Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

2 ноября 2015 г.

1 Третья задача

1.1 Условие задачи

Найти излучение системы зарядов с точностью до членов порядка c^{-5}.

1.2 Ответ

$$W = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl}}{180c^5} + \frac{2\ddot{M}^2}{3c^3} \tag{1}$$

1.3 Решение

Общая формула для запаздывающего потенциала:

$$A^\mu_\omega = \int \frac{j^\mu}{c} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, d^3y \tag{2}$$

Вычислим A^k, а A^0 и напряжённости полей определим из условия Лоренца. Разложим член e^{ikr}/r:

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \frac{e^{ikr}}{r} y^{i_1} \dots y^{i_m} \tag{3}$$

Тогда для A^μ имеем

$$A^k_\omega = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} y^{i_1} \dots y^{i_m}\, d^3y \tag{4}$$

Выпишем первые два члена:

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c}\, d^3y - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} y^i\, d^3y + \dots \tag{5}$$

Пользуясь сохранением заряда и интегрируя по частям, можно написать следующие равенства:

$$\mathbf{d}^k = \int \frac{j_0}{c} y^k\, d^3x = \frac{i}{kc} \int j^k\, d^3y \tag{6}$$

$$D^{kl} = \int \frac{j_0}{c}(3y^k y^l - \delta^{kl} r^2)\, d^3y = \frac{i}{kc}\int (3j^k y^l + 3j^l y^k - 2\delta_{kl} j^a y^a) d^3y \qquad (7)$$

Для магнитного момента можно написать

$$\epsilon^{klm} M^m = \frac{1}{2c}\int j^k y^l - j^l y^k\, d^3y \qquad (8)$$

Теперь вычислим магнитное поле. На расстояниях много больше длины волны волна почти плоская, поэтому можно дифференцировать только экспоненту. Получается

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r}\left(\int \frac{j^k}{c}\, d^3y - ikn^i \int \frac{j^k}{c} y^i\, d^3y + \dots\right) \qquad (9)$$

К интегралу во втором слагаемом можно безбоязненно прибавить слагаемое, пропорциональное δ^{ka} (это следует из калибровочной инвариантности). Поэтому вектор-потенциал можно переписать в виде

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r}\left(-ik\mathbf{d}^k - \frac{1}{6}k^2 n^i D^{ik} - ik\epsilon^{klm} n^l M^k + \dots\right) \qquad (10)$$

Перейдём от A^μ_ω к A^μ. Тогда легко получается, что

$$A^k = \frac{1}{cr}\left(\dot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c} n^i \ddot{D}^{ik} + \epsilon^{klm} n^l \dot{M}^m\right) \qquad (11)$$

И далее, для плоской волны

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (12)$$

$$B^i = -\frac{1}{c^2 r}\left(\epsilon^{ijk} n^j \ddot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c}\epsilon^{ijk} n^j n^l \dddot{D}^{kl} + n^i n^j \ddot{M}^j - \ddot{M}^i\right) \qquad (13)$$

Вектор Пойнтинга везде параллелен $\vec{n}$, а его модуль —

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}|\vec{B}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}\left(\epsilon^{ijk} n^j \ddot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c}\epsilon^{ijk} n^j n^l \dddot{D}^{kl} + n^i n^j \ddot{M}^j - \ddot{M}^i\right)^2 \qquad (14)$$

Полный поток энергии — это интеграл по сфере:

$$W = \int \frac{d\Omega}{4\pi c^3}\left\{\epsilon^{ijk} n^j \ddot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c}\epsilon^{ijk} n^j n^l \dddot{D}^{kl} + (n^i n^j \ddot{M}^j - \ddot{M}^i)\right\}^2 \qquad (15)$$

Интегрирование даёт

$$W = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl}}{180 c^5} + \frac{2\ddot{M}^2}{3c^3} \qquad (16)$$