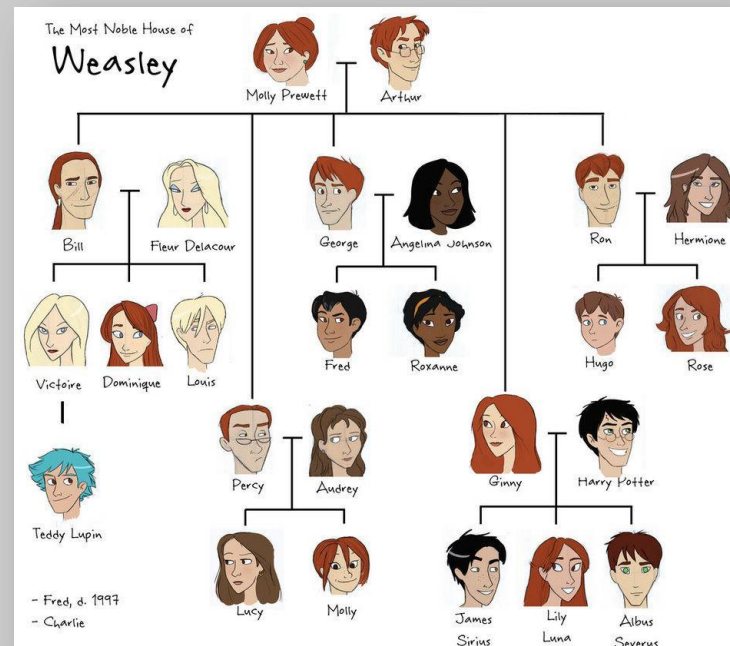
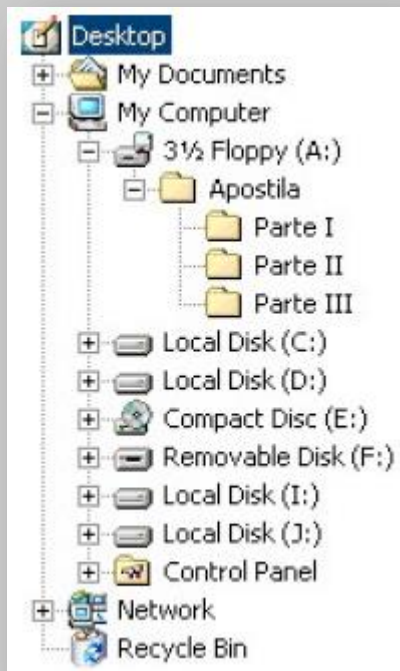


Árvores e Árvores Binárias

Prof. Silvana Teodoro

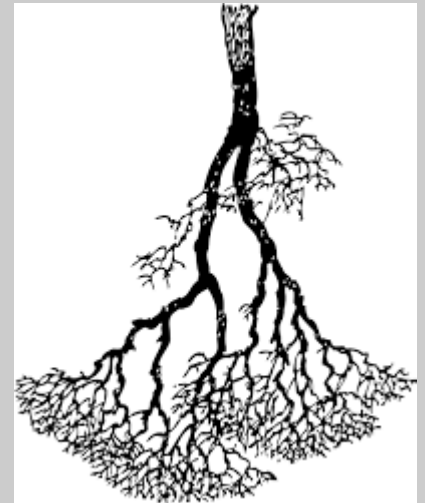
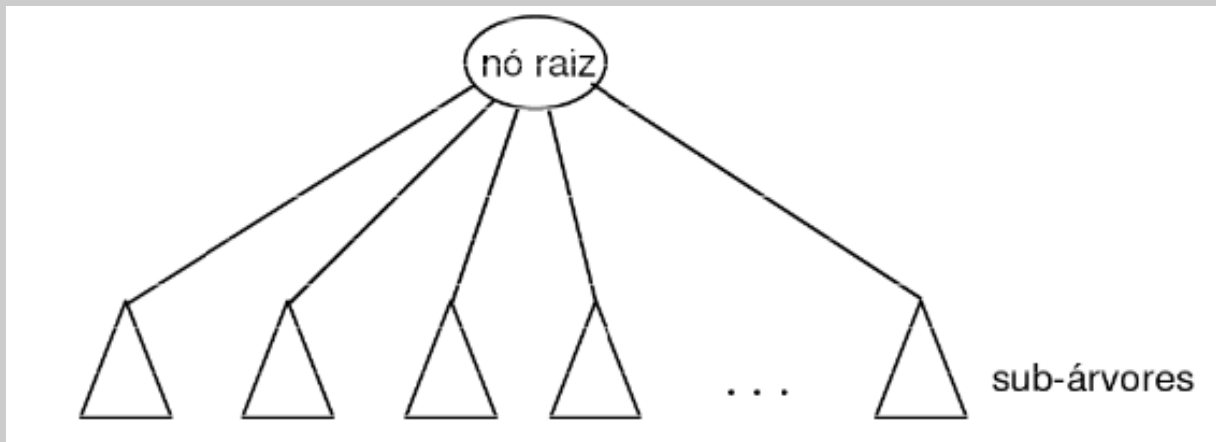
Árvores

- Estruturas que vimos até o momento (listas, pilhas, filas) são adequadas para representar elementos dispostos linearmente.
- Como representar elementos dispostos de forma hierárquica?



