ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Санкт-петербургский государственный политехнический университет
Институт Компьютерных Наук и Технологий
Кафедра: Информационные и Управляющий Системы
Автор: Лукашин Антон Андреевич

2016-2017

Содержание

- Категории
  - *Пустая и тривиальная категории*
  - *Категория двух и трех объектов*
  - *Дискретные категории*
  - *Множество как категория*
  - *Моноиды*
  - *Категория Scala*
- Конструкции
  - *Изоморфизмы*
  - *Начальный и терминальные объекты*
  - *Продукты и сопродукты*
- Теория категорий и функциональное программирование

Содержание

Categories

Constructions

Functors

Natural Transformations

Algebras and Initial Algebras

Monads and Kleish Triples

Пустая и тривиальные категории

- Пустая категория 0 – не содержит объектов и морфизм (это описывается как «ничего»)
- Тривиальная категория 1 – содержит один объект и один морфизм
  - *Какой это морфизм?*

Пустая и тривиальные категории

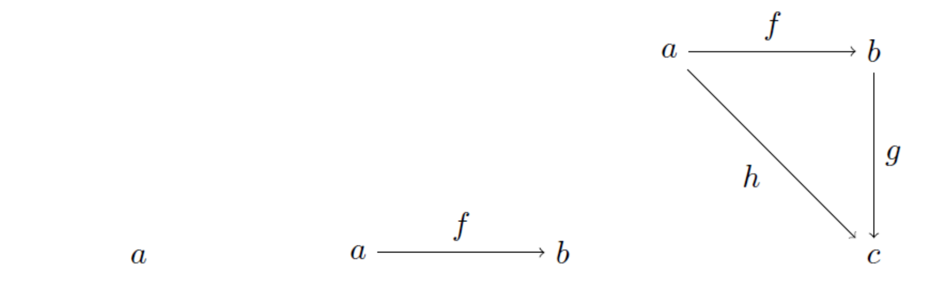
- Пустая категория 0 – не содержит объектов и морфизм (это описывается как «ничего»)
- Тривиальная категория 1 – содержит один объект и один морфизм
  - *Какой это морфизм?*
  - *Это морфизм id (идентифицирующий морфизм id$a : a \longrightarrow a$)*

Категории двух и трех объектов

- Категория 2 – содержит 2 объекта и 3 морфизма
  - *Два идентифицирующих морфизма*
  - *Один неидентифицирующий морфизм*
- Категория 3 – содержит 3 объекта и 6 морфизмов
  - *Три идентифицирующих морфизма*
  - *Три неидентифицирующих морфизма*
- Что представляют собой неидентифицирующие морфизмы?

Категории двух и трех объектов

- Категория 2 – содержит 2 объекта и 3 морфизма
  - *Два идентифицирующих морфизма*
  - *Один неидентифицирующий морфизм*
- Категория 3 – содержит 3 объекта и 6 морфизмов
  - *Три идентифицирующих морфизма*
  - *Три неидентифицирующих морфизма*
- Что представляют собой неидентифицирующие морфизмы?



(a) The category **1**. (b) The category **2**. (c) The category **3**.

Дискретные категории

- Дискретная категория – это категория, единственными морфизмами которой являются тождественные (id)
- Рассматривая набор A, мы получаем дискретную категорию C, взяв
  - *Объекты категории A*
  - *Тождественные морфизмы по одному для каждого $x \in A$, которые однозначно определяются тождественной аксиомой*
- Дискретная категория так определяется его объектами, так и соответствующими тождественными морфизмами

Категория множества

- Множество – это категория наборов и функций
  - *Объекты данной категории – это наборы A, B, C, …,*
  - *Морфизмы данной категории – это функции f, g, h, …*
- Каждая функция $f : A \to B$ состоит из:
  - *домена A = dom(f)*
  - *кодомена или диапазона B = cod(f)*
  - *Правила, присваивающего каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x) \in B$*
- Также для каждого множества A, существует тождественная функция id$A : A \to A$, такая что:
  - *для всех $x \in A$*

$$\mathrm{id}A(x) = x,$$

- И для каждой пары морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$, существует композиция $g \circ f : A \to C$ такая что:
  - *для всех $x \in A$,*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Множество - категория

