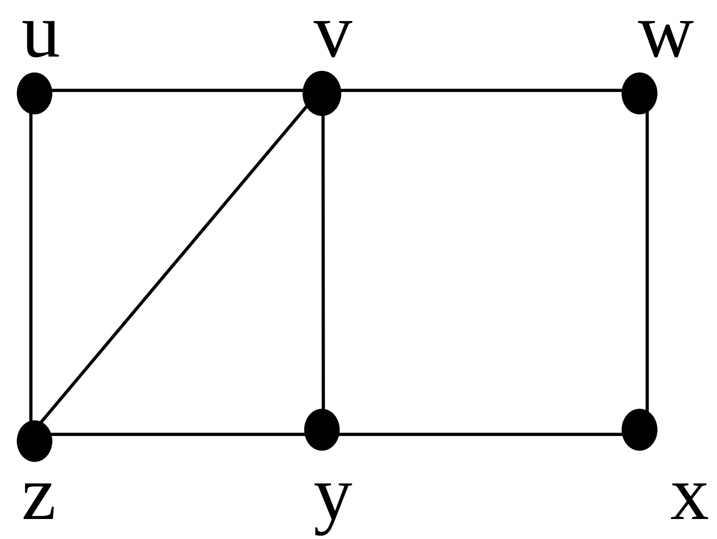
  {uv, zv, zy, vw, yx},

  {zu, zv, zy, xy, xw},

  {uv, zv, zy}

  {zu, zv, zy}

  都是边割



命题 在连通图G中,

边子集E' ⊇ 边割 $\Leftrightarrow$ ω(G-E') > 1 。

键（bond, 割集cut set ）

$\Leftrightarrow$ 极小非空边割。

例：e是G的割边 $\Leftrightarrow$ {e} 是G的键。 （定义）

例：边割$\left[\{v\}, \overline{\{v\}}\right]$为G的键 $\Leftrightarrow$ v是G的非割点。

键？

- 例：右图G中，

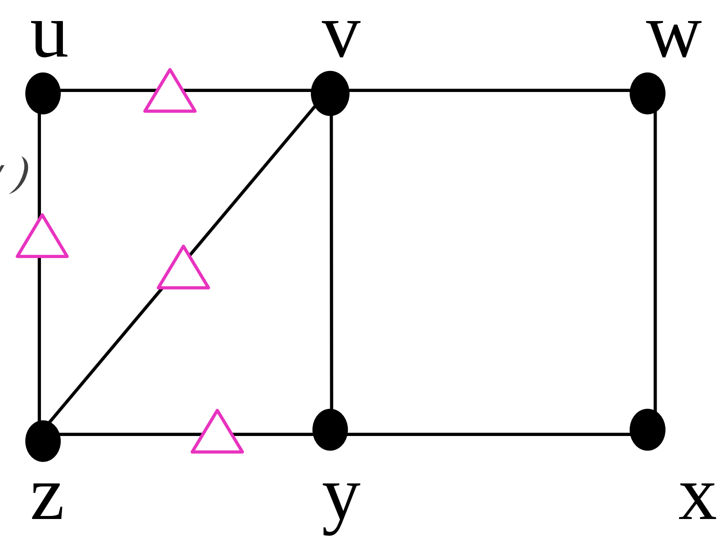
  {uv, zv, zy, vw, yx}, *(v,y)*

  {zu, zv, zy, xy, xw},*(z,x)*

  {uv, zv, zy} *(u,z)*

  {zu, zv, zy} *(z)*

  都是边割　　后两个为键



E' ={zu, zv, zy, uv}

不是G的边割，当然更不是G的键，虽然G-E' 变成不连通。

易见，当G连通时，

边子集B 为G的键

⇔ B是G的极小非空边割

⇔ B是使G-B不连通的极小边子集