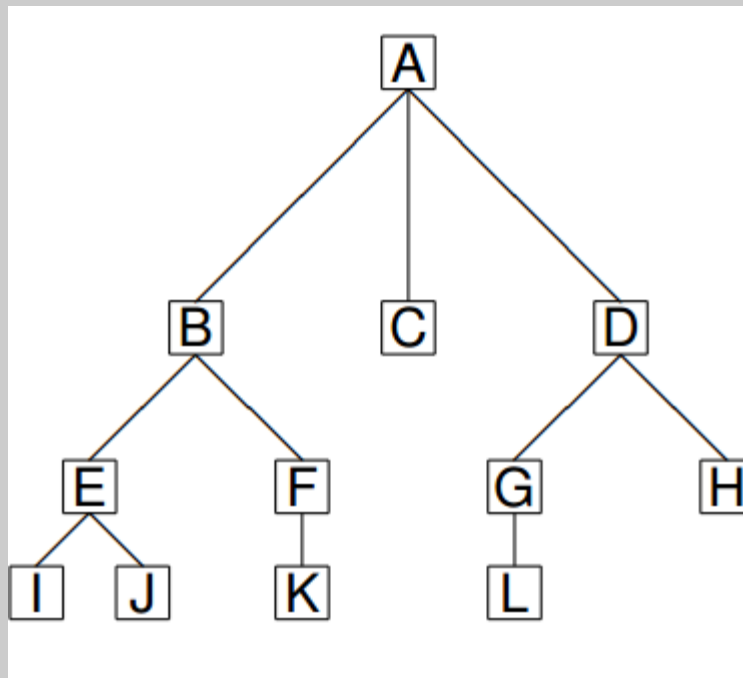
Árvores

- Árvores são estruturas adequadas para representação de hierarquias.



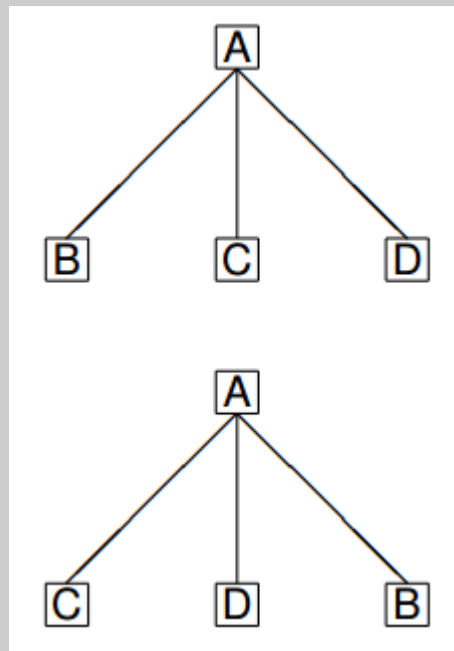
Árvores

- Uma árvore do tipo T é constituída de uma estrutura vazia,
- ou um elemento ou um nó do tipo T chamado raiz com um número finito de árvores do tipo T associadas, chamadas as sub-árvores da raiz.



Árvores Ordenada

- Uma árvore é chamada ordenada quando a ordem das subárvores é significativa. Assim, as duas árvores ordenadas seguintes são diferentes.

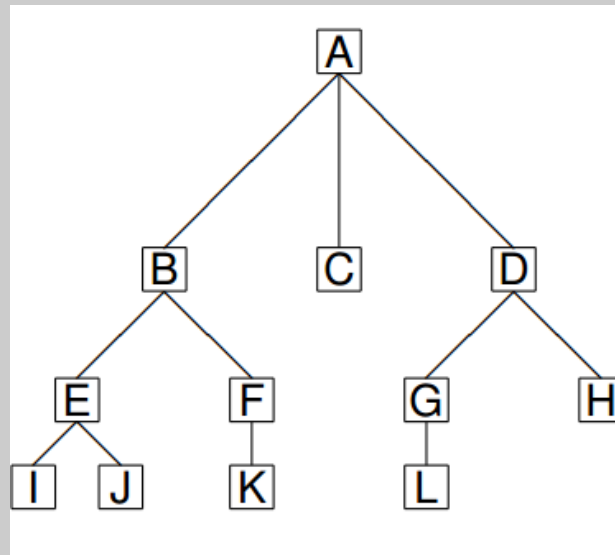


- Em uma árvore que representa os descendentes de uma família real, a ordem das subárvores pode ser importante pois pode determinar a ordem de sucessão da coroa.

Árvores

Nomenclatura

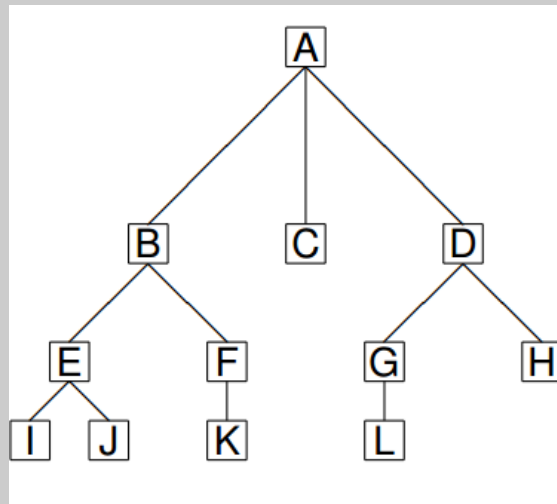
- **Pai e filho:** Um nó y abaixo de um nó x é chamado filho de x . x é dito pai de y . Exemplo: B é pai de E e F.
- **Irmão:** Nós com o mesmo pai são ditos irmãos. Exemplo: B, C, D são irmãos.
- **Nível de um nó:** A raiz de uma árvore tem nível 1. Se um nó tem nível i , seus filhos têm nível $i + 1$. Exemplo: E, F, G e H têm nível 3.



