Vorwissenschaftliche Arbeit

# Die Verteilung der Primzahlen und ihr Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion

*Daniel Nissan*
8C

betreut von
Robert Weinhandl

Akademisches Gymnasium Wien
Beethovenplatz 1, 1010 Wien

Februar 2017/18

# Abstract

Diese vorwissenschaftliche Arbeit widmet sich den Primzahlen, insbesondere ihrer Verteilung. Die Aufgabe vorherzusagen, wo die nächste Primzahl aufzufinden ist, sollte keineswegs unterschätzt werden. Versucht man sich an folgender Frage: Welche Primzahl folgt nach 139? So kann man ohne großen Aufwand und mit Sicherheit sagen, dass es sich um 149 handelt.
Das Ganze ändert sich jedoch, wenn von Zahlen mit 10.000.000 Stellen oder mehr die Rede ist. Irgendwann stoßen unsere jetzigen Computer an ihre Grenzen. Dieses Prinzip nutzt auch zum Beispiel die RSA-Verschlüsselung: Der Aufwand zwei Primzahlen zu multiplizieren, ist viel geringer als der, in deren Produkt einen Primfaktor zu finden. Dadurch rechtfertigt sich die Suche nach solch gigantischen Primzahlen.
Es stellt sich heraus, dass es durchaus effizientere Methoden, geprägt von hoch zahlentheoretischem Charakter, gibt.
Eine davon, nämlich die Riemannsche-Primzahlenfunktion, soll den Höhepunkt dieser Arbeit bilden. Es werden des Weiteren grundlegende Eigenschaften der Primzahlen präsentiert, welche das Fundament für das Verständnis der Problemstellung schafft. Darauf folgen eine kurze geschichtliche Abhandlung und die Zeta-Funktion, einhergehend mit immer wiederkehrenden visuellen Unterstützungen in Form von Graphen. Schließlich mündet diese vorwissenschaftliche Arbeit in dem Endergebnis von Riemanns bedeutendstem Beitrag zur Zahlentheorie und ihren wichtigsten Erkenntnissen.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

## 1.1 Einleitung

Die Suche nach Primzahlen, oder, um genauer zu sein, die Suche nach einer Methode für die Suche nach Primzahlen ist die zentrale Aufgabe dieser Arbeit. Mithilfe von Zahlentheorie, komplexer Analysis sowie den Programmiersprachen Python und Mathematica soll dieser Weg beschritten werden. Diese Fragestellung wird durch eine kurze geschichtliche Abhandlung der Primzahlen und der Entwicklung der Primzahlen-Zählfunktion vorgestellt. Daraufhin soll der Zusammenhang zwischen $\zeta$ und den Primzahlen mathematisch als auch graphisch ermittelt werden. Im Mittelpunkt steht die erste und wichtigste Arbeit, die Bernhard Riemann im Bereich der Zahlentheorie veröffentlichte. Auch, wenn das Endresultat dieser nicht mehr das aktuellste ist, so hat er dennoch viele wichtige und revolutionäre Methoden eingeführt, mit denen die Herangehensweise an dieses Problem erleichtert wurde. Die Leitfragen befassen sich mit der Entwicklung unseres Verständnisses und des Wesen der Primzahlen und von dort werden immer kleinere Teilgebiete in Angriff genommen, bis die Fragestellung, die Riemannsche Zeta Funktion und ihr Verhältnis zu den Primzahlen, erreicht ist. Inmitten dieser beiden Vorhaben steht auch die Riemannsche Vermutung und welche Erkenntnisse für ihre Entdeckung notwendig waren. Im Laufe des Verfassens geriet der Fokus immer mehr auf den Zusammenhang zwischen der Zetafunktion und den Primzahlen. Diese Leitfrage nimmt den Großteil der Arbeit ein.

## 1.2 Über die Arbeit

Nun wird eine Grundlage für den in der Arbeit verwendeten Formalismus festgelegt. Ist die Rede von $\log(x)$, so ist damit den Logarithmus mit der Basis e anstelle des dekadischen Logarithmus gemeint. Sind zwei Brüche von nichts getrennt, haben jedoch unterschiedliche Nenner, so ist die Lücke, wie gewohnt, als eine Multiplikationsverknüpfung zu verstehen. Jegliche Rechenoperatoren, welche den Horizont der Matura überschreiten, werden entweder kurz erörtert, oder mindestens namentlich genannt, um es dem Leser zu ermöglichen, sich selbst zu informieren. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn das zu Erörternde zu umfangreich für das Ausmaß dieser Arbeit ist. Graphiken, die selbst erstellt wurden, werden mit * für Privatarchiv gekennzeichnet.
Das Ziel der Arbeit ist es vor allem, einen guten Überblick über die Problemstellung und ihre Vergangenheit zu geben, daher wird nicht, wie in einem Lehrbuch, jeder Satz bewiesen und jede Funktion ins tiefste Detail analysiert. Ebenfalls besteht auch kein Bedarf jeden Ausdruck zu verstehen, um die Endresultate von Riemanns Arbeit wertschätzen zu können.

Daniel Nissan, AKG-Wien 2017/18

# 2 Über die Primzahlen

Dieses erste Kapitel dient als eine Art Wiederholung oder Einführung in die Welt der Primzahlen. Es werden ihre grundlegenden Eigenschaften angeführt. Diese Kenntnisse sind großteils essentiell für das Verständnis der Problemstellung und ein Baustein der nächsten Kapitel.

## 2.1 Einführung

Die Menge der Primzahlen $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, welche eine Teilmenge der natürlichen Zahlen bildet, besteht aus jenen Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind.
$(p_n)_n \in \mathbb{N} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...$ (A000040 OEIS)
Weshalb die Zahl 1 nicht zu $\mathbb{P}$ zählt, wird im Folgendem behandelt. Die Zahl 0 scheidet aus, weil $0/0$ nicht definiert ist. Dass, wie die Menge der natürlichen Zahlen, auch die Menge der Primzahlen unendlich ist, konnte Euklid als erster bereits vor 2300 Jahren mittels eines Beweises durch Widerspruch zeigen. Für diesen Beweis wird angenommen, dass die endliche Menge aller $p \in \mathbb{P}$ aus $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$, also k ununterscheidbaren Elementen besteht. Bildet man nun das Produkt aller Zahlen, so ist $P = p_1 * p_2 * p_3 * ... * p_k = \prod_{n=1}^{k} p_n$ durch alle $p \in \mathbb{P}$ teilbar. Dem zweiten Peano-Axiom zufolge gilt: Jede natürliche Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger: $\forall n(n \in \mathbb{N} \rightarrow n' \in \mathbb{N})$
Hier gibt es zwei Fälle die eintreten können:

- P+1 ist prim: Die Annahme ist bereits widerlegt, denn dadurch wurde eine neue Primzahl gefunden.
- P+1 ist nicht prim: Infolgedessen gibt es einen Teiler p. Doch P+1 kann kein Element aus $\mathbb{P}$ enthalten, da alle vorhanden Primzahlen das Produkt P teilen, weil das implizieren würde, dass $P + 1 - P$ durch diesen teilbar wäre.

