Функции Грина — продолжение

Anikin Evgeny

3 марта 2017 г.

1 Примеры использования функций Грина в физике

1.1 Запаздывающие потенциалы

Общая задача электродинамики — найти электромагнитные поля при заданном движении зарядов, то есть решить уравнения Максвелла. Последние записываются в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \tag{1}$$

где $\mu, \nu = 0 \dots 3$, j^ν — вектор четырёхмерной плотности тока (j^0 — плотность заряда, а j^k — трёхмерная плотность тока), а $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электроманнитного поля. A_μ — четырёхмерный вектор–потенциал.

Уравнения Максвелла калибровочно инвариантны. Это значит, что если A_μ — решение уравнений, то

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{2}$$

тоже является решением (χ — произвольная функция координат и времени). Преобразование (2) называется *калибровочным*.

Калибровочные преобразования позволяют наложить некоторое дополнительное условие на A_μ. Удобно потребовать, чтобы выполнялось так называемое условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3}$$

С его помощью можно преобразовать уравнения Максвелла:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi j^\nu \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем волновое уравнение для каждой компоненты вектор–потенциала. Его можно решить, использовав функцию Грина волнового уравнения.

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t - |x|)\theta(t) \tag{5}$$

Решение с помощью функции Грина записывается в виде

$$A^\nu(t,x) = \int dt' d^3x' 4\pi j^\nu(t',x') G(t-t', x-x') =$$
$$= \int d^3x' 4\pi j^\nu(t',x') \frac{1}{4\pi|x-x'|}\delta(t-t'-|x-x'|)\theta(t) =$$
$$= \int d^3x' \frac{j^\nu(t-|x-x'|, x')}{|x-x'|} \quad (6)$$

Таким образом,

$$A^\nu(t,x) = \int d^3x' \frac{j^\nu(t-|x-x'|, x')}{|x-x'|} \quad (7)$$

Это — формула для запаздывающих потенциалов из Ландау–Лифшица.

Задача 1 *Найти функцию Грина уравнения Гельмгольца:*

$$(\omega_0^2 + \nabla^2)\phi = -\delta(\vec{r}) \quad (8)$$

Знак минус стоит для согласованности с волновым уравнением и уравнением Пуассона.

1.2 Интегральное уравнение Шрёдингера и волновые функции дельта–ям

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера для частицы в потенциальной яме:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (9)$$

Перепишем его в виде

$$\Psi(x)'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = \frac{2mU(x)}{\hbar^2}\Psi(x) \quad (10)$$

Будем решать задачу о связанном состоянии в дельта–яме. В этом случае $E < 0$.

Нетрудно показать, что функция Грина оператора, стоящего в левой части, равна

$$G(x) = \frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa \equiv \frac{2m|E}{\hbar^2} \quad (11)$$

Теперь посмотрим внимательно на уравнение Шрёдингера (10). Если бы в правой части была известная функция, Ψ выражалась бы обычным образом через функцию Грина. Однако в правой части тоже стоит Ψ. Тем не менее, выражение через функцию Грина тоже можно записать:

$$\Psi(x) = \int dx' \frac{2mU(x')}{\hbar^2}\Psi(x')G(x-x') + \text{однородное решение} \quad (12)$$

Это, конечно, не ответ, а интегральное уравнение. Однако оно элементарно решается, если $U(x) = U_0\delta(x)$.

Во–первых, однородные решения для $E < 0$ — это растущие экспоненты. Так как в квантовой механике нас интересуют решения, во всяком случае не растущие на бесконечности, однородного слагаемого в (12) не будет.

