微分方程数值解第十四周作业

傅长青　　13300180003

2017 年 6 月 17 日

1　Leap Frog 格式的截断误差和数值稳定性

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\tau}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2h}=f_i^n$$

解. 截断误差

$$\begin{aligned}R_i^n=&\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\tau}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2h}-\frac{\partial}{\partial t}u_i^n-c\frac{\partial}{\partial x}u_i^n\\=&\frac{1}{6}\tau^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}u_i^n+ch^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_i^n+o(\tau^2+h^2)\end{aligned}$$

截断误差关于 h 是 2 阶的, 关于 τ 是 2 阶的.

Von Neumann 估计: 令 $u_i^n=g(n)e^{i\omega x_i}$ 设 $u(t)$ 的 Discrete Fourier Transform 为 $g(n)$, 则

$$g(n+1)e^{i\omega x}=g(n-1)e^{i\omega x}-rg(n)(e^{i\omega(x+h)}+e^{i\omega(x-h)})$$

消去 $e^{i\omega h}$

$$g(n+1)=Tg(n)=(T^{-1}+2y)g(n)$$

其中 $y=ir\sin\omega h$. 故算子 T 满足

$$(T-y)^2=1+y^2$$

或作

$$T=ir\sin\omega h\pm\sqrt{1-r^2\sin^2\omega h}$$

取范数,

$$\|T\|\leqslant 1$$

所以跳蛙格式是稳定的.

□

2 对流方程 $u_t - cu_x = f$, 取 $f = 0, c = 1$

解. 由于 $c \geqslant 0$, 用左偏格式 (关于 u_{n-1}, u_n). 不考虑边值条件 (一律取 0).

2.1 条件 1

$$u^0(x) = \begin{cases} 4\left(x - \frac{1}{4}\right) & , x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 4\left(\frac{3}{4} - x\right) & , x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