Somit wurde die Menge der Primzahlen um ein Element erweitert. Dieser Prozess lässt sich unendlich oft wiederholen und bestätigt damit die Existenz unendlich vieler Primzahlen.[1]
Unter genauer Betrachtung der Folge der Primzahlen ist es möglich diesen Schluss zu ziehen: Der kleinstmögliche Abstand zwischen zwei Primzahlen entspricht deren kleinsten nicht gemeinsamen Teiler. Primzahlen, die nur

zwei Schritte voneinander entfernt sind, werden als Zwillingsprimzahlen bezeichnet. Sie sind von der Form $2k+1, 2(k+1)+1$. Eine Instanz dieser Klasse von Primzahlen wären 3 und 5, hier 2*1+1,(2*1+1)+1.
Eine weitere Klasse der Primzahlen sind Zahlen der Form $2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, welche als Mersenne-Primzahlen bezeichnet werden. Beispiele für diese Gruppe sind, um einige zu nennen, 7($2^3 - 1$)und 3 ($2^3 - 1$ ). [2]
Die im Moment größte bekannte Mersenne-Primzahl lautet $2^{74207281} - 1$ und besitzt 22338618 Dezimalstellen. [3]
Ob es aber unendlich viele Primzahlen gibt, die nur zwei natürliche Zahlen voneinander entfernt sind, wurde noch nicht bewiesen.
Es laufen intensive Forschungen zu diesem Problem, welche erst durch eine Publikation von Tom Zhan stark angekurbelt wurden. Es ist bereits gelungen, die Zahl, die der kleinste mögliche Abstand zwischen zwei Primzahlen ist, der unendlich oft vorkommt, auf 12 einzuschränken. Der frühere Stand befand sich einst dank Tom Zhan bei 70 000 000, dem es als erster gelang, eine konkrete Grenze festzulegen.[4]
Ein weiteres ungelöstes Rätsel, vor das die Primzahlen uns stellen, ist die Goldbach-Vermutung, die ihren Ursprung in einem Brief von Goldbach an Euler findet. Laut ihr lässt sich jede natürliche Zahl größer 2 als Summe von 2 Primzahlen schreiben.

## 2.2 Aufsuchen von Primzahlen

Um Primzahlen zu finden, gibt es nach dem Schema $f(n) = P_n$ keine perfekte Methode. Die primitivste Art vorzugehen ist, stur eine Zahl mittels Division auf Primfaktoren zu überprüfen. Dabei gibt es die intuitive Herangehensweise, bei der die Zahl, die es zu überprüfen gilt, durch alle kleineren natürlichen Zahlen dividiert wird. Indem zum Beispiel Vielfache von bereits getesteten Teilern weggelassen werden, lässt sich dieses Verfahren verfeinern. Zum Beispiel kann eine Zahl, die nicht durch 2 Teilbar ist, nie durch 4 teilbar sein. Des Weiteren sollten nie Zahlen überprüft werden, die größer als die Quadratwurzel der Primzahl sind und so weiter. Abgesehen davon gibt es noch eine andere Methode Primzahlen zu finden, welche darauf basiert, dass es in manchen Fällen, je nach Verfahren, effizienter ist, eine Zahl zu finden, die nur eventuell eine Primzahl ist, welche dann auf normale Art überprüft werden kann.

**Fermats Primzahltest:** Dieses Verfahren wird bei Fermats Primzahltest gebraucht. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus, bei dem zwei kurze Tests durchgeführt werden. Besteht eine Zahl beide Überprüfungen, so ist eine hohe Wahrscheinlichkeit gegeben, dass jene prim ist. Er bedient sich zweier Zahlen:
Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche es zu testen gilt und einer Zahl hier $a \in \mathbb{Z}$, welche folgende Ungleichung erfüllen muss: $1 < a < n$ . Daraufhin müssen die folgenden beiden Aussagen wahr sein:

- $ggt(a, n) \neq 1$
  Es wird kontrolliert, ob der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen, hier angeschrieben mit ggt(a,b), ungleich 1 ist. Um diesen Schritt zu verdeutlichen, lässt es sich mit Hilfe von logischen Aussagen und Mengen folgendermaßen ausdrücken: Es gibt drei Typen von Zahlen. Diejenigen, die den Test bestehen und prim sind A, die Zahlen, die ihn bestehen und nicht Prim sind B und die Zahlen, die ihn nicht bestehen C. Die ersten beiden Mengen bilden die Menge $D = A \cup B$. D enthält alle Zahlen, die den Test bestehen, und ist eine Obermenge von A, der Menge, die alle Primzahlen enthält, während C die Menge ist, welche ausnahmslos keine Primzahlen enthält. Diese Eigenschaft teilt sich C mit B.

- $a^n - 1 \equiv 1 \bmod n$
  Das Bestehen dieser Kontrolle garantiert auch nicht, dass es sich um eine Primzahl handelt, aber durch das wiederholte Durchführen der beiden Tests mit a als Iterator steigt die Wahrscheinlichkeit, dass n prim ist.[1]

[5]

[1] Der Operator mod ist als Modulo, also Rest der Division in $\mathbb{N}$ aufzufassen.

# 3 Über die Primzahlen-Zählfunktion

Dieses Kapitel dient als eine verkürzte geschichtliche Abhandlung der Beiträge von Gauss und Legendre bis Tschebyscheff zu diesem Thema. Die Primzahlen-Zählfunktion $\pi(x)$, welche nur ganze Zahlen als Argument nimmt, ist eine Funktion, die angibt, wie viele Primzahlen es kleiner gleich x gibt. Im Laufe der Arbeit wird oft von sogenannten Annäherungen die Rede sein. Dabei handelt es sich um die zahlreichen Versuche der Mathematiker, Funktionen zu finden, welche sich möglichst ähnlich wie $\pi$ verhalten.
Aus der Definition folgt:
Wenn $\pi(x+1) - \pi(x) = 1$, ist x+1 prim. $\pi(x)$ ist monoton steigend und da es, wie bereits festgestellt, unendlich viele Primzahlen gibt folgt:

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) = \infty$$

Da der Limes mit der Erfindung der Infinitesimalrechnung einher kam, ist er ein relativ moderner Ausdruck, der zu Zeiten von Euklid noch nicht in Gebrauch war.

## 3.1 Grundlagen der Forschung

Zur Zeit von Legendre und Gauss versuchten Mathematiker eine Funktion zu finden, die sich möglichst gut an $\pi(x)$ annähert. Der Fehler $\frac{\pi(x)-f(x)}{\pi(x)}$, also die relative Änderung, sollte möglichst nah an 1 sein. Der lässt sich auch als $1 - \frac{f(x)}{\pi(x)}$ ausdrücken. Die gesuchte Funktion f(x) sollte wesentlich simplerer Natur sein, selbst keinen direkten Zusammenhang zu den Primzahlen haben und den gleichen Input verlangen.
Carl Friedrich Gauss entdeckte $\frac{x}{\log(x)}$, noch in seiner Jungend entschied sich aber, wahrscheinlich mangels Beweises[2], dagegen sie zu veröffentlichen.
Adrien-Marie Legendre machte diesen Fund ebenfalls und vermutete, dass anstelle der Annäherung $\frac{x}{\log(x)}$ eine Darstellung möglich sei, welche genauere Ergebnisse erzeuge. Diese Vermutung sprach er 1798 erstmals aus und verfasste sie im Jahre 1808 noch einmal genauer.

[2]Hier immer Beweis der asymptotischen Äquivalenz bezüglich der $\pi(x)$

Hierbei ist A(x) eine Funktion, die so bestimmt ist dass, bei einem Argument, welches gegen Unendlich strebt, der y-Wert sich einer Konstante A mit endlichem Wert, annähert und schlussendlich konvergiert:

$$\lim_{x \to \infty} A(x) = A$$

Die sogenannte Legendre-Konstante ist so definiert, dass sie genau jenen Wert A annimmt, welcher sich nach ausgewerteter Umformung ergibt .

$$\lim_{x \to \infty} \log(n) - \tfrac{x}{\pi(x)} = A$$

Dies, gerundet, sollte ungefähr A=1,08366 entsprechen, was, wie sich später dank Tschebyscheff herausstellte, nicht der Wahrheit entsprach.[3] [6]
Die Gedanken, um auf $\frac{x}{\log(x)}$ zu kommen sind keineswegs kompliziert. Es genügt, die Anzahl der Primzahlen unterhalb eines Wertes x als Divisor für jenes x zu nehmen und zu erkennen, dass das Verhältnis mit jeder neuen Größenordnung von x um den Faktor 2,3 steigt $\approx \log(10) = 2,302585$.[7]

