Задачи к теорминимуму

Anikin Evgeny, 121

23 сентября 2015 г.

1 Задача 1

1.1 Ответ

$$\frac{\sqrt{U_0} - \sqrt{|E|}}{\alpha} = \text{const} \tag{1}$$

1.2 Решение

Нужно найти адиабатический инвариант частицы в потенциале

$$U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \tag{2}$$

Соответствующий лагранжиан выглядит так:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{3}$$

Удобно сделать подстановку

$$q = e^{-\alpha x}, \tag{4}$$

$$\dot{q} = -\alpha \dot{x} e^{-\alpha x} = -\alpha q \dot{x}, \tag{5}$$

так что новый лагранжиан получается таким:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2\alpha^2 q^2} - U_0(q^2 - 2q). \tag{6}$$

Гамильтониан —

$$H = \frac{\alpha^2 p^2 q^2}{2m} + U_0(q^2 - 2q) \tag{7}$$

Движение частицы финитно, если выполняется неравенство $-U_0 < E < 0$.

Получим выражение для импульса из формулы 7:

$$p = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\alpha} \frac{\sqrt{-q^2 + 2q - |E|/U_0}}{q} \tag{8}$$

Частица движется между точками q_1, q_2, которые определяются из уравнения

$$q^2 - 2q + \frac{|E|}{U_0} = 0 \tag{9}$$

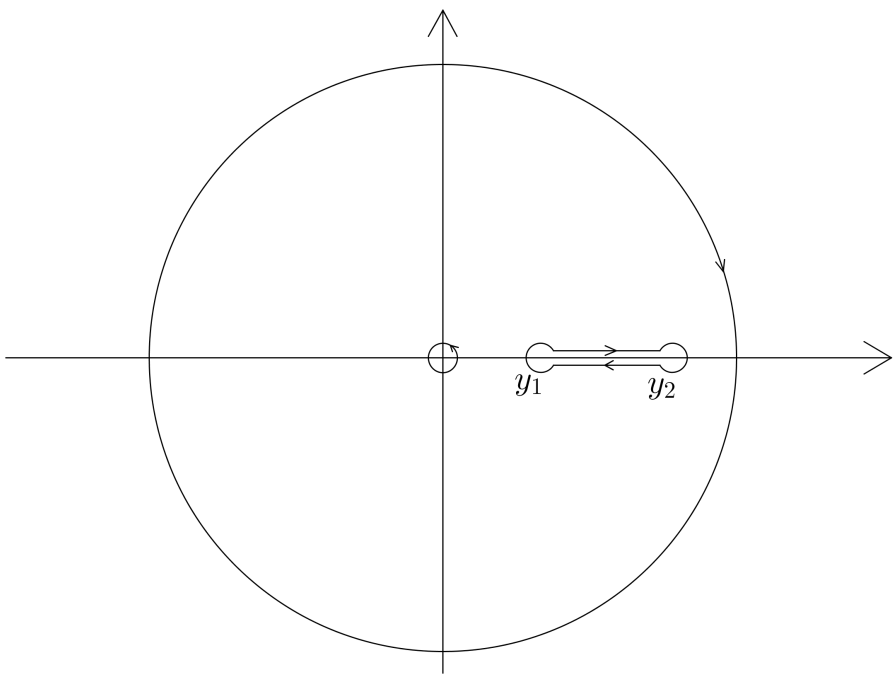
$$q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{|E|}{U_0}} \tag{10}$$

Оба корня q_1, q_2 больше нуля.

