科学计算 Exercise 2

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

1 教材练习 P48-49

首先证明下面的定理 1。

定理 1 设在区间 $[a, b]$ 上给定 $n+1$ 个点

$$a \le x_0 < x1 < \cdots < x_n \le b$$

上的函数值 $y_i = f(i)\,(i = 0, 1, \ldots, n)$，求一次数不超过 n 的多项式 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，使

$$P(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

则多项式 $P(x)$ 是存在且唯一的。

证明 由定理条件可得关于多项式系数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 的 $n+1$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

此方程的系数矩阵 A 为一个 Vandermonde 矩阵，因 $x_i\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ 互异，其行列式

$$\det A = \prod_{i,j=0,\ i>j}^{n} (x_i - x_j) \ne 0$$

因此线性方程组的解 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 存在且唯一，证毕。

4.

(1) 等式两边均为次数不超过 n 的多项式，且在 $x_j\,(j = 0, 1, \ldots, n)$ 处的函数值相等（都等于 x_j^k），由定理 1，等式两边的多项式相等。

(2) 等式两边均为次数不超过 n 的多项式，$x_j\,(j=0,1,\ldots,n)$ 处的函数值相等（都等于 0），由定理 1，等式两边的多项式相等。

8. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数，且节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$，则满足

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi\in[a,b]$$

由此得

$$f\left[2^0,2^1,\ldots,2^7\right]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}\left(\xi\in\left[2^0,2^7\right]\right)=1$$
$$f\left[2^0,2^1,\ldots,2^8\right]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}\left(\xi\in\left[2^0,2^8\right]\right)=0$$

9.

$$\begin{aligned}\Delta(f_kg_k)&=f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_k=f_{k+1}g_{k+1}+f_kg_{k+1}-f_kg_{k+1}-f_kg_k\\&=f_k(g_{k+1}-g_k)+g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}f_k\Delta g_k&=\sum_{k=0}^{n-1}f_kg_{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}f_kg_k\\&=\sum_{k=0}^{n-2}f_kg_{k+1}+f_{n-1}g_n-\sum_{k=1}^{n-1}f_kg_k-f_0g_0\\&=f_ng_n-f_0g_0+(f_{n-1}-f_n)\,g_n+\sum_{k=0}^{n-2}f_kg_{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}f_kg_k\\&=f_ng_n-f_0g_0-\Delta f_{n-1}g_n+\sum_{k=0}^{n-2}f_kg_{k+1}-\sum_{k=0}^{n-2}f_{k+1}g_{k+1}\\&=f_ng_n-f_0g_0-\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k\end{aligned}$$

12. 因 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个不同实根,不妨设 $f(x)=A(x-x_1)\ldots(x-x_n)$。因此有

$$f'(x_j)=A\prod_{i\neq j}(x-x_i)$$

则有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{A\prod_{i\neq j}(x-x_i)}$$

令 $g_k(x)=x^k$，则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}&=\frac{1}{A}g_k[x_1,x_2,\dots,x_n]\\&=\frac{1}{A}\frac{g^{(n-1)(\xi)}}{(n-1)!}\ \left(\xi\in[\min x_j,\max x_j]\,,\ j=1,2,\dots,n\right)\end{aligned}$$

因此，当 $0\le k\le n-2$ 时，$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=0$；当 $k=n-1$ 时，$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{A}=a_n^{-1}$。

2 补充练习

1. 已知对于 $k=0,1,2,\dots,n$ 成立 $f(k)-\frac{k}{k+1}=0$，设 $g(x)=f(x)(x+1)-x$，则 $g(x)$ 为一个次数不超过 $n+1$ 的多项式，且 $k=0,1,2,\dots,n$ 为 $g(x)$ 的 $n+1$ 个零点。可设 $g(x)=Ax(x-1)\dots(x-n)$。又知 $g(-1)=1$，代入得

$$g(-1)=-A(-1-1)\dots(-1-n)=1\ \Rightarrow\ A=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

因此

$$g(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\dots(x-n)$$

$$f(x)=\frac{g(x)+x}{x+1}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\dots(x-n)+x}{x+1}$$

2. 首先考虑极端情形，若相邻两点之间的间距均为 h，即

$$x_{i+1}-x_i=h\,(i=0,1,2,\dots,n-1)$$

下面首先证明此情形下的结论：
由于结论只与 x_k 之间的相对位置有关，所以不妨设 $x_0=0$。根据齐次性，不妨设 $h=1$（否则令 $y=\frac{x}{h}$ 即可）。因此只需证明

$$x(x-1)\cdots(x-n)\le\frac{n!}{4}$$

对于 $n=1$ 的情况，根据均值不等式，成立，

$$|x(x-1)|=x(1-x)\le\frac{1}{4}.$$

假设对于 n 的情况成立，考虑 $n+1$ 的情况。若 $x\in[0,n]$，则

$$|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n+1})|\le\frac{n!}{4}\times(n+1-x)\le\frac{(n+1)!}{4}.$$

若 $x \in [n, n+1]$，结合 $n=1$ 的情况，成立

$$|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_{n+1}\right)| \leq (n+1)n(n-1)\cdots\frac{1}{4}=\frac{(n+1)!}{4}$$

因此，相邻两点之间的间距均为 h 时结论成立。
对于一般情况，$x_{i+1}-x_i \leq h\,(i=0,1,2,\ldots,n-1)$，对于任意 $x \in [x_0, x_n]$，不妨设 $x \in [x_k, x_{k+1}]$，则存在 $x'_0, x'_1, \ldots, x'_k$ 与 $x'_{k+1}, x'_{k+2}, \ldots, x'_n$ 满足：

$$\begin{aligned} x'_i &< x_i \ \ (i=0,1,\ldots,k) \\ x'_i &> x_i \ \ (i=k+1,k+2,\ldots,n) \\ x'_{i+1}-x'_i &= h \ \ (i=0,1,2,\ldots,n-1) \end{aligned}$$

则有 $|x-x_i| \leq |x-x'_i| \ \ (i=0,1,2,\ldots,n)$

$$|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)| \leq |\left(x-x'_0\right)\left(x-x'_1\right)\ldots\left(x-x'_n\right)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$