- Аксиома ассоциативности
  - *Для функций* $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ и $h : C \rightarrow D$, для всех $x \in A$:

    $(h \circ g \circ f)(x)$ = (по 2му свойству

    $h((g \circ f)(x))$ = (по 2му свойству)

    $h(g(f(x)))$ = (по 2му свойству)

    $(h \circ g)(f(x))$ = (по 2му свойству)

    $((h \circ g) \circ f)(x)$
- Аксиома тождественности
  - *Для функции* $f : A \rightarrow B$, для всех $x \in A$:

    $(\mathrm{id}_B \circ f)(x)$ = (по 2му свойству

    $\mathrm{id}_B(f(x))$ = (по 1му свойству)

    $f(x)$ = (по 1му свойству)

    $f(\mathrm{id}_A(x))$ = (по 2му свойству)

    $(f \circ \mathrm{id}_A)(x)$
- ϕ

Категория множества - замечание

- В какой-то степени мы определили объекты и морфизмы множества как множества всех множеств и всех функций, что выглядит как парадокс, такой как:
  - *Множества всех множеств не содержат сами себя*

  Таким образом должно существовать множество – вселенная, которое содержит объекты Set (категории множества), которые являются меньшими множествами
- Моноид – это категория с одним объектом. Моноид определяется своими морфизмами:
  - *тождественным морфизмом*
  - *правилами композиции морфизмов.*
- Более формально для категории $\mathcal{C}$ с одним объектом a, мы получаем моноид $\mathcal{C}$ = ($\mathcal{C}$M, $\circ$, id$a$) где элементы $\mathcal{C}$M морфизмы $\mathcal{C}$. С другой стороны учитывая моноид $M = (M, *, e)$, мы получаем категорию $\mathcal{M}$ с одним объектом M, морфизмы элементов M, композицию $*$ и тождественный морфизм e.

Категория Scala - начало

- Начнем описывать Scala как категорию
  - *Типы данных (Unit, Boolean, Integer) – объекты категории*
  - *Unit : Unit -> Unit*
  - *True, False : Unit -> Boolean*
  - *Zero : Unit -> Integer*
  - *Функции:*
    - Succ : Integer -> Integer
    - Pred : Integer -> Integer
    - not   : Boolean -> Boolean
    - IsZero : Integer -> Boolean
      - *Zero.isZero = True*
      - *_.isZero = False*
    - etc

Конструкции

- Рассмотрим некоторые конструкции в категориях
  - *Изоморфизм*
  - *Начальные и терминальные объекты*
  - *Продукты и сопродукты*

Изоморфизм

- Определение: Пусть $\mathcal{C}$ - категория. Морфизм $f : a \to b$ является изоморфизмом если существует обратный морфизм $f^{-1} : b \to a$ такой что:
  - $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_a$
  - $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_b$
- Объекты a и b изоморфны если существует изоморфизм $f : a \to b$. Изоморфные объекты часто называют тождественными с точностью до изоморфизма
- Другими словами объект с некоторыми свойствами называется уникальным с точностью до изоморфизма, если каждый объект удовлетворяющий свойству изоморфен ему

Начальные и терминальные объекты

- Определение: Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Объект 0 – начальный объект категории $\mathcal{C}$, если для всех объектов a, существует уникальный морфизм $0 \longrightarrow a$
- Определение: Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Объект 1 – терминальный объект категории $\mathcal{C}$, если для всех объектов a, существует уникальный морфизм $a \longrightarrow 1$
- Лемма: начальные и терминальные объекты уникальны с точностью до изоморфизма
- Доказательство
- Пусть $\mathcal{C}$ – категория с начальными объектами 0 and 0′. Существует уникальные морфизмы $0_{0'} : 0 \longrightarrow 0'$ and $0'_0 : 0' \longrightarrow 0$ а также $0_0 = id_0$ и $0'_{0'} = id_{0'}$, следовательно:
  - $0'_0 \circ 0_{0'} = id_0$ *и* $0_{0'} \circ 0'_0 = id_{0'}$
  - *То есть 0 уникален с точностью до изоморфизма*
- Для терминальных объектов показать самостоятельно

