Теория рассеяния

Anikin Evgeny, 121

13 декабря 2016 г.

1 S–матрица и амплитуда рассеяния

$$\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\phi(k)\left(e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}\right)e^{-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}+ikR} = \\ = \phi\left(\frac{m(r+R)}{\hbar t}\right)\frac{f(\theta)}{r}e^{\frac{im(r+R)^2}{2\hbar t}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \quad (1)$$

Здесь и далее считаем, что $\Re\sqrt{z} > 0$.

Далее сделаем преобразование Фурье:

$$\Psi(\vec{k}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\Psi(x,t) = \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\phi\left(\frac{m(r+R)}{\hbar t}\right)\frac{f(\theta)}{r}e^{\frac{im(r+R)^2}{2\hbar t}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \quad (2)$$

Точка стационарной фазы —

$$\vec{k} = \frac{m(r+R)}{\hbar t}\vec{n}, \quad (3)$$

матрица вторых производных —

$$\partial_i\partial_j\frac{im(r+R)^2}{2\hbar t} = \frac{im}{\hbar t}\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)\delta_{ij} - \frac{R}{r}n_i n_j\right) \quad (4)$$

С помощью метода стационарной фазы получаем

$$\Psi(\vec{k}) = \frac{2\pi i}{k}\phi(k)f(\theta)e^{-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}+ikR} \quad (5)$$

Теперь уже можно положить $\phi(k) = \delta(k-k_0)$. Тогда, пользуясь формулой

$$\delta(k-k_0) = \frac{\hbar^2 k_0}{m}\delta(\epsilon-\epsilon_0), \quad (6)$$

получим окончательно

$$\Psi(\vec{k}) = \frac{2\pi i\hbar^2}{m}f(\theta)\delta(\epsilon-\epsilon_0) \quad (7)$$

2 Квазиклассическое приближение

2.1 Функция Эйри

Функция Эйри — решение уравнения

$$u'' = xu \tag{8}$$

Оно решается методом Лапласа, его решение —

$$u = \oint_\Gamma e^{ixz - \frac{iz^3}{3}}\,dz \tag{9}$$

Контур Γ должен начинаться и заканчиваться на бесконечности, так, чтобы $e^{-\frac{iz^3}{3}} \to 0$. Выберем его так, чтобы он шёл из третьей координатной четверти к нулю и уходил на бесконечность вдоль Ox. Тогда

$$\Psi = \frac{\sqrt{\pi}}{|x|^{\frac{1}{4}}} \begin{cases} e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}, & x \gg 0 \\ e^{\frac{2i}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{i\pi}{4}}, & x \ll 0 \end{cases} \tag{10}$$

Методом перевала можно вычислить и мнимую часть Ψ.

$$\operatorname{Im}\Psi = \frac{\sqrt{\pi}}{|x|^{\frac{1}{4}}} \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}, & x \gg 0 \\ \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right), & x \ll 0 \end{cases} \tag{11}$$

3 Квазиклассическая волновая функция

4 Разложение плоской волны по сферическим

Для начала необходимо разложить плоскую волну по сферическим.

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_l A_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{12}$$

Перепишем это разложение несколько в другом виде:

$$e^{ixy} = \sum_l A_l(x)P_l(y) \tag{13}$$

Отсюда

$$A_l(x) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} P_l(y)e^{ixy}\,dy \tag{14}$$

Вспоминаем формулу для полиномов Лежандра:

$$P_l(y) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dy^l}(y^2-1)^l \tag{15}$$

Тогда после подстановки и n–кратного интегрирования по частям получим

$$A_l(x) = \frac{(2l+1)(ix)^l}{2} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^l e^{ixy}\, dy \tag{16}$$

Здесь нас интересует случай больших x. Основной вклад в интеграл дают окрестности $y = \pm 1$ (можно деформировать контур так, чтобы это стало совсем очевидно). *Интересно, как точно вычислить этот интеграл? Ответ тут мне известен аж в двух смыслах: во–первых, интеграл сводится к вырожденной гипергеометрии, во-вторых, должны получиться функции Бесселя полуцелого порядка.*

После вычисления асимптотики получается следующий результат:

$$e^{ixy} = \sum \frac{2l+1}{2ix} \left[e^{ix} + (-1)^{l+1} e^{-ix} \right] P_l(y) \tag{17}$$

5 Задача рассеяния

Пусть $R_l(r)$ — радиальные функции. Так как на больших расстояниях потенциала нет, они имеют асимптотический вид

$$R_l(r) \approx \frac{1}{r} \left(e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr - i\alpha_l} \right) \tag{18}$$

(Множитель $(-1)^{l+1}$ выбран для удобства в последующем.)

Любая функция с цилиндрической симметрией должна представляться в виде

$$\Psi(r,\theta) = \sum_l R_l(r) P_l(\cos\theta) \tag{19}$$

Пусть плоская волна падает на рассеивающий центр. Тогда волновая функция имеет вид

$$\Psi(r,\theta) = e^{ikr\cos\theta} + \frac{f(\theta)e^{ikr}}{r} \tag{20}$$

Используя разложение плоской волны и (19), можно найти $f(\theta)$. Ответ получается таким:

$$f(\theta) = \sum_l \frac{2l+1}{2ik} (e^{i\alpha_l} - 1) P_l(\cos\theta) \tag{21}$$

6 Рассеяние в квазиклассическом случае

7 Рассеяние на непроницаемой сфере

Непроницаемая сфера, возможно, — единственный случай, когда радиальные функции можно вычислить точно. Они являются линейными комбинациями функций Бесселя полуцелого порядка.