图论及其应用

北京邮电大学理学院 寇彩霞

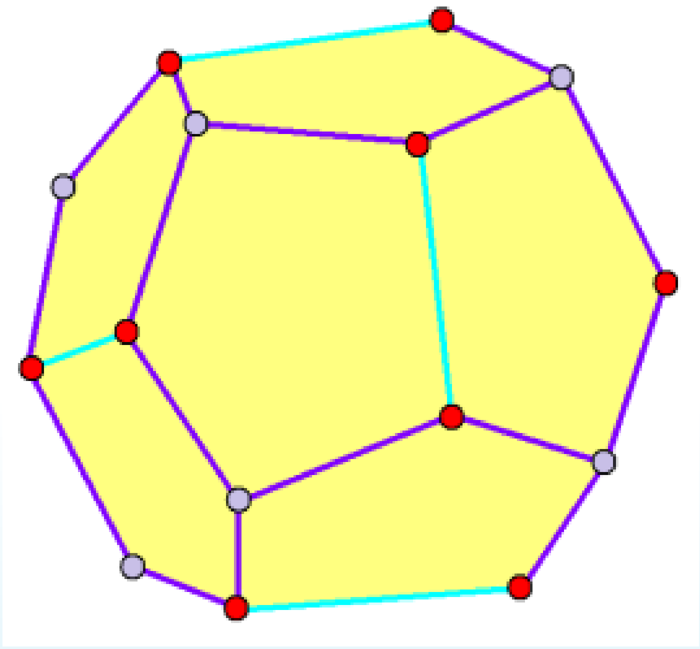
Ch5 遍历问题

Ch5 主要内容

- **Euler环游**
- 中国邮递员问题（**Chinese Postman Problem，CPP**）
- **<u>Hamilton 圈</u>**
- 旅行售货员问题(**travelling salesman prob., TSP**)

1859年英国数学家Hamilton游戏

- 在一个实心十二面体上，要求游戏者找一条沿着边通过**20**个顶点刚好一次的闭回路。



Hamilton圈

- 无向图中，通过图的每个顶点的路，称为Hamilton路。（生成）
- **Hamilton路 ⇔ 生成路（spanning path ）**

- 无向图中，通过图的每个顶点的圈，称为Hamilton圈。
- **Hamilton 圈 ⇔ 生成圈**

Hamilton图

- Hamilton 图 ⇔ 包含Hamilton 圈的图

- 判定任意给定的图是不是Hamilton 图，是个NP-Hard问题。
- 一个图为Hamilton 图的充要条件是其基础简单图为Hamilton 图，故关于Hamilton 图的讨论只需对简单图即可。

哪些图肯定是/不是Hamilton图？

- 图不连通，不是
- 没有圈，不是
- Kn，是
- Cn（n个顶点的圈）

- 除了明显的这些图之外，如何判断图是Hamilton图？

定理5.3.1（必要条件）

G为Hamilton图$\Rightarrow$ $\omega(G-S) \leq |S|, \forall S \subset V$

证明：令C为G的一个Hamilton 圈 ,则对任一

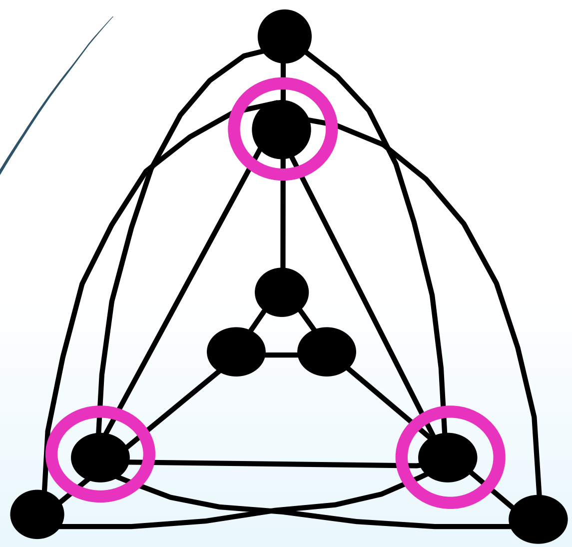
$S \subset V$ 必有$\omega(C-S) \leq | S |$,