Árvores

Nomenclatura

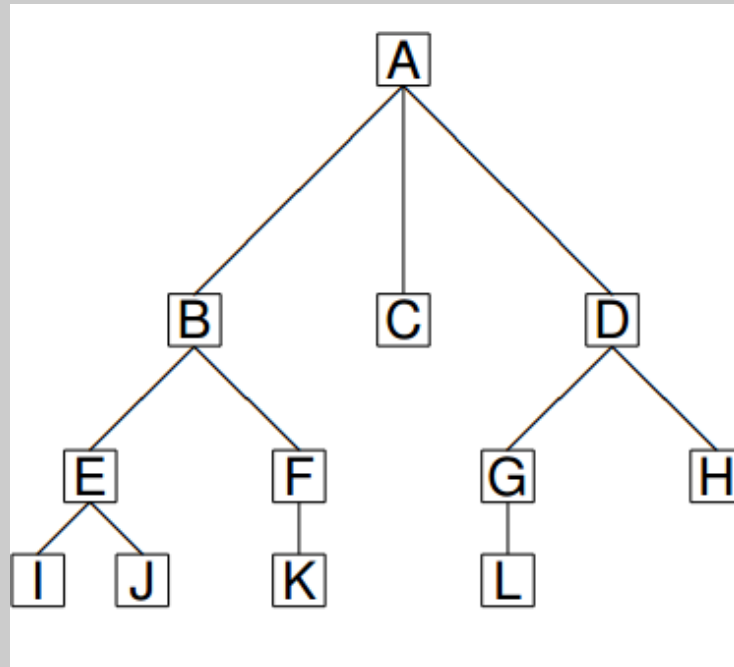
- **Altura ou profundidade de uma árvore:** É o máximo nível de seus nós. A árvore do exemplo tem altura 4.
- **Folha ou nó terminal:** É um nó que não tem filhos. Exemplo: I, J, K, L são folhas.
- **Nó interno ou nó não terminal:** É um nó que não é folha.
- **Grau de um nó:** É o número de filhos do nó. Exemplo: B tem grau 2, G tem grau 1.



Árvores

Nomenclatura

- **Grau de uma árvore:** É o máximo grau de seus nós. A árvore do exemplo tem grau 3.



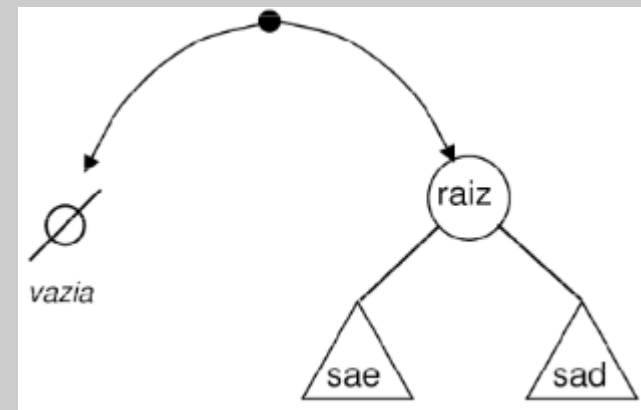
- **Árvore binária:** É uma árvore ordenada de grau 2.

Árvores Binárias



Árvores Binárias

- Uma árvore em que **cada nó tem zero, um ou dois filhos**
- Uma árvore binária é:
 - uma árvore vazia; ou
 - um nó raiz com duas sub-árvores:
 - a subárvore da direita (sad)
 - a subárvore da esquerda (sae)

