

где  $x(0)$  – начальное значение переменной  $x$ . Действительно, выражение (2.7) удовлетворяет исходному уравнению и начальному условию, поскольку  $G(+0) = 1$ .

Рассмотрим более сложный пример, а именно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi, \quad (2.8)$$

где  $\nu$  имеет смысл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (2.8) можно записать через Гриновскую функцию  $G(t)$ , в виде (2.2) или (2.4). Функция  $G(t)$  удовлетворяет уравнению (2.8) с  $\delta$ -функцией в правой части:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right) G(t) = \delta(t). \quad (2.9)$$

Найдем решение этого уравнения.

Как мы уже установили, в силу причинности  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ . В отличие от Гриновской функции (2.5), решение уравнения (2.9) остается непрерывным при  $t = 0$  в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по  $t$ . В этом случае  $\delta$ -функция производится, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 17 А. Используя соотношение (17.8), легко найти, что скачок первой производной в  $G(t)$  должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при  $t = +0$   $G = 0$ ,  $G' = 1$ . Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего  $G(t)$  при  $t > 0$ , поскольку правая часть уравнения (2.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t). \quad (2.10)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер Гриновской функции.

Выражение (2.4) дает решение уравнения (2.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной,  $x$  и  $\dot{x}$ , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем  $t = 0$ . Решение задачи Коши для уравнения (2.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (2.11)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.8), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений  $G(+0) = 0$ ,  $\dot{G}(+0) = 1$ ,  $\ddot{G}(+0) = 0$ , следующих из выражения (2.10).

В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти для уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi, \quad (2.12)$$

где  $L(z)$  – некоторый полином от  $z$ . Именно к типу (2.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (2.1, 2.8). Решение уравнения (2.12) записывается в виде (2.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t). \quad (2.13)$$

Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (2.1, 2.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (2.12) общего вида.

Запишем Гриновскую функцию в виде интеграла Фурье

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \tilde{G}(\omega). \quad (2.14)$$

Учитывая соотношение (17.4), мы находим

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{L(-i\omega)}. \quad (2.15)$$

Подставляя выражение (2.15) в интеграл Фурье (2.14) и производя интегрирование по частоте  $\omega$ , можно найти выражение для функции Грина  $G(t)$ . Технически взятие интеграла сводится к вычетам в нулях  $L(-i\omega)$ .

Здесь надо сделать следующее замечание. Для устойчивой системы все полюса выражения (2.15) лежат в нижней полуплоскости, что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. В этом случае интеграл (2.14) равен нулю при  $t < 0$ . Действительно, сдвигая контур интегрирования вверх (подынтегральное выражение аналитично в верхней полуплоскости), мы получаем в пределе ноль при  $t < 0$ . Таким образом, функция Грина, получающаяся из интеграла (2.14), автоматически обладает необходимым свойством причинности. В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (2.15) в верхней полуплоскости. В этом случае контур интегрирования в интеграле (2.14) надо деформировать так, чтобы обойти все полюса выражения (2.15) сверху. Это обеспечит функции Грина необходимые свойства причинности. В то же время такой интеграл с деформированным контуром будет по-прежнему удовлетворять уравнению (2.13), как можно убедиться прямой проверкой с использованием соотношения (17.4).

**Задача 2.1.** Найти решение задачи Коши для уравнения (2.1) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ . Как выглядит решение при  $\alpha \rightarrow \gamma$ ?

**Задача 2.2.** Найти решение задачи Коши для уравнения (2.8) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ .

**Задача 2.3.** Найти выражения для Гриновских функций (2.5, 2.10), исходя из соотношений (2.14, 2.15).

**Задача 2.4.** Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

**Задача 2.5.** Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\left( \frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