但显然 $\omega(G-S) \leq \omega(C-S)$，得证。

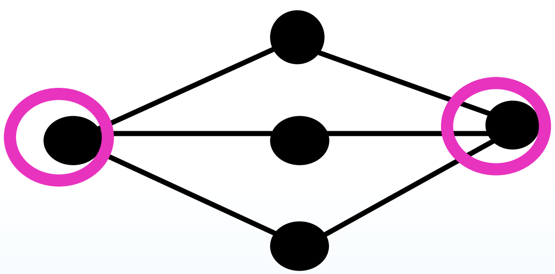
定理5.3.1逆否命题：

存在一个$S \subset V$，有 $\omega(G-S) > |S|$

$\Rightarrow$ G不是Hamilton图



非Hamilton图



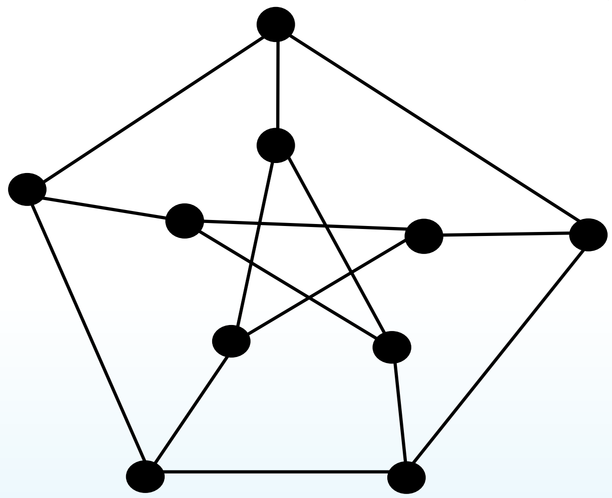
非Hamilton图

定理5.3.1 G为Hamilton图⇒ $\omega(G-S) \le |S|, \forall S \subset V$

注意2: 寻找定理中的顶点集S一般来说不容易。比如用穷举法找 $V(G)$的真子集，计算量为 $O(2^n)$

Pertersen图满足定理条件，但它不是Hamilton 图

原因：定理5.3.1之逆不成立



Petersen 图

如何判断图是Hamilton图呢？

一般来说，边越多，越容易是Hamilton图

定理5.3.2 (充分条件) （Ore,1960）

$\nu \ge 3$的简单图G中，若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) $d(u)+d(v) \ge \nu$，则G为Hamilton 图。

证明：反证，假设存在$\nu \ge 3$、满足条件(*)的非Hamilton 简单图，在保持其为非Hamilton 简单图的前提下，尽量加边，直到不能再加为止，记所得图为G 。

因$\nu \ge 3$，G不能是完全图（完全图是Hamilton图）。

任取G中二不相邻顶点u及v，则G + uv为Hamilton 图，且其中的每个Hamilton 圈均含边uv 。从而G中有Hamilton 路

$v_1 \ v_2 \cdots\cdots v_\nu$ 其中$v_1 = u$，$v_\nu = v$ 。

定理5.3.2 (充分条件) (Ore,1960)

$\nu \ge 3$的简单图G中，若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) $d(u)+d(v) \ge \nu$，则G为Hamilton 图 。

证明(续)：令 $S=\{v_i \mid u\,v_{i+1} \in E\}$，$T=\{v_j \mid v_j v \in E\}$

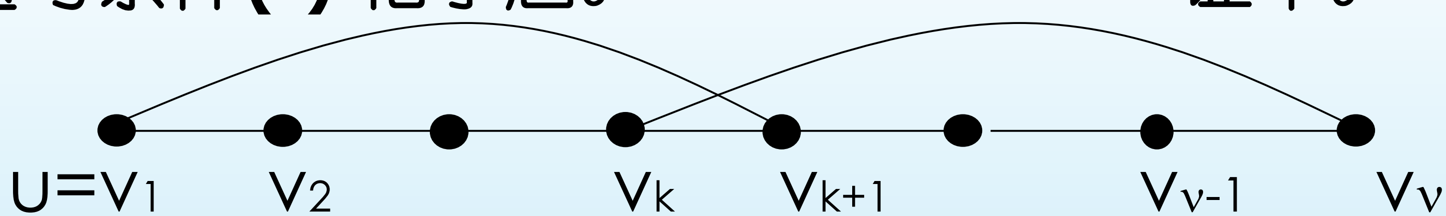
易见：$v_\nu \notin S \cup T$，　　$\therefore |S \cup T| < \nu$ 。