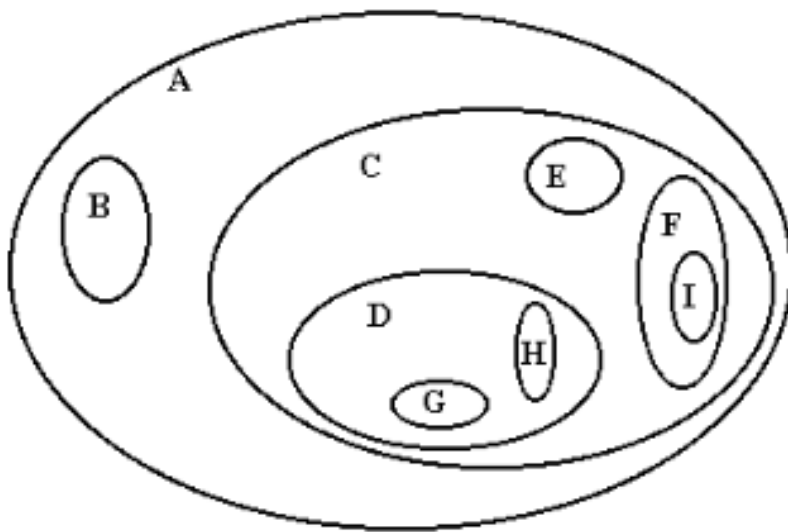


Árvores Binárias

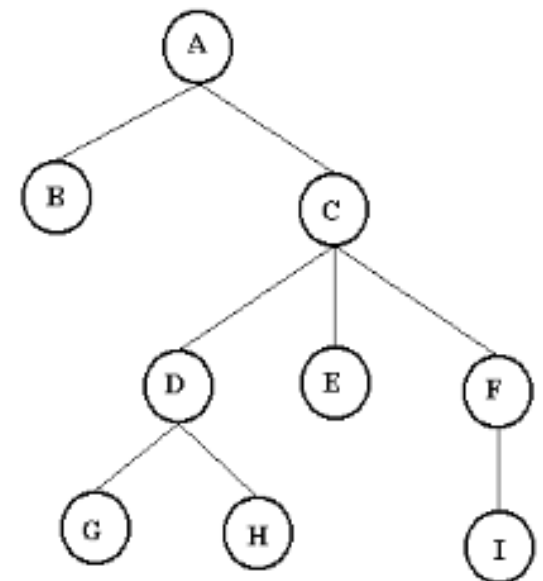
Formas de Representação

- Representação por parênteses aninhados
 - (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

Diagrama de Inclusão



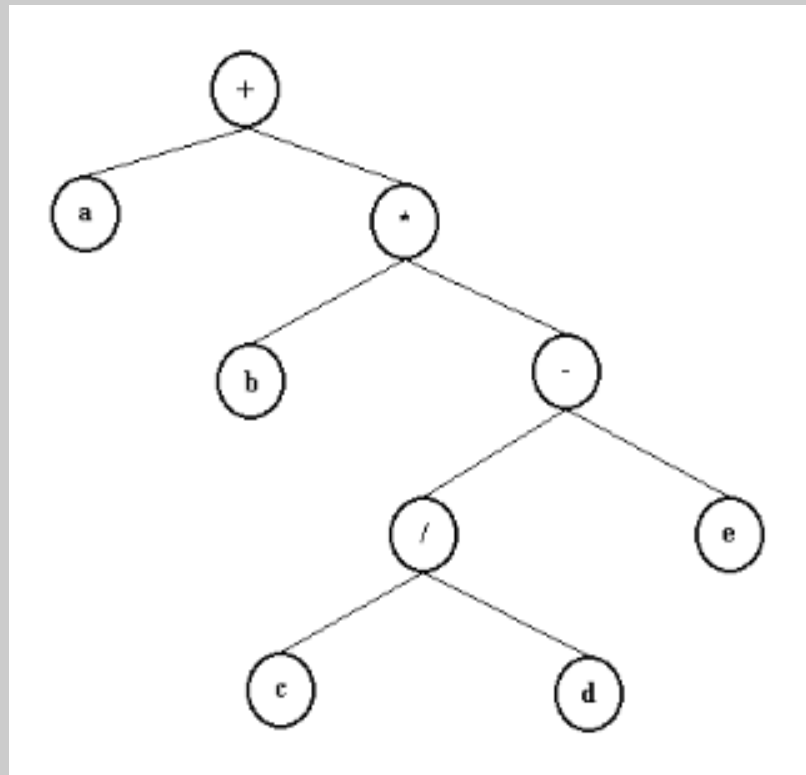
Representação Hierárquica



Árvores Binárias

Formas de Representação

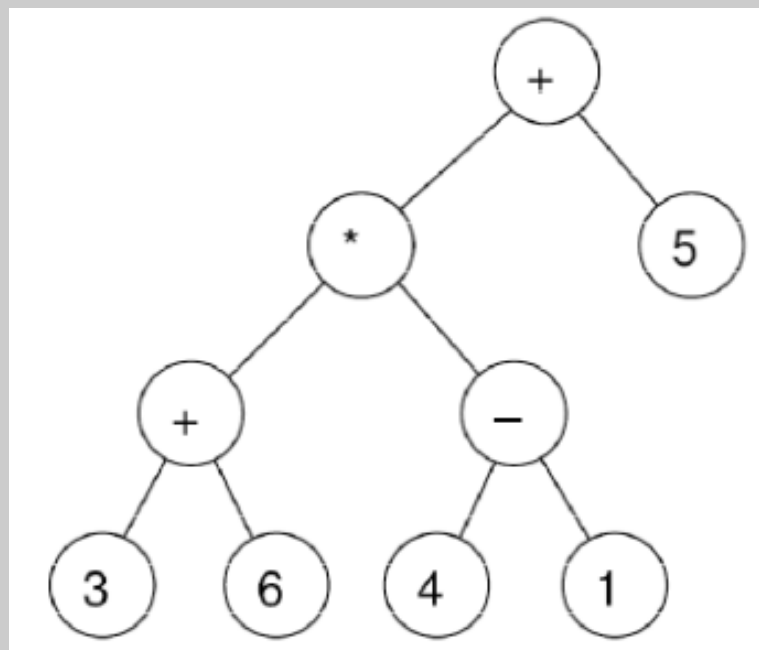
- Representação da expressão aritmética:
– $(a + (b * (c / d - e)))$