**Задача 2.6.** Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

### 3. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В разделе 2 мы рассматривали задачи эволюционного типа, когда решение определялось внешним воздействием и начальными условиями, взятыми в начальный момент времени. Однако весьма важны также краевые или граничные задачи, когда искомая функция удовлетворяет каким-либо условиям на границах некоторой области в пространстве. Простейшие по постановке краевые задачи и соответствующие функции Грина возникают в электростатике, когда, например, требуется найти поле системы (распределенных) зарядов в присутствии проводников. Более сложные задачи такого типа возникают при исследовании распространения электромагнитных волн. Здесь мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение краевых задач, является просто интервалом  $(a, b)$ . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при  $x = a$  и/или  $x = b$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $\Phi$  распределения заряда, плотность которого  $\rho$  зависит только от одной координаты  $x$ . В этом случае потенциал также зависит только от координаты  $x$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi = -4\pi\rho. \quad (3.1)$$

Поскольку уравнение (3.1) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет

об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, заданными условиями  $x = a$  и  $x = b$ , то граничные условия имеют вид  $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ . Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (3.1) функцию Грина  $G(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b, \quad (3.2)$$

а также граничным условиям  $G(a, y) = G(b, y) = 0$ . Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущей лекции. Это связано с нарушением однородности пространства за счет границ. Решение уравнения (3.1) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$\Phi(x) = \int_a^b dy G(x, y)[-4\pi\rho(y)]. \quad (3.3)$$

Очевидно, выражение (3.3) удовлетворяет уравнению (3.1) в силу (3.2) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(x, y)$ . Для этого заметим, что при  $x < y$  уравнение (3.2) сводится к  $\partial_x^2 G = 0$ , что дает  $G(x, y) = A(x - a)$ , где  $A$  — некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при  $x = a$ . Аналогично, при  $x > y$  мы находим  $G(x, y) = B(x - b)$ , где  $B$  — другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению  $\partial_x^2 G = 0$  и нулевому граничному условию при  $x = b$ . Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по  $x$ , она должна быть непрерывной в точке  $x = y$ , что дает соотношение  $A(y - a) = B(y - b)$ . Далее, скачок производной функции Грина  $G(x, y)$  в точке  $x = y$  равен  $B - A$ , что в силу уравнения (3.2) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для  $A$  и  $B$ , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y, \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (3.4) симметрична:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции  $f(x)$  на интервале  $a < x < b$  и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\hat{L}f(x) = \phi, \quad (3.5)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d}{dx} + U, \quad (3.6)$$

где  $\hat{L}$  называется дифференциальным оператором Штурма-Лиувилля. Здесь ‘сила’  $\phi$  и факторы  $Q, U$  являются заданными функциями  $x$ . Решение уравнения

Дополнительное же условие отсутствия особенности при  $r = 0$  возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (3.15) в точке  $r = 0$ .

Заметим, что при нулевых граничных условиях и  $Q = 0$  оператор (3.6) является самосопряженным, смотри раздел 17D. Действительно, интегрирование по частям переводит  $\int dx f(d^2/dx^2 + U)g$  в  $\int dx g(d^2/dx^2 + U)f$ , при этом вне-интегральные члены оказываются равными нулю в силу нулевых граничных условий. Оператор  $d^2/dx^2 + U$  является самосопряженным также и на классе периодических функций  $f$ , удовлетворяющих условиям  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$ , поскольку они также приводят к занулению вне-интегральных членов при интегрировании по частям. Для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии с выражением (3.12), так как условия  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$  связывают значения функции  $f$  на разных концах интервала, так что нельзя ввести 'левую' и 'правую' функции  $u$  и  $v$ .

Поэтому для периодических функций следует использовать более общее выражение

$$G(x, y) = \sum_n A_n^{-1} \frac{f_n(x) f_n(y)}{\lambda_n}. \quad (3.17)$$

которое корректно, если все его собственные значения  $\lambda_n$  отличны от нуля. Используя соотношение (17.40), легко проверить выполнение уравнения (3.8). Кроме того, функция (3.17) удовлетворяет необходимым граничным условиям. Если же среди собственных значений  $\lambda_n$  оператора  $\hat{L}$  имеются нулевые, то функция Грина не существует. Можно однако, ограничить класс функций  $f$  так, чтобы исключить собственные функции с нулевыми собственными значениями. На этом ограниченном классе функцию Грина уже можно построить.