又，$S \cap T = \varnothing$ 。

(否则，存在$v_k \in S \cap T$，则G中有Hamilton 圈 $v_1 v_2 \ldots v_k v_\nu v_{\nu-1} \ldots v_{k+1} v_1$，矛盾。)

$\therefore\ d(u)+d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| < \nu$。

这与条件(*) 相矛盾。　　　　证毕。



定理5.3.2 (充分条件) （Ore,1960）

$\nu \geq 3$的简单图G中，若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) $d(u)+d(v) \geq \nu$，则G为Hamilton 图 。

- 实际用的时候：要验证任意不相邻两顶点的度之和是否>=顶点数
- 并不太好用
- 特殊的图可以直接用

推论5.3.3 （Dirac,1952）

$\nu \geq 3$的简单图G中，若$\delta \geq \nu/2$，则G为Hamilton图。

- $K_{n,n}$是Hamilton图？
- $K_{n,\ n,\ n}$是Hamilton图？
- $K_{n,2n,\ 3n}$是Hamilton图？

  答案： 以上均 是！
- $K_{n,2n,3n+1}$ 是Hamilton图？

  答案： 否！ 原因？

$|S|=n+2n$; $w(G-S)=3n+1>n+2n=|S|$

- 任意二部图**G=(X,Y;E)**
  - ✓ |**X**|不等于|**Y**|，不是**Hamilton**图
  - ✓ |**X**|等于|**Y**|呢？不清楚！

推论5.3.4 (Bondy & Chvatal，1974) 设u, v为简单图G中二不相邻顶点，且d(u) +d(v) ≥ν，则:

G为Hamilton 图 ⇔ G+uv 为Hamilton 图。

证明：⇒：显然。

⇐：反证，假设G为非Hamilton 图，则由定理5.3.2之证明知,

$$d(u) + d(v) < \nu$$

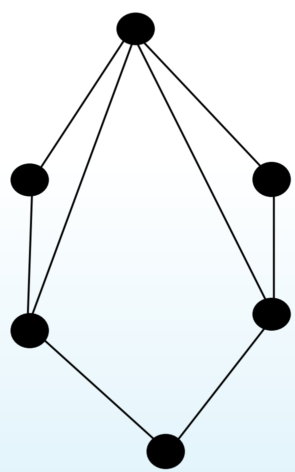
矛盾。

闭包（closure）c(G)