Подставим $U(x) = U_0\delta(x)$ в (12). Интеграл с дельта–функцией берётся, и в результате получается выражение

$$\Psi(x) = \frac{2mU_0}{\hbar^2}\Psi(0)\frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa|x|} \tag{13}$$

Оно выглядит немного странно: функция $\Psi(x)$ выражается через своё значение в нуле. Чтобы такое выражение имело смысл, оно должно быть самосогласованным, то есть

$$\Psi(0) = \frac{mU_0}{\kappa\hbar^2}\Psi(0) \tag{14}$$

Отсюда следует, что $\kappa = \frac{mU_0}{\hbar^2}$, и

$$E = -\frac{mU_0^2}{2\hbar^2} \tag{15}$$

Задача 2 *Рассмотреть одномерное уравнение Шрёдингера с потенциалом* $U(x) = U_0(\delta(x-a) + \delta(x+a))$. *Найти в нём связанные состояния аналогичным способом.*

Именно при решении этой задачи становится очевидным преимущество метода функций Грина. Задачу с одной дельта–ямой очень просто решить, просто сшивая экспоненты слева и справа от ямы. В случае с двумя ямами это тоже можно сделать, однако вычисления становятся более громоздкими, тогда как с помощью функций Грина ответ, можно сказать, записывается сразу.

2 Функция Грина как обратный оператор

Любая функция $g(x,y)$ двух переменных задаёт линейный оператор $\hat{L}_g$, действующий на пространстве функций следующим образом:

$$\hat{L}_g\phi(x) = \int g(x,y)\phi(y)dy \tag{16}$$

Несложно заметить здесь сходство с правилами перемножения матриц.

Функция $g(x,y)$ может быть (и часто является) не обычной, а обобщённой функцией. Например, единичный оператор задаётся дельта–функцией:

$$\int \delta(x-y)\phi(y)dy = \phi(x) \tag{17}$$

Дифференциальные операторы задаются производными от дельта–функции. Например,

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \int \delta'(x-y)\phi(y)dy \tag{18}$$

Вооружившись этим знанием, нетрудно заметить, что уравнение на функцию Грина

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y) \tag{19}$$

есть в точности уравнение на оператор, обратный $\hat{L}$. В операторном виде

$$\hat{L}\hat{G} = \mathbb{1}, \tag{20}$$

или даже

$$\hat{G} = \hat{L}^{-1} \tag{21}$$

У оператора $\hat{L}$ могут быть нулевые собственные значения. В этом случае обратного оператора, действующего на том же самом пространстве, не существует. (Интересный вопрос заключается в том, как это соотносится с предыдущим листком, где у операторов, определённых на прямой, точно есть нулевые собственные значения).

2.1 Функция Грина гармонического осциллятора с периодическими граничными условиями

Будем решать уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t-t_0), \tag{22}$$

где $x = x(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, и наложены периодические граничные условия: $x(-\pi) = x(\pi)$, $\dot{x}(-\pi) = \dot{x}(\pi)$. Можно действовать двумя способами: можно искать функцию Грина в виде ряда Фурье, а можно сшивать решения справа и слева от дельта–функции. Ниже мы будем сшивать решения.

Так как оператор $\partial_t^2 + \omega^2$ не зависит от времени, функция Грина зависит только от $t - t_0$. Поэтому можно положить $t_0 = 0$. (Это — специфическая особенность периодических граничных условий! Для любых других граничных условий функция Грина не представляется в виде $G(t-t_0)$.)

Будем искать решение в виде

$$G(t) = \begin{cases} A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t & \text{при} \quad t > 0 \\ C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t & \text{при} \quad t < 0 \end{cases} \tag{23}$$

Условие непрерывности в $t = 0$ приводит к

$$A = C \tag{24}$$

условие сшивки —

$$\omega_0(B - D) = 1. \tag{25}$$

Периодические граничные условия принимают вид

$$
\begin{gathered}
B + D = 0 \\
-A\omega_0 \sin \pi\omega_0 + B\omega_0 \cos \pi\omega_0 = C\omega_0 \sin \pi\omega_0 + D\omega_0 \cos \pi\omega_0
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
A = \frac{\cos \pi\omega_0}{2\omega_0 \sin \pi\omega_0} \\
B = \frac{1}{2\omega_0}
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Значит,

$$
G(t - t_0) = \frac{\cos \omega_0 (t - t_0 \mp \pi)}{2\omega_0 \sin \pi\omega_0}, \tag{28}
$$

где минус берётся при $t > 0$, а плюс — при $t < 0$.

При целых ω функции Грина не существует: синус в знаменателе обращается в ноль. Действительно, в этом случае существуют собственные векторы, отвечающие нулевому собственному значению оператора $\partial_t^2 + \omega^2$, а именно — $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$.