Am 24. Dezember 1849 schrieb Carl Friedrich Gauss einen Brief an Johann Franz Encke, in welchem er auch eine von ihm vor Jahren entdeckte Ähnlichkeit zwischen der Menge der Primzahlen unterhalb eines gewissen Wertes und des Integral-Logarithmus erwähnt. Gauss behauptete, dass er bereits in der Zeit von 1792 bis 1793, diesen Zusammenhang entdeckte, als er sich mit Logarithmen-Tafeln beschäftigte, anhand welcher er die abnehmende Frequenz des Auftretens der Primzahlen studierte.
Damals stieß er erstmals auf den Zusammenhang zwischen $\frac{x}{\log(x)}$ und der Anzahl der Primzahlen unterhalb eines gewissen Wertes $\pi(x)$. Des Weiteren erwähnte er in diesem Brief auch, dass ihm nicht bewusst gewesen war, dass Legendre sich ebenfalls mit diesem Thema auseinandersetzte. Gauss sah den Integral-Logarithmus als die beste ihm bekannte Annäherung, konnte aber nur den Zusammenhang mit $\frac{x}{\log(x)}$ demonstrieren und nicht mit $\pi(x)$ [8]

[3] Siehe Kapitel 3.4

## 3.2 Integral Logarithmus

Wird er mit li(x) angeschrieben, so meint man das Integral von 0 bis $\infty$, aber in diesem Kontext wird hauptsächlich die Form Li(x) gebraucht.

$$Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log(u)} du$$

Ergibt sich ohne große Mühe aus $Li(x) = li(x) - li(2)$.
Der Zusammenhang zwischen $\frac{x}{\log(x)}$, nennen wir sie hier g(x), die ersten guten Annäherung von $\pi(x)$ und dem Integral-Logarithmus lässt sich mit der sogenannten asymptotischen Äquivalenz beschreiben, welche auch im nächsten Kapitel im Primzahlensatz eine große Rolle spielen wird. Diese schreibt sich folgendermaßen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log(x)}}{\int_2^x \frac{du}{\log(u)}} = 1$$

Dieser Grenzwert lässt sich mit der Regel von L'Hospital lösen. Aus dem Bruch der beiden Funktionen $\frac{g(x)}{Li(x)}$ wird der Bruch ihrer Ableitungen $\frac{g'(x)}{Li'(x)}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log(x)-1}{\log(x)^2}}{\frac{1}{\log(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log(x)}{\log(x)^2} - \frac{1}{\log(x)^2}}{\frac{1}{\log(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{\log(x)^2} * \log(x)$$

Somit bleibt nur mehr, was es zu zeigen galt:

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{\log(x)} = 1$$

## 3.3 Primzahlen-Satz

Der nun eingeführte Integral-Logarithmus bildet einen wichtigen Grundbaustein für Tschebysches Arbeit. Er wurde in dem zuvor erwähnten Brief von Gauss erstmals genannt, welcher seine asymptotische Äquivalenz zu $\pi(x)$ vermutete, aber noch nicht beweisen konnte. Er lässt sich auch in dieser Form schreiben:$\int_2^x \frac{du}{\log(u)}$ Die Annäherung aller Funktionen an $\pi(x)$ wird in dieser Form angegeben:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\pi(x)} = 1$$

Dieser Ausdruckt besagt, dass sofern das Argument gegen Unendlich strebt, die Werte des relativen Fehlers gegen 0 gehen. Dies ist die sogenannte asymptotische Äquivalenz und lässt sich mit $\sim$ abkürzen. Somit zur Definition und Hauptaussage des Primzahlensatzes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\log(x)}}{\pi(x)} = 1$$

Die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe ist asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\log(x)}$. Abgesehen von Euklids Beweis waren alle vorherigen Erkenntnisse innerhalb dieses Gebietes rein empirischer Natur. Tschebyscheff war der Nächste, der für konkrete Fortschritte in diesem Feld der Zahlentheorie sorgte.

## 3.4 Erste sichere Schritte

Nach Euklids Tod schafften es die folgenden Mathematiker nur Vermutungen aufzustellen, was sich mit Tschebyscheffs Arbeiten zu diesem Gebiet änderte. Seine Absicht bestand darin, den Primzahlen-Satz zu verifizieren, was ihm aber nicht gelang. Dennoch machte er bedeutende Fortschritte, indem er es nicht nur schaffte zu zeigen, dass, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log(x)}}{\pi(x)}$$

existiert, er den Wert 1 einnehmen muss, sondern auch, die untere und obere Grenze der Primzahlenfunktion ausfindig zu machen. Mit anderen Worten, zu beweisen, dass es zwei Konstanten $c_1, c_2$ gibt, sodass für alle $x > 2$

$$c_1 \frac{x}{\log(x)} < \frac{\frac{x}{\log(x)}}{\pi(x)} < c_2 \frac{x}{\log(x)}$$

Nun folgt eine verkürzte Beweisführung für die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = 1$$

Die Definition besagt

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x) - A(x)} \to A(x) = \log(x) - \frac{x}{\pi(x)}$$

$$= \frac{\log^2(x)}{x} \frac{x}{\pi(x)\log(x)} \left(\pi(x) - \frac{x}{\log(x)}\right).$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi(x)\log(x)} = 1$$

bleibt übrig

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x} \left(\pi(x) - \frac{x}{\log(x)}\right) = A$$

und mit der Subtraktion von

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x} \left(Li(x) - \frac{x}{\log(x)}\right) = 1$$

ist zu erkennen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x}\big(\pi(x) - Li(x)\big) = A - 1$$

Tschebyscheff konnte zuvor zeigen, dass

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log(u)}\right) \geq 0$$

und

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log(u)}\right) \leq 0.$$

[9]
Demnach war eindeutig, dass $0 = A - 1$ und somit

$$A = 1$$

ist. Wobei es sehr wichtig ist, zu berücksichtigen, dass dies nur unter der Annahme der Existenz des Gernzwertes gilt.[10]

## 3.5 Fehler der Annäherungen

Um den Unterschied zwischen den A=1 und A=1.08366 und A=0 zu illustrieren, habe ich ein kurzes Python-Script geschrieben, welches den Fehler berechnet. Je näher der y-Wert bei 1 liegt, desto genauer ist die Funktion.

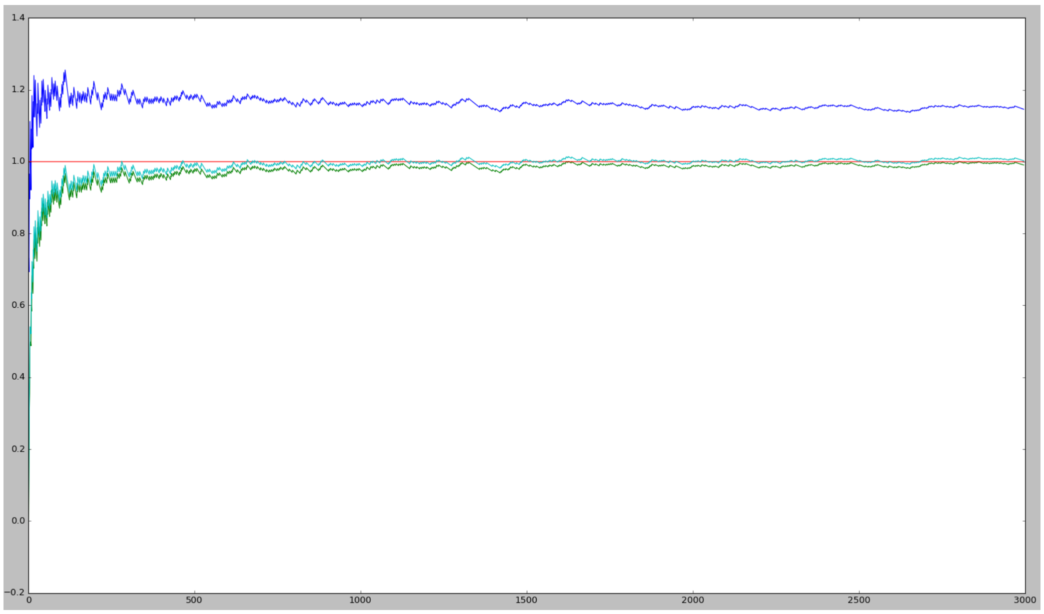


Abbildung 1: Blau: A=0, Türkis: A=1, Grün: A=1.08366 *

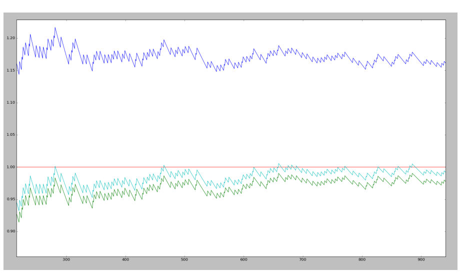

Abbildung 2: Vergrößerung *

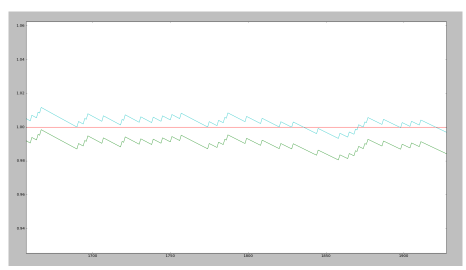

Abbildung 3: Vergrößerung *

Mit bloßem Auge ist zu erkennen, dass A=1 die genausten Ergebnisse liefert, was Tschebyscheff zufolge zu erwarten war.