Начальные и терминальные объекты

- Пустое множество ∅ - начальный объект. Любое одноэлеметное множество (singleton set) {x} – терминальный объект
  - *Уникальная функция empty* $\emptyset \rightarrow A$
  - Уникальная функция присвоения x всем элементам $A \rightarrow \{x\}$
- Элементы множества A могут рассматриваться как функции из терминального объекта, который является однообъектным множество к A. Точнее если $x \in A$ и 1 – это терминальный объект, тогда x может быть представлен как функция $x : 1 \rightarrow A$, которая присваивает x к элементу 1

Продукты и сопродукты

- Определение: продукт объектов a и b категории C состоит из:
  - *объекта продукта* $a \times b$
  - *проекции* $\pi 1 : a \times b \to a$
  - *проекции*$\pi 2 : a \times b \to b$
- Таких, что для всех объектов c, а так же морфизмов $f : c \to a$ и $g : c \to b$ – существует уникальный морфизм $\langle f, g \rangle : c \to a \times b$, такой что

$$\pi 1 \circ \langle f, g \rangle = f \text{ and } \pi 2 \circ \langle f, g \rangle = g,$$

$$\begin{tikzcd}
a & a \times b \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & b \\
& c \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "\langle f, g \rangle"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Пример

- Продукт двух множеств A и B описывается Декартовым произведением:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$$

- Проецирующие функции $\pi 1 : A \times B \to A$ и $\pi 2 : A \times B \to B$ такие что:
  - *Для всех* $(x, y) \in A \times B$, $\pi 1(x, y) = x$ и $\pi 2(x, y) = y$.
- Для множества C и двух функции $f : C \to A$ и $g : C \to B$ существует уникальная функция $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$, определяемая как

$$\langle f, g\rangle(z) = (f(z), g(z))$$

Сопродукт

- Сопродукт объектов a и b в категории $\mathcal{C}$ состоит из:
  - *Объекта сопродукта* $a + b$
  - *нагнетательного морфизма* $\iota 1 : a \rightarrow a + b$
  - $\iota 2 : b \rightarrow a + b$
- Таких что для всех объектов c, а также морфизмов $f : a \rightarrow c$ и $g : b \rightarrow c$, существует уникальный морфизм $[f, g] : a + b \rightarrow c$ такой что:

$$[f, g] \circ \iota 1 = f \quad \text{и} \quad [f, g] \circ \iota 2 = g$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dotted, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Пример

- Сопродукт двух множеств A and B состоит из
  - *Объединения* $A + B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$
- Двух нагнетающих функций $\iota 1 : A \to A + B$ и $\iota 2 : B \to A + B$ таких что,
  - *Для всех* $x \in A$ и $y \in B$,
  - $\iota 1(x) = (1, x)$ и $\iota 2(y) = (2, y$
- Для множества C, а также двух функции $f : A \to C$ и $g : B \to C$, существует уникальная функция $[f, g] : A + B \to C$ определяемая как

$$[f, g](\iota 1(x)) = f(x) \text{ and } [f, g](\iota 2(y)) = g(y)$$

Спасибо за внимание

$$\begin{tikzcd}
& \text{Categories} \arrow[d] & \\
& \text{Constructions} \arrow[d] & \\
& \text{Functors} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Natural Transformations} \arrow[d] & & \text{Algebras and Initial Algebras} \\
\text{Monads and Kleish Triples} & &
\end{tikzcd}$$