科学计算 Exercise 5

范舟

516030910574

致远学院 2016 级 ACM 班

1. **证明：** 假设在 $[a,b]$ 上 $f \not\equiv 0$，则 $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) \neq 0$，不妨设 $f(x_0) < 0$，因为 $f \in C[a,b]$，存在 $\delta > 0$，使得

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

取 g 为

$$g(x) = \begin{cases} [x - (x_0 - \delta)]^3[x - (x_0 + \delta)]^3, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b] \end{cases}$$

则有 $g \in C_0^2[a,b]$，且

$$g(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

因此

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)\mathrm{d}x > 0$$

与 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾，因此在 $[a,b]$ 上 $f \equiv 0$.

2. **证明：** 假设此变分问题有解 $y^* = f^*(x)$，根据守恒律定理，沿着曲线 $y^* = f^*(x)$，成立

$$H = f' \frac{\partial L}{\partial f'} - L = Constant$$

其中

$$L(x, f, f') = x^2\big(f'(x)\big)^2$$

则有

$$H = f'(x) \times 2x^2 f'(x) - x^2\big(f'(x)\big)^2 = x^2\big(f'(x)\big)^2 = Constant$$

代入 $x = 0$ 得 $H \equiv 0$，则有

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0$$

又因为 $f\in C^1[-1,1]$，$f'(0)=0$，即

$$f'(x)=0,\quad \forall x\in[-1,1]$$

则 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的常数函数，与 $f(-1)=-1,f(1)=1$ 矛盾，因此此变分问题无解.

3. **解:**

$$y(1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2)=c\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{c}{y}-1}\Rightarrow\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{y}{c-y}}\mathrm{d}y$$

已知 $y(0)=0$，两边积分得

$$\int_0^x\mathrm{d}t=\int_{y(0)}^{y(x)}\sqrt{\frac{t}{c-t}}\mathrm{d}t\Rightarrow x=\int_0^y\sqrt{\frac{t}{c-t}}\mathrm{d}t$$

令 $p=\sqrt{\frac{t}{c-t}}$，则 $t=\frac{cp^2}{1+p^2}$，得

$$x=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{c-y}}}p\mathrm{d}\Big(\frac{cp^2}{1+p^2}\Big)=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\frac{2cp^2}{(1+p^2)^2}\mathrm{d}p=2c\int_0^{\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\frac{p^2}{(1+p^2)^2}\mathrm{d}p$$

令 $p=\tan\theta$，得

$$x=2c\int_0^{\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\frac{\tan^2\theta}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\mathrm{d}\theta=2c\int_0^{\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

令 $\theta=\frac{\alpha}{2}$，得

$$x=\frac{c}{2}\int_0^{2\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}}(1-\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha=c\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}-\frac{c}{2}\sin\big(2\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}\big)$$

已知 $y(x_1)=y_1$，有

$$x_1=c\arctan\sqrt{\frac{y_1}{c-y_1}}-\frac{c}{2}\sin\big(2\arctan\sqrt{\frac{y_1}{c-y_1}}\big)$$

由此可确定常数 c.

4. **解:** 不妨假设 $f(0)=\tilde{y}_0,f(1)=\tilde{y}_n$，分别定义数据保真项与正则化项

$$J_1(f)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i-f(x_i)]^2,\quad J_2(f)=\int_0^1\big(f'(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

其中

$$h_i=x_i-x_{i-1},\quad 1\le i\le n$$

所求最优化函数为

$$J(f)=J_1(f)+\alpha J_2(f),\quad f_*=\arg\min_f J(f)$$

$\forall \eta \in K_0, \varepsilon \in R$，$J(f)$ 在 f_* 处沿 η 的方向导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(f_* + \varepsilon\eta) = -2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i) - \varepsilon\eta(x_i)]\eta(x_i) + 2\alpha \int_0^1 [f_*'(x) + \varepsilon\eta'(x)]\eta'(x)\mathrm{d}x$$

在 $\varepsilon = 0$ 处有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(f^* + \varepsilon\eta) = 0$，即

$$-2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i)]\eta(x_i) + 2\alpha \int_0^1 f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = 0$$

下面通过选取合适的 η 导出 f_* 满足的条件.

Step 1 对于每个区间 $[x_{k-1}, x_k]$，取 $\eta \in C_0^\infty(x_{k-1}, x_k)$（定义在 $[0,1]$ 上，在 (x_{k-1}, x_k) 的各阶导数都有紧支集），则有

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = 0$$

分部积分得

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = f_*'(x)\eta(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_*''(x)\eta(x)\mathrm{d}x = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_*''(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

η 在 $K_0[x_{k-1}, x_k]$ 中有任意性，根据变分引理，得

$$f_*''(x) \equiv 0 \Rightarrow f_* \in P_1, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

因此 f_* 是分段线性函数.

Step 2 再取 $g \in C^\infty[0,1] \cap K_0$，分部积分有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(f_*'(x)\eta(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*''(x)\eta(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f_*'(x_i-) - f_*'(x_i+)]\eta(x_i) + f_*'(1)\eta(1) - f_*'(0)\eta(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f_*'(x_i-) - f_*'(x_i+)]\eta(x_i)
\end{aligned}$$

与下式比较各项系数

$$-2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i)]\eta(x_i) + 2\alpha \int_0^1 f_*'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = 0$$

得

$$\alpha[f_*'(x_i-) - f_*'(x_i+)] = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i)]$$

则 f_* 为满足此条件的分段线性函数，且满足 $f(0) = \tilde{y}_0, f(1) = \tilde{y}_n$.