Адиабатический инвариант —

$$A = \int p\, dq = \frac{2\sqrt{2mU_0}}{\alpha} \int \frac{\sqrt{-q^2 + 2q - |E|/U_0}}{q}\, dq \tag{11}$$

Этот интеграл можно взять как контурный:



Для вычисления интеграла нужны вычеты функции

$$F(q) = \frac{\sqrt{-q^2 + 2q - |E|/U_0}}{q} \tag{12}$$

в точках 0, ∞. При $q < q_1$ ветвь функции $F(q) = i\sqrt{q^2 - 2q + |E|/U_0}$, а при $q > q_2$ — $F(q) = -i\sqrt{q^2 - 2q + |E|/U_0}$. Вычет в точке $q = 0$ даётся выражением

$$\mathrm{res}_{q=0} F = i\sqrt{|E|/U_0} \tag{13}$$

Для $q = \infty$ нужно немного больше работы. Необходимо разложить $F(q)$ в ряд Лорана. Рассмотрим большие положительные q. Для таких q имеем

$$F(q) = -i\sqrt{1 - \frac{2}{q} + \frac{|E|}{U_0 q^2}} = \\ = -i\left(1 - \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right) \tag{14}$$

Таким образом

$$\mathrm{res}_{q=\infty} F = i. \tag{15}$$

Теперь продолжим равенство 11:

$$A = \int p\,dq = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2mU_0}}{\alpha} \times 2\pi i(\mathrm{res}_{q=0}F - \mathrm{res}_{q=\infty}F) = \\ = \frac{2\pi\sqrt{2mU_0}}{\alpha}(-\sqrt{|E|/U_0} + 1) = \\ = 2\pi\sqrt{2m} \cdot \frac{\sqrt{U_0} - \sqrt{|E|}}{\alpha} = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Последнее равенство и есть ответ.

2 Задача 2

2.1 Ответ

Колесо не проскальзывает, если выполняется неравенство

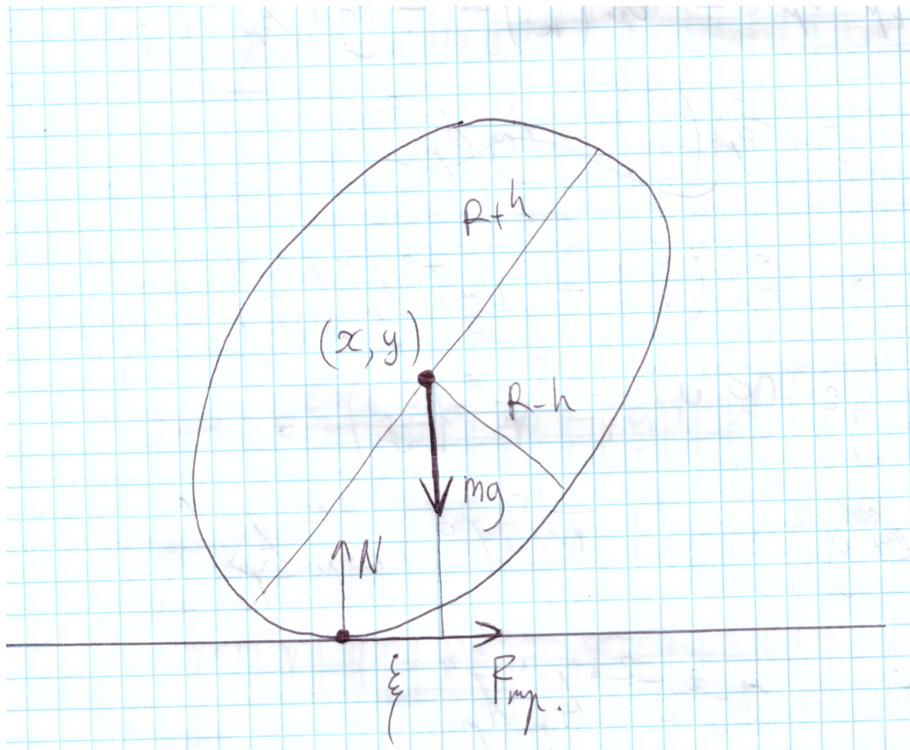
$$k > \frac{\epsilon}{3}\frac{2gR - v^2}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v^2)^2}} \tag{17}$$

Предполагается, что $\omega^2 \gg gh$. Обозначения см. ниже.

