

Задача 1 Методом Лапласа решить уравнение модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$u'' + \frac{1}{x}u' - u = 0 \quad (1)$$

Найти решение, конечное при $x = 0$. Найти асимптотику этого решения при $x \rightarrow \infty$ (не методом перевала).

Задача 2 Получить уравнение на присоединённые функции Лежандра $P_{lm}(\cos \theta)$. (Собственные функции оператора квадрата момента импульса имеют вид $P_{lm}(\cos \theta)e^{im\phi}$.) Свести его к гипергеометрическому уравнению и найти решение, регулярное при $\cos \theta = 1$.

Задача 3 Методом перевала найти асимптотику полиномов Эрмита, считая, что $x^2, n \rightarrow \infty$, а x^2/n остаётся конечным. Интегральная формула для полиномов Эрмита —

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} e^{2xz - z^2} \quad (2)$$

Рассмотреть два случая расположения перевальных точек. Какие из них дают вклад? Вычислить асимптотику в том случае, когда обе точки важны.