# Краевые состояния в топологических изоляторах с беспорядком

Евгений Аникин
научный руководитель
чл.-к. РАН д. ф–м. н. П.И. Арсеев

ФИАН им. Лебедева

# Что такое двумерный топологический изолятор?

У функции Блоха топологического изолятора $u(k)$ невозможно гладко определить фазу во всей зоне Бриллюэна.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int d^2 k \left[ \frac{\partial}{\partial k_x} \left\langle u \middle| \frac{\partial u}{\partial k_y} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial k_y} \left\langle u \middle| \frac{\partial u}{\partial k_x} \right\rangle \right] \qquad (1)$$

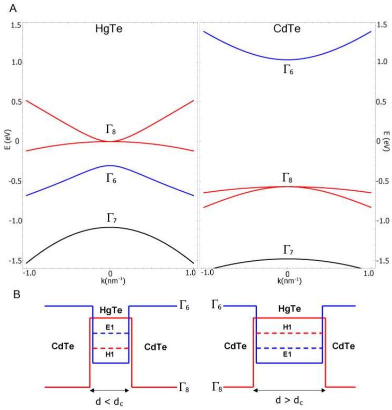



Рис.: Объемный спектр HgTe и CdTe и схематическое изображение квантовой ямы

В квантовой яме образуются уровни размерного квантования. При $d < d_c$ спектр ямы нормальный, при $d > d_c$ — инвертированный.

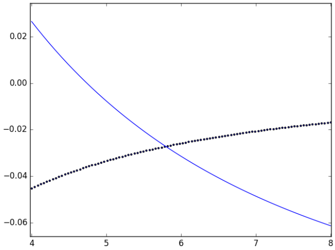


Рис.: Уровни размерного квантования

# Гамильтониан Кейна

$$H = \begin{pmatrix} E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_s} E_{2\times 2} & T \\ T^\dagger & E_v + H_L \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$H_L = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2\right)k^2 - 2\gamma_2(\vec{k}\cdot\vec{J})^2 - \right.$$
$$\left. - 2(\gamma_3 - \gamma_2)(\{J_x J_y\} + \{J_x J_z\} + \{J_y J_z\})\right]$$

$$T = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}k_+ & \sqrt{\frac{2}{3}}k_z & \frac{1}{\sqrt{6}}k_- & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}k_+ & \sqrt{\frac{2}{3}}k_z & \frac{1}{\sqrt{2}}k_- \end{pmatrix}$$

# Эффективный гамильтониан для уровней размерного квантования

Эффективный гамильтониан для E1, H1 подуровней квантовой ямы HgTe:

$$H = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{m}(2 - \cos p_x - \cos p_y) & 2t(\sin p_x - i \sin p_y) \\ 2t(\sin p_x + i \sin p_y) & -\xi - \frac{1}{m}(2 - \cos p_x - \cos p_y) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Описывает топологический изолятор при $\xi < 0$

# Гамильтониан в координатном представлении

$$
\begin{aligned}
H_{\text{lattice}} = \sum_{mn} \Bigg\{ a^\dagger_{mn} \Bigg( \left( \xi + \frac{2}{m} \right) a_{mn} \\
&- \frac{1}{2m}(a_{m+1,n} + a_{m-1,n} + a_{m,n+1} + a_{m,n-1}) \Bigg) \\
&- ita^\dagger_{mn}(b_{m+1,n} - b_{m-1,n} - i(b_{m,n+1} - b_{m,n-1})) \\
&- itb^\dagger_{mn}(a_{m+1,n} - a_{m-1,n} + i(a_{m,n+1} - a_{m,n-1})) \\
- b^\dagger_{mn} \Bigg( \left( \xi + \frac{2}{m} \right) b_{mn} - \frac{1}{2m}(b_{m+1,n} + b_{m-1,n} + b_{m,n+1} + b_{m,n-1}) \Bigg) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

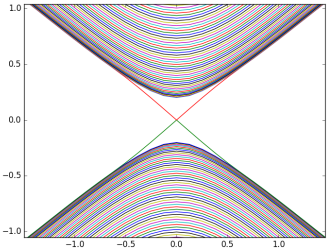



Рис.: Спектр полосы ТИ: результат численной диагонализации

На границе топологического изолятора образуются моды, пересекающие щель. Их закон дисперсии — $\epsilon \approx \pm vk$ для двух проекций спина.

$T$–инвариантное возмущение не может привести к рассеянию краевых электронов назад.

Какие могут быть механизмы для рассеяния?

