Solución Parcial #2.

Señal modulada $s(t)$

$$s(t) = A_i m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Usamos identidad del coseno

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Sustituimos

$$s(t) = A_i m(t) \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

Aplicando la transformada termino a termino.

$$S(f) = A_i \left[F\{m(t) e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2} F\{m(t) e^{-j2\pi f_0 t}\} \right]$$

Aplicamos propiedad de dezplazamiento en frecuencia.

$$F\{x(t) e^{\pm j2\pi f_0 t}\} = X(f \mp f_0)$$

$$S(f) = \frac{A_i}{2} M(f - f_0) + \frac{A_i}{2} M(f + f_0)$$

2) Mezclador local tiene dos señales de entrada multiplicamos las señales.

$$A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$\theta_0 = 0.$$

$$A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

Aplicamos propiedad trigonometrica.

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

Sustituimos

$$x(t) = A_1 m(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right)$$

$$x(t) = \frac{A_1 m(t)}{2} + \frac{A_1 m(t)\cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

Cambiamos la señal en frecuencia.

$$F\left\{\frac{A_1}{2} m(t)\right\} \longrightarrow \frac{A_1}{2} M(f)$$

$$F\left\{\frac{A_1}{2} m(t)\cos(4\pi f_0 t)\right\} \longrightarrow$$ Propiedad de modulación (desplazamiento en frecuencia)

$$\boxed{F\left\{m(t)\cos(2\pi f_0 t)\right\} = \frac{1}{2}\left\{M(f-f_0) + M(f-f_0)\right\}}$$

Evaluamos.

$$F\left\{\frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)\right\} = \frac{A_1}{2} \cdot F\left\{m(t) \cos(2\pi(2f_0)t)\right\}$$

$$= \frac{A_1}{2}\left[\frac{1}{2} M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right]$$

$$= \frac{A_1}{4}\left(M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right)$$

Por lo tanto la transformada de fourier.

$$X(f) = \frac{A_1}{2} M(f) + \frac{A_1}{4}\left(M(f-2f_0) + M(f+2f_0)\right)$$

Filtro pasa bajos.

$$Y(f) = H(f)\, X(f).$$

$$Y(f) = \frac{A_1}{2} M(f).$$

En el dominio del tiempo tenemos

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t).$$

Despejamos $m(t)$.

$$m(t) = \underbrace{\frac{2}{A_1}}_{\text{Escalon}} y(t).$$ $m(t) \rightarrow$ Mensaje original.

Segundo Punto

Calculando la ecuación diferencial del sistema mecanico (maso, resorte, amortiguador)

$$f_E(t) = f_S(t) + f_F(t) + f_I(t)$$

$f_E(t) \rightarrow$ Fuerza externa.

$f_S(t) = K\,y(t) \rightarrow$ Fuerza de resorte.

$f_F(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \rightarrow$ Fuerza de Fricción

$f_I(t) = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \rightarrow$ Fuerza de Inercia

$$F_E(t) = K\,y(t) + C\frac{dy(t)}{dt} + m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Aplicando la transformada de laplace.

$$F_E(S) = K\,Y(S) + CS\,Y(S) + m\,S^2\,Y(S)$$

Calculando la función de transferencia.

$$H(S) = \frac{Y(S)}{F_E(S)}$$

$$F_E(S) = Y(S)\,(K + CS + mS^2)$$

$$\frac{Y(S)}{F_E(S)} = \frac{1}{K + CS + mS^2}$$

Calculamos función de transferencia del circuito RLC. por nodos.

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t).$$

$$i_L(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{R}V_R(t)$$

$$V_C(t) = V_R(t) = V_0(t)$$

$$i_L(t) = C\frac{dV_0(t)}{dt} + \frac{1}{R}V_0(t).$$

$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = V_i(t) - V_0(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_i(t) - V_0(t)}{L}.$$

Aplicamos derivada

$$\frac{di_L(t)}{dt} = C\frac{d^2V_0(t)}{dt} + \frac{1}{R}\frac{dV_0(t)}{dt}.$$

Remplazamo $\frac{di_L(t)}{dt}$.

$$\frac{V_i(t) - V_0(t)}{L} = \frac{Cd^2V_0(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV_0(t)}{dt}.$$

$$V_i(t) - V_0(t) = CL\frac{d^2V_0(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_0(t)}{dt}.$$

$$V_i(t) = CL\frac{d^2V_0(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_0(t)}{dt} + \frac{V_0(t)}{L}$$

Aplicando la transformada de Laplace.

$$Vi(s) = CLs^2 Vo(s) + \frac{L}{R} s\, Vo(s) + Vo(s)$$

$$Vi(s) = Vo(s)\left(CLs^2 + \frac{Ls}{R} + 1 \right)$$

Funcion de transferencia.

$$H(s) = \frac{Vo(s)}{Vi(s)}$$

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}$$

Multiplicamos por R.

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{R}{RCLs^2 + Ls + R}$$

Comparamos las EDO del pendulo y circuito RLC.

EDO Pendulo.

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + k\,y(t) = FE(t).$$

EDO Circuito RLC.

$$CL\frac{d^2vo(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dVo(t)}{dt} + Vo(t) = Vi(t).$$

La EDO Circuito multiplicamos po $\frac{1}{C}$.
Para que la ecuacion no este desbalanceada.

EDO circuito RLC.

$$L\frac{d^2 V_o(t)}{dt^2} + \frac{L}{RC}\frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{1}{C}V_o(t) = \frac{1V_i(t)}{C}$$

Por lo tanto los valores

$$m = L. \qquad FE(t) = \frac{1}{C}V_i(t)$$

$$C = \frac{L}{RC.}$$

$$k = \frac{1}{C.}$$

Lazo cerrado con realimentacion unitario.

donde $H(S) = 1 \rightarrow$ Realimentación unitario.

Por lo tanto la función de transferencia. en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Funcion de transferencia lazo cerrado unitario

$$T(S) = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$

función de transferencia lazo cerrado del pendulo.

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k. + 1}$$

Funcion de transferencia circuito RLC.

$$T(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1 + 1}$$

$$T(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 2}$$