Árvores Binárias

Formas de Representação

- **Árvore binária representando expressões aritméticas:**
 - Nós folhas representam os operandos
 - Nós internos representam os operadores
 - $(3+6)*(4-1)+5$



Árvores Binárias

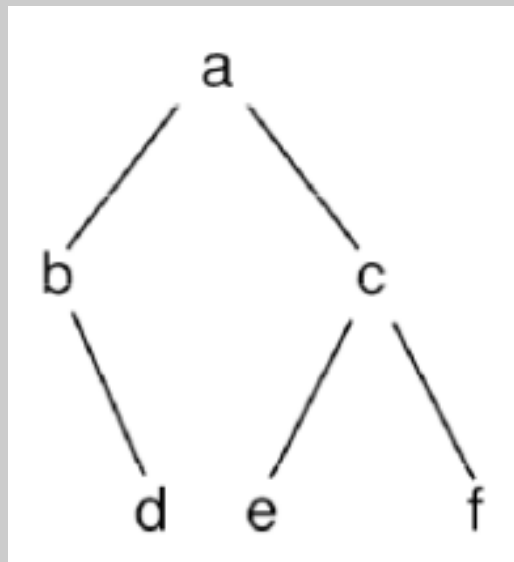
Formas de Representação

- **Notação textual**

- a árvore vazia é representada por <>
- árvores não vazias por <raiz sae sad>

Exemplo:

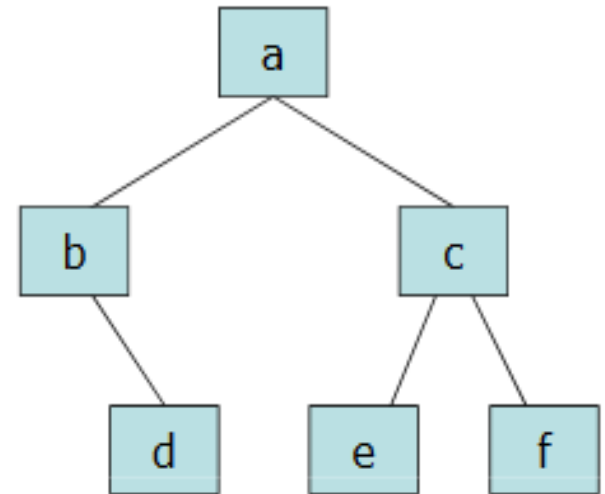
– <a <b <> <d<><>> > <c <e<><>> <f<><>>> > >



Árvores Binárias

Ordem de Percurso

- *Pré-ordem*:
 - trata *raiz*, percorre *sae*, percorre *sad*
 - exemplo: a b d c e f
- *Ordem simétrica (ou In-Ordem)*:
 - percorre *sae*, trata *raiz*, percorre *sad*
 - exemplo: b d a e c f
- *Pós-ordem*:
 - percorre *sae*, percorre *sad*, trata *raiz*
 - exemplo: d b e f c a



Árvores Binárias

Ordem de Percurso

- **Pré-ordem (r sad sed)**

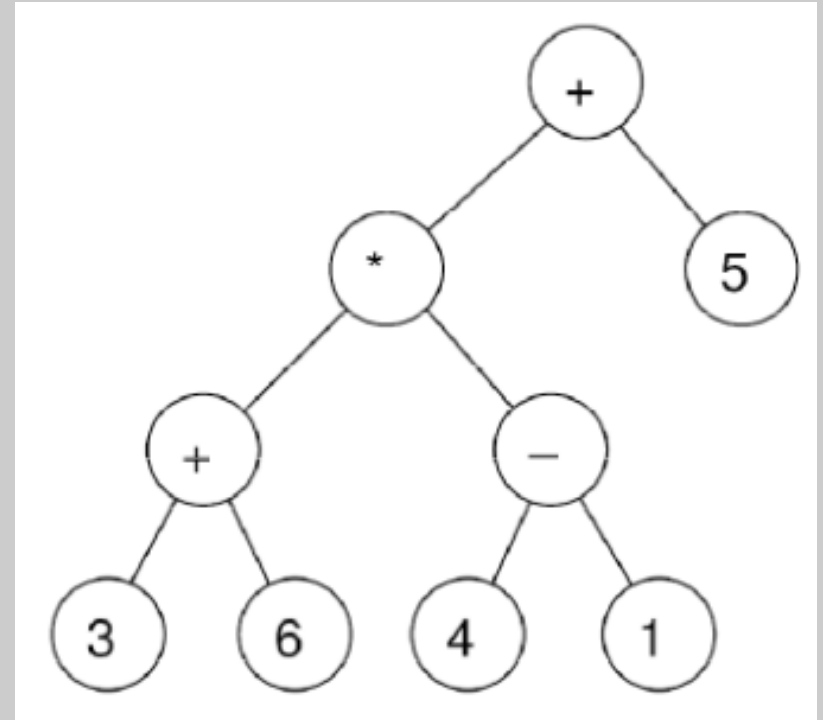
– $+*+36-415$

- **In-ordem (sed r sad)**

– $3+6*4-1+5$

- **Pós-ordem (sed sad r)**

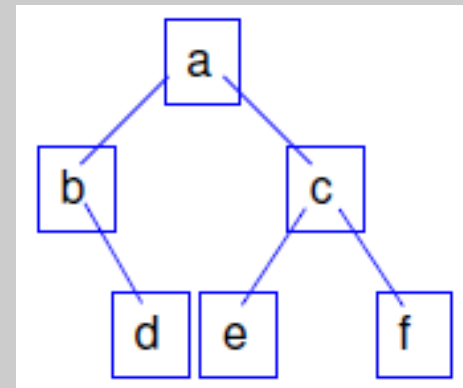
– $36+41-*5+$



Árvores Binárias

Altura

- **Propriedade fundamental de árvores**
 - Só existe um caminho da raiz para qualquer nó
- **Altura de uma árvore**
 - Comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas
 - A altura de uma árvore com um único nó raiz é zero
 - A altura de uma árvore vazia é -1
 - Exemplo:
 - $h = 2$

