Lista 7
LPO, termos, fórmulas e árvores de análise

Alfabeto
O alfabeto da LPO é constituído por:

- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: 1, 0
- Um conjunto de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, \ldots$
- Um conjunto de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, h_1, g_1, \ldots$
- Um conjunto de símbolos para predicados: $P, Q, R, \ldots$
- Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$

Cada símbolo para função ou predicado possui uma aridade, geralmente representada por *n-ária*, com $n >= 0$. Quando $n = 0$, tem-se um predicado ou função *0-ária* ou sem argumentos. As funções sem argumentos representam as constantes. Da mesma forma, os predicados sem argumentos representam as proposições.

Termo
Os termos da LPO são construídos segundo as regras:

- As variáveis são termos.
- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e f é um símbolo para função *n-ária*, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.
- As constantes, que são funções *0-árias* são termos.

Fórmula
As fórmulas da LPO são definidos como segue:

- Se P é um símbolo predicado *n-ário* com $n \geqslant 1$ e se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula.
- Se A é uma fórmula, então $(\neg A)$ também é.
- Se A e B são fórmulas, então e $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$ também são.
- Se A é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x A$ e $\exists x A$ também são.

1. Quais das cadeias a seguir são fórmulas na lógica de primeira ordem? Justifique as que não são fórmulas e desenhe a árvore de análise para as cadeias que são.
   a) Seja m uma constante, f um símbolo funcional unário e S e B dois símbolos predicados binários.
      i. $S(m, x)$
      ii. $B(m, f(m))$
      iii. $f(m)$
      iv. $B(B(m, x), y)$
      v. $S(B(m), z)$
      vi. $(B(x, y) \to (\exists z S(z, y)))$
      vii. $(S(x, y) \to S(y, f(f(x))))$
      viii. $(B(x) \to B(B(x)))$
   b) Sejam c e d constantes, f um símbolo funcional unário, g um símbolo funcional binário e h um símbolo funcional ternário. Além disso, sejam P e Q símbolos predicados ternários:
      i. $\forall x P(f(d), h(g(c, x), d, y))$
      ii. $\forall x P(f(d), h(P(x, y), d, y))$
      iii. $\forall x Q(g(h(x, f(d), x), g(x, x)), h(x, x, x), c)$
      iv. $\exists z(Q(z, z, z) \to P(z))$
      v. $\forall x \forall y(g(x, y) \to P(x, y, x))$
      vi. $Q(c, d, c)$
2. Seja ϕ a fórmula $\exists x(P(y, z) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z))))$, onde P e Q são símbolos predicados binários.
   a) Desenhe a árvore de análise de ϕ
   b) Identifique todas as folhas em ϕ que são variáveis livres ou presas.
   c) Existe alguma variável em ϕ que ocorre livre e presa?
   d) Considere os termos w, onde w é uma variável, $f(x)$ e $g(y, z)$, onde f e g são símbolos funcionais unário e binário, respectivamente.
      i. Faça as substituições (quando possível) separadamente para $\phi[w/x]$, $\phi[w/y]$, $\phi[f(x)/y]$ e $\phi[g(y, z)/z]$.
   e) Qual o escopo de $\exists x$ em ϕ?
   f) Suponha que modificamos ϕ para $\exists x(P(y, z) \wedge (\forall x(\neg Q(x, x) \vee P(x, z))))$. Qual o escopo de $\exists x$ agora?