Дельта–функция и функции Грина

Anikin Evgeny

11 февраля 2017 г.

1 Дельта–функция

Дельта–функция Дирака — это "функция", удовлетворяющая следующим формальным свойствам:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0 \tag{1}$$

$$\int_{-a}^{a} \delta(x)\, dx = 1, \quad a > 0 \tag{2}$$

Конечно, она является не обычной функцией, а обобщённой. Определение и свойства обобщённых функций можно посмотреть в "Уравнениях математической физики" Владимирова: это полезно, но необязательно.

Дельта–функцию можно представлять как предел узкого и высокого "горба" с центром в начале координат. В некотором смысле можно записать

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \tag{3}$$

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} a} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \tag{4}$$

Важнейшее свойство δ–функции выражается равенством

$$\int f(x) \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0) \tag{5}$$

Оно очевидно из следующих соображений: в точках, отличных от x_0, дельта–функция равна нулю. В точке x_0 же у дельта–функции наблюдается крайне резкий и высокий максимум. В этом случае можно в окрестности x_0 приближённо заменить $f(x)$ на константу, что и приводит к (5)