2.1.1 $r = 1$

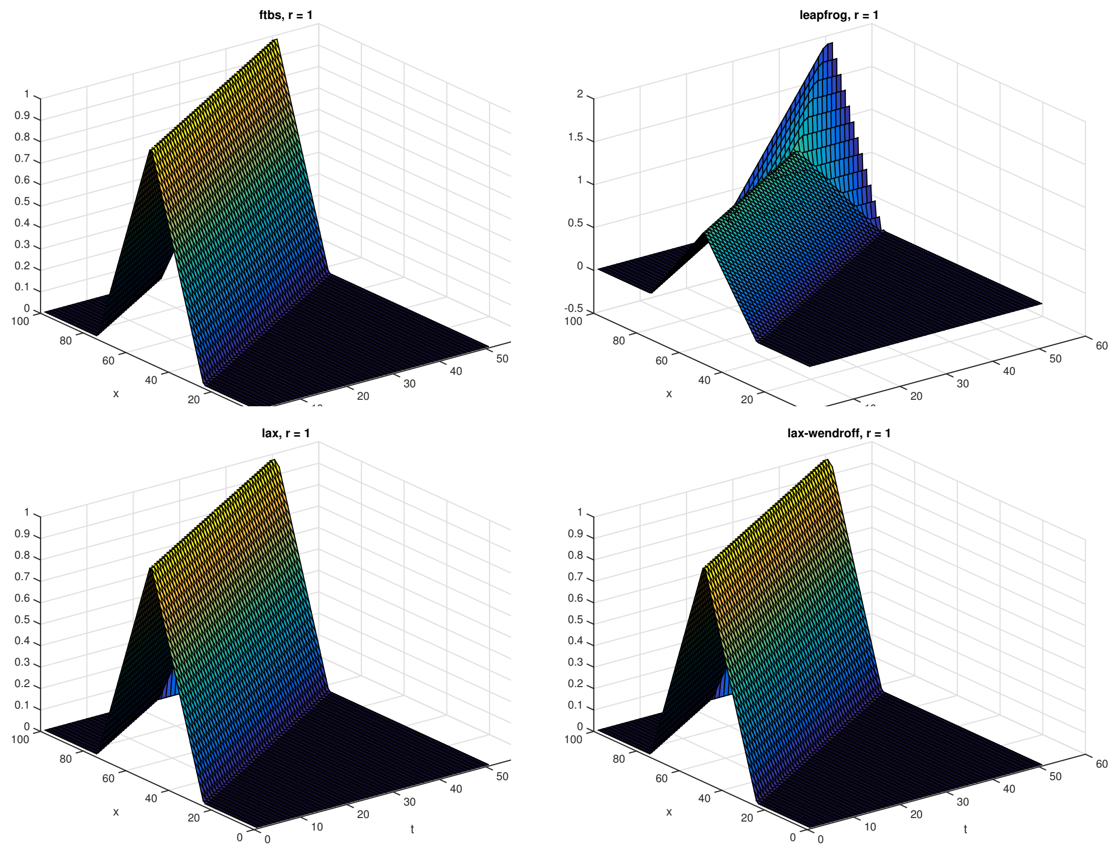

图 1: r=1

- 空间等分 100 份, 网比 $r = \frac{c\tau}{h} = 1$. 图中固定 t 的横截面为 t 时刻的波形图.
- 到达边界的时候跳蛙格式会在边界点累加 (只要修正一下边界的格式即可).

2.1.2 $r = \frac{1}{2}$

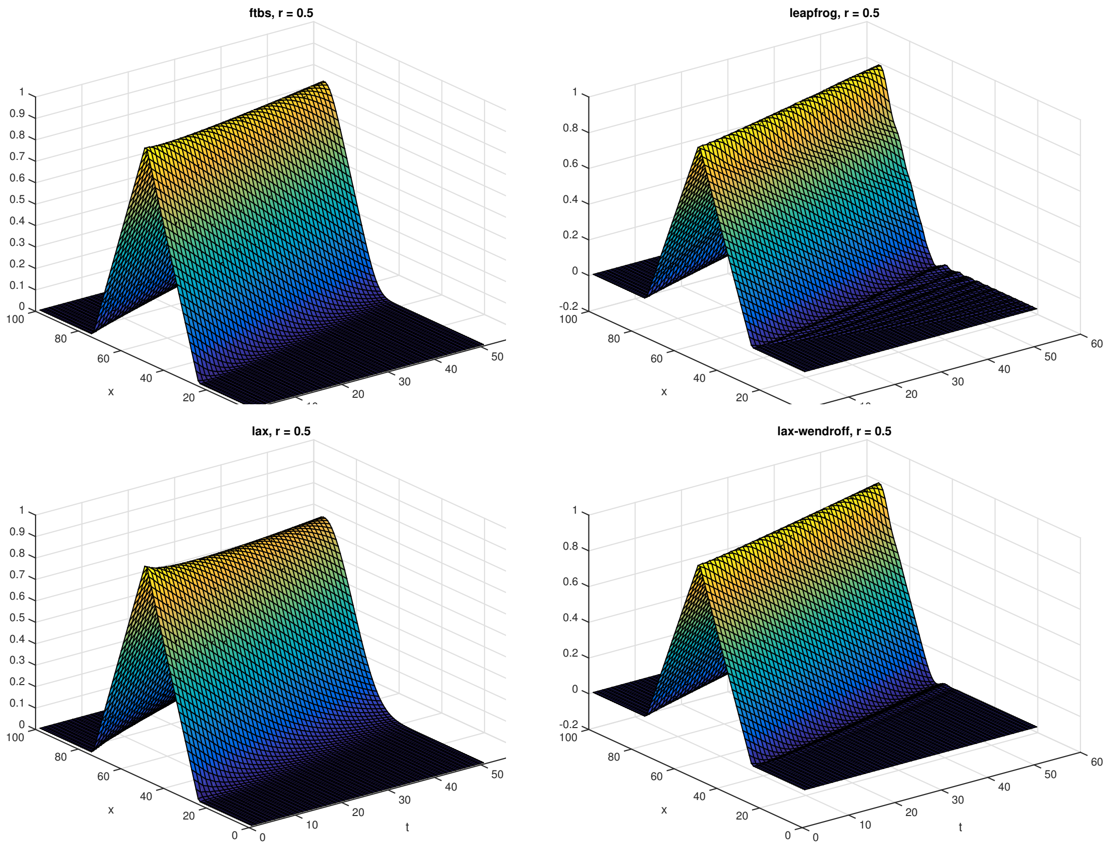

图 2: r=$\frac{1}{2}$

- 空间同样等分 100 份, 网比 $r = \frac{c\tau}{h} = \frac{1}{2}$.
- lax 格式由于多一个二阶项, 存在耗散现象.
- Lax-wendroff 格式存在过冲现象.

