Парамагнетизм Паули
и диамагнетизм Ландау

Anikin Evgeny, 128

9 июля 2017 г.

1 Задача

Задача заключалась в том, чтобы найти температурную зависимость отношения восприимчивостей Ландау и Паули.

Ответ: отношение восприимчивостей не зависит от температуры.

$$\frac{\chi_{\text{dia}}}{\chi_{\text{para}}} = -\frac{1}{3} \tag{1}$$

2 Парамагнетизм

Если пренебречь квантованием орбитального движения электрона в магнитном поле, то термодинамический потенциал электронного газа представляется в виде

$$\Omega = \Omega_0(\mu - \mu_B H) + \Omega_0(\mu + \mu_B H), \tag{2}$$

где Ω_0 — термодинамический потенциал бесспиновых фермионов. Разложим Ω по малым H:

$$\Omega = 2\Omega_0 + \mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \mu^2} = 2\Omega_0 - \mu_B^2 H^2 \frac{\partial N}{\partial \mu} \tag{3}$$

Восприимчивость —

$$\chi_{\text{para}} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial H^2} = 2\mu_B^2 \frac{\partial N}{\partial \mu} \tag{4}$$

Преобразуем:

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon - \mu}{T}}} = \frac{\nu_F}{\sqrt{\mu}} \int \frac{\sqrt{\epsilon}\, e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\, d\epsilon}{T\left(1 + e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\right)^2} \tag{5}$$

Таким образом,

$$\chi_{\text{para}} = 2\nu_F \mu_B^2 \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{\sqrt{\epsilon}\, e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\, d\epsilon}{T\left(1 + e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\right)^2} \tag{6}$$

3 Диамагнетизм

Уровни энергии электрона в магнитном поле (будем считать его параллельным Oz) —

$$E_{n,p_z,\sigma} = 2\mu_B H \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} \tag{7}$$

Магнетон Бора —

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}, \tag{8}$$

кратность вырождения уровня Ландау —

$$N = \frac{eHL_xL_y}{2\pi\hbar} \tag{9}$$

Значит, Ω–потенциал —

$$\Omega = -T \sum_{n,\sigma} \frac{eHV}{2\pi\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \log\left\{1 + \exp\left(\frac{\mu - E_{n,p_z}}{T}\right)\right\} \tag{10}$$

Сумму по n можно преобразовать в интеграл с помощью формулы

$$\int_0^L f(x)dx = h \sum_{k=0}^{N-1} f(h(k+\tfrac{1}{2})) + \tfrac{h^2}{24}\left(f'(L) - f'(0)\right) + O(h^4) \tag{11}$$

В результате получается

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{m}{2\pi^2\hbar^3} \frac{\mu_B^2 H^2}{12} \int \frac{dp_z}{1 + \exp\left(\dfrac{\epsilon_{p_z} - \mu}{T}\right)} \tag{12}$$

Если перейти к интегрированию по ϵ и проинтегрировать по частям, получится

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{\nu_F \mu_B^2 H^2}{6} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{\sqrt{\epsilon}\, e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\, d\epsilon}{T\left(1 + e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\right)^2} \tag{13}$$

Отсюда получаем восприимчивость (лишняя двойка берётся от двух проекций спина):

$$\chi_{\text{dia}} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial H^2} = -\frac{2\nu_F \mu_B^2}{3} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{\sqrt{\epsilon}\, e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\, d\epsilon}{T\left(1 + e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\right)^2} \tag{14}$$

Сравнивая с (5), получим

$$\frac{\chi_{\text{dia}}}{\chi_{\text{para}}} = -\frac{1}{3} \tag{15}$$