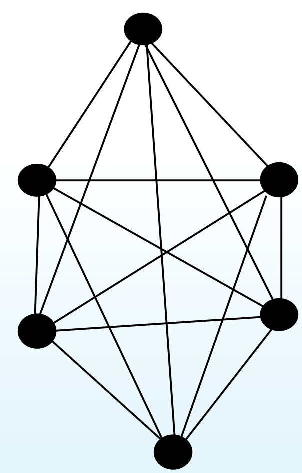
闭包 ⇔ G的简单生成母图。 它是由G开始，通过反复将其中

不相邻接而度之和 ≥ ν 的 顶点对

用新边连起来，直到不能再进行为止所得的图。



是Hamilton图吗？



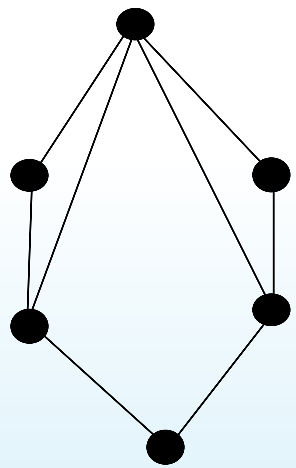
闭包是Hamilton图

- 定理5.3.5　简单图G为Hamilton 图

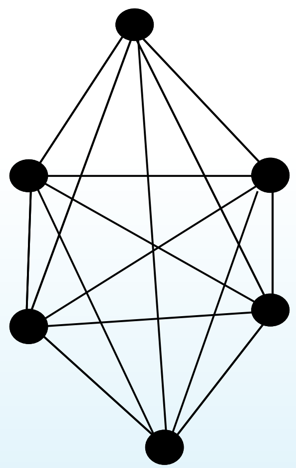
  $\Leftrightarrow$　c(G)为Hamilton 图。

- 推论5.3.6　设G为 $\nu \geq 3$的简单图，则

  c(G)为完全图 $\Rightarrow$ G为Hamilton图。



是Hamilton图吗？

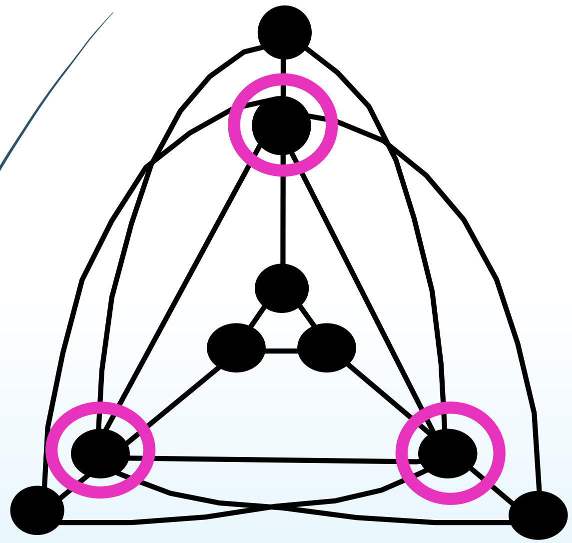


闭包是Hamilton图

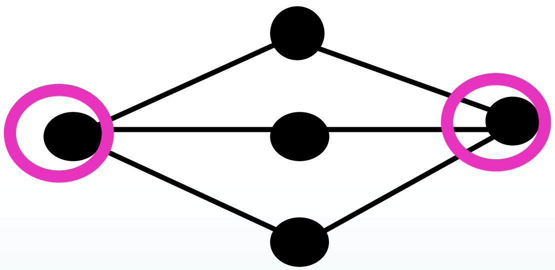
定理5.3.1逆否命题：

存在一个$S \subset V$，有 $\omega(G-S) > |S|$

$\Rightarrow$ G不是Hamilton图

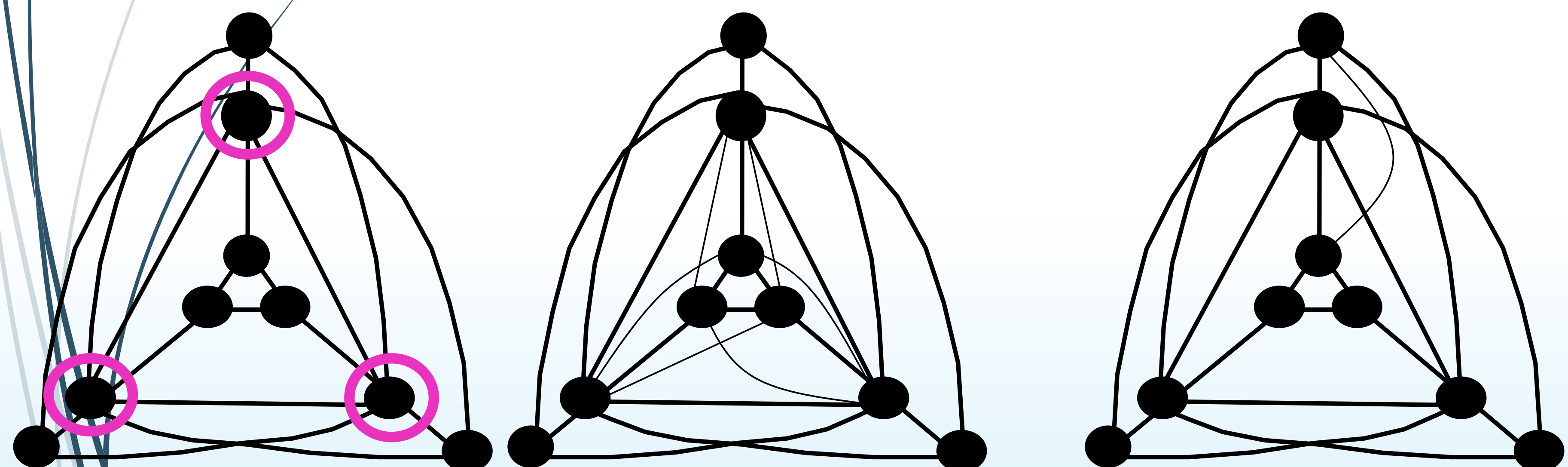


非Hamilton图



非Hamilton图

- 定理5.3.5　简单图G为Hamilton 图 $\Leftrightarrow$ c(G)为Hamilton 图。
- 推论5.3.6　设G为 $\nu \geq 3$的简单图，则 c(G)为完全图 $\Rightarrow$ G为Hamilton图。