⇔ G-B不连通，且对B中的任一边e，G - B + e仍连通

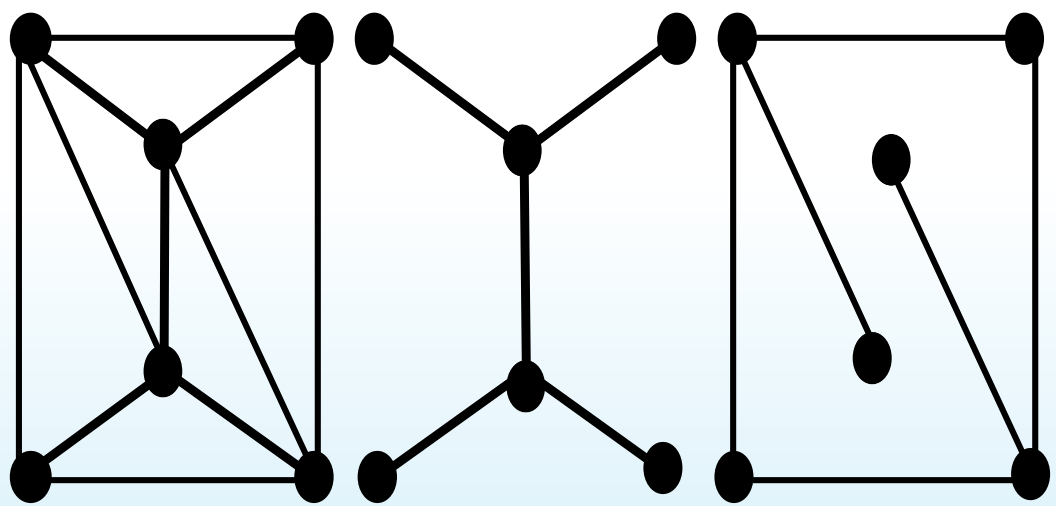
⇔ω(G-B)=2，且B中每边的两端点分别在二分支中。

⇔存在非空S⊂V使边子集B = [S,$\bar{S}$]（即B为边割），且G[S],G[$\bar{S}$] 都连通。

余树

设H为G的子图，称子图 G - E(H) 为G中H的补图，记为： $\overline{H}(G)$ （简记为 $\overline{H}$ ）。

特别地，当T为G的生成树时，称 $\overline{T}$ 为G的余树。



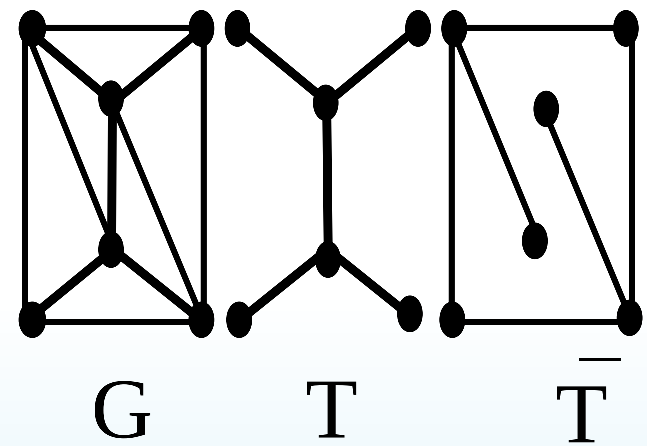
G　　T　　$\overline{T}$

- 定理3.10 设T为连通图G的一个生成树，

e为T的一条边，则

(1).余树 $\bar{T}$ 不包含G的键；

(2). $\bar{T}$ + e中唯一包含G的一个键。

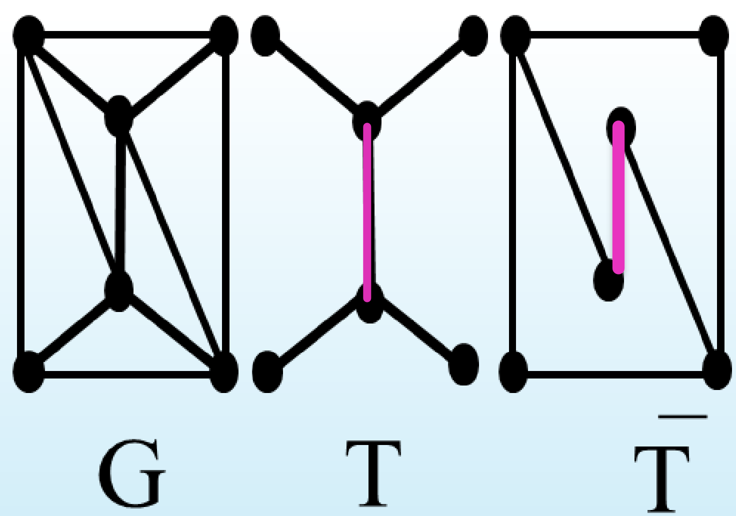


证明：

(1).因 G - E($\bar{T}$)= T 连通，则由前述命题知不包含G的边割，从而也不包含G的键。

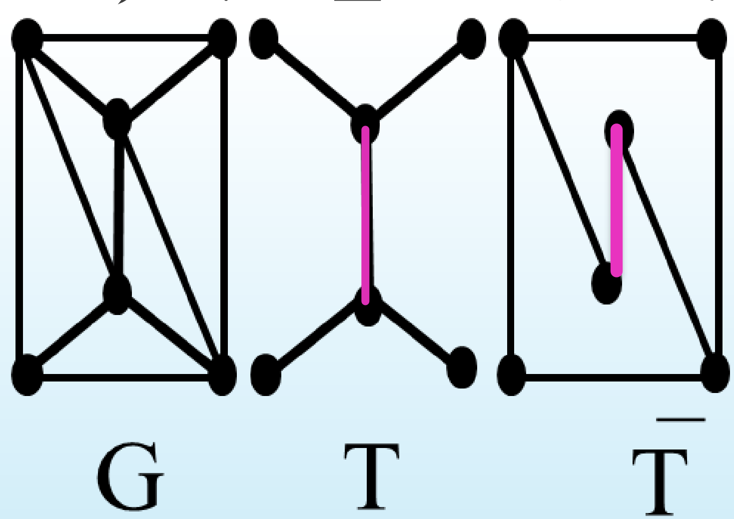
定理3.10 设T为连通图G的一个生成树，e为T的一条边，则 (2). $\bar{T}$ + e中唯一包含G的一个键。

