Модель Изинга

Евгений Аникин

9 января 2016 г.

В данном реферате рассмотрены одномерная модель Изинга и модель, состоящая из двух связанных цепочек спинов. Для одномерной модели Изинга найдена статистическая сумма и корреляционная функция. Для модели из двух цепочек найдена статистическая сумма и средняя энергия.

1 Одномерная модель Изинга

1.1 Статсумма

Одномерная модель Изинга задаётся гамильтонианом

$$H = -J \sum s_k s_{k+1}, \tag{1}$$

где переменные s_k (спины) принимают значения ± 1. Статсумма для этой модели записывается в виде

$$Z = \sum_{s_k = \pm 1} e^{\beta J \sum s_k s_{k+1}} \tag{2}$$

Эту статсумму можно найти точно. Для этого введём так называемую трансфер–матрицу:

$$T_{s_1 s_2} = e^{\beta J \sum s_1 s_2} \tag{3}$$

Будем для удобства считать, что имеются периодические граничные условия. Легко видеть, что в этом случае

$$Z = \mathrm{Tr}\, T^N = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}^N \tag{4}$$

Легко проверить, что собственные значения трансфер–матрицы — $2\cosh \beta J$ и $2 \sinh \beta J$. Таким образом, мы получим статсумму в виде

$$Z = 2^N (\cosh^N \beta J + \sinh^N \beta J) \tag{5}$$

Разумеется, второе слагаемое "вымирает"в термодинамическом пределе, то есть при $N \to \infty$.

1.2 Корреляционная функция

Двухточечная корреляционная функция — это среднее от произведения спинов в разных узлах решётки:

$$\langle s_0 s_m \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_k = \pm 1} s_0 s_m e^{-\beta H} \tag{6}$$

Два выделенных спина разделяют цепочку на две части (цепочка замкнута в кольцо) длины m и $N-m$. Для каждой из этих частей можно посчитать статсумму при "замороженных"спинах s_0 и s_m. После этого можно будет легко посчитать среднее.

Проделаем это. Перепишем среднее в виде

$$\begin{aligned}\langle s_0 s_m \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_0, s_m = \pm 1} s_0 s_m \Bigg\{ \sum_{s_1, \dots s_{m-1}} T_{s_0 s_1} \dots T_{s_{m-1} s_m} \times \\ \times \sum_{s_{m+1}, \dots s_{N-1}} T_{s_m s_{m+1}} \dots T_{s_{N-1} s_m} \Bigg\} = \\ = \frac{1}{Z} \sum_{s_0, s_m = \pm 1} s_0 s_m (T^m)_{s_0 s_m} (T^{N-m})_{s_m s_0}\end{aligned} \tag{7}$$

В последнее выражение вошли степени от трансфер–матрицы. Легко доказать, например, по индукции, что

$$T^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} \cosh^k \beta J + \sinh^k \beta J & \cosh^k \beta J - \sinh^k \beta J \\ \cosh^k \beta J - \sinh^k \beta J & \cosh^k \beta J + \sinh^k \beta J \end{pmatrix} \tag{8}$$

Подстановка в уравнение (7) матричных элементов и статсуммы (5), простые алгебраические преобразования и взятие предела $N \to \infty$ дают ответ

$$\langle s_0 s_m \rangle = \tanh J^m = e^{-m \log \coth J} \tag{9}$$

Таким образом, корреляционная длина — $\lambda^{-1} = \log \coth J$.

При малых J $\lambda^{-1} \approx \log \frac{1}{J}$, при больших J $\coth J \approx 1 + 2e^{-2J}$, и $\lambda^{-1} \approx 2e^{-2J}$

1.3 Ренормгруппа

Зависимость корреляционной длины от расстояния можно найти с помощью метода ренормгруппы, мощного метода квантовой теории поля. Конечно, в приложении к одномерной модели Изинга это может иметь только иллюстративное значение (как, впрочем, и сама одномерная модель Изинга).

Суть ренормгруппы состоит в следующем: в статсумме 1 выполним суммирование не по всем, а лишь по нечётным спинам (будем считать, что в цепочке чётное число спинов или она вовсе не замкнута). Полученную сумму будем интерпретировать как $e^{-H_{\text{eff}}}$, где H_{eff} — эффективный гамильтониан. Таким образом, от исходной системы мы переходим к системе, зависящей от в два раза меньшего числа спинов, с другим гамильтонианом. При этом статсумма новой системы, разумеется, будет совершенно такой же, а все физические величины испытают масштабное преобразование. Например, корреляционная длина уменьшится в два раза.

Посмотрим, какой именно получится эффективный гамильтониан. Для удобства будем считать, что $\beta = 1$, и статсумма зависит только от константы связи J.

