科学计算 Exercise 07a

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

2. 解 计算知 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ 在 $[1.4, 1.5]$ 连续且有 $f(1.4)f(1.5) < 0$，因此待求的根在 $[1.4, 1.5]$ 中，将其记作 x_*.

(1)

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \quad \varphi'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$\varphi'(x)$ 在不动点 x_* 附近连续且单调，有

$$|\varphi'(x_*)| < |\varphi'(1.4)| = 0.7289 < 1$$

因此迭代公式 $x = 1 + 1/x^2$ 局部收敛. 又有 $\varphi'(x_*) \neq 0$，因此此迭代公式在 x_* 附近是线性收敛的.

(2)

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, \quad \varphi'(x) = \frac{2x}{3}(1 + x^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$\varphi'(x)$ 在不动点 x_* 附近连续，且有

$$|\varphi'(x)| < 0.5, \quad \forall x \in [1.4, 1.5]$$

因此 $|\varphi'(x_*)| < 0.5 < 1$，迭代公式 $x = 1 + 1/x^2$ 局部收敛. 又有 $\varphi'(x_*) \neq 0$，因此此迭代公式在 x_* 附近是线性收敛的.

(3)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$\varphi'(x)$ 在不动点 x_* 附近连续且单调，有

$$|\varphi'(x)| \geq |\varphi'(1.5)| = 1.4142 > 1, \quad \forall x \in [1.4, 1.5]$$

下面证明此迭代公式在 x_* 附近不收敛. 使用反证法，假设存在一收敛于 x_* 的迭代数列 x_k，则对于任一 ε_0（满足 $(x_* - \varepsilon_0, x_* + \varepsilon_0) \subset [1.4, 1.5]$），存在 N 满足 $\forall n >= N, \quad |x_n - x_*| < \varepsilon_0$. 又有

$$|x_{N+k} - x_*| = |\varphi'(\eta)||x_{N+k-1} - x_*| > 1.4|x_{N+k-1} - x_*| > 1.4^k|x_N - x_*|$$

因此存在足够大的 k，使得 $|x_{N+k} - x_*| > \varepsilon_0$，与迭代数列收敛的条件矛盾，因此此迭代公式在 x_* 附近不收敛.

计算 选用迭代公式 (2)，已知

$$|\varphi'(x)| < L = 0.5, \quad \forall x \in [1.4, 1.5]$$

根据误差关系

$$|x_* - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

可在满足如下条件时停止迭代

$$\frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k| = 2|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad |x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{4} \times 10^{-3}$$

使用下面的 Matlab 代码计算

```
prev_x = 1.5;
while true
    x = (1 + prev_x^2)^(1 / 3);
    if abs(x - prev_x) <= 1 / 4 * 10^(-3)
        break;
    end
    prev_x = x;
end
fprintf("%.3f\n", x);
```

每次迭代后的结果如下，取最终结果保留 4 位有效数字得近似根为 1.466.

```
1.5000
1.4812
1.4727
1.4688
1.4670
1.4662
1.4659
1.4657
```

5. 解 根据 Steffensen 迭代公式

$$\psi(x) = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

用 Matlab 编写 Steffensen 迭代法的通用程序如下，其中 phi 为原始迭代函数的函数句柄，eps 为所要求的精度.

```
function ret = Steffensen(x0, phi, eps)
    prev_x = x0;
    while true
        x = prev_x - (phi(prev_x) - prev_x)^2 / ...
            (phi(phi(prev_x)) - 2 * phi(prev_x) + prev_x);
        if abs(x - prev_x) < 0.1 * eps
            break;
        end
        prev_x = x;
    end
    ret = x;
end
```

对第 2 题中 (2),(3) 迭代公式分别调用此函数，

```
x0 = 1.5;
eps = 10^(-4);
ans2 = Steffensen(x0, @phi2, eps);
ans3 = Steffensen(x0, @phi3, eps);
fprintf("%.5f %.5f\n", ans2, ans3);

function y = phi2(x)
    y = (1 + x^2)^(1 / 3);
end

function y = phi3(x)
    y = 1 / sqrt(x - 1);
end
```

迭代公式 (2) 每次迭代后的结果如下

```
1.500000
1.465558
1.465571
1.465571
```

迭代公式 (3) 每次迭代后的结果如下

```
1.500000
1.467342
1.465576
1.465571
```

二者均得到计算结果 1.46557.