# 4 Über die Zetafunktion

In diesem Kapitel wird die Zetafunktion[4] vorgestellt. Sie ist ein Spezialfall der Dirichlet-Reihen, bei welchen der Zähler der Zahl 1 entspricht. In den kommenden Kapiteln wird $\zeta$ den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden und maßgeblich für das Endresultat sein. Einige ihrer Eigenschaften, insbesondere die Verteilung ihrer Nullstellen, sind von großer Bedeutung für das Primzahlenproblem.
**Definition:** $\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\Re(s) \geq 1$
Wird die Rolle von s im Konvergenzverhalten betrachtet,

$$|x^s| = |e^{s*\log(x)}| = |e^{a*\log(x)}e^{bi*\log(x)}| = |e^{a*\log(x)}| = x^a$$

ist zu erkennen, dass $\Re(s)$ keinen Einfluss hat.[11]
Für $\Re(s) = 1$ ergibt Zeta die Harmonische Folge $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s}$ mit einer ganz klaren Tendenz zu $\infty$, divergiert also. Die Zetafunktion besitzt dank Bernhard Riemann eine analytische Weiterführung für x $>$1 mit einer Polstelle bei x=1 und gleichwertigem Residuum[5].
Die Gammafunktion $\Gamma$ wird hier eingeführt, da sie einen wichtigen Baustein der alternativen Darstellung von $\zeta$ bildet, deren Vorstellung der von Gamma folgt. Die Gammafunktion wurde als Erweiterung der Fakultät eingeführt, was abgesehen von ihren Polstellen, welche sich durch $e^{-t}$ ergeben, ihre wichtigste Eigenschaft ist.
**Definition:** $\Gamma : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$; mit $\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi * s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Diese Funktion wird oft in Beweisen rund um den Primzahlensatz benutzt, da es einfacher ist, mit ihr zu arbeiten als mit $\pi$. Ihr Zusammenhang mit der Anzahl der Primzahlen kleiner n ist durch das Euler-Produkt gegeben.

[4]Nimmt sie komplexe Argumente, so wird sie die Riemannsche Zetafunktion genannt
[5]Dient der Evaluierung des komplexen Integrals

## 4.1 Visualisierung komplexer Exponenten

Dies ist eines von mehreren Unterkapiteln, die Schritt für Schritt zur Visualisierung der Zetafunktion führen.
Um das Verhalten eines beliebigen Terms von $\zeta$ auf der komplexen Ebene zu verstehen, soll er hier, ähnlich wie es schon in der Einführung von der Zetafunktion der Fall war, in ein Produkt aufgeteilt werden.

$$\left(\frac{1}{n}\right)^a \left(\frac{1}{n}\right)^{bi}$$

Die unten aufgeführte Graphik dient dabei als Verständnishilfe.

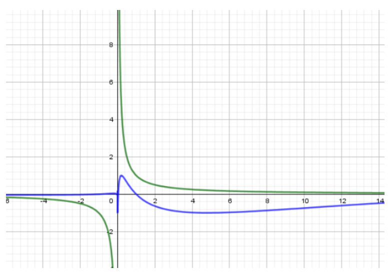

Abbildung 4: b=1 *

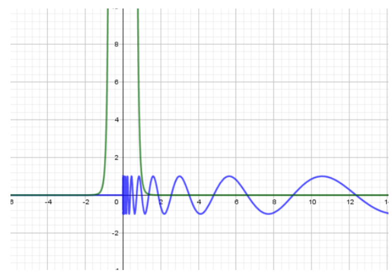

Abbildung 5: b=10 *

Der linke Teil wird lediglich ein Punkt auf der x-Achse der komplexen Ebene sein. Sein Pendant hingegen ist etwas komplexer. Diese Art der Darstellung komplexer Funktionen zeigt in grün den linken und in blau den rechten Teil von $(\frac{1}{n})^a(\frac{1}{n})^{bi}$. Der Wert der komplexen Funktion schwankt zwischen
-1 und 1 und die Freqeuenz nimmt, mit kleiner werdender Basis, ab. Dieses Schwanken zwischen -1 und 1 lässt sich interpretieren als eine Kreisbewegung entlang des Einheitskreises auf der komplexen Ebene. Die eulersche Relation zwischen Sinus Kosinus und $e$ erleichtert die Vorstellung: $r * e^{i*\psi}$ Somit ist der reelle Teil eine Gerade, die um einen Winkel rotiert wird. Wird nun bedacht, dass die Zeta Funktion aus unendlich vielen, immer kleiner werdenden Geraden und Winkeln besteht, jedoch konvergiert, so ist klar, dass jeder neue Term die Strecke verlängert und den Winkel vergrößert. Aufgrund des negativen Exponenten geschieht dies mit abnehmender Relevanz.

## 4.2 Primzahlen und $\zeta(s)$

Es folgt die Darstellung einer simplen und ausdrucksvollen Methode, die zeigt, wie Zeta und Primzahlen zueinander stehen. Zuvor wurde der Fundamentalsatz der Arithmetik erwähnt, welcher unter anderem die Existenz einer Primfaktorzerlegung für jede natürliche Zahl $> 1$ sowie ihre Einzigartigkeit garantiert. Wäre die Zahl eins prim, gäbe es unendlich viele Kombinationen, was der Einzigartigkeit würde. Bezüglich der Herangehensweise an dieses Problem wirft diese Regel bereits erste Ansätze auf.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + + \frac{1}{4^s} ...$$

Multipliziert man nun diese Folge mit der ersten Primzahl 2 und dem Exponenten -s

$$2^{-s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} ...$$

ermöglicht das diese Subtraktion:

$$\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} ... - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} ...\right)$$

Rechts lässt sich ein gemeinsamer Faktor herausheben und links eliminieren sich alle Vielfachen von 2

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} ...$$

Wiederholt man diesen Vorgang und multipliziert diesmal, mit der nächsten Primzahl 3 und somit dem Exponenten -s, wird es noch offensichtlicher.

$$3^{-s}\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} ...$$

Diesmal werden nur alle ungeraden Vielfachen von 3, welche teilerfremd zu 2 sind wegfallen. Die übliche Subtraktion

$$\zeta(s)(1-2^{-s}) - 3^{-s}\zeta(s)(1-2^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} ... - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} ...\right)$$

zeigt

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} ....$$

Wird dieser Vorgang unendlich oft mit allen Primzahlen, deren Unendlichkeit bereits gezeigt wurde, wiederholt, offenbart sich

$$\zeta(s)\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})=1\to\zeta(s)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{(1-p^{-s})}.$$

[12]
Dies ist das sogenannte Euler-Produkt. Für einen formaleren Beweis siehe [13].

## 4.3 Visualisierung von $\zeta(s)$ als Summenformel

Hier ist die Zeta-Funktion in $\mathbb{C}$ dargestellt. Jeweils ein komplexer Input s und ein komplexer Output y sind zu sehen.

