科学计算 Exercise 1

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

1、

(1) 由均值不等式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{7}{x_k}\right) \geq \sqrt{7}$$

又有 $x_0 = 2$，因此 $x_k \geq \sqrt{7}$。

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{x_k} - x_k\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} - x_k\right) \leq 0$$

因此 $\{x_k\}$ 单调递减。$\{x_k\}$ 单调递减有下界一定收敛，设其极限为 x^*。

对递推公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{7}{x_k}\right)$$

两边取极限得

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{7}{x^*}\right) \Rightarrow x^* = \sqrt{7}$$

(2) 记 $e_k = x_k - \sqrt{7}$，则有

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{7}{x_k} - 2\sqrt{7}\right) = \frac{x_k^2 - 2\sqrt{7}x_k + 7}{2x_k} = \frac{\left(x_k - \sqrt{7}\right)^2}{2x_k} = \frac{e_k^2}{2x_k}$$

若 x_k 是 $\sqrt{7}$ 有 n 位有效数字的近似值，则 $x_k = 0.a_1a_2a_3\ldots a_n\cdots \times 10$

$$e_k = 0.a_1a_2a_3\ldots a_n\cdots - \sqrt{7} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n} \times 10 = \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$$

$$e_{k+1} = \frac{e_k^2}{2x_k} \leq \frac{\frac{1}{4} \times 10^{2-2n}}{2\sqrt{7}} = \frac{10^{2-2n}}{8\sqrt{7}} < \frac{1}{2} \times 10^{1-2n}$$

因此 x_{k+1} 至少是 $\sqrt{7}$ 的具至少 $2n$ 位有效数字的近似值。

2、可将运算的误差估计为

$$\varepsilon\left(f\left(x^*\right)\right) \approx |f'\left(x^*\right)|\varepsilon\left(x^*\right)$$

对以下函数

$$f_1=(x-1)^6\,, f_2=(3-2x)^3\,, f_3=99-70x, f_4=\frac{1}{(1+x)^6}, f_5=\frac{1}{(3+2x)^3}, f_6=\frac{1}{99+70x}$$

分别在 $x=1.4$ 处求导得

$$f_1^{'}(1.4)=0.06144, f_2^{'}(1.4)=-0.24, f_3^{'}(1.4)=-70$$

$$f_4^{'}(1.4)=-0.013082, f_5^{'}(1.4)=-0.00530199, f_6^{'}(1.4)=-0.00180371$$

因此使用 $\frac{1}{99+70\sqrt{2}}$ 计算最精确。

3、

(1)

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

(2)

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)}$$

4、

方法 1

对 $\cos x$ 进行 Taylor 展开得

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+O\left(x^{2n+1}\right)\right)}{x^2}=\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k)!}+O\left(x^{2n-1}\right)$$

方法 2

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

对 $\sin\frac{x}{2}$ 进行 Taylor 展开，得

$$f(x)=\frac{2}{x^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{(2k-1)!}+O\left(x^{2n}\right)\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-3}}{(2k-1)!}+O\left(x^{2n-2}\right)\right)^2$$

5、记 $\varepsilon_0=|27.982-\sqrt{783}|$, 根据四则运算的误差估计

$$\varepsilon\left(x^*\pm y^*\right)\le\varepsilon_x^*+\varepsilon_y^*$$

$$\varepsilon\left(x^*y^*\right) \leq |x^*|\varepsilon_y^* + |y^*|\varepsilon_x^*$$

$$\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \leq \frac{|x^*|\varepsilon_y^* + |y^*|\varepsilon_x^*}{|y^*|^2}$$

按照 $Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$ 计算 Y_{100} 的误差约为

$$\varepsilon_{100} = 100 \times \frac{100 \times \varepsilon_0}{100^2} = \varepsilon_0$$

按照 $Y_n = 2Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$ 计算误差满足

$$\varepsilon_n = 2\varepsilon_{n-1} + \frac{100 \times \varepsilon_0}{100^2}$$

据此递推公式求得

$$\varepsilon_{100} = \frac{2^{100} - 1}{100}\varepsilon_0$$

6、设计算大小为 $a \times b$ 的矩阵 P 与 $b \times c$ 的矩阵 Q 相乘的代价为 $C\left(P, Q\right) = O\left(abc\right)$，另外将计算 $B_{l,r} = \prod_{k=l}^{r} A_k$ 的最小代价记作 $F\left(l, r\right)$。
则有如下递归转移方程

$$F\left(l, r\right) = \min_{l \leq i < r}\left\{F\left(l, i\right) + F\left(i+1, r\right) + C\left(B_{l,i}, B_{i+1,r}\right)\right\}$$

特别地，若 $l = r$，$F\left(l, r\right) = 0$。
根据上述递归转移方程，可得求解 $F\left(1, n\right)$ 的递归算法，按照递归时最优的转移方案即得计算 $A = \prod_{k=1}^{n} A_k$ 的最优顺序。