В качестве примера анализа периодических граничных условий рассмотрим простейший оператор  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , а на функцию  $f$  наложим периодические граничные условия на интервале  $0 < x < 2\pi$ . Тогда полный набор собственных функций оператора  $\hat{L}$  будет

$$\cos(nx), n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sin(nx), n = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

что соответствует собственным значениям  $\lambda_n = -n^2$ . Отметим, что для  $n = 1, 2, \dots$  собственные функции нашего оператора являются дважды вырожденными, и что собственные функции (3.18) выбраны так, что выполняется условие ортогональности (17.37). Разложение же (17.38) является не чем иным, как разложением в ряд Фурье периодической функции. Соотношение (17.40) в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y). \quad (3.19)$$

На пространстве периодических функций не существует функции Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , поскольку на этом пространстве оператор  $\hat{L} = d^2/dx^2$  имеет нулевое собственное значение, которое достигается при  $n = 0$  в формуле (3.18). Поэтому выражение (3.17) оказывается некорректным. Тем не менее, можно определить функцию Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$  на пространстве функций, где он не имеет нулевых собственных значений. Собственная функция, соответствующая  $\lambda = 0$ , как следует из формулы (3.18), является просто константой:  $f = \text{const}$ . Таким образом, надо исключить из набора (3.18) константу. Это можно сделать, если наложить на функцию  $f$  дополнительное условие  $\int_0^{2\pi} dx f(x) = 0$ . После этого функцию Грина уже можно найти в соответствии с выражением (3.17).

Почувствительно найти эту функцию Грина, исходя непосредственно из дифференциального уравнения, которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x - y) = \delta(x - y) - \frac{1}{2\pi}. \quad (3.20)$$

Дополнительный константный член в правой части этого уравнения связан с тем, что интеграл от этой правой части по  $x$  должен быть равен нулю. Таким образом, функцию Грина можно записать в виде  $G(x, y) = |x - y|/2 + c_1 + c_2 x - x^2/(4\pi)$ , где константы  $c_1$  и  $c_2$  находятся из условий периодичности  $G(x - y)$  и условия  $\int_0^{2\pi} dx G(x - y) = 0$ . В результате мы находим

$$G(x - y) = \frac{1}{2}|x - y| - \frac{\pi}{6} - \frac{(x - y)^2}{4\pi}.$$

Отметим, что функция Грина зависит только от разности  $x - y$ , что связано с эффективной однородностью периодической задачи, поскольку интервал, на котором рассматриваются функции  $f$ , можно выбрать в виде  $(w, w + 2\pi)$  с произвольным  $w$ .

**Задача 3.1.** Найти функцию Грина оператора  $d^2/dx^2 + \kappa^2$  для периодических функций с периодом  $2\pi$ .

**Задача 3.2.** Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Задача 3.3.** Найти решение задачи

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right) f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Задача 3.4.** Доказать, что на интервале  $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)} = 2\pi\delta(x).$$

Указание: найти разложение приведенной функции в ряд Фурье, воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin(x/2)} = 2\pi,$$

справедливому для любого целого положительного  $k$ .

**Задача 3.5.** Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx + x)(d/dx - x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

**Задача 3.6.** Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx - x)(d/dx + x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

#### 4. УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ДИФФУЗИИ

В ряде физических приложений возникают дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Примерами таких уравнений являются уравнение диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2 U, \quad (4.1)$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla^2 \Psi. \quad (4.2)$$

Оба эти уравнения подразумевают однородность в пространстве. При решении таких уравнений весьма эффективным оказывается пространственное преобразование Фурье. В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается  $t = 0$ .

Мы начнем с уравнения диффузии (4.1). Произведём Фурье-преобразование по  $\mathbf{x}$ :

$$U = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{U}(t, \mathbf{q}). \quad (4.3)$$

Тогда уравнение (4.1) приводит к уравнению  $\partial \tilde{U} / \partial t = -q^2 \tilde{U}$  для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение  $\tilde{U}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{U}(0, \mathbf{q})$ . Подставляя это выражение и интеграл

$$\tilde{U}(0, \mathbf{q}) = \int dx_1 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) U(0, \mathbf{x})$$

