Функции Грина — продолжение

Anikin Evgeny

18 февраля 2017 г.

1 Функция Грина как обратный оператор

Начнём с того, что любая функция $g(x, y)$ двух переменных задаёт линейный оператор $\hat{L}_g$, действующий на пространстве функций следующим образом:

$$\hat{L}_g \phi(x) = \int g(x, y)\phi(y)dy \tag{1}$$

Несложно заметить здесь сходство с правилами перемножения матриц.

Функция $g(x, y)$ может быть (и часто является) не обычной, а обобщённой функцией. Например, единичный оператор задаётся дельта–функцией:

$$\int \delta(x - y)\phi(y)dy = \phi(x) \tag{2}$$

Дифференциальные операторы задаются производными от дельта–функции. Например,

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \int \delta'(x - y)\phi(y)dy \tag{3}$$

Вооружившись этим знанием, нетрудно заметить, что уравнение на функцию Грина

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \tag{4}$$

есть в точности уравнение на оператор, обратный $\hat{L}$. В операторном виде

$$\hat{L}\hat{G} = \mathbb{1}, \tag{5}$$

или даже

$$\hat{G} = \hat{L}^{-1} \tag{6}$$

2 Некоторые замечания

В предыдущем листке подразумевалось, что речь идёт о задаче эволюции во времени. Возможна также ситуация, когда в задаче поставлены граничные условия. А именно, будем решать уравнение

$$\hat{L}\phi = f(x), \tag{7}$$

где x — координата в n–мерном пространстве, функция f задана в области M, и есть какие–нибудь граничные условия на ∂M (например, $\phi(x) = 0$ при $x \in \partial M$).