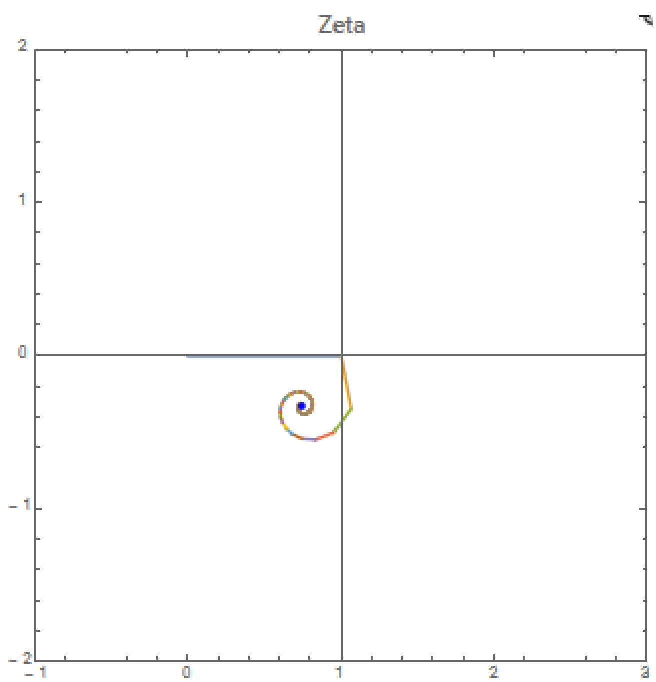


Abbildung 6: s=1.5+2i,500 Terme *

Der blaue Punkt y repräsentiert den Funktionswert. Eine Art Spirale führt vom Nullpunkt zu y. Diese Form ergibt sich aus der in Kapitel 4.1 erwähnten

Summierung der Strecken und deren Rotation um einen Winkel. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Länge, als auch die Drehung abnehmen, wie es von einem Kehrwert zu erwarten ist. Somit wird es teilweise sehr aufwändig, genaue Spiralen zu zeichnen. Durch diese Darstellungsform lässt sich auch die Divergenz bei $\Re(s) = 1$ visualisieren: Nähert sich nun der Realanteil 1,

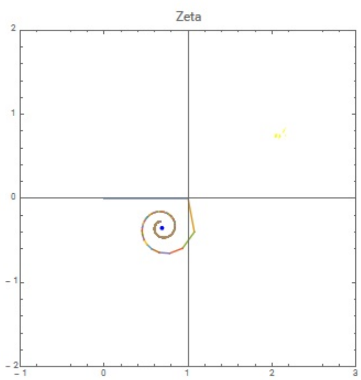


Abbildung 7: s=1.3+2i mit 500 Termen *

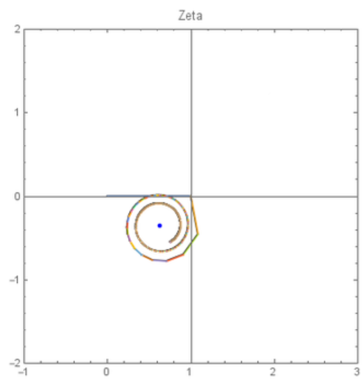


Abbildung 8: s=1.1+2i mit 2000 Termen *

so wird es immer umständlicher, die Spirale präzise zu zeichnen. 500 Terme links, beziehungsweise 2000 rechts reichen kaum aus. Die Divergenz von $\zeta$ wird hier deutlich, indem bei 1 die Spirale in einem Kreis um den y-Punkt endet.

## 4.4 Nullstellen

Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt zwei Arten von Nullstellen: triviale und nicht-triviale, wobei 'trivial' hier nur andeuten soll, dass man sie sehr wohl verstanden hat, und keineswegs meinen will, dass es sich hierbei um eine simple Angelegenheit handelt. In Riemanns Arbeit "Über die Anzahl von Primzahlen unter einer gegebenen Größe" führte er mit

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\zeta\left(s\right) = \pi^{-\frac{1}{2}1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta\left(1-s\right)$$

$\xi$, die vervollständigte Zeta-Funktion sowie eine Funktional-Gleichung ein. In jenem Beitrag zur Mathematik gelang es Bernhard Riemann ebenfalls zu zeigen, dass diese Gleichung sich zu $\xi(s) = \xi(1-s)$ reduzieren lässt.

**Definition:** $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; mit $\xi(z) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)$ und der Symmetrie $\xi(s) = \xi(1-s)$ mit der Symmetrie-Achse von $\Re(s) = 0.5$.
Diese Funktion behebt Probleme, wie die zuvor erwähnte Polstelle bei $\zeta(s)$ mit $\Re(s) = 1$, oder $\Gamma(s)$ mit $\Re(s) = 0$, welche die Gamma-Funktion mit sich gebracht hat.

- Triviale Nullstellen
  Die analytische Erweiterung von $\zeta$ ist ein Produkt und somit genügt es, wenn nur ein Faktor 0 entspricht, um zu zeigen, dass das Ergebnis 0 ist. Verantwortlich für die Nullstellen ist hier $\Gamma$, welche für $\Re(s) \leq -1$ bei $-1 * n$ Polstellen besitzt. Da $\zeta$ jedoch stets für den zuvor festgelegten Bereich konvergiert, muss $\zeta(s) = 0$ sein, was dort eine Nullstelle impliziert. Doch $\Gamma$ ist mit $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ angeschrieben, daher finden wir die Nullstellen nur bei $-2n$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

- Nicht-triviale Nullstellen
  In Anbetracht der Tatsache, dass für $\Re(s) > 1$ gilt $\zeta(s) \neq 0$ und der Symmetrie $\xi(s) = \xi(1-s)$ liegt es nahe, dass, abgesehen von den trivialen Nullstellen, für $\Re(s) < 0$ , $\zeta(s) \neq 0$ gilt. Mit anderen Worten: Nur auf der Ebene $0 < \Re(s) < 1$ können nicht-trivialen Nullstellen liegen, welche von nun an mit $\rho$ angesprochen werden. Diese Ebene wird von vielen Autoren als kritischer Streifen bezeichnet.
  In seinem Opus Summum untersucht Riemann, wie sich die Funktion $\xi$ für ein $\zeta$ von $s = \frac{1}{2}+ti$ verhält. Der Streifen $s = \frac{1}{2}+ti$ ist seither der einzige, auf dem es gelungen war, Nullstellen aufzuspüren, was empirisch dazu führte, dass man die Existenz von unendlich vielen Nullstellen auf dieser Gerade vermutet.
  Das Problem, jene Annahme zu beweisen, trägt den Namen Riemannsche Vermutung und ist bis heute nicht gelöst. Weiters wurde eine Formel für ihre Abzählung vorgeschlagen, deren Beweis von Mangoldt gelang. Sie könnte eine Rolle bei der Suche eines analytischen Ausdrucks für $\pi(x)$ von Nutzen sein.
  **Definition:** $N(t)$ asymptotisch äquivalent zu der Anzahl $\rho$ in
  $0 < t < T, T \in \mathbb{N}$ mit $t = \Im(s)$
  $$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}\big(\log(T)\big)$$
  [14]

[15]