6. 解 由于迭代函数 $\varphi(x)$ 至少为三阶收敛，设 $f(x_*)=0$，则有

$$\begin{cases} f(x_*)=0 \\ f'(x_*)=0 \\ f''(x_*)=0 \end{cases}$$

首先有

$$\varphi' = 1 - p'f - pf' - q'f^2 - 2qff' = 0$$

代入 $x = x_*$ 得

$$1 - p(x_*)f'(x_*) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_*) = \frac{1}{f'(x_*)}$$

取 $p(x) = 1/f'(x)$，则有

$$\begin{aligned}
\varphi &= x - \frac{f}{f'} - qf^2 \\
\varphi' &= 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} - q'f^2 - 2qff' \\
&= \frac{ff''}{(f')^2} - q'f^2 - 2qff' \\
\varphi''(x_*) &= \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)} - 2[f'(x_*)]^2 q(x_*) = 0 \\
&\Rightarrow \quad q(x_*) = \frac{f''(x_*)}{2[f'(x_*)]^3}
\end{aligned}$$

因此，可以取

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{f'(x)} \\ q(x) = \frac{f''(x)}{2[f'(x)]^3} \end{cases}$$

即可满足题目要求，使迭代函数 $\varphi(x)$ 至少三阶收敛.

10. 证明 记 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$，则 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$\varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}$$

因为牛顿迭代法二阶收敛，当 $k \to \infty$ 时，有

$$P_k = \frac{x_k - x_*}{(x_{k-1} - x_*)^2} \to \frac{\varphi''(x_*)}{2!} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}$$

$$\frac{P_{k-1}}{R_k} = \frac{(x_{k-1} - x_*)}{(x_{k-2} - x_*)^2} \frac{(x_{k-1} - x_{k-2})^2}{(x_k - x_{k-1})} = \frac{(x_{k-1} - x_{k-2})^2}{(x_{k-2} - x_*)^2} \frac{(x_{k-1} - x_*)}{(x_k - x_{k-1})}$$

记

$$Q_k = \frac{(x_k - x_{k-1})}{(x_{k-1} - x_*)}$$

当 $k \to \infty$ 时，因牛顿迭代法二阶收敛，有

$$Q_k = \frac{-(x_{k-1} - x_*) + (x_k - x_*)}{(x_{k-1} - x_*)} = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{k-1}}{R_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{Q_{k-1}^2}{Q_k} = -1$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} R_k = -\lim_{k\to\infty} P_k = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}$$

14. 解 由题目条件知 $x_* = \sqrt[n]{a}$，由 10 题可知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x_*}{(x_{k-1} - x_*)^2} = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}$$

方程 1

$$\begin{cases} f(x) = x^n - a \\ f'(x) = nx^{n-1} \\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \end{cases}$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} = -\frac{n(n-1)a^{\frac{n-2}{n}}}{2na^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}}$$

方程 2

$$\begin{cases} f(x) = 1 - ax^{-n} \\ f'(x) = anx^{-(n+1)} \\ f''(x) = -an(n+1)x^{-(n+2)} \end{cases}$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{1 - ax_k^{-n}}{anx_k^{-(n+1)}} = x_k(1 + \frac{1}{n}) - \frac{x_k^{n+1}}{an}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} = \frac{an(n+1)a^{-\frac{(n+2)}{n}}}{2ana^{-\frac{(n+1)}{n}}} = \frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$$