Фейнмановские пропагаторы

Anikin Evgeny, 121

16 января 2016 г.

1 Скалярное поле

Оператор поля записывается через операторы рождения и уничтожения так:

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}) \tag{1}$$

Фейнмановский пропагатор по определению — это следующее выражение:

$$D(x-y) = \langle 0 | \mathrm{T} \phi(x)^\dagger \phi(y) | 0 \rangle \tag{2}$$

Пусть сначала $x_0 > y_0$. Тогда

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{e^{-ipx+ip'y}}{\sqrt{2E_p 2E_{p'}}} \langle 0 | a_p a_{p'}^\dagger | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_pt+i(\vec{p}\vec{x})}}{2E_p} \tag{3}$$

В противном случае x и y меняются местами. Это приводит к тому, что меняется знак при iE_pt. Теперь нужно найти импульсное представление пропагатора. После пространственного фурье-преобразования пропагатор выглядит так:

$$D(t, \vec{p}) = \frac{e^{-iE_p|t|}}{2E_p} \tag{4}$$

Осталось сделать временное:

$$\begin{aligned} D(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{ip_0t} \frac{e^{-iE_p|t|}}{2E_p} = \\ = \int_0^{+\infty} dt\, \frac{e^{i(p_0-E_p)t}}{2E_p} + \int_0^{+\infty} dt\, \frac{e^{-i(p_0+E_p)t}}{2E_p} = \\ = \frac{1}{2E_p} \left[\frac{1}{-i(p_0-E_p)+\delta} + \frac{1}{i(p_0+E_p)+\delta} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

Ура! Последнее — это и есть нужное выражение для пропагатора. Окончательно:

$$D(p) = \frac{i}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{6}$$

2 Массивное векторное поле

Действие:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\nu A^\nu \right] \tag{7}$$

Интегрируя по частям, получим

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \, A^\mu (g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu \tag{8}$$

Пропагатор — это вот что:

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \frac{\int \mathcal{D}A \, A^\mu(x) A^\nu(y) \exp iS}{\int \mathcal{D}A \, \exp iS} \tag{9}$$

Нужно найти матричный элемент оператора, обратного к оператору в скобках. Это и будет, с точностью до множителя, пропагатор. В импульсном представлении уравнение на пропагатор выглядит так:

$$i(g_{\mu\nu}(k^2 - m^2) - k_\mu k_\nu) G^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \tag{10}$$

Ответ:

$$G^{\nu\rho} = \frac{-ig^{\nu\rho}}{k^2 - m^2} + \frac{ik^\nu k^\rho}{m^2(k^2 - m^2)} \tag{11}$$

Нужно ещё вспомнить, как повёрнут контур интегрирования по времени, и соответственно дописать $i\epsilon$ в нужное место.

3 Функция Грина системы ферми–частиц

Теперь обратимся к твёрдому телу. Для многочастичных систем вводят операторы поля:

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{-iE_p t + ipx} a_p \tag{12}$$

Функция Грина определяется так:

$$G(t - t', x - x') = -i \langle \Omega | \mathrm{T} \Psi(t, x) \Psi^\dagger(t', x') | \Omega \rangle \tag{13}$$

Отличие от предыдущего определения (из Пескина–Шрёдера) только в множителе $-i$. $|\Omega\rangle$ — основное состояние системы из N частиц. Подставляя операторы поля в определение, получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\Psi(t, x)\Psi^\dagger(t', x') = \\ &\quad = \frac{1}{V} \sum_{p,p'} e^{-iE_p t + iE_{p'} t' + ipx - ip'x'} \begin{cases} a_p a_{p'}^\dagger, & \text{если } t > t' \\ -a_{p'}^\dagger a_p, & \text{если } t < t' \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

$$G(t-t', x-x') = -i\frac{1}{V}\sum_p e^{-iE_p(t-t')+ip(x-x')}\left\{\begin{array}{cl} 1-n_p, & \text{если } t>t' \\ n_p, & \text{если } t<t' \end{array}\right. \tag{15}$$

Тогда в представлении p, t функция Грина выглядит так:

$$G(t,p) = e^{-iE_pt}\left\{\begin{array}{cl} 1-n_p, & \text{если } t>0 \\ n_p, & \text{если } t<0 \end{array}\right. \tag{16}$$

Чтобы найти функцию Грина в частотно–импульсном представлении, нужно сделать ещё одно фурье–преобразование. Ответ получается таким:

$$G(\omega,p) = \frac{1-n_p}{\omega-E_p+i\epsilon} + \frac{n_p}{\omega-E_p-i\epsilon} \tag{17}$$