科学计算 Exercise 09a

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

2. 证明

(1) 因为 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵，则有

$$\mathbf{x^T A x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R^n} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

考虑 $\mathbf{R^n}$ 的单位正交基 $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$，其中

$$\mathbf{e_k} = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0)^T, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

则有

$$a_{ii} = \mathbf{e_i^T A e_i} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

证毕.

(2) 首先证明 $\mathbf{A_2}$ 是对称矩阵. 由 (1) 知 $a_{11} > 0$，经过高斯消去一步后，$\mathbf{A_2} = (a_{ij}^{(2)})_{n-1}$，有

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$$

由于 $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ 为对称矩阵，有 $a_{ij} = aji, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$，因此

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n$$

因此 $\mathbf{A_2}$ 为对称矩阵.

由于每次初等行变换可看作左乘一初等阵 $\mathbf{P_k}$，而高斯消去法的每步操作均为初等行变换，因此有

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a_1^T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P_t P_{t-1} \ldots P_1}$$

其中 $\mathbf{P}$ 为每步初等行变换对应的初等阵 $\mathbf{P_k}$ 的乘积，由于初等阵均为可逆矩阵，因此 $\mathbf{P}$ 也是可逆的. 由于 A 是对称矩阵，有

$$\mathbf{PAP^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix}$$

对于 $\mathbf{R^n}$ 中的任一非零向量 $\mathbf{x}$，因为 $\mathbf{P}$ 是可逆的，有 $\mathbf{xP^T}$ 非零，则有

$$\mathbf{x^T}\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{x^TPAP^Tx} = (\mathbf{xP^T})^\mathbf{T}\mathbf{A}(\mathbf{xP^T}) > 0$$

因此 $\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，因此其各阶顺序主子式均大于 0，又因为 $a_{11} > 0$，可得 $\mathbf{A_2}$ 的各阶顺序主子式均大于 0，则 $\mathbf{A_2}$ 为正定矩阵，证毕.

4. 解

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$，$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 由 $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$，得

$$u_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$a_{1i} = l_{11}u_{1i}, \quad u_{1i} = \frac{a_{1i}}{l_{11}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$a_{i1} = l_{i1}u_{11} = l_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

对于 $\mathbf{L}$ 的第 k 列和 $\mathbf{U}$ 的第 k 行，有

$$a_{ki} = \sum_{t=1}^{k} l_{kt}u_{ti}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$u_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}u_{ti}}{l_{kk}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$a_{ik} = \sum_{t=1}^{k} l_{it}u_{tk}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}u_{ti}}{u_{kk}} = a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}u_{ti}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此，可以先求出 $\mathbf{L}$ 的第 1 列和 $\mathbf{U}$ 的第 1 行

$$u_{1i} = \frac{a_{1i}}{l_{11}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

之后依次递增 k，按照下面的公式求出 $\mathbf{L}$ 的第 k 列和 $\mathbf{U}$ 的第 k 行，即求得 $\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{U}$.

$$u_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}u_{ti}}{l_{kk}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}u_{ti}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

16. 证明

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$，则有

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty}$$

即得

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty} = \min_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty}$$

证毕.

20. 证明

由 $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(\mathbf{AB}) &= \|(\mathbf{AB})^{-1}\|\|\mathbf{AB}\| \\ &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{B}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \\ &= \mathrm{cond}(\mathbf{A})\mathrm{cond}(\mathbf{B})\end{aligned}$$

证毕.