## 4.5 Produktdarstellung von $\xi(s)$

Ähnlich wie bei Zeta lässt sich hier durch die Produktdarstellung ein Zusammenhang mit den Primzahlen herstellen. Zwecks Erlangens einer Produktdarstellung für $\xi$ wird etwas Theorie über ganze Funktionen, das sind Funktionen, die in $\mathbb{C}$ stets holomorph sind, angewandt. Unter holomorph wird verstanden, dass eine Funktion an jeder Stelle beliebig oft-komplex differenzierbar ist, und sich als komplexe Potenzreihe schreiben lässt.
Eine Funktion F(z) ist von endlicher Ordnung, wenn es $a, b > 0$ gibt, sodass $|f(z)| \leq exp(|z^a|)$ für alle $|z| > r$ oder $f(z) = \mathcal{O}\big(e^{|z|^a}\big)$, wobei die Ordnung F, der niedrigste Häufungswert für a bei der die Ungleichung erfüllt ist, also $\inf\{a|F(z) = \mathcal{O}\big(e^{|z|^a}\big)\}$.
Zeta ist von der Ordnung 1. Es stellt sich heraus, dass für ein ausreichend großes $|s|$, sich $\xi$ zu $e^{C|s|\log(|s|)})$ asymptotisch äquivalent verhält, für eine Konstante C, deren Hauptterm $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ist. Mithilfe der Stirlingformel, ziehe man in Betracht, dass $\Gamma$ die Erweiterung der Fakultät ist, lässt sich

$$\log\big(\Gamma(z)\big) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log(z) - z + \mathcal{O}(1)$$

ausdrücken. Somit gilt für jedes $n > 0$ von Ordnung 1

$$\xi(s) < e^{|s|<1+n}.$$

Da dies jetzt abgehandelt ist, lässt sich die von Haramard, einer der beiden Mathematiker, die zeitgleich den Beweis für den Primzahlensatz fanden, eingeführte Art der Faktorisierung anwenden. Sie besagt, dass sich jede ganze Funktion der Ordnung 1 mit einer Folge von Nullstellen $z_n$, wobei ein k-fache s Auftreten einer Nullstelle als k Nullstellen gilt, als ein Produkt der Form

$$f(z) = e^{A+Bz}\prod_{n\leq 1}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$$

für zwei Konstanten A, B schreiben lässt. Somit schreibt sich $\xi$ als

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{n\leq 1}\left(1 - \frac{s}{p}\right)e^{s/p}$$

Dies zeigt eine weitere Beziehung zwischen den Primzahlen und den nichttrivialen Nullstellen. A und B lassen sich berechnen. Für A genügt es, $\xi(0)$

zu nehmen, was $e^A = \xi(0)$ und dank der Symmetrie auch $\xi(1)$ entspricht. In Anbetracht der Funktionalgleichung ergibt dies für

$$A = \frac{1}{2}.$$

Der Wert von B, welchen man durch die logarithmische Ableitung erhält, wird, ob seiner mangelnden Relevanz im Verhältnis zu seiner Länge, hier nicht aufgeführt, ist dennoch in dem Literaturverweis zu finden.

$$B = -\frac{1}{2}\gamma - 1 + \frac{1}{2}\log(\pi)$$

wobei $\gamma$ die Eulersche-Mascheroni Konstante darstellt. [16]

## 4.6 Weiterer Zusammenhang zwischen Primzahlen und $\zeta(s)$

Zuerst zwei Definitionen von Funktionen, die mit dem Primzahlensatz zusammenhängen.

**Definition:** $\Lambda(x) = \begin{cases} log(p) & \text{wenn n eine Potenz einer Primzahl ist} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$

**Definition:** $\psi(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; mit $\psi(x) := \sum_{p^n \leq x} \log(p)$ für $x > \ 0$

Aus den beiden Definitionen folgt:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

In diesem Unterkapitel spielt die zuvor erwähnte logarithmische Ableitung von analytischen Funktionen eine wichtige Rolle. Werden auf Eulers Produktdarstellung die grundlegenden Rechenregeln des Logarithmus angewandt, so folgt durch das Umschreiben von Kehrwert zu negativem Exponenten -1 und dessen Vorziehen :

$$\log\big(\zeta(s)\big) = \log\left(\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{(1-p^{-s})}\right) = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \log(1-p^{-s})$$

Aus dem Logarithmus des Produktes wird die Summe der Logarithmen. Nun gibt die logarithmische Ableitung analytischer Funktionen vor

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \log(p)\left(\frac{1}{1-p^{-s}} - 1\right).$$

Diese geometrische Reihe lässt sich schreiben als

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \log(p) \sum_{n\geq 1}^{\infty} p^{-ns}.$$

Da sich die Summen umformen lassen, durch die zuvor eingeführten Funktionen, folgt, mit vertauschter Reihenfolge der Summen,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \Lambda(s) n^{-s}.$$

Hier lässt sich die zweite Funktion von Tschebyscheff in Form eines sogenannte Stieltjes-Integrals einbringen. Es bildet die Generalisierung des Riemannschen Integrals.[6] Tschebyscheff behauptet noch weiter:

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \Lambda(s) n^{-s} = \int_{1}^{\infty} x^{-s} d\psi(s)$$

Partielle Integration verläuft hier nach dem Schema:

$$\int_{a}^{b} f(x)dh(x) = f(b)h(b) - f(a)h(a) - \int_{a}^{b} h(x)df(x)$$

Daher

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = x^{-s}\psi(x)|_{\infty}^{1} - \int_{1}^{\infty} \psi(s)d(x^{-s}).$$

Wird bedacht, dass $\psi(x)$ von der Größenordnung $\mathcal{O}(x\log(x))$ ist und, dass $\psi(1) = 0$, so lässt sich diese Gleichung noch ein letztes Mal simplifizieren in

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s} = s\int_{1}^{\infty} x^{-s-1}\psi(s)dx.$$

Wieder einmal ist zu sehen, dass, wie in Eulers Produkt, die Zetafunktion den Primzahlen sehr nahe steht, somit rechtfertigt sich vor allem das Bestreben des nächsten Kapitels. Nun sind die Grundbausteine der Herleitung einer Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe gelegt. [17]

[6] Ermittlung der Fläche unter eine Kurve durch Annäherungen einer Treppenfunktion von Obersummen und Untersummen

# 5 Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Jetzt, da der Zusammenhang zwischen der Zetafunktion und den Primzahlen zweifelsfrei besteht, werden Bemühungen unternommen, einen analytischen Ausdruck für die Primzahlen-Zählfunktion durch $\zeta$, insbesondere ihre Nullstellen zu finden. Um dieses Vorhaben zu erfüllen, wird eine von Riemann in seiner bedeutenden Arbeit erstmals erwähnte Funktion eingeführt. Diese soll mit J(x), so wie sie Harold M. Edwards in seinem Buch[7] über die Zetafunktion erstmals nannte, angesprochen werden.

## 5.1 J(x)

**Definition:** $J(x) := \frac{1}{2}\left(\sum_{p^n<x}\frac{1}{n} + \sum_{p^n\leq x}\frac{1}{n}\right)$
J(x) funktioniert folgendermaßen: Entspricht das Argument einer Primzahl mit einer natürlichen Potenz $n \leq 1$ als Exponent, so erhöht sich ihr Wert um $1/1^n$. Da J(x) ebenfalls eine stufenartige Natur aufweist, eignet sie sich ausgezeichnet für Riemanns Vorhaben. J(x) wurde von Riemann eingeführt um die Identität

$$\log(\zeta(s)) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n}\right)p^{-ns}\right)$$

zusammen mit der Tylor-Reihe von $\log(1-x) = -x-(1/2)x^2-(1/3)x^3..$, welche aus dem Logarithmus des Euler-Produkts stammt, in dieser Integralform zu schreiben.

$$\log(\zeta(s)) = s\int_0^\infty J(x)x^{s-1}dx$$

[18]
Riemanns Umschreiben dieser Formel ermöglicht die Anwendung der Fourier-Inversion. Dieser Prozess resultiert in

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\log\big(\zeta(s)\big)x^s\frac{d}{ds} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\log\big(\zeta(s)\big)x^s\frac{d}{ds}, a > 1.$$

[7] Siehe Literaturverzeichnis: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Nun bemühte sich Riemann um eine Version dieser Formel, welche einfacher zu evaluieren ist. Aus diesem Grund machte er Gebrauch von den Rechenregeln des Logarithmus sowie den Formeln:

$$\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)\text{und } \xi(s) = \xi(0)\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{s}{p}\right)$$

Daraus entsprang

$$\log\big(\zeta(s)\big) = \log\big(\xi(s)\big) - \log\ \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right) + \frac{s}{2}\log(\pi) - \log(s-1)$$

$$= \log\big(\xi(0)\big)\sum_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{s}{p}\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{s}{2}\log(\pi) - \log(s-1)$$

Dieser Schritt ist essenziell für das Hauptresultat von Riemanns Arbeit, nämlich die explizite Darstellung für $\pi(x)$. Nun wird dieser Ausdruck für Zeta in der Formel von J(x) substituiert, doch es erwies sich als nützlich, zuvor J(x) partiell zu integrieren, um ein divergentes Integral zu vermeiden.

