Второе задание по допглавам

Anikin Evgeny

29 апреля 2017 г.

1 Метод Лапласа

Задача 1 Решить уравнение

$$\sum_k (a_k + b_k x) \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \tag{1}$$

с помощью подстановки

$$u = \oint_\gamma v(z) e^{xz}\, dz, \tag{2}$$

где γ — некоторый контур. Какие условия должны выполняться на концах контура?

Задача 2 Решить уравнение Эйри

$$u'' - zu = 0 \tag{3}$$

Получить два решения, экспоненциально растущее и убывающее при $z \to \infty$, в виде интегралов по контуру и методом перевала найти их асимптотики при вещественных z, $z \to \pm\infty$.

Задача 3 С помощью метода Лапласа решить уравнение на полиномы Эрмита и найти производящую функцию полиномов Эрмита.

Задача 4 Методом Лапласа решить уравнение Бесселя с произвольным, не обязательно целым аргументом:

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) = 0 \tag{4}$$

Используя полученную интегральную формулу, найти выражение для $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ через элементарные функции. *Указание:* сделать в уравнении замену $u = z^{-\nu} v$.

2 Полиномы Лежандра

Задача 5 Вывести рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, используя производящую функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)y^n \tag{5}$$

Указание: одно из соотношений получается, если продифференцировать равенство по y.

3 Гипергеометрическая функция

Задача 6 Пусть z_0 — особая точка коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ уравнения

$$u''+p(z)u'+q(z)u=0 \tag{6}$$

Доказать, что уравнение имеет решение в виде степенного ряда

$$u(z)=z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} p(z)&=\frac{p'(z)}{z-z_0},\\ q(z)&=\frac{q'(z)}{(z-z_0)^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $p'(z)$, $q'(z)$ — регулярные в z_0 функции. Как найти ν?

Особые точки дифференциальных уравнений, в которых выполняются условия (7), называются *регулярными*.

Задача 7 Доказать, что уравнение (5) имеет решение вида

$$u(z)=z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k} \tag{9}$$

в окрестности $z=\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} p(z)&=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}p_kz^{-k}\\ q(z)&=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}q_kz^{-k} \end{aligned} \tag{10}$$

Эти условия представляют собой очевидное обобщение (7) на случай $z=\infty$. В этом случае говорят, что $z=\infty$ — регулярная особая точка.

Задача 8 Найти общий вид уравнения второго порядка с

1. двумя регулярными особыми точками;
2. тремя регулярными особыми точками.

Имеется в виду, что никаких других особых точек нет.

Задача 9 Найти решение гипергеометрического уравнения

$$z(z-1)u'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)z)u' + \alpha\beta u = 0 \qquad (11)$$

в виде ряда по z: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, причём $c_0 = 1$.

Задача 10 Доказать, что произвольное уравнение с тремя регулярными особыми точками сводится к гипергеометрическому, если перевести особые точки дробно–линейным преобразованием в $0, 1, \infty$ и сделать после этого замену $u = z^{\mu}(z-1)^{\nu}v$. *Указание:* μ и ν следует выбрать таким образом, чтобы существовали регулярные решения в окрестности 0 и 1.

Задача 11 Получить вырожденную гипергеометрическую функцию в виде ряда и уравнение на неё, сделав в (10) замену $z = z'/\beta$ и перейдя к пределу $\beta \to \infty$.

Задача 12 Выразить полиномы Лежандра через гипергеометрическую функцию. *Указание*: использовать уравнение на полиномы Лежандра.

Задача 13 Решить уравнение на вырожденную гипергеометрическую функцию методом Лапласа.

4 Квантовая механика

Задача 14 Свести радиальное уравнение Шрёдингера для атома водорода к уравнению на вырожденную гипергеометрическую функцию и найти уровни энергии.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\psi = E\psi \qquad (12)$$

Задача 15