обратный к соотношению (4.3), и беря интегралы по  $\mathbf{q}$ , мы находим

$$U(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] U(0, \mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Соотношение (4.4) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Если начальное поле  $U(0, \mathbf{x})$  локализовано вблизи начала координат, то есть если  $U(0, \mathbf{x})$  достаточно быстро спадает при росте  $|\mathbf{x}|$ , то  $U(t, \mathbf{x})$  обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена  $t \gg l^2$ , где  $l$  — длина, на которой локализовано поле  $U(0, \mathbf{x})$ . Это означает, что интеграл (4.4) набирается в области  $|\mathbf{y}| \lesssim l$ . При этом условии можно пренебречь  $\mathbf{y}$  в экспоненте в (4.4). В результате мы заключаем, что при  $t \gg l^2$

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.5)$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d U(0, \mathbf{y}). \quad (4.6)$$

Отметим, что приближение (4.5) соответствует подстановке  $U(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$ . Если для локализованного вблизи начала координат поля  $U(0, \mathbf{x})$  интеграл  $A$  (4.6) равен нулю, то асимптотика  $U(t, \mathbf{x})$  на больших временах будет иной. Раскладывая экспоненту в (4.4) по  $\mathbf{y}$ , мы находим следующий ведущий член разложения при  $A = 0$ :

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{B\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.7)$$

$$B = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} U(0, \mathbf{y}). \quad (4.8)$$

Выражения (4.5, 4.7) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Подобная процедура, связанная с пространственным Фурье-преобразованием, может быть проделана и для уравнения Шрёдингера (4.2). В результате мы находим выражение

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi it)^{d/2}} \exp\left[i\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] \Psi(0, \mathbf{y}), \quad (4.9)$$

аналогичное (4.4). Однако имеется и существенное различие между выражениями (4.4) и (4.9). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить  $U(0, \mathbf{x})$  по  $U(t, \mathbf{x})$ , выражение (4.9) допускает обращение по времени:

$$\Psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi it)^{d/2}} \exp\left[-i\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] \Psi(t, \mathbf{y}).$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (4.1) и (4.2). Уравнение диффузии (4.1) описывает диссипативный процесс, ведущий к размыванию со временем локализованных полей, смотри (4.5,4.7). Поэтому уравнение диффузии (4.1) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (4.2) обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t$ ,  $\Psi \rightarrow \Psi^*$ . Поэтому наряду с прямым выражением (4.9) работает и обратное ему выражение.

Заметим, что для обоих уравнений (4.1,4.2) имеет место закон сохранения

$$\partial_t \int dx xU = 0, \quad \partial_t \int dx x\Psi = 0.$$

Эти соотношения проверяются непосредственно после вычисления производной по времени в соответствии с (4.1,4.2) и интегрирования по частям. Для уравнения диффузии приведённое соотношение означает, что стоит на месте центр тяжести облака диффундирующих частиц. Что касается уравнения Шрёдингера, то приведённое соотношение справедливо только в отсутствие внешнего потенциала, который приводит к появлению силы, действующей на частицу.

**Задача 4.1.** При  $t \rightarrow 0$  функция  $U(t, \mathbf{x})$  должна переходить в  $U(0, \mathbf{x})$ . Поэтому из соотношения (4.4) следует предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Докажите это соотношение непосредственно.

**Задача 4.2.** Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия:  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Сравните ответ с асимптотическим поведением (4.5).

**Задача 4.3.** Найти асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий: 1)  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 2)  $U(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 3)  $U(0, x) = \exp(-|x|/l)$ ; 4)  $U(0, x) = x \exp(-|x|/l)$ ; 5)  $U(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$ ; 6)  $U(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$ .

**Задача 4.4.** Найти для уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (4.5,4.7).

**Задача 4.5.** Найти решения одномерного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий:  $\Psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ;  $\Psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ .

**Задача 4.6.** Найти аналог представления (4.4) для одномерного поля  $U(t, x)$ , динамика которого в Фурье-представлении задается (необратимым) уравнением  $\partial \tilde{U} / \partial t = -|q| \tilde{U}$ .

## 5. ДИНАМО

Эффект динамо заключается в нарастании со временем магнитного поля в потоке проводящей жидкости (электролита или плазмы). Рассмотрим это явление в случае малой амплитуды магнитного поля, когда обратным влиянием магнитного поля на гидродинамическое движение можно пренебречь. Тогда эволюцию магнитного поля можно изучать на фоне заданного гидродинамического движения, которое характеризуется полем скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ .

В случае хорошо проводящей среды для описания эффекта динамо можно применять уравнение “вмороженности” магнитного поля в проводящую жидкость

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля. В уравнении (5.1) подразумевается условие несжимаемости жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . В этом случае условие бездивергентности  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  совместно с уравнением (5.1), так как из него следует “закон сохранения”

$$\partial_t (\text{div } \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \nabla) (\text{div } \mathbf{B}) = 0.$$

Уравнение (5.1) содержит только первые производные и потому может быть решено методом характеристик, смотри раздел 18 А. Характеристики  $\mathbf{x}(t)$  определяются уравнением

$$\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Эти характеристики называются Лагранжевыми траекториями, вдоль которых движутся частицы жидкости. Лагранжевы траектории можно параметризовать, скажем, начальным положением (при  $t = 0$ ) точки  $\mathbf{x}$ . Для стационарного потока Лагранжевы траектории называются также линиями тока. Вдоль данной характеристики магнитная индукция изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \hat{\sigma} \mathbf{B}. \quad (5.3)$$

здесь  $\hat{\sigma}$  – матрица, составленная из производных компонент скорости  $\mathbf{v}$ :  $\hat{\sigma} \mathbf{B} \equiv (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}$ . Значения этих производных следует брать в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{x}(t)$ . Можно сказать, что уравнение (5.3) определяет эволюцию магнитной индукции, которая “прикреплена” к данной точке жидкости.

Формальное решение уравнения (5.3) можно записать следующим образом

$$\mathbf{B}(t) = \hat{W}(t) \mathbf{B}(0), \quad (5.4)$$

где матрица  $\hat{W}$  удовлетворяет следующему уравнению и начальному условию

$$\frac{d}{dt} \hat{W} = \hat{\sigma} \hat{W}, \quad \hat{W}(0) = 1. \quad (5.5)$$

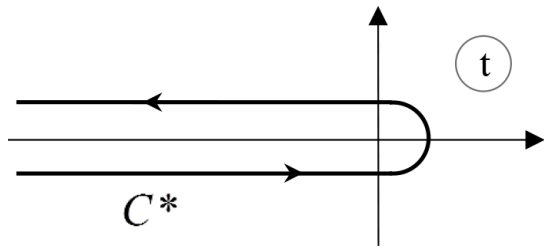


Рис. 3. Контур интегрирования вдоль отрицательной полуоси.

Выразив затем  $\Gamma(1-z)$  через интегральное представление (8.3), получим

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{\exp(i\pi z)}{2\pi i} \int_C dt t^{-z} e^{-t},$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 1. Делая замену переменных  $t \rightarrow -t$ , найдем, что

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t, \quad (8.8)$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3. Он охватывает разрез функции  $t^{-z}$ , идущий вдоль отрицательной полуоси.

Делая в интеграле (8.2) замену  $t = \beta u$ , находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \exp(-\beta u) = \beta^{-z} \Gamma(z).$$

В частности, подставляя  $\beta = \epsilon + i$  (где  $\epsilon \ll 1$ ), находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \exp(-\epsilon u - iu) = \exp(-\pi iz/2) \Gamma(z).$$

Предполагая, что  $z$  действительно, и беря действительную и мнимую части этого соотношения, находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\epsilon u} \cos(u) = \cos(\pi z/2) \Gamma(z), \quad (8.9)$$

$$\int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\epsilon u} \sin(u) = \sin(\pi z/2) \Gamma(z). \quad (8.10)$$

**Задача 8.1.** Проверить, что при целых положительных  $z$  раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя в выражении (8.3) дает  $\Gamma(n) = (n-1)!$

**Задача 8.2.** Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi.$$

**Задача 8.3.** Доказать, что

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Указание: переписать интеграл, как контурный, где контур идет по берегам разреза функции  $\zeta^z$ , а затем деформировать контур интегрирования, “посадив” интеграл на вычет в точке  $\zeta = -1$ .

