Taller – Validez de una Función de Autocorrelación Definida como Suma de Gaussianas

Curso: Teoría de Señales

Nombre: Ever Daniel Hernandez

Tema: Función de Autocorrelación y Teorema de Wiener– Khinchin

1 Planteamiento del problema

Considere la siguiente funci´on definida en tiempo continuo:

$$R(\tau) = \sum_{k\in\{-1,0,1\}} A_k \exp\left(-\frac{(\tau-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

donde:

$$\mu_k = k$$

$$\sigma_k^2 = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ \dfrac{\sigma^2}{|k|!}, & k \neq 0 \end{cases}$$

y

$$A_k > 0, \qquad A_{-1} = A_1.$$

Se pide analizar si $R(\tau)$ puede ser considerada una función de autocorrelación válida de un proceso estocástico estacionario en sentido amplio (WSS).

3 Parte Teórica

(a) Propiedades básicas

Realidad: Cada término es una función gaussiana real y los coeficientes son reales. Por lo tanto: $R(\tau) \in R$

Simetría Una función de autocorrelación de un proceso WSS real debe satisfacer:

$$R(-\tau) = R(\tau)$$

Evaluando:

$$R(-\tau) = A_0 e^{-\tau^2/(2\sigma^2)} + A_1 e^{-(\tau+1)^2/(2\sigma^2)} + A_1 e^{-(\tau-1)^2/(2\sigma^2)}$$

Como los términos desplazados se intercambian y $A_{-1} = A_1$ se obtiene:

$$R(-\tau) = R(\tau)$$

Máximo en $\tau = 0$. Una función de autocorrelación válida de un proceso WSS real presenta su valor máximo en $\tau = 0$, es decir:

$$R(0) \geq R(\tau) \quad \forall \tau,$$

Condición de positividad definida

Una función $R(\tau)$ es una Función de Autocorrelación (ACF) válida de un proceso WSS si y sólo si es positivamente definida.

$R(\tau)$ es positivamente definida si para cualquier entero N, cualquier conjunto de tiempos $\{t_1,t_2,\ldots,t_N\}$ y cualquier conjunto de coeficientes complejos $\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$, se cumple:

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} c_m c_n^* \, R(t_m - t_n) \geq 0.$$

Uso del Teorema de Wiener–Khinchin

Para un proceso WSS

$$S(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\}$$

$R(\tau)$ es una ACF válida si y sólo si

$$S(f) \geq 0 \quad \forall f.$$

La transformada de Fourier de una gaussiana desplazada es

$$\mathcal{F}\left\{e^{-(\tau-\mu)^2/(2\sigma^2)}\right\} = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} e^{-j2\pi f\mu}.$$

Aplicando esto a cada término: $\mu = 0$

$$A_0\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

$\mu = \pm 1$

$$A_1\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} e^{\mp j2\pi f}$$

Construcción del espectro total

$$S(f) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}\left(A_0 + A_1 e^{-j2\pi f} + A_1 e^{j2\pi f}\right)$$

$$S(f) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}\left(A_0 + 2A_1\cos(2\pi f)\right)$$

Envolvente gaussiana es positiva

$$B(f) = A_0 + 2A_1\cos(2\pi f)$$

Este término determina el signo del espectro como:

$$\cos(2\pi f) \in [-1, 1]$$

El valor mínimo ocurre cuando el coseno vale −1:

$$B_{\min} = A_0 - 2A_1.$$

por lo tanto

$$S(f) \geq 0 \ \forall f \iff A_0 - 2A_1 \geq 0.$$

Parte Computacional (Python)

Cuaderno en colap

https://github.com/EverHernandez01/Teoria_de_se-ales/blob/main/Taller/Taller_acf.ipynb

5 Preguntas de análisis

1. ¿Toda suma de funciones gaussianas genera una ACF válida?

No. Debe cumplir positividad espectral. No basta con ser suma de gaussianas.

2. ¿Qué papel juegan las gaussianas desplazadas respecto al término central?

Introducen una modulación cosenoidal en el espectro:

$2A_1\cos(2\pi f)$

que puede generar valores negativos si domina al término central.

3. ¿Existe un umbral en las amplitudes relativas que cambie la validez?

Sí. $A0 = 2A1$ Es el punto crítico donde cambia la validez.

4. ¿Qué interpretación física tendría el proceso si la función fuera válida?

Representaría un proceso WSS con:

- Un pico central fuerte (correlación inmediata)
- Dos lóbulos laterales (correlación retardada)

5. ¿Qué sucede cuando el espectro toma valores negativos?

La función deja de ser positiva definida.

No puede representar la PSD de ningún proceso WSS real.