科学计算 Exercise 10

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

3.　证明

设线性方程组的系数矩阵为 $\mathbf{A}$，则

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

设迭代方程为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

若使用雅可比迭代法，则

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad -\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|^{\frac{1}{2}}$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_1}) = \left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|^{\frac{1}{2}}$$

若使用高斯-塞德尔迭代法，则

$$\mathbf{B_2} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$0, \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_2}) = \left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|$$

因此

$$\rho(\mathbf{B_1}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathbf{B_2}) < 1$$

即证得此方程组的雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法同时收敛或发散.

若两种迭代法收敛（即 $\rho(\mathbf{B_1}) < 1$），则二者的渐进收敛速度之比为

$$\frac{R(\mathbf{B_1})}{R(\mathbf{B_2})} = \frac{\ln\rho(\mathbf{B_1})}{\ln\rho(\mathbf{B_2})} = \frac{1}{2}$$

4.　解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

若使用雅可比迭代法，则

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$0, \quad -\frac{(3ab)^{\frac{1}{2}}}{10}, \quad \frac{(3ab)^{\frac{1}{2}}}{10}$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_1}) = \left|\frac{(3ab)^{\frac{1}{2}}}{10}\right|$$

因此雅可比迭代法收敛的充分必要条件为

$$|ab| < \frac{100}{3}$$

若使用高斯-塞德尔迭代法，则

$$\mathbf{B_2} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a^2b}{500} & \frac{ab}{50} \end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$0, \quad 0, \quad \frac{3ab}{100}$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_2}) = \left|\frac{3ab}{100}\right|$$

因此高斯-塞德尔迭代法收敛的充分必要条件为

$$|ab| < \frac{100}{3}$$

6. 解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\equiv\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U}$$

若使用雅可比迭代法，则

$$\mathbf{B_1}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$0,\quad -0.9574,\quad 0.9574$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_1})=0.9574<1$$

因此雅可比迭代法收敛. 若使用高斯-塞德尔迭代法，则

$$\mathbf{B_2}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{11}{12}\end{bmatrix}$$

求得其特征值为

$$0,\quad 0,\quad 0.9167$$

则有

$$\rho(\mathbf{B_2})=0.9167<1$$

因此高斯-塞德尔迭代法收敛.
又因为 $\rho(\mathbf{B_2})<\rho(\mathbf{B_1})$，因此高斯-塞德尔迭代法的收敛速度快.

9. 证明

将迭代公式改写为标准形式

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=(\mathbf{I}-\omega\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}+\omega\mathbf{b}$$

令 $\mathbf{B}=\mathbf{I}-\omega\mathbf{A}$，则有

$$\lambda(\mathbf{B})=1-\omega\lambda(\mathbf{A})$$

若迭代法收敛，有 $|\lambda(\mathbf{B})|<1$，则

$$-1<1-\omega\lambda(\mathbf{A})<1\quad\Rightarrow\quad 0<\omega\lambda(\mathbf{A})<2$$

因为 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，有 $\lambda(\mathbf{A}) > 0$，则有

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda(\mathbf{A})}$$

因为 $\max \lambda(\mathbf{A}) = \beta$，只需 $0 < \omega < \frac{2}{\beta}$，迭代法即收敛，证毕.