2.2 Решение

Примем следующие обозначения: пусть $R + h$, $R - h$ — полуоси эллиптического колеса, α — угол поворота, x, y — координаты центра масс колеса, ξ — смещение центра масс относительно точки касания по горизонтали (см. рисунок). Будем считать, что скорость колеса достаточно велика, то есть $v^2 \gg gh$. Это значит, что можно будет приближённо считать скорость постоянной.

Так как $h \ll R$, можно использовать выражения для радиуса и длины эллипса в зависимости от угла в первом порядке по h/R.



$$r(\alpha) = R\left(1 + \frac{h}{R}\cos 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{18}$$

$$l(\alpha) = R\left(\alpha + \frac{h}{2R}\sin 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{19}$$

$$\xi(\alpha) = R\left(\frac{2h}{R}\sin 2\alpha + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right) \tag{20}$$

В первом порядке можно считать, что $x = l$, $y = r$. Теперь напишем законы Ньютона для колеса.

$$I\dot{\omega} = N\xi - F_{\mathrm{tr}}y \tag{21}$$

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{tr}} \tag{22}$$

$$m\ddot{y} = -mg + N \tag{23}$$

Исключая силы трения и реакции опоры, получим уравнение

$$I\dot{\omega} = m(\ddot{y} + g)\xi - m\ddot{x}y \tag{24}$$

Используя очевидные равенства $\ddot{x} = x''\omega^2 + x'\dot{\omega}$, $\ddot{y} = y''\omega^2 + y'\dot{\omega}$ (штрихи означают производную по углу α), можно выразить угловое ускорение через угловую скорость и угол.

$$\dot{\omega} = \frac{(y''\xi - x''y)\omega^2 + g\xi}{I/m - y'\xi + x'y} \tag{25}$$

Пользуясь формулами 18 – 20,

$$x' = R + h\cos 2\alpha \tag{26}$$

$$x'' = -2h\sin 2\alpha \tag{27}$$

$$y' = -2h\sin 2\alpha \tag{28}$$

$$y'' = -4h\cos 2\alpha \tag{29}$$

получим окончательное выражение для углового ускорения в первом порядке:

$$\dot{\omega} = \frac{2h\sin 2\alpha(R\omega^2 + g)}{\frac{I}{m} + R^2} \tag{30}$$

Теперь легко выразить $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$.

$$\ddot{x} \;=\; -2h\sin 2\alpha\omega^2 \;+\; R\frac{2h\sin 2\alpha(R\omega^2 + g)}{\frac{I}{m} + R^2} \;=\; 2h\sin 2\alpha\frac{mgR - I\omega^2}{I + mR^2} \tag{31}$$

$$\ddot{y} = -4h\cos 2\alpha\omega^2 \tag{32}$$

Условие того, что колесо не проскальзывает, можно записать так:

$$k > \left|\frac{\ddot{x}}{\ddot{y} + g}\right| = \left|\frac{2h\sin 2\alpha}{g - 4h\omega^2\cos 2\alpha}\frac{mgR - I\omega^2}{I + mR^2}\right| \tag{33}$$

или

$$k > \left|\frac{2gR - v^2}{3}\frac{\epsilon\sin 2\alpha}{gR - 2\epsilon v^2\cos 2\alpha}\right| \tag{34}$$

Если скорость считать постоянной, то нужно найти угол, при котором выражение в правой части предыдущего равенства максимально. Дифференцируя правую часть, приходим к условию

$$\cos 2\alpha = \frac{2\epsilon v^2}{gR} \tag{35}$$

Подставляя в 34, получим

$$k > \frac{\epsilon}{3}\frac{2gR - v^2}{\sqrt{(gR)^2 - (2\epsilon v^2)^2}} \tag{36}$$

При $v^2 = 2gR$ сила трения обращается в нуль в первом порядке по h. Поэтому минимальный коэффициент трения тоже равен нулю в первом порядке.

При $v^2 = \frac{gR}{2\epsilon}$ обращается в нуль сила реакции опоры. Это значит, что колесо начнёт подпрыгивать.