

# 科学计算 Exercise 06c

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

1.

解： 高斯-勒让德公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

将原积分转化为  $[-1, 1]$  区间上的积分

$$\int_1^3 e^x \sin x dx = \int_{-1}^1 e^{x+2} \sin(x+2) dx$$

$n = 2$  时，有

$$x_0 = -0.7745967, x_1 = 0, x_2 = 0.7745967$$

$$A_0 = 0.5555556, A_1 = 0.8888889, A_2 = 0.5555556$$

函数在各高斯点的取值为

$$\begin{cases} f(x_0) = 3.204416487 \\ f(x_1) = 6.718849697 \\ f(x_2) = 5.752548197 \end{cases}$$

代入高斯-勒让德公式，得

$$I \approx \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k) = 10.94840$$

$n = 3$  时，有

$$x_0 = -0.8611363, x_1 = -0.3399810, x_2 = 0.3399810, x_3 = 0.8611363$$

$$A_0 = 0.3478548, A_1 = 0.6521452, A_2 = 0.6521452, A_3 = 0.3478548$$

函数在各高斯点的取值为

$$\begin{cases} f(x_0) = 2.836376140 \\ f(x_1) = 5.238490398 \\ f(x_2) = 7.458548459 \\ f(x_3) = 4.838744537 \end{cases}$$

代入高斯-勒让德公式，得

$$I \approx \sum_{k=0}^3 A_k f(x_k) = 10.95014$$

2.

**解：** 由题目条件计算得

$$a = 7782.5, \quad b = 972.5$$

由于给定的数据精度为 1km，只需在此精度下计算数值积分

$$S = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sin^2 \theta} d\theta = 31130 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{389}{3113}\right)^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

使用  $n = 4$  的柯特斯公式的余项为

$$R[f] = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta) < 0.5, \quad \eta \in (0, \pi/2)$$

由  $n = 4$  的柯特斯公式计算得

$$\begin{aligned} C &= \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{180} [7 * 31130 + 32 * 31094.39 + 12 * 31008.24 + 32 * 30921.85 + 7 * 30886] \\ &= 48707.4 \end{aligned}$$

即卫星轨道周长约为 48707km.