(2).证明：注意到e为 T的割边，令S 与 $\bar{S}$ 分别为 T - e的二分支的顶点集。考虑边割B = [S, $\bar{S}$]$_G$ 由于G[S] (包含T-e的一个分支T[S]) 与G[$\bar{S}$] (包含T-e的一个分支T[S]) 都连通，**B是G的键**，它包含于 $\bar{T}$+e中。



来证B为包含在 $\bar{T}$+e中的唯一键：设B'为包含在 $\bar{T}$+e中的G的任一键，则 G-B' ⊇ T-e 。这时，假设存在B的一边b∉ B'， 则G - B' ⊇ T - e +b 。

但T-e+b也是G的一生成树（因 其边数=ν -1，且连通），从而G - B' 连通，这与B' 为G的键相矛盾，因此B的每边b∈B'，即 B ⊆ B' 。再由键的极小性知B' = B 。



- 比较定理3.8及定理3.10 知，树与圈之间、余树与键之间的关系是相似的，因此圈与键之间具有对偶性。

- 定理3-8： 设 T 为G的一生成树，e为G中不属于T的边，**则T+e 含唯一的圈**。

- 定理3.10 设T为G的一个生成树，e为T的一条边，则
  (1).余树 $\bar{T}$ 不包含G的键；
  (2). $\bar{T}$ + e中**唯一包含G的一个键**。

附录*

设G连通，T为其任一生成树。对每一 边e $\in$ $\bar{T}$，T+e 中有唯一圈C，因而可得C_1 ,C_2 ,……,$C_{\varepsilon-\nu+1}$

