Флуктуации сопротивления между контактами конечного размера

Аникин Евгений

3 ноября 2017 г.

Сначала я рассматриваю случайную сетку из сопротивлений, задаваемых формулой

$$R(\xi) = R_0 e^{\Lambda F(\xi)}, \tag{1}$$

где ξ — случайная величина от 0 до 1, F — монотонная функция, а $\Lambda \gg 1$. Затем повторяю рассуждения для сетки Миллера–Абрахамса.

1 Точечные контакты

Для начала рассмотрим флуктуации сопротивления между двумя точечными контактами. Физическая картина здесь такова: нефлуктуирующая часть определяется критической подсеткой, а флуктуирующая — путём до критической подсетки. Чтобы оценить флуктуации, можно рассуждать следующим образом: сначала разорвём все сопротивления, а затем будем "включать"их по возрастанию до появления перколяции. Будем называть *подсеткой* ξ подсетку, где включены все сопротивления, меньшие $R(\xi)$.

Можно считать, что флуктуации определяются тем сопротивлением, которое было включено последним. Оно, очевидно, находится не в критической подсетке, а где–то недалеко от контактов, в пути до критической подсетки.

Найдём распределение для этого последнего сопротивления. Пусть расстояние между контактами много больше корреляционной длины. Тогда можно сказать следующее: контакты принадлежат бесконечному кластеру подсетки ξ тогда и только тогда, когда последнее сопротивление $< R(\xi)$. Значит, вероятность того, что последнее сопротивление $< R(\xi)$, равна

$$P(R_{\text{last}} < R(\xi)) = \rho(\xi)^2, \tag{2}$$

где $\rho(\xi) \propto (\xi - \xi_{\text{crit}})^\beta$ — вероятность того, что контакт принадлежит бесконечному кластеру, то есть плотность бесконечного кластера. Таким образом, функция распределения ξ —

$$\frac{dP}{d\xi} \propto (\xi - \xi_{\text{crit}})^{2\beta - 1} \tag{3}$$

Для плоской решётки $\beta \approx 0.14$, поэтому функция распределения имеет узкий максимум при $\xi = \xi_{\text{crit}}$. Однако из–за степенного хвоста типичные ξ больше критического, а флуктуация ξ порядка единицы.

2 Контакты конечного размера

Попытаемся применить ту же самую логику к случаю контактов размера b. Если $b < l_{\text{corr}}$, то справедлива та же самая картина: во флуктуации вносит вклад самое большое сопротивление. Значит,

$$P(R_{\text{last}} < R(\xi)) = \rho(\xi)^2, \tag{4}$$

где $\rho_b(\xi)$ — вероятность того, что контакт размера b перекрывается с бесконечным кластером. Эта вероятность $\propto b^{2-d_f}$. С другой стороны, для $b \sim a$, где a — расстояние между узлами, $\rho \propto (\xi - \xi_{\text{crit}})^\beta$. Значит,

$$\rho_b(\xi) \propto \left(\frac{b}{a}\right)^{2-d_f} (\xi - \xi_{\text{crit}})^\beta \tag{5}$$

Эта формула справедлива до тех пор, пока $\rho_b(\xi) < 1$. Значит, можно окончательно написать

$$\rho_b(\xi) \propto \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{2-d_f} (\xi - \xi_{\text{crit}})^\beta, & 0 < \xi - \xi_{\text{crit}} < \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ 1, & \xi - \xi_{\text{crit}} > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \end{cases} \tag{6}$$

Плотность вероятности —

$$\frac{dP}{d\xi} \propto \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{4-2d_f} (\xi - \xi_{\text{crit}})^{2\beta-1}, & 0 < \xi - \xi_{\text{crit}} < \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ 0, & \xi - \xi_{\text{crit}} > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \end{cases} \tag{7}$$

Было использовано, что $2 - d_f = \beta/\nu$.

Таким образом, ширина распределения по ξ —

$$\Delta\xi \approx \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \tag{8}$$

Флуктуация логарифма R —

$$\Delta \log \frac{R}{R_0} \sim \Lambda \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \tag{9}$$

2.1 Сетка Миллера–Абрахамса

Рассуждения переносятся на сетку Миллера–Абрахамса практически без изменений. Для сетки Миллера–Абрахамса

$$R_{ij} = R_0 e^{-\frac{r_{ij}}{a}} \tag{10}$$

Вероятность того, что контакт размера b перекрывается с бесконечным кластером подсетки, где разораны сопротивления $> r$ —

$$\rho_b(\xi) \propto \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{2-d_f} (n\pi r^2 - B_{\rm cr})^{\beta}, & 0 < n\pi r^2 - B_{\rm cr} < \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ 1, & n\pi r^2 - B_{\rm cr} > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда аналогичными рассуждениями получаем

$$\Delta \log \frac{R}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi n a^2 B_{\rm cr}}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\nu}} \tag{12}$$