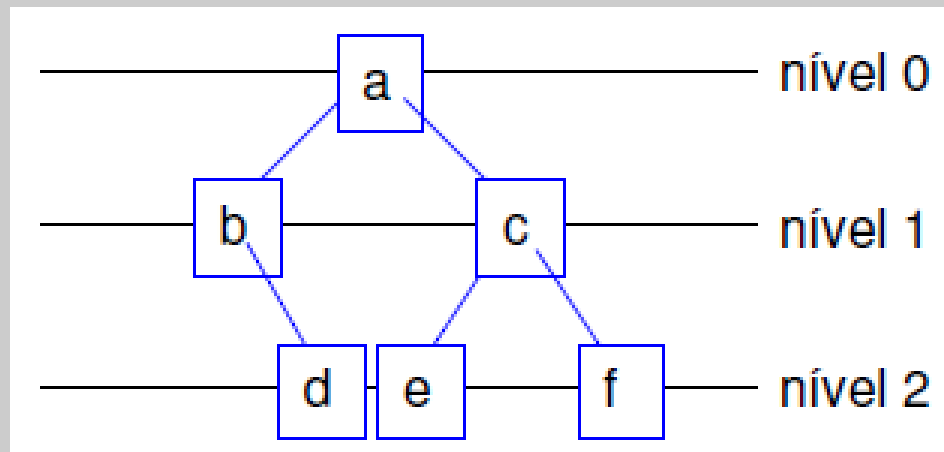


Árvores Binárias

Altura

- **Nível de um nó**

- A raiz está no nível 0, seus filhos diretos no nível 1, ...
- O último nível da árvore é a altura da árvore



