Адиабатический инвариант и переменные действие–угол

Anikin Evgeny, 128

14 января 2017 г.

1 Адиабатический инвариант

Пусть гамильтонова система описывается одной координатой q. Докажем, что величина
$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \tag{1}$$
не меняется при медленном изменении гамильтониана во времени. Пусть гамильтониан зависит от параметра λ, который, в свою очередь, зависит от t.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \tag{2}$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3}$$
$$\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} = T, \tag{4}$$
$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\,dq = -\oint \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}\,dq \tag{5}$$

Таким образом,
$$\frac{dI}{dt} = \dot{\lambda}T\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{\lambda}\oint \frac{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}{\frac{\partial H}{\partial p}}\,dq \tag{6}$$

Усредним теперь $\frac{dI}{dt}$ по периоду. Тогда первое слагаемое в (6) сократится со вторым, что доказывает, что I – адиабаический инвариант.

2 Переменные действие–угол

Сделаем каноническое преобразование так, чтобы I стало координатой. Канонические преобразования сохраняют "форму действия" с точностью до полного дифференциала, то есть при переходе от q, p к I, w должно быть

$$p\,dq - H\,dt = w\,dI - \tilde{H}\,dt + dF, \tag{7}$$

где $F = F(q, I, t)$ называется производящей функцией. Очевидно, что

$$F = \int p\, dq \tag{8}$$

Тогда

$$w = -\frac{\partial}{\partial I} \int p\, dq = -\frac{2\pi}{T} \int \frac{dq}{v} \tag{9}$$

Очевидно, что гамильтониан в новых переменных зависит только от I. Уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{w} &= -\frac{2\pi}{T} \end{aligned} \tag{10}$$