共ε -ν +1个 不同的圈，每个称为G的一个基本圈。

同样，对每一边 e $\in$ T， $\bar{T}$+e中有唯一的键，

因而可得B_1 ,B_2 ,……,$B_{\nu-1}$

共ν - 1个不同的键，每个称为的一个基本割集。

设S_1 ,S_2为二集合，记其对称差(即（$S_1 \cup S_2$）-（$S_1 \cap S_2$）)为 $S_1 \oplus S_2$

称为它们的环和(ring sum)。

性质

- 1)图G的每一边割是G的一些割集的边不重并。
- 2)设B1，B2为图G的任二边割，则B1 ⊕ B2 也是G的边割。（对任二非空V1 ,V2 ⊂ V，有 $[V_1,\overline{V_1}]\oplus[V_2,\overline{V_2}]=[V_3,\overline{V_3}]$ 其中V3 =(V1 ∩V2)∪($\overline{V}$1∩ $\overline{V}$2)）。
- 3)设边子集E'与E"分别为G中一些圈的边不重并，则E'⊕E" 亦然。
- 4)G 的每个圈可唯一地表为G的一些基本圈的环和。
- 5)G 为一些圈的边不重并 ⇔ d(v) = 偶数 ∀ v ∈ V 。
- 6)G 的每个边割可唯一地表为G的一些基本割集的环和。
- 7)边子集E'为G中一些圈的边不重并

  ⇔ 边子集E'与G中每个边割有偶数条公共边。
- 8)边子集B为G的一个边割

  ⇔ 边子集B与G的每个圈有偶数条公共边。

  （即，G的每个圈有偶数条B的边）

3.2习题

- 1. 设 G连通且 $e \in E$，证明：

  (a) e 在G的每棵生成树中当且仅当e是G的边割。

  (b) e 不在G的任一生成树中当且仅当e是G的环。

- 2. 无环图 G恰只有一棵生成树T，则G = T 。
- 3. 设 F是 G的极大（maximal）林，证明：

  (a) 对G的每个分支H， $F \cap H$ 是H的生成树；

  (b) $\varepsilon(F) = \nu(G) - \omega(G)$。

- **4.** 证明： 任一图**G**至少包含 $\varepsilon - \nu + \omega$ 个不同的圈。
- **5. (a)** 若**G**的每个顶点均为偶点（即度为偶数的顶点），则**G**没有割边；

  (b) 若**G**是**k**-正则偶图且 $k \geq 2$，则没有割边。
- **6.** 当 **G**连通且 $S \neq \varnothing$ 时，

  边割$B = [S, \bar{S}]$为键 $\Leftrightarrow$ $G[S], G[\bar{S}]$都连通。
- **7.** 图 **G**的每一边割是**G**的一些键（即，割集）的边不重并。

- 8. 在 图 G中，设B_1和B_2为键，C_1和C_2为圈（看作边子集）。证明：

  (a) $B_1 \oplus B_2$ 是G的键的边不重并集；

  (b) $C_1 \oplus C_2$是G的圈的边不重并集；

  (c) 对 G 的任一边 e，$(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$都包含键；

  (d) 对G 的任一边 e，$(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$都包含圈。

- 9. 证明：若图 G包含k棵边不重的生成树，则对于顶点集每一划分$(V_1, V_2, \ldots, V_n)$，两端点在这个划分的不同部分的边的数目至少为 k(n-1)。

- 10. 设连通图G的边子集E'与G的每一生成树都有公共边，则E'包含G的一个边割。 （提示：证明G-E'不连通）

- 11. 设u是简单连通图G 的割点，则u 是 G^c 的非割点。

  （提示：一般有 G不连通 $\Rightarrow$ G^c 连通）

- 12. 设C是连通图G的一圈，a与b是C中两边，则G 中一定存在一键B， 使 。

- 13. 设T为连通图G的任一树（不一定为生成树！），e 为T中一边，则G中一定有一键B，使 。

- 14. 证明以下算法求出的子图，一定是连通图G=(V,E)的一个生成树：

  ①任取 $v_1 \in V$，令$T_1 = v_1$ ；

  ②若T_k已取定，$V(Tk)=\{v_1, \ldots, v_k\}$，选$v_{k+1} \in V \setminus V(T_k)$使$v_{k+1}$与$T_k$中（至少）某一点$v_j$相邻，令$T_{k+1}=T_k+v_{k+1}v_j$ ；

  ③若$k+1<\nu$， 回到②；否则停止。