Второе задание по допглавам (предварительный вариант)

Anikin Evgeny

6 мая 2017 г.

1 Метод Лапласа

Задача 1 Решить уравнение

$$\sum_k (a_k + b_k x) \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \tag{1}$$

с помощью подстановки

$$u = \oint_\gamma v(z) e^{xz}\, dz, \tag{2}$$

где γ — некоторый контур. Какие условия должны выполняться на концах контура?

Задача 2 Решить уравнение Эйри

$$u'' - zu = 0 \tag{3}$$

Получить два решения, экспоненциально растущее и убывающее при $z \to \infty$, в виде интегралов по контуру и методом перевала найти их асимптотики при вещественных z, $z \to \pm\infty$.

Задача 3 С помощью метода Лапласа решить уравнение на полиномы Эрмита и найти производящую функцию полиномов Эрмита.

Задача 4 Методом Лапласа решить уравнение Бесселя с произвольным, не обязательно целым аргументом:

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) = 0 \tag{4}$$

Используя полученную интегральную формулу, найти выражение для $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ через элементарные функции. *Указание:* сделать в уравнении замену $u = z^{-\nu} v$.

2 Полиномы Лежандра

Задача 5 Вывести рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, используя производящую функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{5}$$

Указание: одно из соотношений получается, если продифференцировать равенство по y. Другое — при дифференцировании по y. Ещё одно — если в интегральном соотношении

$$P_n(x) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \tag{6}$$

выполнить интегрирование по частям.

Замечание: Могут получиться не точно такие же соотношения, как в методичке. Не огорчайтесь.

Задача 6 В интегральном соотношении (6) «посадить» контур интегрирования на разрез подынтегральной функции (где он?) и привести интеграл к интегралу по вещенственной оси.

Задача 7 Найти асимптотическое выражение для $P_n(\cos\theta)$ при больших n.

Задача 8 Разложить функцию x^n по полиномам Лежандра на отрезке $[-1, 1]$.

3 Гипергеометрическая функция

Задача 9 Пусть z_0 — особая точка коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ уравнения

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0 \tag{7}$$

Доказать, что уравнение имеет решение в виде степенного ряда

$$u(z) = z^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{p'(z)}{z-z_0}, \\ q(z) &= \frac{q'(z)}{(z-z_0)^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $p'(z)$, $q'(z)$ — регулярные в z_0 функции. Как найти ν?

Особые точки дифференциальных уравнений, в которых выполняются условия (9), называются *регулярными*.

Задача 10 Доказать, что уравнение (7) имеет решение вида

$$u(z) = z^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \tag{10}$$

в окрестности $z = \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k} \\ q(z) &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k} \end{aligned} \tag{11}$$

Эти условия представляют собой очевидное обобщение (9) на случай $z = \infty$. В этом случае говорят, что $z = \infty$ — регулярная особая точка.

Задача 11 Найти общий вид уравнения второго порядка с

1. двумя регулярными особыми точками;
2. тремя регулярными особыми точками.

Имеется в виду, что никаких других особых точек нет.

Задача 12 Найти решение гипергеометрического уравнения

$$z(z-1)u'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)z)u' + \alpha\beta u = 0 \tag{12}$$

в виде ряда по z: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, причём $c_0 = 1$. Решение, которое вы найдёте, обозначают $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Оно называется гипергеометрической функцией.

Задача 13 Доказать, что произвольное уравнение с тремя регулярными особыми точками сводится к гипергеометрическому, если перевести особые точки дробно–линейным преобразованием в $0, 1, \infty$ и сделать после этого замену $u = z^{\mu}(z-1)^{\nu} v$. *Указание:* μ и ν следует выбрать таким образом, чтобы существовали регулярные решения в окрестности 0 и 1.

Задача 14 Найти решение гипергеометрического уравнения, регулярное в окрестности $z = 1$. *Указание:* подходящей линейной заменой привести исходное уравнение снова к гипергеометрическому, но с другими коэффициентами.

Задача 15 Найти, при каком ν гипергеометрическое уравнение переходит в себя, но с другими α, β, γ, при замене $u = z^{\nu} v$. Найти второе линейно независимое решение гипергеометрического уравнения в окрестности $z = 0$.

Задача 16 Получить вырожденную гипергеометрическую функцию в виде ряда и уравнение на неё, сделав в (12) замену $z = z'/\beta$ и перейдя к пределу $\beta \to \infty$.

Задача 17 Выразить полиномы Лежандра через гипергеометрическую функцию. *Указание*: использовать уравнение на полиномы Лежандра.

Задача 18 Решить уравнение на вырожденную гипергеометрическую функцию методом Лапласа.

Задача 19 Показать, что уравнение Бесселя порядка ν сводится к вырожденному гипергеометрическому после выделения асимптотик при $z \to 0$ и $z \to \infty$, то есть $u = z^{\nu} e^{iz} v$. Выразить функцию Бесселя через вырожденную гипергеометрическую.

4 Квантовая механика

Задача 20 Свести радиальное уравнение Шрёдингера для атома водорода к уравнению на вырожденную гипергеометрическую функцию и найти уровни энергии.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\psi = E\psi \tag{13}$$

Задача 21 Построить нормированные волновые функции гармонического осциллятора. Содержательная часть задачи — в том, чтобы найти нормировку полиномов Эрмита.

5 Ещё задачи

Задача 22 Используя производящую функцию полиномов Эрмита, найти рекуррентные соотношения на полиномы Эрмита.

Задача 23 Найти интегралы

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2n}(xy), \tag{14}$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_{2n-1}(xy), \tag{15}$$

$$J = \int_{0}^{\infty} \sinh \beta x e^{-x^2} H_{2n-1}(x) \tag{16}$$

$$J = \int_{0}^{\infty} \cosh \beta x e^{-x^2} H_{2n}(x) \tag{17}$$