Адиабатический инвариант и переменные действие–угол

Anikin Evgeny, 128

14 января 2017 г.

1 Адиабатический инвариант

Пусть гамильтонова система описывается одной координатой q. Докажем, что величина

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \tag{1}$$

не меняется при медленном изменении гамильтониана во времени. Пусть гамильтониан зависит от параметра λ, который, в свою очередь, зависит от t.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} = T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\,dq = -\oint \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}\,dq \tag{5}$$

Таким образом,

$$\frac{dI}{dt} = T\frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda} - \dot{\lambda}\oint \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}\,dq \tag{6}$$

Усредним теперь $\frac{dI}{dt}$ по периоду. Тогда первое слагаемое в (6) сократится со вторым, что доказывает, что I – адиабаический инвариант.

2 Переменные действие–угол

Сделаем каноническое преобразование так, чтобы I стало координатой.