Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

28 сентября 2015 г.

1 Задача про колесо

1.1 Ответ

Колесо не проскальзывает, если выполняется неравенство

$$k > \frac{\epsilon}{3}\frac{|2gR - v_0^2|}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v_0^2)^2}} + O(\epsilon^2), \tag{1}$$

$$v_0^2 = \frac{2(E - mgR)}{m + I/R^2} \tag{2}$$

Потенциальная энергия отсчитывается от уровня пола. Область, где колесо проскальзывает (в первом порядке), закрашена на рисунке красным. При $v_0^2 = 2gR$ минимальный коэффициент трения в первом порядке равен нулю. Во втором порядке он равен

$$k_{\min} = \frac{5}{6}\epsilon^2 \tag{3}$$

Это будет означать, что граница красной области на рисунке не будет подходить к оси абсцисс при $v_0^2 = 2gR$, а будет просто иметь минимум.

Область допустимых значений параметра v_0 такова: $v_0^2 > 2gR\epsilon/3$ (это берётся из условия, что колесо движется поступательно, а не колеблется).

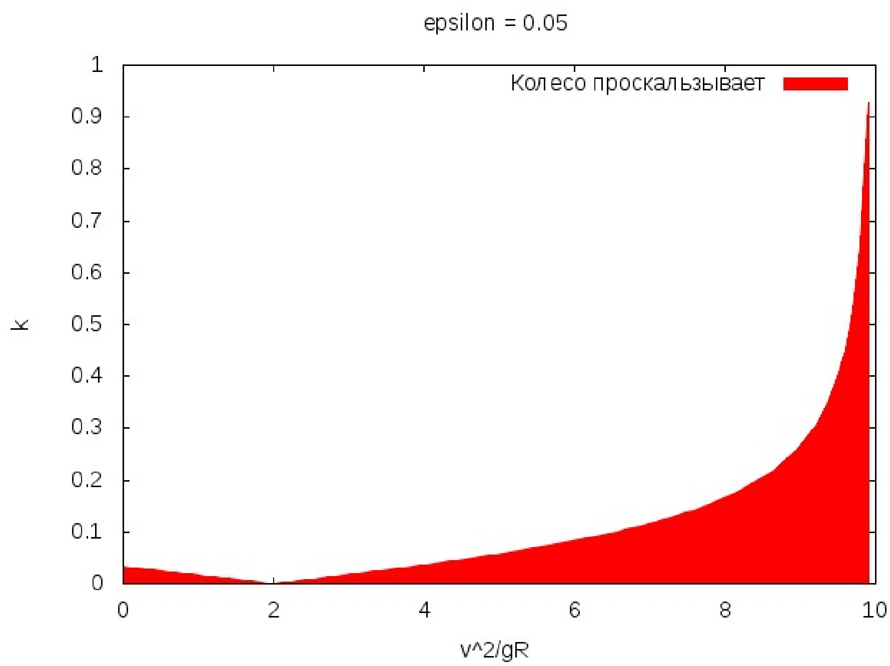
1.2 Решение

Примем следующие обозначения: пусть $R(1+\epsilon/2)$, $R(1-\epsilon/2)$ — полуоси эллиптического колеса, α — угол поворота, x, y — координаты центра масс колеса, ξ — смещение центра масс относительно точки касания по горизонтали (см. рисунок).

Очевидны следующие формулы (точные)

$$x' = y \tag{4}$$

$$x'' = y' = -\xi \tag{5}$$



Ещё в первом порядке по ϵ верны равенства:

$$y(\alpha) = R\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\cos 2\alpha + O(\epsilon^2)\right) \tag{6}$$

$$\xi(\alpha) = R\left(\epsilon \sin 2\alpha + O(\epsilon^2)\right) \tag{7}$$

Теперь напишем законы Ньютона для колеса.