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right)x^s ds$$

Da die Integrale endlicher Summen den Summen der Integrale entsprechen, sofern sie konvergieren, führt diese Substitution dazu, dass J(x) aus 5 Termen besteht, von denen das Verhalten von J(x) abhängt. [19]

## 5.2 5 Terme von J(x)

Dieses Kapitel ist ergebnisorientiert und soll einen Überblick über die Herleitung verschaffen. Es wird sich nicht zu detailliert mit jedem der Terme auseinandersetzen. Der erste der 5 Terme stammt von $\frac{s}{2}\log(\pi)$:

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log\xi(0)}{s}\right)x^s ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\log\xi(0)}{s}x^s ds = \xi(0)$$

Aus den Eigenschaften folgt, dass er keine wichtige Rolle spielt

$$\xi(0) = \log(2).$$

Der zweite Term[8]

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sum_\rho \log(1-\frac{s}{p})}{s}\right)x^s ds$$

enthält die Verbindung zwischen Li(x) und J(x), welche sich durch das Ausrechnen des Kurvenintegrals offenbart in Form von

$$-\sum_{\Im(\rho)>0}\left(Li(x)^\rho + Li(x^{\frac{1}{2}-\rho}\right).$$

Der dritte Term

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{-\log(\Gamma(s/2)}{s}\right)x^s ds$$

mit

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)+\frac{s}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

und termweiser Integration lässt sich dieser zu

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)*\log(t)}$$

reduzieren.

[8] Zu beachten ist, dass eine gewisse Verwechslungsgefahr zwischen p der Primzahl und $\rho$ der Nullstelle auf der kritischen Gerade besteht.

Der vierte Term fällt komplett weg, da

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{(s/2\pi)}{s}\right)x^s ds = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log(\pi)}{2}\right)x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}0x^s ds = 0.$$

Der fünfte Term

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log(x)}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{-\log(s-1)}{s}\right)x^s ds = Li(x)$$

ist der Hauptterm und ist gleich dem Integral-Logarithmus. Da jetzt alle Teile des Puzzles vorhanden sind, fehlt nur noch das Zusammenlegen.[20]

## 5.3 Analytische Formel für J(x) und somit für $\pi(x)$

Die Vereinigung der Terme[9] führt zu einer analytischen Formel für J(x), nämlich, für x > 1

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\Im(\rho)>0} \left(Li(x^{\rho} - x^{1-\rho})\right) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log(t)} + \log\left(\xi(0)\right).$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun mit $\pi(x)$ in Zusammenhang bringen, indem bedacht wird, dass in Betracht der ursprünglichen Formel für J(x) die Terme, welche sich über Primzahlen spannen, sich durch Variationen von $\pi(x)$ ersetzen lassen. So ist die Anzahl der Primzahlen-Quadrate kleiner x gleich der Anzahl der Primzahlen kleiner als $x^{\frac{1}{2}}$. Generalisierbar wie diese Eigenschaft für einen beliebigen Exponenten n ist, so lässt sich J(x) schreiben als

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{4}\pi(x^{\frac{1}{4}})... + \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}})... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}).$$

Es stellt sich heraus, dass man auf diesen Ausdruck die Möbius-Inversion anwenden kann. Daher wird nun die dafür benötigte Möbius-Funktion vorgestellt.

**Definition:** $\mu(x) := \begin{cases} (-1)^k & \text{wenn n quadratfrei und gerade} \\ -1 & \text{wenn n quadratfrei und ungerade} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$

Die Inversion läuft nach diesem Schema ab: Gegeben sind zwei Funktionen, welche natürliche Argumente verlangen und einen komplexen Funktionswert annehmen. Eine der beiden, f, soll zahlentheoretischer Natur sein, während die andere, F, eine summatorische Funktion nach $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ sein muss. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist es möglich

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{d}{n}\right) = \sum_{n|d} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

anzuwenden. Daraus folgt für $\pi$ die Reihe

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}J(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}J(x^{\frac{1}{4}})... - \frac{\mu(x)}{n}J(x^{\frac{1}{n}})... = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}J(x^{\frac{1}{n}})$$

[9] $\log(\xi(0))$ kann, wie schon erwähnt, einfachheitshalber als $\log(2)$ angeschrieben werden.

Um all das zu einem Schluss zu führen, wird J(x) mit der, am Anfang des Kapitels eingeführten, analytischen Formel ersetzt. Die daraus resultierende Formel für $\pi(x)$ besteht aus drei Arten von Termen, welche alle ein unterschiedliches Wachstumsverhalten aufweisen.

$$\xi(0) \text{ sowie } \int_x^\infty \frac{dt}{t/t^2 - 1)\log(t)}$$

enthalten kein x und wachsen daher nicht in Abhängigkeit des Argumentes.

$$\sum \left(Li(x^\rho - x^{1-\rho})\right)$$

Wächst mit x, wechselt jedoch oft Vorzeichen und löscht sich manchmal selbst aus. Deshalb, und weil dieser Ausdruck schwierig zu evaluieren war, strich Riemann ihn von seiner Formel.

$Li(x)$ wächst direkt proportional zu x und hat keine oszillierenden Vorzeichen. Riemanns Vorschlag sah nun so aus:[10]

$$\pi(x) = Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{4}})... = Li(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{1/n})$$

Die Funktion wird in der modernen Mathematik die Riemannsche Primzahlen-Zählfunktion genannt und mit R(x) oder manchmal als Ri(x) angeschrieben. Des Weiteren ist zu erkennen, dass, wenn nur der Hauptterm von Ri(x) betrachtet wird, die Annäherung für $\pi(x)$ welche Gauss fand, nämlich

$$\pi(x) \sim \int_2^\infty \frac{dt}{\log(t)} = Li(x) - Li(2) \approx Li(x) - 1.04,$$

der von Riemann sehr stark ähnelt. [21]

[10] '=' wurde zwar von Riemann benutzt, sollte aber, wie es in der modernen Literatur auch gebraucht ist als' $\simeq$' gesehen werden.

# 6 Schluss: Riemannsche Primzahlen-Zählfunktion

Sowohl der mathematische als auch der inhaltliche Höhepunkt der Arbeit wurden bereits erreicht. Um nochmals die wichtigsten Erkenntnisse zusammenzufassen: Die Verteilung der Primzahlen lässt sich bis heute nicht exakt bestimmen. Als größte Hoffnung gilt immer noch der Beweis der Riemannschen Vermutung, da Riemann einen Zusammenhang zwischen der Zetafunktion und den Primzahlen durch J(x) und der Möbius-Inversion aufstellte. Die Zetafunktion enthält die Folge aller natürlichen Zahlen, so ist es eventuell möglich, dass, weil jede natürliche Zahl aus Primfaktoren besteht, aus ihr die notwendige Information für die Lösung dieses Problems extrahiert werden kann.
Zur Abrundung der Arbeit wird nun Ri(x) etwas behandelt.

