Уравнения диффузии и Шрёдингера

Anikin Evgeny

23 марта 2017 г.

1 Уравнение диффузии

1.1 Точное решение

Уравнение диффузии в d–мерном пространстве —

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u \tag{1}$$

Мы будем решать для него задачу Коши. Для этого найдём решение с начальным условием $u(x,t)|_{t=0} = \delta(x)$. Это легко сделать в фурье–представлении.

Пусть

$$u(x,t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} u(k,t) \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{\partial u(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 u(k,t) \tag{3}$$

Следовательно,

$$u(k,t) = u(k)e^{-Dk^2 t} \tag{4}$$

Начальное условие даёт $u(k) = 1$. Значит,

$$u(x,t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-Dk^2 t + ikx} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} \tag{5}$$

Теперь легко решить задачу Коши для произвольного начального условия $\phi_0(x)$. Если представить $\phi_0(x)$ как линейную комбинацию дельта–функций,

$$\phi_0(x) = \int d^d x' \, \phi_0(x')\delta(x - x'), \tag{6}$$

то решение уравнения диффузии запишется в виде

$$\phi(x,t) = \int d^d x' \, \phi_0(x') \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-x'|^2}{4Dt}} \tag{7}$$

1.2 Асимптотика на больших временах

Пусть $\phi_0(x)$ локализована около $x_0 = 0$, и нас интересует решение уравнения диффузии на больших расстояниях и временах. Тогда в интеграле (7) можно разложить экспоненту в ряд:

$$e^{-\frac{|x-x'|^2}{4Dt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} \tag{8}$$

Тогда решение уравнения диффузии —

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} \int d^d x' \phi_0(x') x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \tag{9}$$