Árvores Binárias

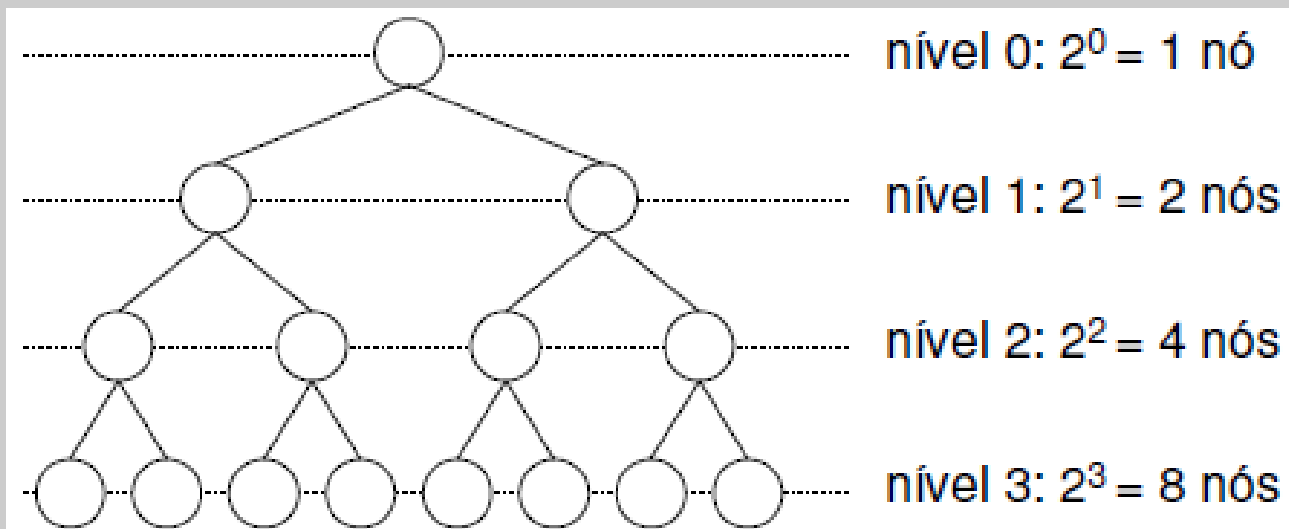
Altura

- **Árvore cheia**

- Todos os seus nós internos têm duas sub-árvores associadas

- Número n de nós de uma árvore cheia de altura h

$$n = 2^{h+1} - 1$$

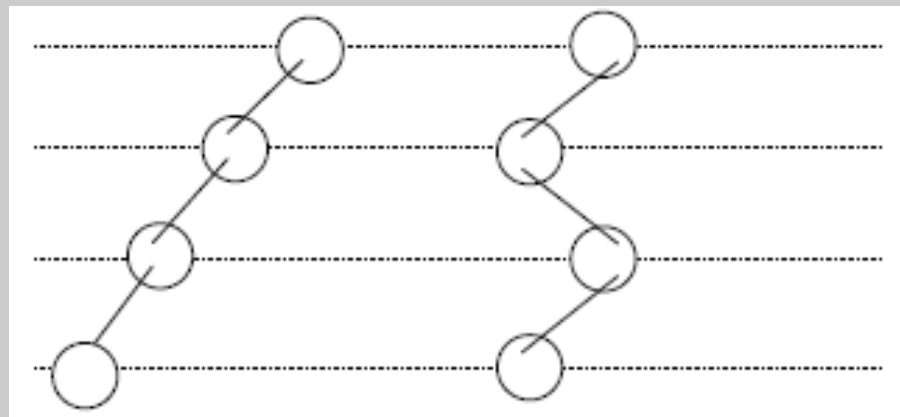


Árvores Binárias

Altura

- **Árvore degenerada**

- **Todos** os seus **nós internos** têm uma **única sub-árvore** associada
- Número n de nós de uma árvore degenerada de altura h
 $n = h+1$



Árvores Binárias

Altura

- **Esforço computacional necessário para alcançar qualquer nó da árvore:**
 - **Proporcional à altura da árvore**
 - Altura de uma árvore binária com n nós
 - **Mínima:** proporcional a $\log n$ (caso da árvore cheia)
 - **Máxima:** proporcional a n (caso da árvore degenerada)



Árvores Binárias

Aplicações que usam árvores e árvore binárias

- Problemas de busca de dados armazenados na memória principal do computador: árvore binária de busca, etc.
- Aplicações em Inteligência Artificial: árvores que representam o espaço de soluções.
- No processamento de cadeias de caracteres: árvore de sufixos.
- Na gramática formal: árvore de análise sintática.
- Em problemas onde a meta é achar uma ordem que satisfaz certas restrições.

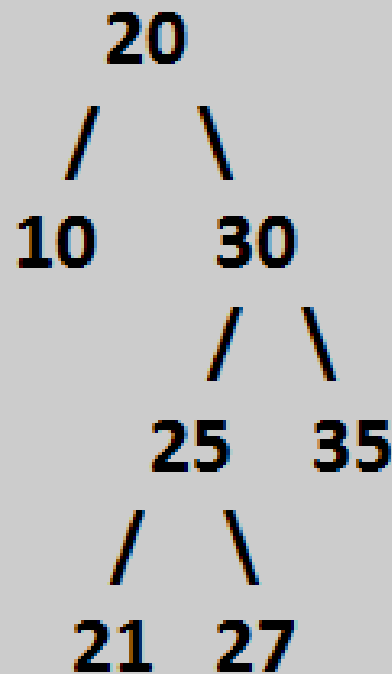


Exercícios



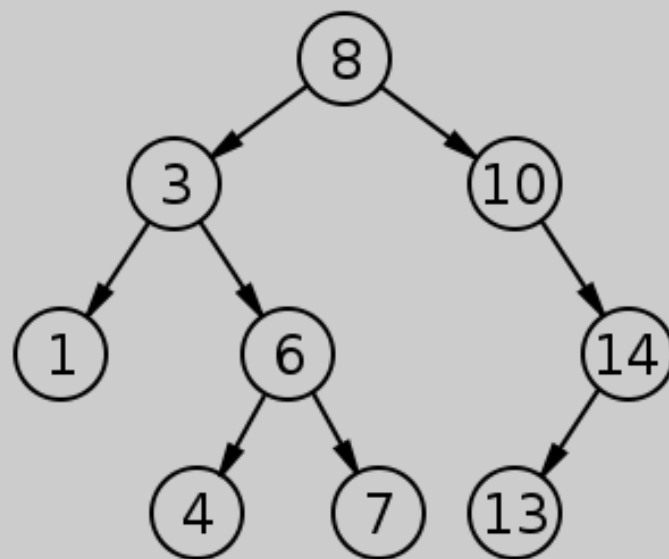
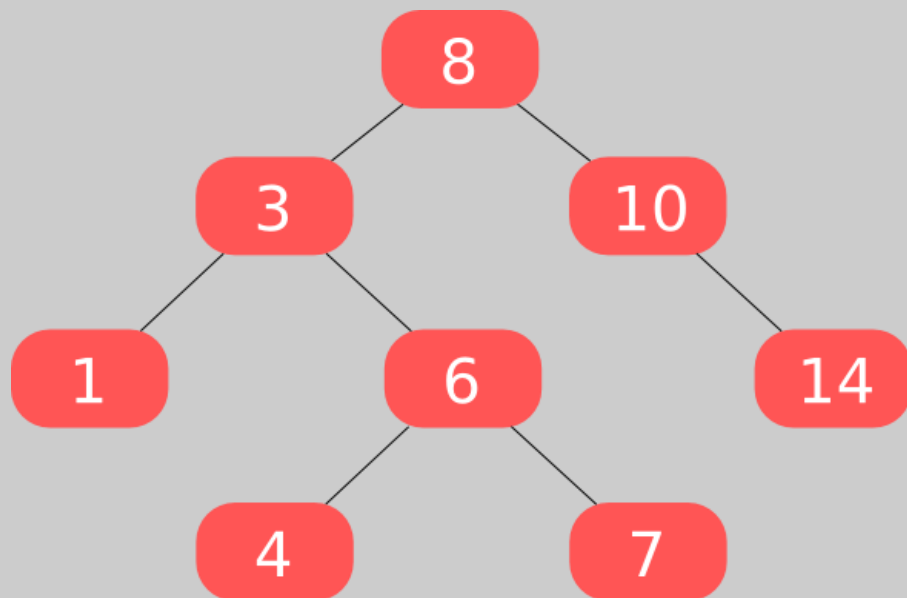
Exercícios

Represente a árvore binária abaixo usando a notação com parênteses aninhados em pré-ordem.



