Функции Грина

Anikin Evgeny

16 февраля 2017 г.

1 Определение

Функцией Грина $G(x, y)$ линейного дифференциального оператора $\hat{L}$, действующего на функции $f(x)$, называется решение уравнения

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \tag{1}$$

У однородного уравнения $\hat{L}\phi = 0$, вообще говоря, есть решения. В этом случае функция Грина определена с точностью до решения однородного уравнения; тогда выделяют *запаздывающую* и *опережающую* функции Грина.

Запаздывающая функция Грина определяется дополнительным условием $G(x, y) = 0$ при $x < y$. Это эквивалентно тому, что в задаче Коши мы ставим начальные условия

$$G(x_0, y) = 0,\ G'(x_0, y) = 0,\ \ldots,\ G^{(n)}(x_0, y) = 0 \tag{2}$$

для какого–нибудь $x_0 < y$.

Опережающая функция Грина — аналогично, только с условием $G(x, y) = 0$ при $x > y$.

2 Общее решение неоднородного линейного уравнения

Неоднородное линейное уравнение — это уравнение вида

$$\hat{L}\phi = f(x), \tag{3}$$

где $f(x)$ — произвольная функция x. Воспользуемся формальным представлением $f(x)$ в виде "суммы" дельта–функций:

$$f(x) = \int \delta(x - x') f(x')\, dx' \tag{4}$$

Отсюда следует, что решение уравнения —

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x') f(x')\, dx' \tag{5}$$

Пусть нас интересует вынужденное решение, то есть движение изначально покоившейся системы при включении взаимодействия. Тогда мы должны использовать запаздывающую функцию Грина. Так как при $x-x' < 0$ запаздывающая функция Грина обращается в ноль, в интеграле можно заменить пределы интегрирования:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} G(x-x')f(x')\,dx' \tag{6}$$

3 Функция Грина частицы в вязкой среде

Движение частицы в вязкой среде описывается уравнением

$$(m\frac{d}{dt} + \beta)v = F(t) \tag{7}$$

Найдём функцию Грина оператора

$$\hat{L} = m\frac{d}{dt} + \beta \tag{8}$$

Это значит, что мы должны решить уравнение

$$\left(m\frac{d}{dt} + \beta\right)G(t, t_0) = \delta(t - t_0) \tag{9}$$

Ясно, что $G(t, t_0)$ является функцией только $t - t_0$, потому что оператор $\hat{L}$ не зависит от времени явно. Поэтому можно положить $t_0 = 0$, а вместо $G(t, t_0)$ писать $G(t - t_0)$.

Задачу можно решить двумя способами.

3.1 Элементарный способ

Будем искать запаздывающую функцию Грина. Тогда при $t < 0$ $G(t) = 0$. При $t > 0$ решение уравнения известно с первого курса:

$$G(t) = Ce^{-\frac{\beta t}{m}} \tag{10}$$

Это решение содержит неизвестную константу C. Её нужно определить из того условия, чтобы в правой части уравнения (9) действительно стояла дельта–функция. Подставим в это уравнение $G(t) = Ce^{-\frac{\beta t}{m}}\theta(t)$ (здесь $\theta(t)$ — тэта–функция, равная 1 при $t > 0$ и 0 при $t < 0$):

$$\left(m\frac{d}{dt} + \beta\right)Ce^{-\frac{\beta t}{m}}\theta(t) = mCe^{-\frac{\beta t}{m}}\delta(t) = mC\delta(t) \tag{11}$$

(Мы воспользовались тем, что $\theta(t)' = \delta(t)$, а также $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.) Получается, что $C = m^{-1}$.

3.2 Фурье–разложение

Будем искать решение в виде интеграла Фурье:

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} G(\omega) e^{-i\omega t} \tag{12}$$

Нам понадобится разложение дельта–функции:

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega t} \tag{13}$$

Подставляя всё это в уравнение (9), получим, что

$$(-im\omega + \beta) G(\omega) = 1 \tag{14}$$

и, следовательно,

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{-i\omega t}}{\beta - im\omega} \tag{15}$$

Этот интеграл можно взять с помощью вычетов. Для этого необходимо замкнуть контур в комплексной плоскости так, чтобы интеграл по "дополнительной" части контура стремился к нулю. Это обеспечивает экспонента в числителе: она мала (экспоненциально) либо при $\mathrm{Im}(\omega) > 0$, либо при $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ в зависимости от знака t.

