Функции Грина — продолжение

Anikin Evgeny

21 февраля 2017 г.

1 Примеры использования функций Грина в физике

1.1 Запаздывающие потенциалы

Общая задача электродинамики — найти электромагнитные поля при заданном движении зарядов, то есть решить уравнения Максвелла. Последние записываются в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \tag{1}$$

где $\mu, \nu = 0 \dots 3$, j^ν — вектор четырёхмерной плотности тока (j^0 — плотность заряда, а j^k — трёхмерная плотность тока), а $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электроманнитного поля. A_μ — четырёхмерный вектор–потенциал.

Уравнения Максвелла калибровочно инвариантны. Это значит, что если A_μ — решение уравнений, то

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{2}$$

тоже является решением (χ — произвольная функция координат и времени). Преобразование (2) называется *калибровочным*.

Калибровочные преобразования позволяют наложить некоторое дополнительное условие на A_μ. Удобно потребовать, чтобы выполнялось так называемое условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3}$$

С его помощью можно преобразовать уравнения Максвелла:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi j^\nu \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем волновое уравнение для каждой компоненты вектор–потенциала. Его можно решить, использовав функцию Грина волнового уравнения.

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t - |x|)\theta(t) \tag{5}$$

Решение с помощью функции Грина записывается в виде

$$
\begin{aligned}
A^{\nu}(t,x) = \int dt' d^3x' 4\pi j^{\nu}(t',x') G(t-t',x-x') = \\
= \int d^3x' 4\pi j^{\nu}(t',x') \frac{1}{4\pi|x-x'|} \delta(t-t'-|x-x'|)\theta(t) = \\
= \int d^3x' \frac{j^{\nu}(t-|x-x'|,x')}{|x-x'|}
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Таким образом,

$$
A^{\nu}(t,x) = \int d^3x' \frac{j^{\nu}(t-|x-x'|,x')}{|x-x'|} \qquad (7)
$$

Это — формула для запаздывающих потенциалов из Ландау–Лифшица.

1.2 Интегральное уравнение Шрёдингера и волновые функции дельта–ям

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера для частицы в потенциальной яме:

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x) \qquad (8)
$$

Перепишем его в виде

$$
\Psi(x)'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = \frac{2mU(x)}{\hbar^2}\Psi(x) \qquad (9)
$$

Будем решать задачу о связанном состоянии в дельта–яме. В этом случае $E < 0$.

Нетрудно показать, что функция Грина оператора, стоящего в левой части, равна

$$
G(x) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa \equiv \frac{2m|E}{\hbar^2} \qquad (10)
$$

Теперь посмотрим внимательно на уравнение Шрёдингера (9). Если бы в правой части была известная функция, Ψ выражалась бы обычным образом через функцию Грина. Однако в правой части тоже стоит Ψ. Тем не менее, выражение через функцию Грина тоже можно записать:

$$
\Psi(x) = \int dx' \frac{2mU(x')}{\hbar^2} \Psi(x') G(x-x') + \text{однородное решение} \qquad (11)
$$

Это, конечно, не ответ, а интегральное уравнение. Однако оно элементарно решается, если $U(x) = U_0\delta(x)$.

Во–первых, однородные решения для $E < 0$ — это растущие экспоненты. Так как в квантовой механике нас интересуют решения, во всяком случае не растущие на бесконечности, однородного слагаемого в (11) не будет.

Подставим $U(x) = U_0\delta(x)$ в (11). Интеграл с дельта–функцией берётся, и в результате получается выражение

$$\Psi(x) = \frac{2mU_0}{\hbar^2}\Psi(0)\frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa|x|} \tag{12}$$

Оно выглядит немного странно: функция $\Psi(x)$ выражается через своё значение в нуле. Чтобы такое выражение имело смысл, оно должно быть самосогласованным, то есть

$$\Psi(0) = \frac{mU_0}{\kappa\hbar^2}\Psi(0) \tag{13}$$

Отсюда следует, что $\kappa = \frac{mU_0}{\hbar^2}$, и

$$E = -\frac{mU_0^2}{2\hbar^2} \tag{14}$$

2 Функция Грина как обратный оператор

Любая функция $g(x,y)$ двух переменных задаёт линейный оператор $\hat{L}_g$, действующий на пространстве функций следующим образом:

$$\hat{L}_g\phi(x) = \int g(x,y)\phi(y)dy \tag{15}$$

Несложно заметить здесь сходство с правилами перемножения матриц.

Функция $g(x,y)$ может быть (и часто является) не обычной, а обобщённой функцией. Например, единичный оператор задаётся дельта–функцией:

$$\int \delta(x-y)\phi(y)dy = \phi(x) \tag{16}$$

Дифференциальные операторы задаются производными от дельта–функции. Например,

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \int \delta'(x-y)\phi(y)dy \tag{17}$$

Вооружившись этим знанием, нетрудно заметить, что уравнение на функцию Грина

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y) \tag{18}$$

есть в точности уравнение на оператор, обратный $\hat{L}$. В операторном виде

$$\hat{L}\hat{G} = \mathbb{1}, \tag{19}$$

или даже

$$\hat{G} = \hat{L}^{-1} \tag{20}$$

Однако возникает следующий вопрос: у оператора $\hat{L}$ могут быть нулевые собственные значения. Из этого, казалось бы, следует, что обратного оператора к $\hat{L}$ не может существовать. Как это согласуется с результатами предыдущего листка?

3 Некоторые замечания

В предыдущем листке подразумевалось, что речь идёт о задаче эволюции во времени. Возможна также ситуация, когда в задаче поставлены граничные условия. А именно, будем решать уравнение

$$\hat{L}\phi = f(x), \tag{21}$$

где x — координата в n–мерном пространстве, функция f задана в области M, и есть какие–нибудь граничные условия на ∂M (например, $\phi(x) = 0$ при $x \in \partial M$).