Рассеяние на флуктуациях в модели Лифшица

Аникин Евгений

25 октября 2017 г.

Гамильтониан модели Лифшица задаётся так:

$$H_{ij} = \begin{cases} te^{-\frac{|r_i - r_j|}{a}} \quad \text{при} \quad i \neq j \\ 0 \quad \text{при} \quad i = j \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, среднее расстояние между узлами мало, то есть $na^3 \gg 1$. Тогда можно использовать континуальное приближение, и уравнение Шрёдингера запишется так:

$$t \int e^{-\frac{|r-r'|}{a}} n(r')\Psi(r')d^3r' = E\Psi(r) \tag{2}$$

Здесь $n(r')$ можно заменить на $n_0 + \delta n$, где n_0 — среднее значение плотности, а δn — флуктуации. В пренебрежении флуктуациями уравнение Шрёдингера тривиально решается в Фурье–представлении:

$$\epsilon(k) = t\frac{8\pi n_0 a^3}{(1+(ka)^2)^2} \tag{3}$$

Теперь изучим влияние флуктуаций. Оператор взаимодействия с флуктуациями записывается в виде

$$V(r, r') = te^{-\frac{|r-r'|}{a}} \delta n(r') \tag{4}$$

В крестовой диаграммной технике главный вклад в собственно–энергетическую часть имеет вид

$$\Sigma(r, r') = \left\langle \int d^3r_1 d^3r_2 V(r, r_1) G_0(r_1 - r_2) V(r_2, r') \right\rangle = \\ = t^2 \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-\frac{|r-r_1|+|r_2-r'|}{a}} \langle \delta n(r_1)\delta n(r_2)\rangle G_0(r_1 - r_2) \tag{5}$$

Здесь $G_0(r)$ — функция Грина. При усреднении можно считать, что $\langle \delta n(r_1)\delta n(r_2)\rangle = n_0\delta(r_1 - r_2)$. Тогда

$$\Sigma(r, r') = n_0 t^2 G_0(0) \int d^3r'' e^{-\frac{|r-r''|+|r''-r'|}{a}} = t^2 G_0(0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{8\pi a^3}{(1+(ka)^2)^2} \right)^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{6}$$

Таким образом,

$$\Sigma(k) = n_0 t^2 G_0(0) \left(\frac{8\pi a^3}{(1+(ka)^2)^2} \right)^2 \tag{7}$$

Время жизни квазичастицы определяется соотношением

$$\frac{1}{2\tau} = -\operatorname{Im}\Sigma(k) \tag{8}$$

Найдём мнимую часть $G_0(0)$:

$$\operatorname{Im} G_0(0) = \operatorname{Im} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \epsilon(k) + i\delta} = -\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \epsilon(k)) = -\frac{k^2}{2\pi v} \tag{9}$$

В этом выражении $v = \frac{d\epsilon}{dk}$ — скорость. Используя выражение для скорости

$$v = -\frac{32\pi n_0 a^5 t}{(1+(ka)^2)^3} k, \tag{10}$$

можно выписать ответ для τ^{-1}:

$$\tau^{-1} = \frac{n_0 t^2 k^2}{\pi v} \left(\frac{8\pi a^3}{(1+(ka)^2)^2} \right)^2 = t \frac{2ka}{1+(ka)^2} \tag{11}$$

Длина свободного пробега —

$$l = v\tau = \frac{16\pi a \cdot n_0 a^3}{(1+(ka)^2)^2} \tag{12}$$

Как и следовало ожидать, длина свободного пробега велика при большом $n_0 a^3$. Это оправдывает то, что мы ограничились первым порядком теории возмущений.