# 微分方程数值解第十三周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 6 月 10 日

## 1　用 $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ 和 Richadson 格式解抛物型方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f, x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

$$f(t,x) = \sin \pi x e^{-\pi^2 t}$$

解. 下图是显示/隐式/Crank-Nicolson 格式 $(\theta = 0, 1, 1/2)$ 的结果:

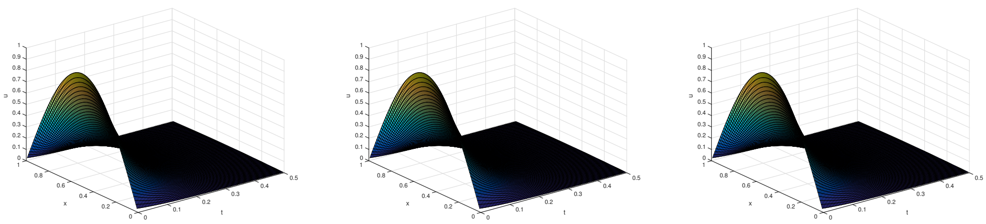

图 1: 时间空间 100 等分采样

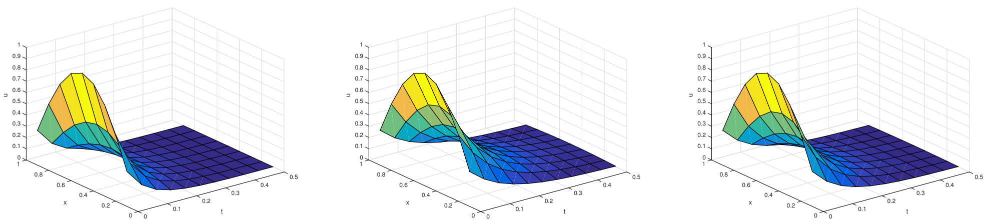

图 2: 时间空间 10 等分采样

做 Richardson 格式的时候要注意第一步在时间方向上用二阶方法 (这里用了 Runge-Kutta 方法) 以防污染算法. 然而 Richardson 格式并不收敛 (参看课本 200 页的稳定性分析).

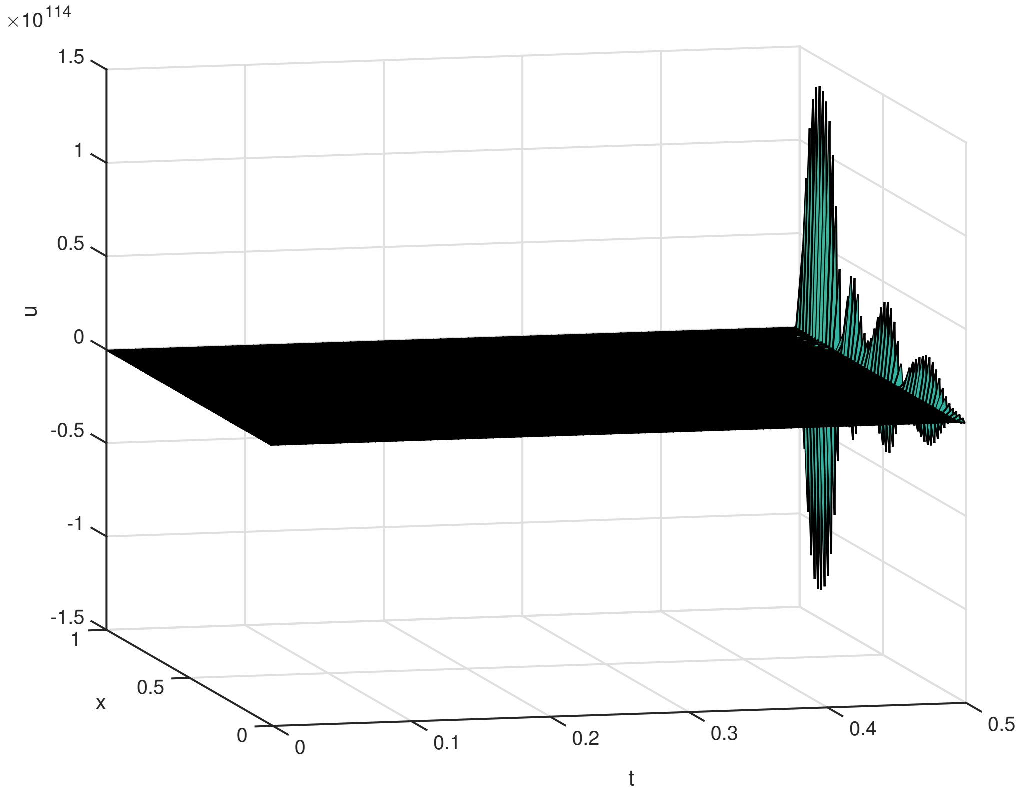


图 3: Richardson 格式

收敛情况分析:

显式/隐式格式时间一阶, 空间二阶,Crank-Nicolson 格式时间空间都 2 阶.

