Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

27 октября 2015 г.

1 Вторая задача

1.1 Условие задачи

В метрике

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}} - r^2 d\phi^2 \tag{1}$$

найти малое отклонение луча света от прямолинейности.

1.2 Ответ

1.3 Решение

Уравнение эйконала для луча света выглядит так:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

Ищем решение в виде

$$S = -Et + S_r(R) + M\phi \tag{3}$$

Тогда для $S_r(R)$ получается выражение

$$S_r(R) = \int_{r_0}^{R} dr \sqrt{\frac{E^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)^2} - \frac{M^2}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Z^2}{r^2}\right)}} \tag{4}$$

Здесь r_0, ближайшая к центру точка траектории луча, — ноль подкоренного выражения.

Подкоренное выражение можно разложить до членов второго порядка. Получается так:

$$S_r = \int dr \sqrt{E^2 \left(1 + \frac{2r_g}{r} + \frac{3r_g^2 - 2Z^2}{r^2}\right) - \frac{M^2}{r^2} \left(1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2 - Z^2}{r^2}\right)} \tag{5}$$

Чтобы в дальнейшем можно было успешно раскладывать корень, нужно найти ноль подкоренного выражения. С точностью до членов второго порядка он равен

$$r_0 = \frac{M}{E} - \frac{r_g}{2} - \frac{E}{2M}\left(\frac{3}{4}r_g^2 - Z^2\right) \tag{6}$$

Теперь сдвинем переменную интегрирования:

$$r = \rho - \frac{r_g}{2} - \frac{E}{2M}\left(\frac{3}{4}r_g^2 - Z^2\right) \tag{7}$$

После подстановки интеграл примет вид

$$S_r = \int\limits_{M/E}^{R'} d\rho \sqrt{\left(E^2 - \frac{M^2}{\rho^2}\right)\left(1 + \frac{2r_g}{\rho} + \frac{4r_g^2 - 2Z^2}{\rho^2}\right) - \frac{M}{\rho^3}\left(\frac{3}{4}r_g^2 - Z^2\right)\left(E - \frac{M}{\rho}\right)} \tag{8}$$

$$R' = R + \frac{r_g}{2} + \frac{E}{2M}\left(\frac{3}{4}r_g^2 - Z^2\right) \tag{9}$$

Теперь можно разложить корень. Получается так:

$$S_r = \int\limits_{M/E}^{R'} d\rho \left\{ \sqrt{E^2 - \frac{M^2}{\rho^2}} + \frac{r_g}{\rho}\sqrt{E^2 - \frac{M^2}{\rho^2}} + \right.$$
$$\left. \frac{3r_g^2 - 2Z^2}{2\rho^2}\sqrt{E^2 - \frac{M^2}{\rho^2}} - \left(\frac{3}{8}r_g^2 - \frac{1}{2}Z^2\right)\frac{M}{\rho^3}\sqrt{\frac{\rho E - M}{\rho E + M}} \right\} \tag{10}$$

Изменение полярного угла при движении от ближайшей точки до бесконечности даётся формулой

$$\phi = \lim_{R\to\infty} \frac{\partial}{\partial M} S_r(R) \tag{11}$$