Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

28 сентября 2015 г.

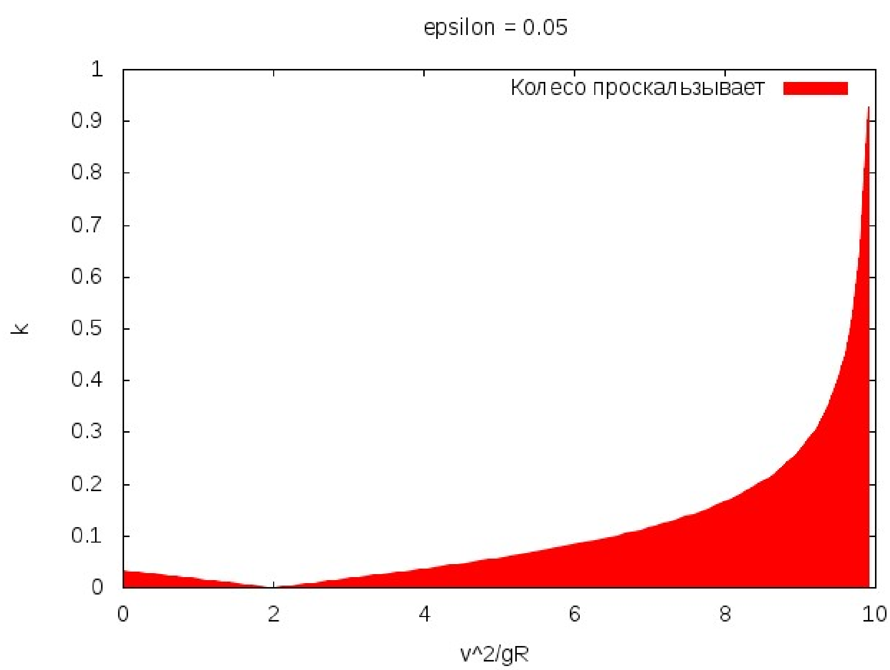
1 Задача про колесо

1.1 Ответ

Колесо не проскальзывает, если выполняется неравенство

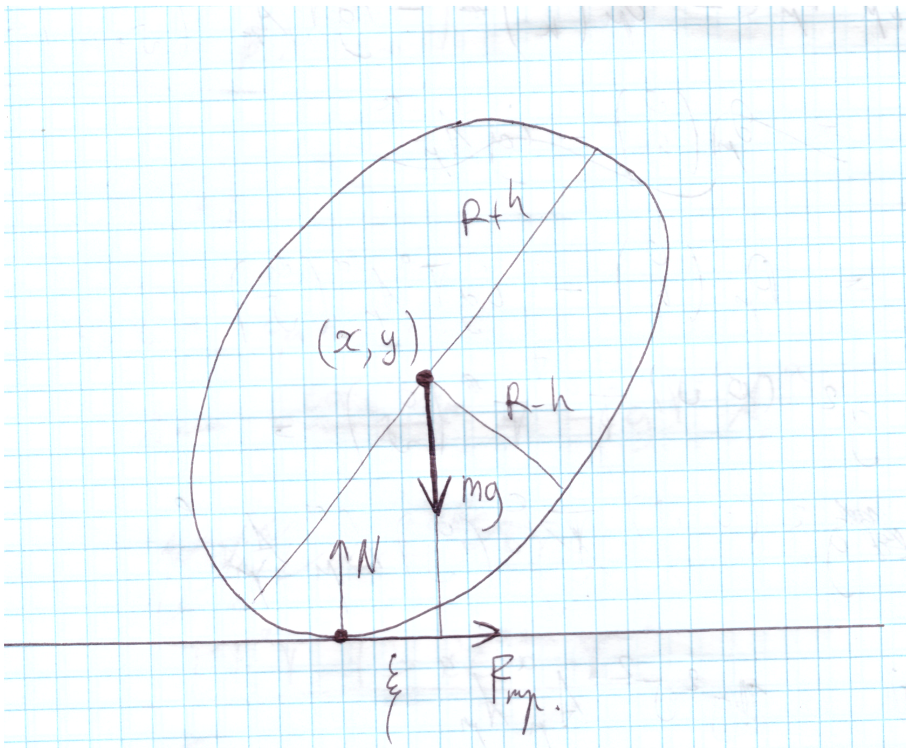
$$k > \frac{\epsilon}{3} \frac{|2gR - v^2|}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v^2)^2}} \tag{1}$$

Предполагается, что $v^2 \gg gR\epsilon$. Область, где колесо проскальзывает, закрашена на рисунке красным. Обозначения см. ниже.



1.2 Решение

Примем следующие обозначения: пусть $R + h$, $R - h$ — полуоси эллиптического колеса, α — угол поворота, x, y — координаты центра масс колеса, ξ — смещение центра масс относительно точки касания по горизонтали (см. рисунок). Будем считать, что скорость колеса достаточно велика, то есть



$v^2 \gg gh$. Это значит, что можно будет приближённо считать скорость постоянной.