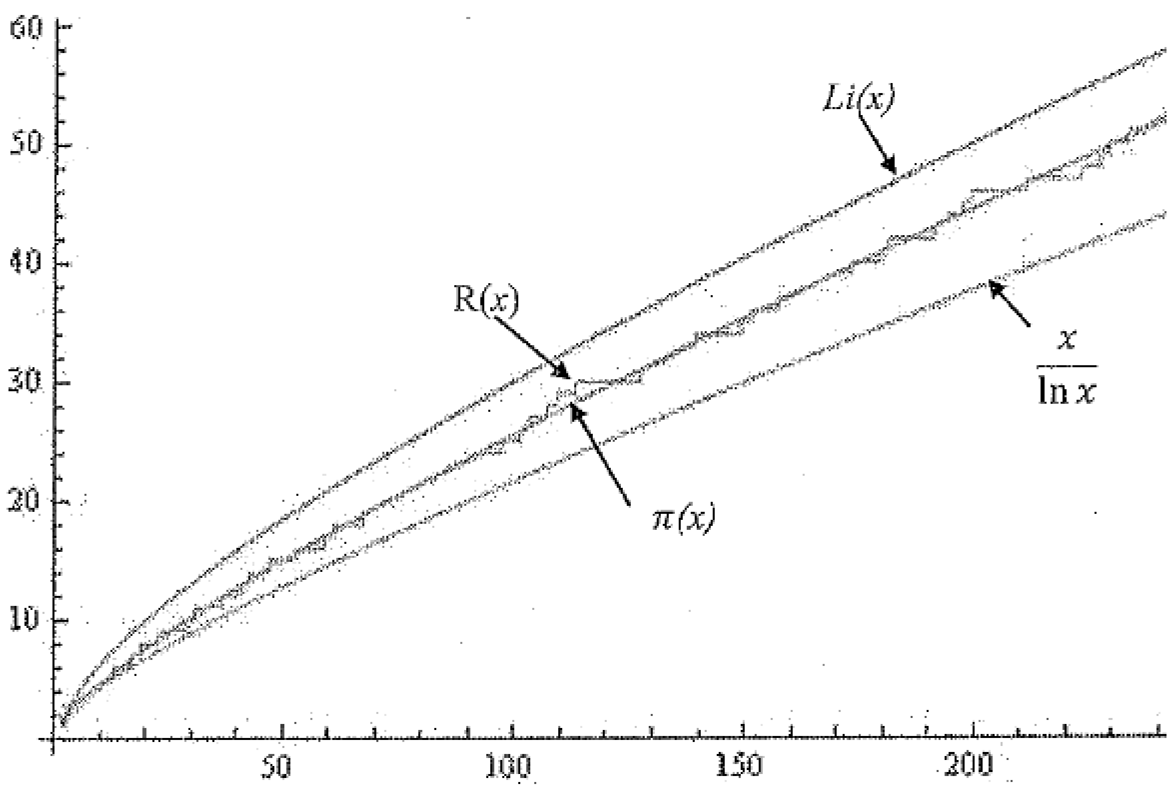


Abbildung 9: Vergleich der Annäherungen [22]

Abbildung 9 vermag ganz klar zu zeigen, als wie präzise Riemanns Formel

sich herausstellte. Sie übertrumpfte alle vorherigen Versuche.
Um die Überlegenheit von Ri(x) über Li(x) zu demonstrieren, werden nun zwei, mit Mathematica hergestellte, Illustrationen der absoluten Änderung gezeigt.

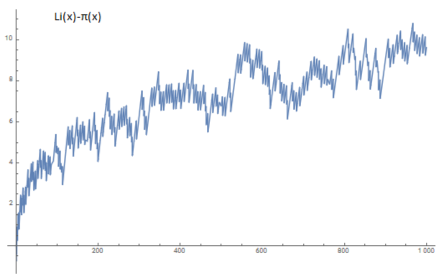


Abbildung 10: Zeigt wie Li(x) viel zu groß ist *

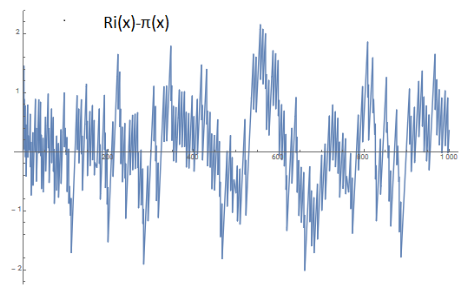


Abbildung 11: Ri(x) bleibt immer in der nähern Umgebung *

Das charakteristische Überschreiten und Unterschreiten von Ri(x) wird in Abbildung 11 besonders deutlich und ergibt sich aus dem treppenförmigen Verhalten von $\pi(x)$.
Weiters stellte Bernhard Riemann in seiner Arbeit auch eine Formel für den relativen Fehler auf, welchen Ri(x) aufweist.
Er bestimmte für den Fehler[11] folgende Schranke:

$$\pi(x) - Li(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li\left(x^{(1/n)}\right) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho} Li\left(x^{\rho/n}\right)$$

Diese Formel gilt nur unter der Annahme der Riemannschen Vermutung. Im Jahre 1901 gelang es Helge von Koch mittels Riemanns Formel zu beweisen, dass:

$$\pi(x) - Li(x) = \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\log(x)\right)$$

Dies gibt Auskunft über die Genauigkeit von $Li(x)$ zu $\pi(x)$ und besagt, dass die Annäherung bis auf die Quadratwurzel hin genau ist. Damit lässt sich eventuell die Form von $Li(x) - \pi(x)$ erklären, die einer Wurzelfunktion ähnlich sieht. Aus der Formel ist direkt die Riemannsche Vermutung ableitbar.

[11] '$\simeq$' hier weil hier auf der linke Seite, wie so oft, kleinere Terme fehlen.

# Literatur


[1] Rainer Schulze-Pillot. *Elementare Algebra und Zahlentheorie*. Springer, 2007. Kap. Teilbarkeit und Primzahlen, S. 32.

[2] Janko Böhm. *Grundlagen Der Algebra Und Zahlentheorie*. Springer Spektrum, 2016, S. 243.

[3] Julian Söhngen. "Primzahltests mit elliptischen Kurven". Magisterarb. Universität Duisburg-Essen, Campus Essen Fakultät für Mathematik, 2017, S. 4.

[4] Yitang Zhang. "Bounded Gaps Between Primes". In: *Annals of Mathematics* (2013), S. 1.

[5] Janko Böhm. *Grundlagen Der Algebra Und Zahlentheorie*. Springer Spektrum, 2016, S. 243–245.

[6] Edmund Landau. *Handbuch Von Der Lehre Von Der Verteilung Der Primzahlen*. B.G.Teubner, 1909. Kap. Entwicklung vor Hamard, S. 4–6.

[7] Don Zagier. "Die ersten 50 Millionen Primzahlen". In: *Elemente der Mathematik* (2017), S. 7.

[8] Carl Friedrich Gauss. *Carl Friedrich Gauss Werke*. Königliche Gesellschaft Der Wissenschaften zu Göttigen, 1863, S. 455–458.

[9] Edmund Landau. *Handbuch Von Der Lehre Von Der Verteilung Der Primzahlen*. B.G.Teubner, 1909. Kap. Entwicklung vor Hamard, S. 13–16.

[10] Edmund Landau. *Handbuch Von Der Lehre Von Der Verteilung Der Primzahlen*. B.G.Teubner, 1909. Kap. Entwicklung vor Hamard, S. 17–18.

[11] Nicls Gleining. "On the crit strip of the Riemann zeta-function". Magisterarb. Universitat Autonoma De Barcelona, 2014, S. 4.

[12] Carl Erickson. *Prime Numbers And The Riemann Hypothesis*. Imperial College London, 2013, S. 2–3.

[13] Ben Riffer-Reinert. *The Zeta Funciton And Its Relation To The Prime Number Theorem*, S. 2–4.

[14] Bernhard Riemann. "Über Die Anzahl Der Primzahlen Unter Einer Gegebenen Größe". Magisterarb. Berliner Akademie, 1859, S. 3–4.

[15] Lorenzo Menici. “Zeros Of the Riemann Zeta-Function On The Critcal Line”. Magisterarb. Universita degli Studi Roma Tre, 2012, S. 3.

[16] Lorenzo Menici. “Zeros Of the Riemann Zeta-Function On The Critcal Line”. Magisterarb. Universita degli Studi Roma Tre, 2012, S. 6–8.

[17] Mingrui Xu. *Riemann Zeta Funciton and Prime Number Distrubtionn.* 2004, S. 8.

[18] Harold Mortimer Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications INC, 1974, S. 22.

[19] Harold Mortimer Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications INC, 1974, S. 23–24.

[20] Mingrui Xu. *Riemann Zeta Funciton and Prime Number Distrubtionn.* 2004, S. 12–16.

[21] Harold Mortimer Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications INC, 1974, S. 32–35.

[22] Trang Ha. “The Prime Number Theorem and Its Connection with the Riemann Hypothesis”. Diss. Wittenberg University, S. 17.

# Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.