# Точечная примесь

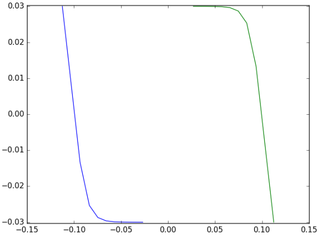
$$V = \Delta E(a_{00}^{\dagger} a_{00} + b_{00}^{\dagger} b_{00}) \tag{5}$$

Уравнение на уровень энергии:

$$\det\left(\mathbb{1} - \Delta E\, \hat{G}(\omega, 0, 0)\right) = 1, \tag{6}$$

$$\hat{G}(\omega, m, n) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{ip_x m + ip_y n} \frac{\omega + \hat{H}}{\omega^2 - E_p^2}, \tag{7}$$

# Уровни энергии на примеси



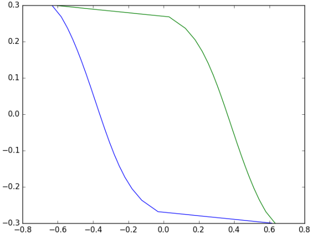




Рис.: На графиках показаны уровни энергии связанных состояний на точечной примеси для $m, t = 1, 0.4$, $\xi = 0.03$ (слева), $\xi = 0.3$ (справа)

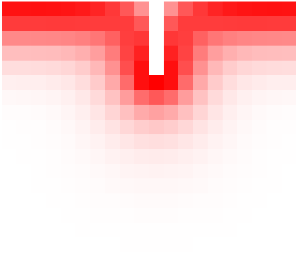
# Волновые функции

$$G_{11}(\omega, m, n) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4t^2+\frac{\xi}{m}}\left(\omega+\xi-\frac{1}{m}\frac{\xi^2-\omega^2}{4t^2+\frac{\xi}{m}}\right)K_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2-\omega^2}{4t^2+\frac{\xi}{m}}}R\right)$$

$$G_{21}(\omega, m, n) = -\frac{it}{\pi}\sqrt{\frac{\xi^2-\omega^2}{(4t^2+\frac{\xi}{m})^3}}K_1\left(\sqrt{\frac{\xi^2-\omega^2}{4t^2+\frac{\xi}{m}}}R\right)e^{i\theta} \tag{8}$$

$$\delta\omega \approx \frac{\left(4t^2+\frac{\xi}{m}\right)p_{\max}^2}{|\xi|}\exp\left\{-\frac{p_{\max}^2}{4m|\xi|}-\frac{2\pi}{|\xi|\Delta E\left(4t^2+\frac{\xi}{m}\right)}\right\} \tag{9}$$

# Результаты диагонализации



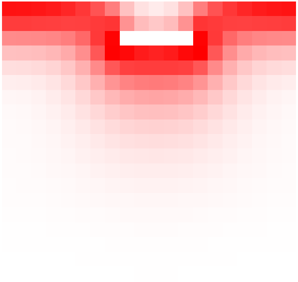


Рис.: Квадрат амплитуды волновой функции краевого состояния, огибающего препятствия. Размер решётки — $20 \times 20$, по горизонтальной оси наложены периодические граничные условия.

# Формула Ландауэра

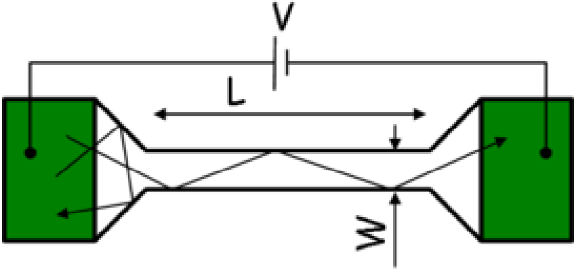



Рис.: Регион рассеяния, соединённый с двумя контактами

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \operatorname{Tr} \hat{t}^\dagger \hat{t}, \qquad (10)$$

где $\hat{t}$ — матрица рассеяния между каналами контактов.

# Вычисление матрицы рассеяния

Гамильтониан системы с контактами всегда может быть представлен в виде

$$H = \begin{pmatrix} H_S & V_{LS} & 0 & \ddots \\ V_{LS}^\dagger & H_L & V_L & 0 \\ 0 & V_L^\dagger & H_L & V_L \\ \ddots & 0 & V_L^\dagger & \ddots \end{pmatrix} \tag{11}$$

Задача рассеяния сводится к системе неоднородных линейных уравнений.