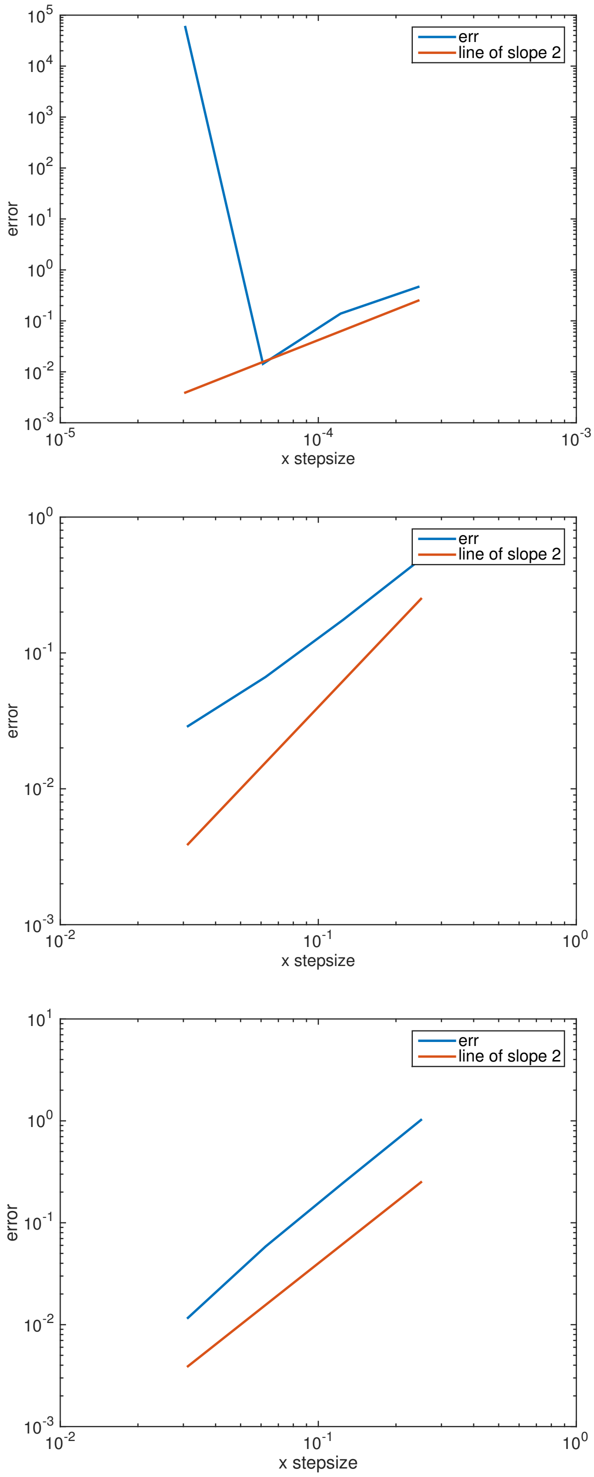


图 4: 空间收敛阶

注: 对于显式格式 $(\theta = 0)$, 稳定条件为 $r = \frac{a\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, 不稳定时误差-步长图不符合理论收敛阶.