**Задача 8.4.** Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

**Задача 8.5.** Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

**Задача 8.6.** Найти  $|\Gamma(1/2+ix)|$ , где  $x$  действительное число.

## 9. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Функции Бесселя удивительным образом возникают в самых различных задачах математической физики. Они естественным образом возникают в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях уравнения типа Гельмгольца

$$(\Delta + \kappa^2) f = 0, \quad (9.1)$$

описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в очень широком круге приложений, чем и определяется важность этих функций.

В двумерном случае оператор Лапласа записывается в следующем виде

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (9.2)$$

где  $r$  — расстояние до начала координат, а  $\varphi$  — азимутальный угол. Уравнение (9.1) допускает решение вида

$$f = g(\kappa r) \cos[n(\varphi - \varphi_0)], \quad (9.3)$$

где  $\varphi_0$  — произвольный угол. Подставляя это выражение в уравнение (9.1) и используя выражение (9.2), мы находим для  $g(z)$  уравнение

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g + g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (9.4)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (3.6).

Введем функции  $f(\lambda, z) = \sqrt{z} J_n(\lambda z)$ . Эти функции вследствие (9.4) удовлетворяют уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{n^2 - 1/4}{z^2} \right) f = -\lambda^2 f. \quad (9.19)$$

Обратим внимание на то, что здесь стоит оператор Штурма-Лиувилля (3.6) с  $Q = 0$ . Прямым следствием уравнения (9.19) является

$$f(\lambda, z) f''(\mu, z) - f''(\lambda, z) f(\mu, z) = (\lambda^2 - \mu^2) f(\lambda, z) f(\mu, z).$$

Интегрируя это соотношение на интервале от нуля до единицы, мы находим

$$\int_0^1 dz f(\lambda, z) f(\mu, z) = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [f(\lambda, 1) f'(\mu, 1) - f'(\lambda, 1) f(\mu, 1)].$$

Перепишем это соотношение в терминах функций Бесселя

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz z J_n(\lambda z) J_n(\mu z) \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J'_n(\mu) - J_n(\mu) \lambda J'_n(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J_{n+1}(\mu) - J_n(\mu) \lambda J_{n+1}(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

где мы использовали соотношение (9.12). Устремляя здесь  $\mu \rightarrow \lambda$  и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, мы находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z J_n^2(\lambda z) &= \frac{1}{2} [J_{n+1}^2(\lambda) - J_n^2(\lambda)] \\ &+ \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda), \end{aligned} \quad (9.21)$$

где мы использовали соотношения (9.11, 9.12).

Рассмотрим граничную задачу, когда функция  $f$  подчиняется уравнению (9.19), ее значение при  $z = 1$  равно нулю и она регулярна в нуле. В этом случае из набора  $f(\lambda, z)$  следует выделить функции с  $\lambda = \gamma_k$ , где  $\gamma_k$  — нули функции Бесселя  $J_n$ :  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Обозначим эти функции  $f_k$ ,  $f_k(z) = \sqrt{z} J_n(\gamma_k z)$ . Как следует из уравнения (9.20), функции  $f_k$  ортогональны:  $\int_0^1 dz f_k(z) f_m(z) = 0$ , если  $k \neq m$ . Впрочем, это свойство следует также и из самосопряженности оператора в левой части уравнения (9.19) на классе функций  $f_k$  (с нулевыми условиями на границе). Нормировку функций  $f_k$  можно найти из соотношения (9.21), которое для  $\lambda = \gamma_k$  дает

$$A_k = \int_0^1 dz z J_n^2(\gamma_k z) = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k). \quad (9.22)$$

Функции  $f_k$  составляют полный набор для класса функций, обращающихся в ноль при  $z = 1$ . Поэтому

такие функции можно разложить в ряд:

$$F(z) = \sum_k C_k \sqrt{z} J_n(\gamma_k z), \quad (9.23)$$

$$C_k = A_k^{-1} \int_0^1 dz \sqrt{z} J_n(\gamma_k z) F(z). \quad (9.24)$$

**Задача 9.5.** Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z).$$

**Задача 9.6.** Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z).$$

Указание: воспользоваться соотношением  $dJ_0/dz = -J_1$ .

