Нелинейный осциллятор в поле вращающейся волны

Anikin Evgeny

12 октября 2017 г.

Гамильтониан нелинейного осциллятора во внешнем поле имеет вид

$$\hat{H} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\beta}{2} a^\dagger a^\dagger a a + E^* e^{i\Omega t} a + E e^{-i\Omega t} a^\dagger \tag{1}$$

Преобразованием $\Psi = e^{i\Omega t a^\dagger a}\widetilde{\Psi}$ уравнение Шрёдингера приводится к виду

$$i\partial_t \widetilde{\Psi} = \hat{H}_{\text{eff}} \widetilde{\Psi}, \tag{2}$$

где

$$\hat{H}_{\text{eff}} = (\omega_0 - \Omega) a^\dagger a + \frac{\beta}{2} a^\dagger a^\dagger a a + E^* a + E a^\dagger \tag{3}$$

Этот гамильтониан, в принципе, можно диагонализовать и тем самым найти полный набор решений исходного уравнения Шрёдингера. Однако в такой постановке непонятно, как понимать бистабильность. Найденные решения соответствуют как стационарным, так и нестационарным решениям классического уравнения для консервативного осциллятора. Поэтому в задачу необходимо ввести диссипацию. Для этого введём взаимодействие с баней осцилляторов:

$$\begin{gathered} \hat{H}_{\text{full}} = \hat{H} + \hat{H}_{\text{bath}} + \hat{H}_{\text{int}}, \\ \hat{H}_{\text{bath}} = \sum \omega_k b_k^\dagger b_k \\ \hat{H}_{\text{int}} = \sum \gamma_k a^\dagger b_k + \text{h.c.} \end{gathered} \tag{4}$$

Тут тоже можно сделать такое преобразование волновой функции, чтобы гамильтониан стал независящим от времени: $\Psi = \exp i\Omega t(a^\dagger a + \sum b_k^\dagger b_k)\widetilde{\Psi}$. Тогда эффективный гамильтониан примет вид

$$\begin{multline} \hat{H}_{\text{eff}} = (\omega_0 - \Omega) a^\dagger a + \frac{\beta}{2} a^\dagger a^\dagger a a + E^* a + E a^\dagger + \\ + \sum (\omega_k - \Omega) b_k^\dagger b_k + \sum \gamma_k a^\dagger b_k + \text{h.c.} \end{multline} \tag{5}$$

Этот гамильтониан описывает нелинейный осциллятор, взаимодействующий с баней. Существенно, что в этой бане присутствуют осцилляторы как с положительной, так и с отрицательной энергией. Благодаря этому возможно такое равновесие осциллятора, что он только испускает "фотоны"бани, а не поглощает.

Рассмотрим испускание фотонов осциллятором на полуклассическом языке. Предположим, мы нашли собственные состояния $\hat{H_{\text{eff}}}$. Тогда вероятность перехода в единицу времени между уровнями n и m —

$$\frac{dP(m \leftarrow n)}{dt} \propto |\gamma_k \langle m|\hat{a}|n\rangle|^2, \qquad \omega_k = E_n - E_m \tag{6}$$

Тогда можно написать кинетическое уравнение на вероятности находиться на m–ом уровне:

$$\frac{dP_m}{dt} = \sum_n \frac{dP(m \leftarrow n)}{dt} P_n - \frac{dP(n \leftarrow m)}{dt} P_m \tag{7}$$

Если найти стационарное распределение вероятностей, то при определённых значениях параметров у него будет два пика. Это и будет соответствовать бистабильности.

Матричные элементы $\langle m|\hat{a}|n\rangle$ легко найти численно. Тогда будут определены и вероятности перехода, если известны γ_k. Последние можно задать каким–нибудь разумным способом, например, $\gamma(E) \propto \theta(E)$ или $\gamma(E) \propto E$. После этого можно будет найти стационарное распределение вероятностей.

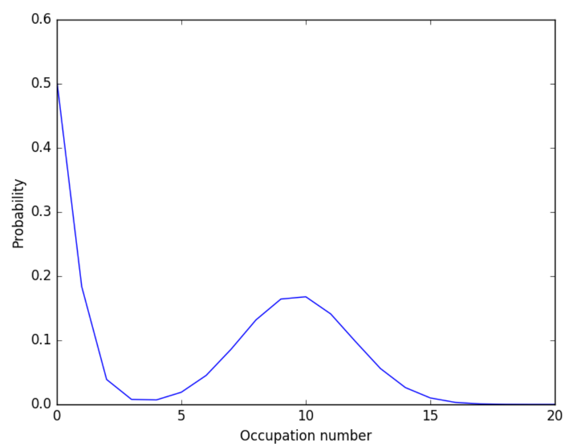

Рис. 1: Вероятности чисел заполнения нелинейного осциллятора при следующих параметрах: $\omega_0 = 1$, $\Omega = 1.025$, $\beta = 0.003$, $E = 0.0138$