Имеем

$$e^{-H_{eff}} = \sum_{s_{2k+1}} \prod_k T_{2k,2k+1} T_{2k+1,2k+2} = \prod_k \widetilde{T}_{s_{2k} s_{2k+2}} \tag{10}$$

где T — всё то же самая трансфер–матрица, а $\widetilde{T} = T^2$ — эффективная трансфер–матрица. Легко проверить, что

$$T^2 = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}^2 = C \begin{pmatrix} e^{\beta \widetilde{J}} & e^{-\beta \widetilde{J}} \\ e^{-\beta \widetilde{J}} & e^{\beta \widetilde{J}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Здесь C — несущественная константа, а $\widetilde{J}$ — эффективная константа связи, равная

$$\widetilde{J} = \frac{1}{2} \log \cosh 2J \tag{12}$$

Получается, что мы эффективно переходим к совершенно такой же трансфер–матрице (и гамильтониану), только с другой константой связи. Это позволяет написать функциональное соотношение на корреляционную длину. Очевидно, что под действием преобразования ренормгруппы корреляционная длина уменьшается в два раза. С другой стороны, мы показали, что константа связи меняется по закону 12. Значит,

$$\lambda \left(\frac{1}{2} \log \cosh 2J \right) = \frac{1}{2} \lambda(J) \tag{13}$$

Рассмотрим здесь пределы больших и маленьких J. Для малых J соотношение переходит в

$$\lambda(J^2) \approx \frac{1}{2} \lambda(J) \tag{14}$$

Решением такого уравнения является

$$\lambda \approx \frac{C}{\log \frac{1}{J}} \tag{15}$$

Для больших J

$$\lambda \left(J - \frac{\log 2}{2} \right) \approx \frac{1}{2} \lambda(J) \tag{16}$$

Решением будет $\lambda(J) = Ce^{-2J}$. Эти результаты, как можно видеть, согласутся с результатами предыдущего параграфа.

2 Двухслойная модель Изинга

Рассмотрим модель с гамильтонианом

$$H = -J \sum_k a_k a_{k+1} + b_k b_{k+1} + \frac{1}{2}(a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1}), \tag{17}$$

где $a_k, b_k = \pm 1$. Множитель $\frac{1}{2}$ нужен, потому что каждый член вида $a_k b_k$ встречается в гамильтониане два раза.

Введём трансфер–матрицу:

$$T_{a,b;\,\tilde{a},\tilde{b}} \equiv e^{\beta J(a\tilde{a} + b\tilde{b} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\tilde{a}\tilde{b})} \tag{18}$$

Статсумма перепишется через неё как

$$Z = \operatorname{Tr} T^N \tag{19}$$

Явный вид трансфер–матрицы таков:

$$T = \begin{pmatrix} e^{3\beta J} & 1 & 1 & e^{-\beta J} \\ 1 & e^{\beta J} & e^{-3\beta J} & 1 \\ 1 & e^{-3\beta J} & e^{\beta J} & 1 \\ e^{-\beta J} & 1 & 1 & e^{3\beta J} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Чтобы найти статсумму, нужно найти собственные значения трансфер–матрицы. Два собственных вектора очевидны сразу: $\vec{v_1} = (1, 0, 0, -1)$ и $\vec{v_2} = (0, 1, -1, 0)$. Легко проверить, что

$$T v_1 = (e^{3\beta J} - e^{-\beta J}) v_1 \tag{21}$$

$$T v_2 = (e^{\beta J} - e^{-3\beta J}) v_2 \tag{22}$$

Ещё два собственных вектора есть в подпространстве, натянутом на векторы $v_3 = (1, 0, 0, 1)$ и $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. В этом подпространстве в базисе v_3, v_4 трансфер–матрица имеет вид

$$T_{\langle v_3, v_4 \rangle} = \begin{pmatrix} e^{3\beta J} + e^{-\beta J} & 2 \\ 2 & e^{\beta J} + e^{-3\beta J} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Отсюда после не очень приятных вычислений имеем ещё два собственных значения:

$$\lambda_{3,4} = 2\left[\cosh \beta J \cosh 2\beta J \pm \sqrt{(\cosh \beta J \cosh 2\beta J)^2 - \sinh^2 2\beta J}\right] \tag{24}$$

Можно показать, что максимальное собственное значение при всех β —

$$\lambda_{\max} = 2\left[\cosh \beta J \cosh 2\beta J + \sqrt{(\cosh \beta J \cosh 2\beta J)^2 - \sinh^2 2\beta J}\right] \tag{25}$$

В термодинамическом пределе

$$Z = \lambda_{\max}^N \tag{26}$$

Среднюю энергию отсюда можно вычислить по формуле

$$\langle U \rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \tag{27}$$

Это выражение крайне громоздко, поэтому я его здесь не привожу. Ниже приведён график средней энергии в зависимости от βJ в сравнении со средней энергией простой одномерной модели Изинга, для котороый средняя энергия —

$$\langle U \rangle = -J \tanh \beta J \tag{28}$$