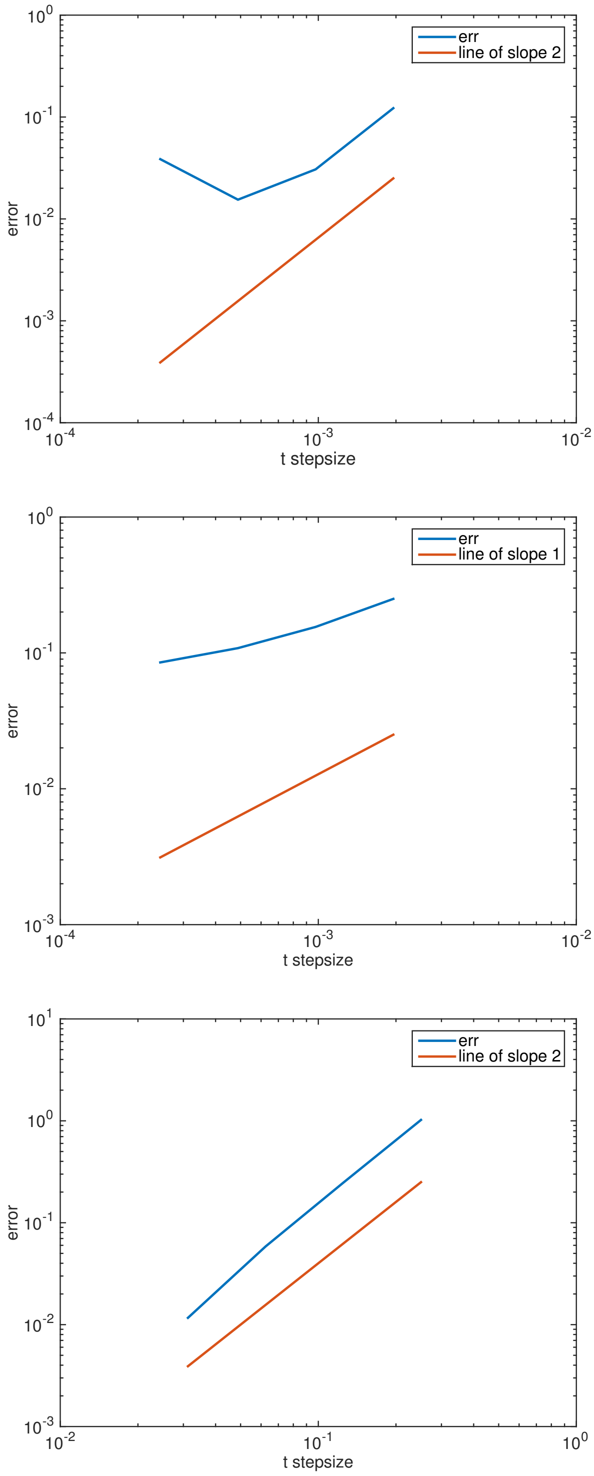


图 5: 时间收敛阶

注: 对于显式格式 $(\theta = 0)$, 稳定条件为 $r = \frac{a\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, 不稳定时误差-步长图不符合理论收敛阶. $\square$

## 2 求抛物型方程 Richardson 格式的截断误差

解. Richardson 格式 (空间欧拉格式 (中心差商), 时间中心差商):

$$\frac{u_n^{i+1}-u_n^{i-1}}{2\tau}=a\Delta_h u_n^i+f_n^i$$

截断误差

$$\begin{aligned}R_i^n=&\frac{u(t_{n+1},x_i)-u(t_{n-1},x_i)}{2\tau}-a\Delta_h u(t_{n+1},x_i)-f(t_n,x_i)\\=&\frac{\partial u}{\partial t}u(t_n,x_i)+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}u((t_n,x_i))-\frac{\partial u}{\partial t}u(t_n,x_i)+o(\tau^4)\\&+a\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}u(t_n,x_i)+0h^3+o(h^4)\\=&O(\tau^2+h^2)\end{aligned}$$

□

## 3 相关代码

### 3.1 抛物型方程的差分方法

```
function [u,xaxis,taxis,err] = Ch4_fd1dheat(theta,a,T,X,f,u0,M,N,u_precise,
    plt)
%solve u_t - a u_xx = f, t=0: u=u0
%with finite difference \theta formula

%set parameters
if nargin < 1
theta=1/2;
end
if nargin < 2
a=1;
end
if nargin < 3
T=.5;
end
if nargin < 4
X=1;
end
if nargin < 5
f=@(t,x)t-t;
end
if nargin < 6
u0=@(x)sin(pi*x);
end
```

```
if nargin < 7
M=10;
end
if nargin < 8
N=10;
end
if nargin < 9
u_precise=@(t,x)sin(pi*x).*exp(-pi^2*t);
end
if nargin < 10
plt=1;
end

tau=T/M;
h=X/N;
u=zeros(N-1,M);
xaxis=h:h:X-h;
taxis=0:tau:T;
[tgrid xgrid]=meshgrid(taxis,xaxis);
u(:,1)=u0(xaxis);
F=f(tgrid,xgrid);
e=ones(N-1,1);
D=spdiags([e -2*e e],-1:1,N-1,N-1)/(h^2);
I=speye(N-1);
% f0(1)=f0(1)+0;%dirichlet bd of 0
% f0(1)=f0(end)+0;%dirichlet bd of 0

if theta==0
for i=1:M
u(:,i+1)=(I+a*tau*D)*u(:,i)+tau*F(:,i);
end
else
for i=1:M
A=(I-theta*a*tau*D);
b=(I+(1-theta)*a*tau*D)*u(:,i)+tau*(theta*F(:,i+1)+(1-theta)*F(:,i));
u(:,i+1)=A\b;
end
end
uprecise=u_precise(tgrid,xgrid);
err=norm((u(:,end)-uprecise(:,end))./uprecise(:,end),2)
if(plt)
surf(taxis,xaxis,u);
%surf(taxis,xaxis,u_precise(tgrid,xgrid));
zlabel('u');
xlabel('t');
ylabel('x');
```

```
setfigure;
end
end
```

### 3.2 中心差商的第一步处理

```
%use some 2nd order method(e.g. Runge-Kutta) to compute the first t step
%(in order not to pollute the algorithm):
F1=f(tzero,xaxis);
u(:,2)=(I+tau*a*D)*u(:,1)+.5*tau*(F1+f(dt,xaxis+tau*F1))';
```