# Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

26 октября 2015 г.

## 1 Вторая задача

### 1.1 Условие задачи

В метрике

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}} - r^2 d\phi^2 \tag{1}$$

найти малое отклонение луча света от прямолинейности.

### 1.2 Ответ

### 1.3 Решение

Уравнение эйконала для луча света выглядит так:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

Ищем решение в виде

$$S = -Et + S_r(r) + M\phi \tag{3}$$

Тогда для $S_r(r)$ получается выражение

$$S_r = \int \mathrm{d}r \sqrt{\frac{E^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)^2} - \frac{M^2}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)}} \tag{4}$$

## 2 Первая задача

### 2.1 Условие задачи

Для лагранжиана

$$L = -a^2 \sqrt{-\det\left(\eta + \frac{F}{a}\right)} + a^2 + A_\mu j^\mu \tag{5}$$

найти поле точечного заряда.

## 2.2 Ответ

$$E = -\frac{q}{\sqrt{(4\pi r^2)^2 + (q/a)^2}} \tag{6}$$

## 2.3 Решение

Детерминант под корнем формулы 5 можно преобразовать: прямое вычисление даёт

$$\det\left(\eta + \frac{F}{a}\right) = \frac{1}{a^4}\det\begin{pmatrix} a & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & -a & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & -a & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & -a \end{pmatrix} = \\ = -1 + \frac{1}{a^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{a^4}(\vec{E},\vec{B})^2 \tag{7}$$

Соответственно, лагранжиан принимает вид

$$L = -a^2\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{a^4}(\vec{E},\vec{B})^2} + a^2 + A_\mu j^\mu \tag{8}$$

В переменных $\vec{E}$, $\vec{B}$ уравнения Лагранжа примут вид

$$-\partial_k \frac{\partial L}{\partial E_k} = j^0 \tag{9}$$

$$\partial_0 \frac{\partial L}{\partial E_k} + \epsilon_{ijk}\partial_i \frac{\partial L}{\partial B_j} = j^k \tag{10}$$

Частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial E_k} = \frac{E_k + \frac{1}{a^2}(\vec{E},\vec{B})B_k}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{a^4}(\vec{E},\vec{B})^2}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_k} = \frac{-B_k + \frac{1}{a^2}(\vec{E},\vec{B})E_k}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{a^4}(\vec{E},\vec{B})^2}} \tag{12}$$

Теперь найдём поле точечного заряда. Это будет сферически симметричное решение с $\vec{B} = 0$. В этом случае уравнение 10 выполняется автоматически, а уравнение 9 принимает вид

$$\partial_k \frac{E_k}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}\vec{E}^2}} = -q\delta^3(x) \tag{13}$$

Теперь ясно, что

$$\frac{E}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}E^2}} = -\frac{q}{4\pi r^2} \tag{14}$$

и, окончательно,

$$E = -\frac{q}{\sqrt{(4\pi r^2)^2 + (q/a)^2}} \tag{15}$$