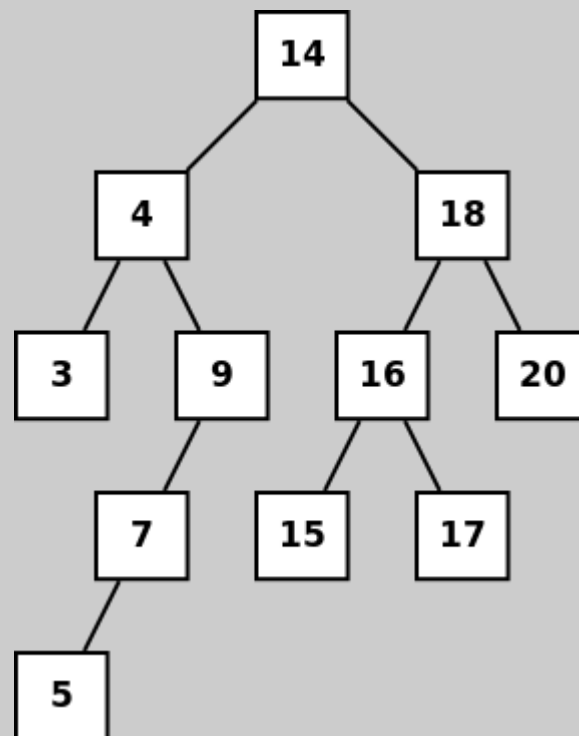
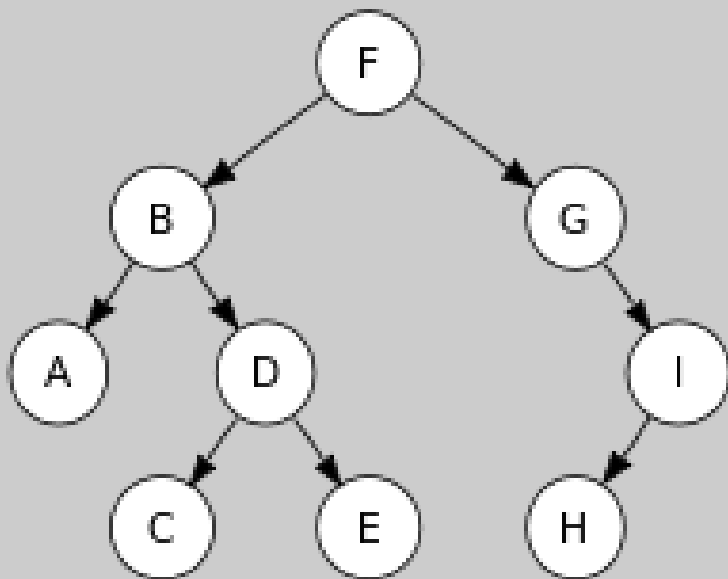
Exercícios

Escreva através de parênteses e notação textual as seguintes árvores em pré-ordem :



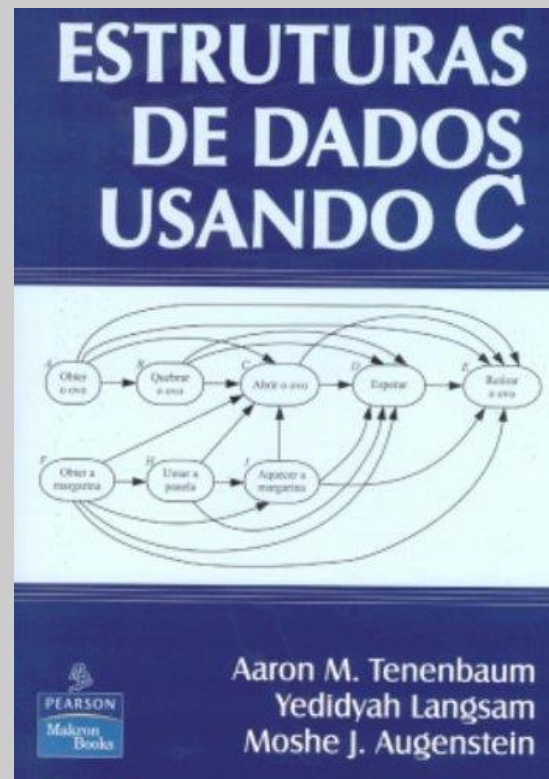
Exercícios

Escreva através de parênteses e notação textual as seguintes árvores em pré-ordem :



Leitura Complementar

- Aaron M. Tenenbaum, Yedidiah Langsam, Moshe J. Augenstein. **Estruturas de Dados Usando C**. Makron Books/Pearson Education, 1995.



Nas próximas aulas...

Implementação dos códigos vistos em aula.

