Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

5 ноября 2015 г.

1 Третья задача

1.1 Условие задачи

Найти излучение системы зарядов с точностью до членов порядка c^{-5}.

1.2 Ответ

$$W = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl}}{180c^5} + \frac{2\ddot{M}^2}{3c^3} + \frac{4}{15c^4}\left(\dddot{T}^{kaa}\ddot{\mathbf{d}}^k - \frac{1}{2}\dddot{T}^{aak}\ddot{\mathbf{d}}^k\right) \tag{1}$$

$$T^{kij} = \int \frac{j^k}{c} y^i y^j \, d^3y \tag{2}$$

1.3 Решение

Общая формула для запаздывающего потенциала:

$$A^\mu_\omega = \int \frac{j^\mu}{c} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \, d^3y \tag{3}$$

Вычислим A^k, а A^0 и напряжённости полей определим из условия Лоренца. Разложим член e^{ikr}/r:

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \frac{e^{ikr}}{r} y^{i_1} \dots y^{i_m} \tag{4}$$

Тогда для A^μ имеем

$$A^k_\omega = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} y^{i_1} \dots y^{i_m} \, d^3y \tag{5}$$

Выпишем первые три члена:

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} \, d^3y - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} y^i \, d^3y + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{e^{ikr}}{r} \int \frac{j^k}{c} y^i y^j \, d^3y \tag{6}$$

Пользуясь сохранением заряда и интегрируя по частям, можно написать следующие равенства:

$$\mathbf{d}^k = \int \frac{j_0}{c} y^k \, d^3x = \frac{i}{kc} \int j^k \, d^3y \tag{7}$$

$$D^{kl} = \int \frac{j_0}{c} (3y^k y^l - \delta^{kl} r^2) \, d^3y = \frac{i}{kc} \int (3j^k y^l + 3j^l y^k - 2\delta_{kl} j^a y^a) d^3y \tag{8}$$

Для магнитного момента можно написать

$$\epsilon^{klm} M^m = \frac{1}{2c} \int j^k y^l - j^l y^k \, d^3y \tag{9}$$

Теперь вычислим магнитное поле. На расстояниях много больше длины волны волна почти плоская, поэтому можно дифференцировать только экспоненту. Получается

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r} \left(\int \frac{j^k}{c} \, d^3y - ikn^i \int \frac{j^k}{c} y^i \, d^3y - \frac{1}{2} k^2 n^i n^j \int \frac{j^k}{c} y^i y^j \, d^3y + \dots \right) \tag{10}$$

К интегралу во втором слагаемом можно безбоязненно прибавить слагаемое, пропорциональное δ^{ka} (это следует из калибровочной инвариантности). Поэтому вектор-потенциал можно переписать в виде

$$A^k_\omega = \frac{e^{ikr}}{r} \left(-ik\mathbf{d}^k - \frac{1}{6} k^2 n^i D^{ik} - ik\epsilon^{klm} n^l M^k - k^2 n_i n_j T^{kij} + \dots \right) \tag{11}$$

$$T^{kij} = \int \frac{j^k}{c} y^i y^j \, d^3y \tag{12}$$

Перейдём от A^μ_ω к A^μ. Тогда легко получается, что

$$A^k = \frac{1}{cr} \left(\dot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c} n^i \ddot{D}^{ik} + \epsilon^{klm} n^l \dot{M}^m + \frac{1}{2c} n_i n_j \ddot{T}^{kij} \right) \tag{13}$$

И далее, для плоской волны

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{14}$$

$$B^i = -\frac{1}{c^2 r} \Big(\epsilon^{ijk} n^j \ddot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c} \epsilon^{ijk} n^j n^l \dddot{D}^{kl} + \\ + n^i n^j \ddot{M}^j - \ddot{M}^i + \frac{1}{2c} \epsilon^{ijk} n^j n^a n^b \dddot{T}^{kab} \Big) \tag{15}$$

Вектор Пойнтинга везде параллелен $\vec{n}$, а его модуль —

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \Big(\epsilon^{ijk} n^j \ddot{\mathbf{d}}^k + \frac{1}{6c} \epsilon^{ijk} n^j n^l \dddot{D}^{kl} + \\ + n^i n^j \ddot{M}^j - \ddot{M}^i + \frac{1}{2c} \epsilon^{ijk} n^j n^a n^b \dddot{T}^{kab} \Big)^2 \tag{16}$$

Полный поток энергии — это интеграл $|\vec{S}|$ по сфере, при этом будем учитывать только слагаемые порядка до k^2. Ответ получается таким:

$$W = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl}}{180c^5} + \frac{2\ddot{M}^2}{3c^3} + \frac{4}{15c^4}\left(\dddot{T}^{kaa}\ddot{\mathbf{d}}^k - \frac{1}{2}\dddot{T}^{aak}\ddot{\mathbf{d}}^k\right) \qquad (17)$$