2.2　条件 2

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

2.2.1　$r = 1$

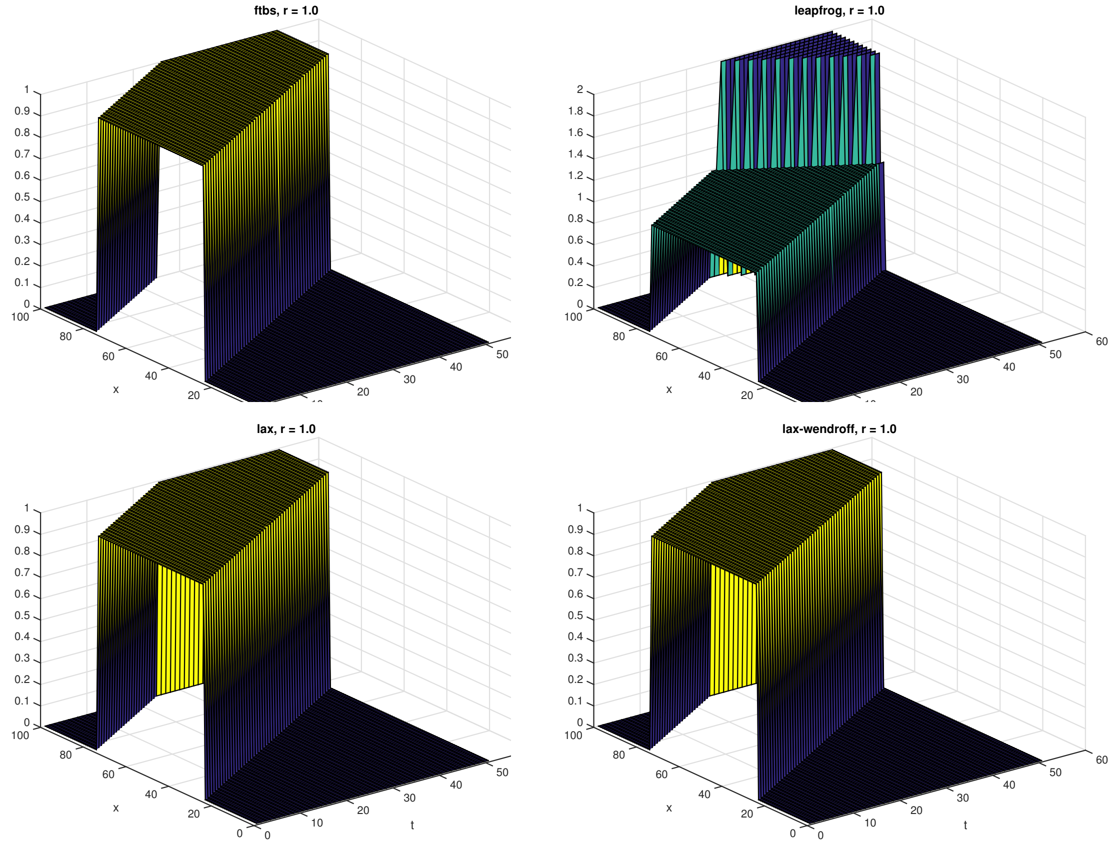

图 3: r=1

- 空间等分 100 份, 网比 $r = \frac{c\tau}{h} = 1$. 图中固定 t 的横截面为 t 时刻的波形图.