Пусть $t < 0$. Тогда контур замыкается вверх, где подынтегральная функция не имеет полюсов. Значит,

$$G(t) = 0 \tag{16}$$

Пусть $t > 0$. Тогда контур замыкается вниз, где имеется полюс при $\omega = -\frac{i\beta}{m}$. Таким образом,

$$G(t) = -2\pi i \, \mathrm{res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi(\beta - im\omega)} \right) \Bigg|_{\omega = -\frac{i\beta}{m}} = e^{-\frac{\beta t}{m}} \tag{17}$$

Обратим внимание, что запаздывающая функция Грина здесь получилась автоматически.

4 Функция Грина гармонического осциллятора

Уравнение на функцию Грина имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t) \tag{18}$$

Обсудим здесь, как работает для гармонического осциллятора преобразование Фурье. Дело в том, что фурье–компонента $G(\omega)$ оказывается сингулярной:

$$x(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{19}$$

Для того, чтобы в интеграле

$$x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{20}$$

как–то справиться с расходимостями, нужно сместить контур интегрирования по ω в комплексную плоскость. Это можно сделать разными способами, и мы получим таким образом разные функции Грина.

Можно потребовать, чтобы получалась запаздывающая функция Грина. Тогда нетрудно понять, что оба полюса нужно обходить сверху. Так же, как и раньше, замыкаем контур с разных сторон в зависимости от знака t. В результате получается

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \theta(t) \tag{21}$$

5 Функция Грина волнового уравнения

Функция Грина волнового уравнения в трёхмерии определяется уравнением

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^2\right] \phi = \delta(\vec{x}, t) \tag{22}$$

Преобразование Фурье в данном случае записывается в виде

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} \phi(\omega, \vec{k}) \tag{23}$$

Здесь следует обратить внимание на знаки в экспоненте.

Дельта–функция —

$$\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} \tag{24}$$

В результате получим функцию Грина в виде интеграла:

$$G(x, t) = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}}{k^2 - \omega^2} \tag{25}$$

Точно так же, как и в случае с осциллятором, обход полюсов при интегрировании по ω нужно производить сверху, чтобы получить запаздывающую функцию.

Удобно выполнить сначала интегрирование по ω, а затем — по k. Интеграл по ω совершенно такой же, как для гармонического осциллятора. Для $t > 0$ получится

$$G(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \sin kt \tag{26}$$

Чтобы взять интеграл по k, перейдём к полярным координатам. Выберем направление оси, от которой отсчитывается угол θ, вдоль вектора $\vec{x}$. Тогда интеграл переписывается в виде

$$G(x,t) = \int \frac{(2\pi)k^2\,dk\,d\cos\theta}{(2\pi)^3}\frac{1}{k}e^{ikr\cos\theta}\sin kt \tag{27}$$

После элементарных преобразований и интегрирования по $\cos\theta$ получается

$$G(x,t) = -\frac{i}{(2\pi)^2 r}\int_0^\infty \sin kt(e^{ikr} - e^{-ikr})\,dk \tag{28}$$

Во втором слагаемом можно сделать замену $k \to -k$. После этого, несложно убедиться,

$$\begin{aligned} G(x,t) = -\frac{i}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty \sin kt \cdot e^{ikr}\,dk = \\ -\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^\infty (e^{ik(r+t)} - e^{ik(r-t)})dk = \\ -\frac{1}{4\pi r}(\delta(t+r) - \delta(t-r)) \end{aligned} \tag{29}$$

Теперь вспомним, что $t > 0$ (из–за правила обхода полюсов) и $r > 0$. Значит, $\delta(t+r)$ можно просто выбросить. Таким образом, для всех t

$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)\theta(t) \tag{30}$$

Это решение описывает расходящуюся сферическую бесконечно узкую волну.

Его можно также переписать в релятивистски–инвариантном виде, используя свойства дельта–функции.

$$G(x,t) = -\frac{(t+r)}{4\pi r}\delta((t-r)(t+r))\theta(t) = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2 - r^2) \tag{31}$$