Откуда берутся асимптотические разложения

Anikin Evgeny, 128

12 августа 2016 г.

Поставим задачу как-нибудь вычислить интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\,dx}{1+x}$$

1 Большие α

Пусть α велико: тогда основной вклад в интеграл даёт область около нуля, где $1/(1+x)$ можно разложить в ряд.

Проделаем такие формальные действия:

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\,dx}{1+x} = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx \quad (1)$$

Вычисляя интегралы под суммой, получим

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\,dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}$$

Полученный ряд расходится. Тем не менее, его можно использовать для приближённого вычисления интеграла.

На рисунке видно, что разложение до высоких порядков имеет смысл только для больших x. При малых x справедливы только низшие порядки.

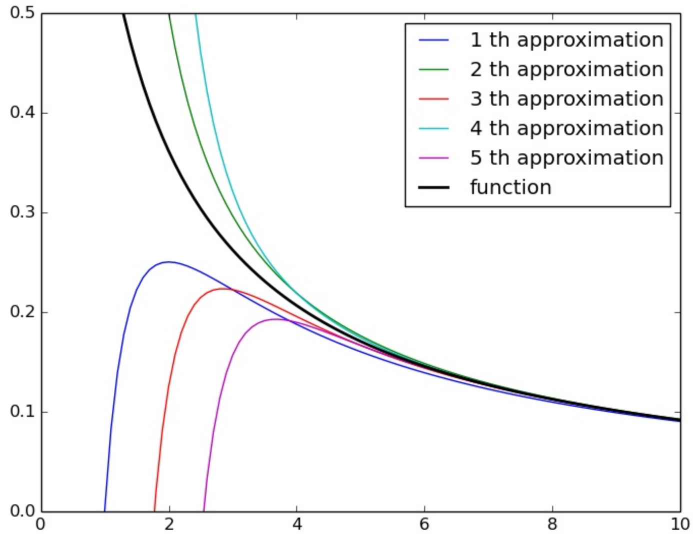

Рис. 1: На рисунке изображены графики частичных сумм ряда (цветные) и исходного интеграла (чёрный)

2 Малые α

Проделаем следующие преобразования:

$$
\begin{aligned}
J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\,dx}{1+x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\alpha + x} = \\
= e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{\alpha} \left(\int_{\alpha}^{1} \frac{e^{-x}\,dx}{x} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x} \right) = \\
= e^{\alpha} \left(\log \frac{1}{\alpha} + \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Два интеграла в середине — константы, а последний интеграл может быть вычислен разложением подынтегральной функции в ряд Тейлора. Таким образом мы получим разложение $J(\alpha)$ в ряд Тейлора (не считая логарифмического члена).