2.2.2 $r = \frac{1}{2}$

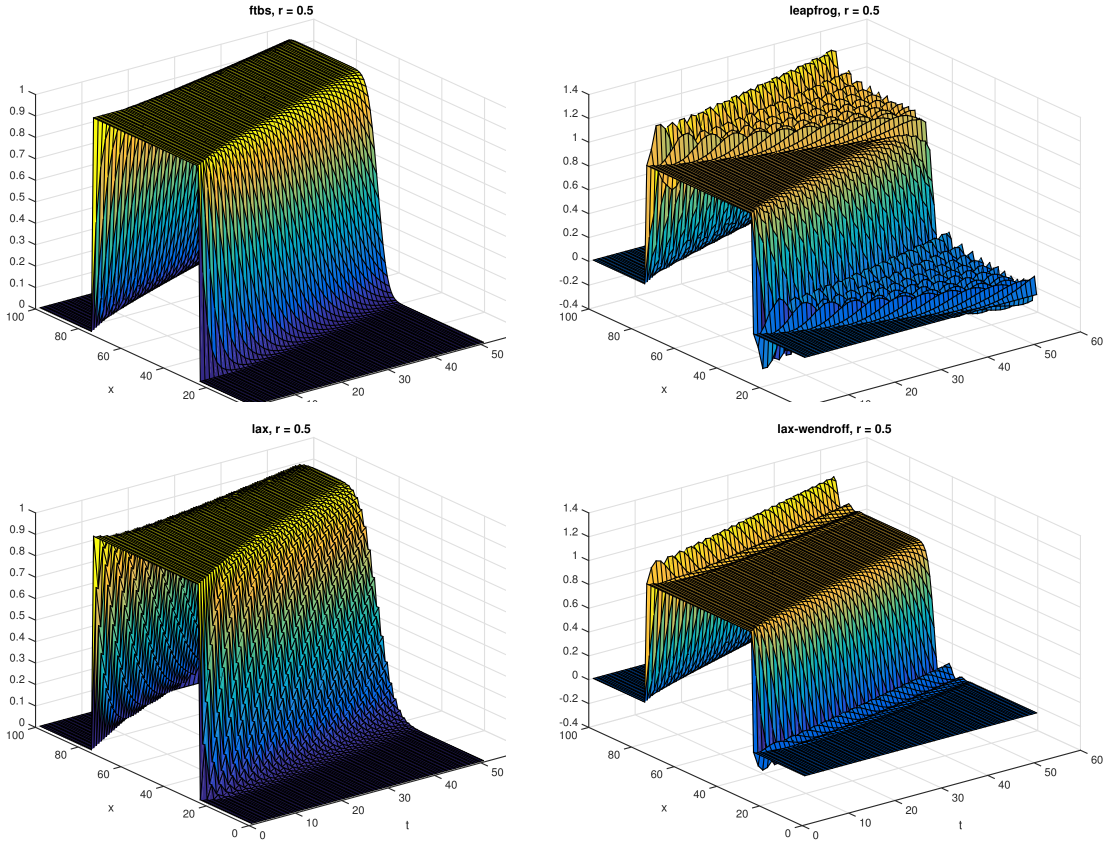

图 4: r=$\frac{1}{2}$

- 空间同样等分 100 份, 网比 $r = \frac{c\tau}{h} = \frac{1}{2}$.
- lax 格式由于多一个二阶项, 存在耗散现象.
- Lax-wendroff 格式存在过冲现象.

注解 1. 中心差商

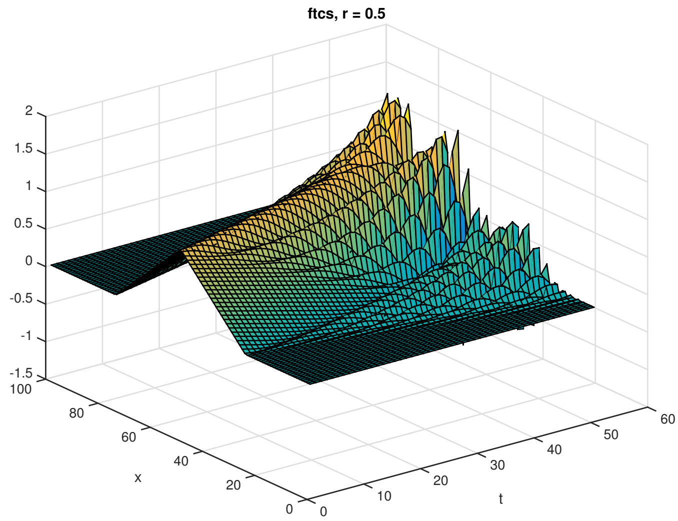

图 5: r=$\frac{1}{2}$

□