科学计算 Exercise 6

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

1.

解 (1) 分别代入 $f(x)=1, f(x)=x, f(x)=x^2$，得方程组

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{2h^3}{3} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_{-1}=\frac{h}{3} \\ A_0=\frac{4h}{3} \\ A_1=\frac{h}{3} \end{cases}$$

因此此求积公式至少有 2 次代数精度，分别代入 $f(x)=x^3, f(x)=x^4$，检验得

$$\int_{-h}^{h} x^3 \mathrm{d}x = 0 = A_{-1}(-h)^3 + A_0 0^3 + A_1 h^3$$

$$\int_{-h}^{h} x^4 \mathrm{d}x \neq A_{-1}(-h)^4 + A_0 0^4 + A_1 h^4$$

因此此求积公式有 3 次代数精度.

(2) 分别代入 $f(x)=1, f(x)=x, f(x)=x^2$，得方程组

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=4h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{16h^3}{3} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_{-1}=\frac{8h}{3} \\ A_0=\frac{-4h}{3} \\ A_1=\frac{8h}{3} \end{cases}$$

因此此求积公式至少有 2 次代数精度，分别代入 $f(x)=x^3, f(x)=x^4$，检验得

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 \mathrm{d}x = 0 = A_{-1}(-h)^3 + A_0 0^3 + A_1 h^3$$
$$\int_{-2h}^{2h} x^4 \mathrm{d}x \neq A_{-1}(-h)^4 + A_0 0^4 + A_1 h^4$$

因此此求积公式有 3 次代数精度.

(3) 代入 $f(x)=1$，检验知此积分公式至少有 0 阶代数精度. 分别代入 $f(x)=x, f(x)=x^2$，得方程组

$$\begin{cases}(-1+2x_1+3x_2)/3=0\\(-1+2x_1^2+3x_2^2)/3=\frac{2}{3}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}\\x_2=\frac{3\mp2\sqrt{6}}{15}\end{cases}$$

因此此求积公式至少有 2 次代数精度，代入 $f(x)=x^3$，检验得

$$\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x \neq [(-1)^3+2x_1^3+3x_2^3]/3$$

因此此求积公式有 2 次代数精度.

(4) 分别代入 $f(x)=1, f(x)=x$，检验知此积分公式至少有 1 阶代数精度. 代入 $f(x)=x^2$，得

$$\frac{h^3}{2}-2ah^3=\frac{h^3}{3}$$

得

$$a=\frac{1}{12}$$

因此此求积公式至少有 2 次代数精度，分别代入 $f(x)=x^3, f(x)=x^4$，检验得

$$\int_0^h x^3 \mathrm{d}x = \frac{h^4}{4} = h(0+h^3)/2 + ah^2(0-3h^2)$$
$$\int_0^h x^4 \mathrm{d}x \neq h(0+h^4)/2 + ah^2(0-4h^3)$$

因此此求积公式有 3 次代数精度.

6.

解 复合梯形公式的余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

则有

$$\frac{e}{12}\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad n \ge 213$$

即最小分为 213 等份. 复合辛普森求积公式的余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta)$$

则有

$$\frac{e}{180}(\frac{1}{2n})^4 \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad n \ge 4$$

即最小分为 4 等份.

10.

解 在权函数为 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 时，首项系数为 1 的正交多项式前三项为

$$\varphi_0(x)=1, \quad \varphi_1(x)=x-\frac{1}{3}, \quad \varphi_2(x)=x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}$$

取 x_0, x_1 为 $\varphi_2(x)$ 的两个零点，则

$$x_0=\frac{15-2\sqrt{30}}{35}, \quad x_1=\frac{15+2\sqrt{30}}{35}$$

分别代入 $f(x)=1, f(x)=x$，得方程组

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{3} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_0=1+\frac{\sqrt{30}}{18} \\ A_1=1-\frac{\sqrt{30}}{18} \end{cases}$$

因此，高斯型求积公式为

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x \approx (1+\frac{\sqrt{30}}{18})f(\frac{15-2\sqrt{30}}{35})+(1-\frac{\sqrt{30}}{18})f(\frac{15+2\sqrt{30}}{35})$$