闭包是完全图，所以它是Hamilton图

定理5.3.7 c(G)是唯一确定的（well define）。

- 闭包很重要,
- 那么加边的顺序不同会导致不同的c（G）吗？
- 答案：不会

定理5.3.7 c(G)是唯一确定的（well define）。

证明：假设G’及G”为G的二闭包，而

$e_1, \ldots\ldots, e_m$ 及 $f_1, \ldots\ldots, f_n$

为构成它们时加上去的新边（按先后顺序）序列。

先证：每个$e_i \in E(G'')$。假设不然,令 $e_{k+1}=uv$为 $e_1, \ldots\ldots, e_m$中第一个$\notin E(G'')$的新边。记

$$H = G+\{e_1, \ldots\ldots, e_K\}。$$

由G’之定义知：$d_H(u) + d_H(v) \geq \nu$ 。

但$H \subseteq G''$，$\therefore$ $d_{G''}(u) + d_{G''}(v) \geq d_H(u) + d_H(v) \geq \nu$。

而$e_{k+1}=uv \notin E(G'')$, 这与G”之定义矛盾。

同理，每个$f_j \in E(G')$。故 $G' = G''$。

将二部图G = (X,Y,E)，|X|=|Y|，X的每对顶点都连起来得图H，则G有Hamilton圈 ⇔ H有 Hamilton圈。

- 提示：假设不然，则H中有 一Hamilton 圈C包含新边 $x_i x_j$, 其中$x_i, x_j \in X$ 。从H中去掉该新边并合并其两端点，再用定理5.3 ）

练1： ν ≥ 5个人围桌而坐，总有一种就座法，使每人的邻座都不相同。

- 问题等价于ν ≥ 5的完全图Kv，及任意一个Hamilton圈C，子图Kv-E(C)中是否存在另一个Hamilton圈。
- v=5, 见图
- v>=6， Kv-E(C)的 点的度数?

  v-1-2>=v/2.

Kv-E(C)是Hamilton图

原因：若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) d(u)+d(v) ≥ ν，则G为Hamilton 图

- 例*　设简单连通图G中 $\nu \geq 2\delta$，则G含一长 $\geq 2\delta$ 的路。

（提示：反证，假设G中最长路的长≤2δ-1，再用定理5.3证明中类似的方法。）

- 例　将二部图G = (X,Y,E)，| X | = | Y |，中X的每对顶点都连起来得图H，则H有 Hamilton圈⇔G有Hamilton圈 。

(⇒提示：假设不然，则H中有 一Hamilton 圈C包含新边 $x_i x_j$，其中$x_i, x_j \in X$. 从H中去掉该新边并合并其两端点，再用定理5.2 ）

- 例　若简单2-连通二部图G = (X, Y, E)中，| X | = | Y | - 1 = n ,且 $d(x) \geq n$， $\forall x \in X$,则Y的任二顶点间都有Hamilton 路相连。　(提示：用上例)

习题

- **5.3.1.** 证明：若 (a) 简单图G不是2连通图；或者 (b) G是二划分为（X，Y）的二部图，且 | X | ≠ | Y | ； 则G为非Hamilton 图 。
- **5.3.2.** 一只老鼠边吃边走通过一块3×3×3立方体的奶酪，想走遍每个1×1×1子立方体（共27 个）。若从某个角落开始，它能否最后到达立方体的中心？
- 5.3.3 证明：若G有Hamilton 路，则对于V的每个真子集S，有ω(G-S) ≤ |S| + 1。
- 5.3.4 若ν ≥ 3的简单图G中，$\varepsilon > C_2^{\nu-1} + 1$，则G为Hamilton 图 。

5.3.5. 若二部图G=（X，Y；E）中，|X| = |Y| = n，且δ >n/2，则G为Hamilton 图。

- 5.3.6. ν ≥ 5个人围桌而坐，总有一 新就座法，使每人的邻座都不相同。
- 5.3.7. 对下列问题给出一好算法：

  (a) 构造一个图的闭包。

  (b) 若某图的闭包为完全图，求该图的Hamilton 圈。
- 5.3.8 对任正整数n，完全3-部$K_{n,2n,3n}$为Hamilton 图；而完全3-部$K_{n,2n,3n+1}$为非Hamilton 图。
- 5.3.9 称图G为H-连通的⇔G中任二不同顶点u与v间 都有一(u,v)-路。

  证明：若的简单图G中每对不相邻顶点u与v 都有d(u) + d(v) ≥ ν+1， 则G 为H-连通的。