$$I\dot{\omega} = N\xi - F_{\mathrm{tr}}y \tag{8}$$

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{tr}} \tag{9}$$

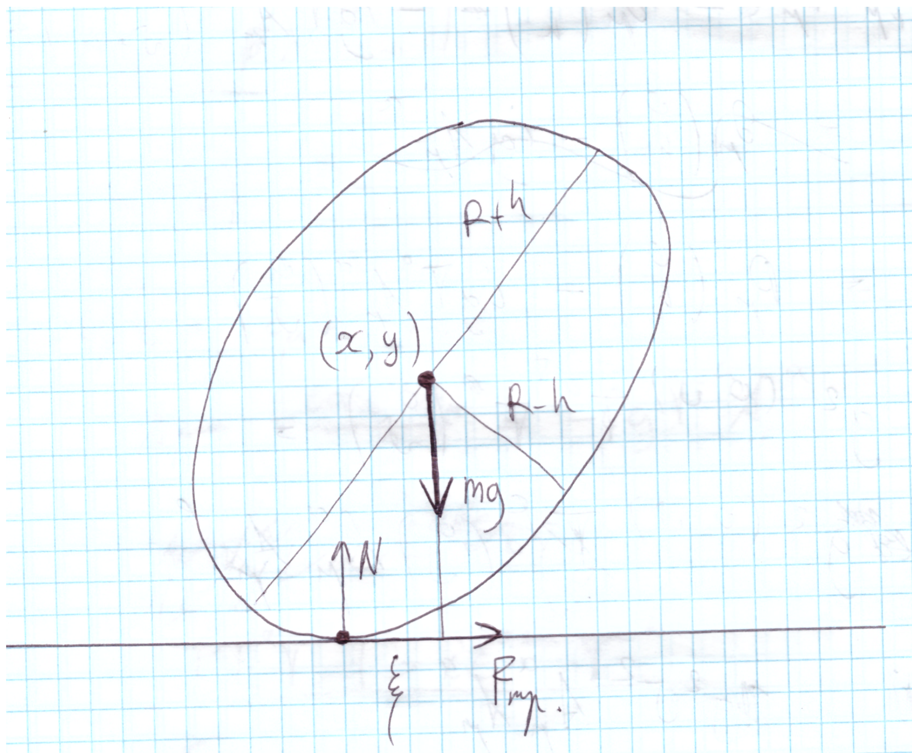
$$m\ddot{y} = -mg + N \tag{10}$$

Исключая силы трения и реакции опоры, получим уравнение

$$I\dot{\omega} = m(\ddot{y} + g)\xi - m\ddot{x}y \tag{11}$$

Используя очевидные равенства $\ddot{x} = x''\omega^2 + x'\dot{\omega}$, $\ddot{y} = y''\omega^2 + y'\dot{\omega}$ (штрихи означают производную по углу α), можно выразить угловое ускорение через угловую скорость и угол.

$$\dot{\omega} = \frac{(y''\xi - x''y)\omega^2 + g}{I/m - y'\xi + x'y} \tag{12}$$



или, используя 4, 5,

$$\dot{\omega} = \xi \, \frac{(y - \xi')\omega^2 + g}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{13}$$

Отсюда следует точное выражение для $\ddot{x}$.

$$\ddot{x} = \frac{g\xi y}{I/m + y^2 + \xi^2} - \xi\omega^2 \, \frac{y\xi' + \xi^2 + I/m}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{14}$$

Пользуясь законом сохранения энергии,

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m(y^2 + \xi^2)\omega^2}{2} + mgy \tag{15}$$

$$\omega^2 = \frac{2(E/m - gy)}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{16}$$

перепишем выражение для $\ddot{x}$.

$$\ddot{x} = x''\omega^2 + x'\dot{\omega} = \xi \left[\frac{gy}{I/m + y^2 + \xi^2} - \frac{2(E/m - gy)(y\xi' + \xi^2 + I/m)}{(I/m + y^2 + \xi^2)^2} \right] \tag{17}$$

Пусть дальше $\lambda = 0.5$, $I = \lambda m R^2$, $E = mgR + \frac{(\lambda+1)mv_0^2}{2}$. ($v_0$ здесь — не скорость, а просто параметр). В первом порядке по ϵ

$$\ddot{x} = \epsilon \sin 2\alpha \frac{gR - \lambda v_0^2}{(\lambda+1)R} \tag{18}$$

То же самое можно сделать для $\ddot{y}$, но точное выражение нам не понадобится. В первом порядке по ϵ

$$\ddot{y} = -\xi' \omega^2 = -2\epsilon \frac{v_0^2}{R} \cos 2\alpha \tag{19}$$

Условие того, что колесо не проскальзывает, можно записать так:

$$k > \left| \frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + g} \right| = \left| \frac{2gR - v_0^2}{3} \frac{\epsilon \sin 2\alpha}{gR - 2\epsilon v_0^2 \cos 2\alpha} \right| \tag{20}$$

Нужно найти угол, при котором выражение в правой части предыдущего равенства максимально. Дифференцируя правую часть, приходим к условию

$$\cos 2\alpha = \frac{2\epsilon v_0^2}{gR} \tag{21}$$

Подставляя в 20, получим

$$k > \frac{\epsilon}{3} \frac{2gR - v_0^2}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v_0^2)^2}} \tag{22}$$

При $v_0^2 = 2gR$ сила трения обращается в нуль в первом порядке по ϵ. Поэтому минимальный коэффициент трения тоже равен нулю в первом порядке.

При $v_0^2 = \frac{gR}{2\epsilon}$ обращается в нуль сила реакции опоры. Это значит, что колесо начнёт подпрыгивать.

Если $v_0^2 \gg gR\epsilon$, то v_0 равно скорости движения колеса с точностью до членов порядка ϵ.

Найдём минимальный коэффициент трения при $v^2 = 2gR$ во втором порядке. Для этого нужно разложить 17 до следующего порядка. Так как при $v^2 = 2gR$ выражение в квадратных скобках в формуле 17 обращается в нуль в нулевом порядке, нужно разложить до первого порядка выражение в квадратных скобках, а ξ во втором порядке искать не нужно.

После неинтересных выкладок (раскладываем часть 17 в квадратных скобках до первого порядка, подставляем значение v_0 и значение ξ в первом порядке) получается такой ответ:

$$\ddot{x} = -\frac{5}{6} g \epsilon^2 \sin 4\alpha \tag{23}$$

Так как $v^2 = 2gR \ll \frac{gR}{2\epsilon}$, можно не учитывать изменения $\ddot{y}$. Поэтому минимальный коэффициент трения —

$$k_{\min} = \frac{5}{6} \epsilon^2 \tag{24}$$