Так как $h \ll R$, можно использовать выражения для радиуса и длины эллипса в зависимости от угла в первом порядке по h/R.

$$r(\alpha) = R\left(1 + \frac{h}{R}\cos 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{2}$$

$$l(\alpha) = R\left(\alpha + \frac{h}{2R}\sin 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{3}$$

$$\xi(\alpha) = R\left(\frac{2h}{R}\sin 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{4}$$

В первом порядке можно считать, что $x = l$, $y = r$. Теперь напишем законы Ньютона для колеса.

$$I\dot{\omega} = N\xi - F_{\text{tr}} y \tag{5}$$

$$m\ddot{x} = F_{\text{tr}} \tag{6}$$

$$m\ddot{y} = -mg + N \tag{7}$$

Исключая силы трения и реакции опоры, получим уравнение

$$I\dot{\omega} = m(\ddot{y} + g)\xi - m\ddot{x}y \tag{8}$$

Используя очевидные равенства $\ddot{x} = x''\omega^2 + x'\dot{\omega}$, $\ddot{y} = y''\omega^2 + y'\dot{\omega}$ (штрихи означают производную по углу α), можно выразить угловое ускорение через угловую скорость и угол.

$$\dot{\omega} = \frac{(y''\xi - x''y)\omega^2 + g\xi}{I/m - y'\xi + x'y} \tag{9}$$

Пользуясь формулами 2 – 4,

$$x' = R + h\cos 2\alpha \tag{10}$$

$$x'' = -2h\sin 2\alpha \tag{11}$$

$$y' = -2h\sin 2\alpha \tag{12}$$

$$y'' = -4h\cos 2\alpha \tag{13}$$

получим окончательное выражение для углового ускорения в первом порядке:

$$\dot{\omega} = \frac{2h\sin 2\alpha(R\omega^2 + g)}{\frac{I}{m} + R^2} \tag{14}$$

Теперь легко выразить $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$.

$$\ddot{x} = -2h\sin 2\alpha\omega^2 + R\frac{2h\sin 2\alpha(R\omega^2 + g)}{\frac{I}{m} + R^2} = 2h\sin 2\alpha\frac{mgR - I\omega^2}{I + mR^2} \tag{15}$$

$$\ddot{y} = -4h\cos 2\alpha\omega^2 \tag{16}$$

Условие того, что колесо не проскальзывает, можно записать так:

$$k > \left|\frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + g}\right| = \left|\frac{2h\sin 2\alpha}{g - 4h\omega^2\cos 2\alpha}\frac{mgR - I\omega^2}{I + mR^2}\right| \tag{17}$$

или

$$k > \left|\frac{2gR - v^2}{3}\frac{\epsilon\sin 2\alpha}{gR - 2\epsilon v^2\cos 2\alpha}\right| \tag{18}$$

Если скорость считать постоянной, то нужно найти угол, при котором выражение в правой части предыдущего равенства максимально. Дифференцируя правую часть, приходим к условию

$$\cos 2\alpha = \frac{2\epsilon v^2}{gR} \tag{19}$$

Подставляя в 18, получим

$$k > \frac{\epsilon}{3} \frac{2gR - v^2}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v^2)^2}} \tag{20}$$

При $v^2 = 2gR$ сила трения обращается в нуль в первом порядке по h. Поэтому минимальный коэффициент трения тоже равен нулю в первом порядке.

При $v^2 = \frac{gR}{2\epsilon}$ обращается в нуль сила реакции опоры. Это значит, что колесо начнёт подпрыгивать.

2 Уточнение

Закон сохранения энергии для колеса выглядит так:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m(y^2 + \xi^2)\omega^2}{2} + mgy \tag{21}$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{2(E/m - gy)}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{22}$$

Если подставить ω^2 в выражение 14 для $\dot{\omega}$ и проводить вычисление в первом порядке по ϵ, то можно считать, что ω не зависит от угла:

$$\omega^2 = \frac{2(E - mgR)}{I + mR^2} \tag{23}$$

Очевидны следующие формулы:

$$x' = y \tag{24}$$

$$x'' = y' = -\xi \tag{25}$$

Поэтому можно переписать уравнение

$$\dot{\omega} = \frac{(y - \xi')\omega^2 + g\xi}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{26}$$

Отсюда следует точное выражение для $\ddot{x}$.

$$\ddot{x} = \frac{g\xi y}{I/m + y^2 + \xi^2} - \xi\omega^2 \frac{y\xi' + \xi^2 + I/m}{I/m + y^2 + \xi^2} \tag{27}$$

и

$$\ddot{x} = \xi \left[\frac{gy}{I/m + y^2 + \xi^2} - \frac{2(E/m - gy)(y\xi' + \xi^2 + I/m)}{(I/m + y^2 + \xi^2)^2} \right] \tag{28}$$

Выше было показано, что при $v^2 = 2gR$ выражение с скобках обращается в нуль в ведущем порядке. Чтобы найти минимальный коэффициент трения в этом случае, нужно разложить дробь в квадратных скобках до первого порядка.