# Проводимость пластины топологического изолятора

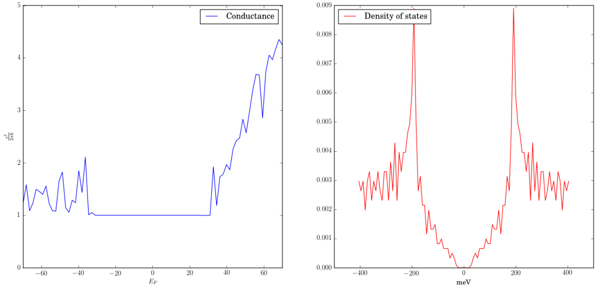



Рис.: В отсутствие беспорядка в щели наблюдается плато проводимости $G = \frac{e^2}{2\pi\hbar}$, а плотность состояний равна нулю.

# Проводимость пластины топологического изолятора

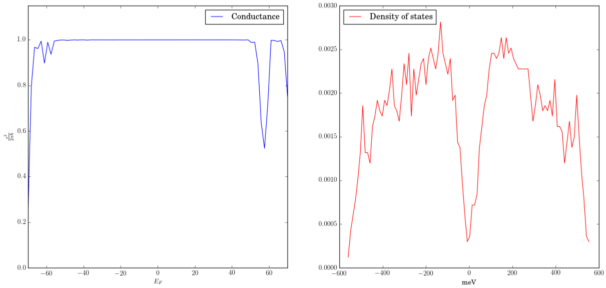



Рис.: При амплитуде беспорядка $W = 240\mathrm{meV}$, $\xi == 30\mathrm{meV}$ видно, что плато сохраняется, несмотря на ненулевую плотность состояний в щели.

# Проводимость пластины топологического изолятора

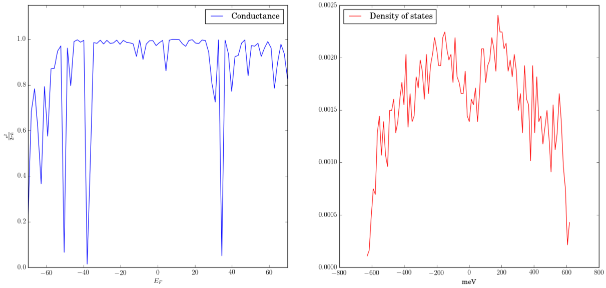



Рис.: При ещё большей амплитуде беспорядка ($W = 320\mathrm{meV}$) проводимость начинает флуктуировать, но плато всё равно хорошо различимо. Дальнейшее увеличение $W$ приводит к нарастанию флуктуаций, а в дальнейшем — к исчезновению плато.

# Проводимость пластины топологического изолятора

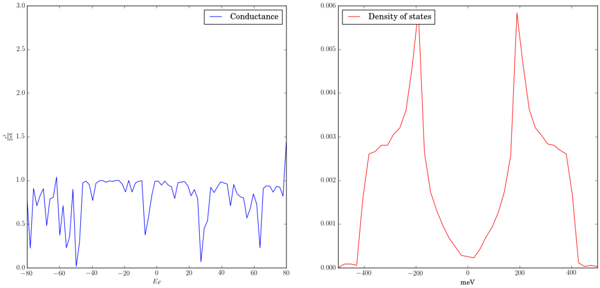



Рис.: Случайные глубокие примеси с концентрацией $n = 0.03$, толщина полосы — 50 узлов

# Проводимость пластины топологического изолятора

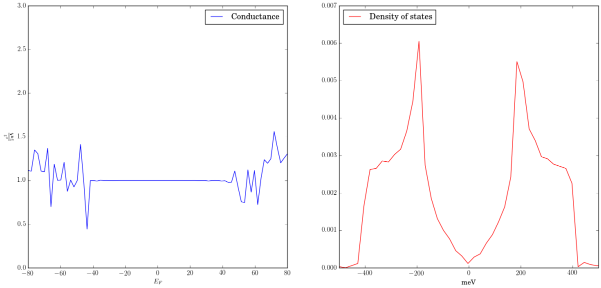



Рис.: Случайные глубокие примеси с концентрацией $n = 0.03$, толщина полосы — 100 узлов

# Проводимость пластины топологического изолятора

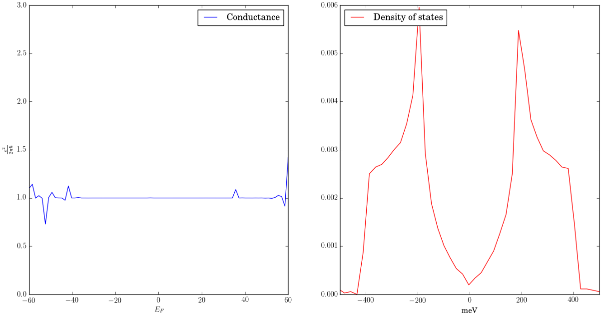



Рис.: Случайные глубокие примеси с концентрацией $n = 0.05$, толщина полосы — 240 узлов

Спасибо за внимание!