**Задача 9.7.** Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz z \exp(-p^2 z^2) J_0(z).$$

**Задача 9.8.** Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

**Задача 9.9.** Разложить функцию  $\sqrt{z} J_1(z) - z^{3/2} J_1(1)$  на интервале  $(0, 1)$  в ряд по  $\sqrt{z} J_1(\gamma_k z)$  (то есть найти коэффициенты этого разложения).

## 10. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Поясним это понятие на примере решения уравнения Шрёдингера для частицы массы  $m$ , помещенной в так называемое центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. Тогда уравнение Шрёдингера для квантового состояния с энергией  $E$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

через  $z_0$ , причем действительная часть  $S(z)$  должна достигать в точке  $z_0$  максимума при движении вдоль деформированного контура. Тогда точка  $z_0$  называется седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть  $S(z)$  достигает в точке  $z_0$  минимума.

Если в седловой точке действительная часть  $S(z)$  достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (18.10). Разложим  $S$  в ряд Тейлора вблизи седловой точки:  $S \approx S_0 + S''_0(z - z_0)^2/2$ , где  $S_0$  и  $S''_0$  – значения функции  $S$  и ее второй производной в точке  $z = z_0$ . Если  $S$  достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки  $z = z_0$ , и мы можем ограничиться в интеграле (18.10) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S''_0}} \exp(S_0). \quad (18.11)$$

Подчеркнем, что обе величины,  $S_0$  и  $S''_0$ , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем в (18.11) определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (18.11) является значительное изменение функции  $S(z)$  в области применимости приведенного разложения, то есть  $|S''_0|R^2 \gg 1$ , где  $R$  – радиус сходимости разложения функции  $S(z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = z_0$ .

В области аналитичности функции  $S(z)$  может оказаться несколько седловых точек. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой  $\text{Re}S_0$  максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный вклад в интеграл (18.10). Возможно также вырождение, когда действительные части  $S$  в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (18.10) надо брать сумму выражений (18.11) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

**Задача 18.2.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\alpha x^2 - x^4/2)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 18.3.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(\alpha x^2/2 - x^3/3)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 18.4.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^4/4) \cos(\alpha x)$$

при больших положительных  $\alpha$ .

## С. Метод Лапласа

Метод Лапласа позволяет получать интегральные представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений для функции  $Y(x)$ , линейных по переменной  $x$ :

$$\sum_{m=0}^N (a_m + b_m x) \frac{d^m Y}{dx^m} = 0. \quad (18.12)$$

Это интегральное представление имеет вид

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt), \quad (18.13)$$

где  $C$  – некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Подставляя уравнение (18.12) в представление (18.13), используя соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и предполагая, что в интеграле (18.13) можно произвести интегрирование по частям по  $t$  без граничных членов, мы находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(QZ) = PZ, \quad (18.14)$$

$$P(t) = \sum_{m=0}^N a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^N b_m t^m. \quad (18.15)$$

Решением уравнения (18.14) является

$$Z = \frac{1}{Q} \exp\left(\int dt P/Q\right), \quad (18.16)$$

где в показателе экспоненты стоит первообразная от  $P/Q$  (определенная с точностью до константы). Поскольку  $P$  и  $Q$  являются полиномами по  $t$ , эту первообразную можно выразить через элементарные функции.

Выясним теперь условия, при которых возможно упомянутое выше интегрирование по частям. Для этого произведение  $ZQ \exp(xt)$  должно иметь одно и то же значение на концах контура  $C$  (который может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Наиболее естественным выбором контура  $C$  является контур, который идет вдоль одного из направлений из бесконечности, вдоль которого произведение  $ZQ \exp(xt)$  стремится к нулю, и возвращается в бесконечность вдоль другого направления так, чтобы вдоль этого направления произведение  $ZQ \exp(xt)$  также стремилось к нулю. Число таких направлений растет с увеличением порядка уравнения  $N$ , что и обеспечивает необходимое число независимых решений уравнения (18.12), которые получаются из выражения (18.16) при различных выборах контура интегрирования  $C$ .

Продemonстрируем работу метода Лапласа на примере уравнения Эйри

$$d^2 Y/dx^2 - xY = 0, \quad (18.17)$$