# Второе задание по допглавам

Anikin Evgeny

28 апреля 2017 г.

## 1 Метод Лапласа

**Задача 1** Решить уравнение

$$u'' - zu = 0 \tag{1}$$

Получить два линейно независимых решения в виде интегралов по контуру и найти их асимптотики при вещественных $z$, $z \to \pm\infty$.

**Задача 2** С помощью метода Лапласа решить уравнение на полиномы Эрмита и найти производящую функцию полиномов Эрмита.

## 2 Гипергеометрическая функция

**Задача 3** Пусть $z_0$ — особая точка коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ уравнения

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0 \tag{2}$$

Доказать, что уравнение имеет решение в виде степенного ряда

$$u(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} p(z) = \frac{p'(z)}{z - z_0}, \\ q(z) = \frac{q'(z)}{(z - z_0)^2}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $p(z)$, $q(z)$ — регулярные в $z_0$ функции. Как найти $\nu$?

Особые точки дифференциальных уравнений, в которых выполняются условия (3), называются *регулярными*.

**Задача 4** Доказать, что уравнение (1) имеет решение вида

$$u(z) = z^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \tag{5}$$

в окрестности $z = \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k} \\ q(z) &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k} \end{aligned} \tag{6}$$

Эти условия представляют собой очевидное обобщение (3) на случай $z = \infty$. В этом случае говорят, что $z = \infty$ — регулярная особая точка.

**Задача 5** Найти общий вид уравнения второго порядка с

1. двумя регулярными особыми точками;
2. тремя регулярными особыми точками.

Имеется в виду, что никаких других особых точек нет.

**Задача 6** Найти решение гипергеометрического уравнения

$$z(z-1)u'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)z)u' + \alpha\beta u = 0 \tag{7}$$

в виде ряда по $z$: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, причём $c_0 = 1$.

**Задача 7** Доказать, что произвольное уравнение с тремя регулярными особыми точками сводится к гипергеометрическому, если перевести особые точки дробно–линейным преобразованием в $0, 1, \infty$ и сделать после этого замену $u = z^{\mu}(z-1)^{\nu} v$. *Указание:* $\mu$ и $\nu$ следует выбрать таким образом, чтобы существовали регулярные решения в окрестности 0 и 1.

**Задача 8** Получить вырожденную гипергеометрическую функцию в виде ряда и уравнение на неё, сделав в (6) замену $z = z'/\beta$ и перейдя к пределу $\beta \to \infty$.

**Задача 9** Выразить полиномы Лежандра через гипергеометрическую функцию. *Указание*: использовать уравнение на полиномы Лежандра.

**Задача 10** Свести радиальное уравнение Шрёдингера для атома водорода к уравнению на вырожденную гипергеометрическую функцию и найти уровни энергии.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\psi = E\psi \tag{8}$$

**Задача 11** Методом Лапласа решить уравнение на вырожденную гипергеометрическую функцию.