МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

На правах рукопису

Нейман Євген Вікторович

УДК 517.98 + 512.643

АБСТРАКТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ПРОБЛЕМА В УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСАХ НЕВАНЛІННИ

01.01.01 – математичний аналіз
Дисертація на здобуття вченого ступеню
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
д.ф.–м.н., професор
Деркач Володимир Олександрович

Київ – 2017

Зміст

Список умовних позначень

$\mathbb{N}$ – множина натуральний чисел.
$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.
$\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел.
$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.
$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.
$\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) – верхня (нижня) відкрита комплексна півплощина.
$\mathbb{T}$ – множина точок на межі одиничного круга $\{z : |z| = 1\}$.
$\mathbb{D}$ – множина точок у середні одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$.
$\mathbb{C}^n$ – лінійний простір комплексних n-мірних векторів–колонок.
$\mathbb{C}^{n\times m}$ – простір комплексних матриць розміру $n \times m$.
$(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярний добуток (в просторі H).
span$L$ – лінійна оболонка множини L.
$\operatorname{clos} L$ – замкнення множини L.
$A\restriction_L$ – звуження оператора A на підпростір $L \subset H$.
Π_L – ортогональний проектор на підпростір $L \subset H$.
$H_1 \perp H_2$ – підпростори H_1 і H_2 ортогональні.
$H_1 + H_2$ – сума підпросторів H_1 і H_2.
$H_1 \dot{+} H_2$ – пряма сума підпросторів H_1 і H_2.
$H_1 \oplus H_2$ – ортогональна сума підпросторів H_1 і H_2.
$H_1 \times H_2$ – декартовий добуток підпросторів H_1 і H_1.
I, I_n – одинична матриця (порядку n).
0, 0_n – нульова матриця (порядку n).
A^{-1} – матриця (оператор) обернена до A.
A^* – матриця (оператор) спряжена до A.
$A^{-*} = (A^{-1})^*$ – оператор спряжений до оператора оберненого до A.
$A \geq 0$ – самоспряжена матриця (оператор) A невід'ємна.
$A > 0$ – самоспряжена матриця (оператор) A строго додатна.
$A \subset B$ – B є розширення оператора A.
$\det A$ – визначник матриці A.
$\operatorname{rank} A$ – ранг матриці A.
$\operatorname{dom} A$ – область визначення матриці (оператора) A.
$\operatorname{ran} A$ – область значень матриці (оператора) A.
$\ker A$ – ядро матриці (оператора) A.
$||A||$, $||A||_H$ – норма матриці (оператора) A (в просторі H).
$\lambda \widehat{\to} \alpha$ – недотична границя в точці α або в нескінченності.
δ_{ij} – символ Кронекера.
$\mathfrak{h}_s$ – множина точок голоморфності функції s.

Вступ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню операторного метода розв'язку інтерполяційних проблем в узагальнених класах функцій. Теорія інтерполяції набула останнім часом широкого застосування в теорії систем і теорії H_∞-контролю. Головні проблеми теорії H_∞-контролю – це проблема редукції моделі без помітної зміни передавальної функції і проблема робастної (відмовостійкої) стабілізації, яка полягає в синтезі компенсатора в системах зворотного зв'язку таким чином, щоб система залишалась внутрішньо стабільною. В роботі Гловера [69] було показано, що проблема редукції моделі може бути зведена до інтерполяційної проблеми Нехарі-Такагі. Також Кімура і Вид'ясагар [95] показали, що проблема робастної стабілізації є деякою інтерполяційною проблемою. Ці проблеми теорії H_∞-контролю інтенсивно досліджувались в останні три декади в роботах Бхайя, Франсіса, Куртейн, МакФарлайна, та багатьох інших. При дослідженні цих проблем широко використовувались методи теорії інтерполяційних матричних проблем, розроблені в роботах Адамяна, Арова і Крейна [1], Болла і Хелтона [44], Болла, Гохберга і Родмана [43], Г. Діма [68]. Підкреслимо, що дуже часто теорія H_∞-контролю потребує використання таких інтерполяційних задач, які є індефінітними за своєю суттю.

Операторний підхід до класичної інтерполяційної проблеми Неванлінни-Піка був розроблений в роботі Б. Секефальві-Надь і А. Кораньи [76]. В 60-х роках операторний підхід був застосований Адамяном, Аровим і Крейном до проблеми Нехарі і індефінітної проблеми Нехарі-Такагі. В 1986 році в роботі В.Е. Кацнельсона, А.Я. Хейфеца та П.М. Юдицького [14] була запропонована нова схема розв'язку інтерполяційних проблем. В цій роботі було введено до розгляду абстрактну інтерполяційну проблему, як узагальнення підходу В.П. Потапова до інтерполяційних задач. Опис всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми було зведено до опису всіх матриць розсіювання унітарних розширень деякої часткової ізометрії. У подальшому було показано (П.М. Юдицький [35], А.Я. Хейфец [33], С. Купін [82]), що багато задач аналізу, таких як дотична і бідотична проблеми, проблема ліфтинга коммутанта, проблема моментів, та інших, можна включити в загальну схему абстрактної інтерполяційної проблеми. Паралельну версію абстрактної інтерполяційної проблеми в операторних класах Неванлінни було розглянуто В.О. Деркачем в [58].

Індефінітний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми в узагальнених класах Шура досліджувался в [57]. Проте абстрактна інтерполяційна проблема в операторних класах Неванлінни залишалась відкритою. Розгляд цієї проблеми дозволив би отримати новий підхід до багатьох індефінітних інтерполяційних задач. Одна з таких задач — це індефінітна проблема моментів, яка була розглянута в роботах М.Г. Крейна і Г. Лангера [80] методами теорії розширень симетричних операторів в просторах Понтрягіна. Інший підхід до цієї проблеми, який базується на алгоритмі Шура, було застосовано в [55].

Інша проблема, яка вивчається в роботі — це проективний варіант дотичної інтерполяційної проблеми. Дотична інтерполяційна проблема, яка вперше була розглянута в роботі І. Федчіної в 1974 р., одразу знайшла застосування в теорії систем. Різні підходи до цієї проблеми було запропоновано А.А. Нудельманом, Д.З. Аровим, І.Ц. Гохбергом, Г. Дімом, Л.Ф. Сахновичем та іншими. Зокрема, в роботах О. Хейфеца бідотична інтерполяційна проблема була розв'язана методами абстрактної інтерполяційної проблеми. В класичному випадку множина розв'язків дотичної інтерполяційної проблеми може бути описана як деяке дробово-лінійне перетворення $T_W[\varepsilon]$ від параметра ε, який пробігає матричний клас Шура, де матриця W дробово-лінійного перетворення будується за даними проблеми.

Індефінітний варіант дотичної і бідотичної інтерполяційної проблеми розглядався в роботах А.А. Нудельмана, Дж. Болла, І.Ц. Гохберга і Л. Родмана [43], А.А. Аміршадяна і В.О. Деркача [39], В.О. Деркача і Г. Діма [60]. Для індефінітної дотичної інтерполяційної проблеми загальна картина параметризації її розв'язків зберігається, але множиною параметрів є лише частина класу Шура. Ті матриці-функції ε, для яких дробово-лінійне перетворення $T_W[\varepsilon]$ не є розв'язком дотичної інтерполяційної проблеми, називають винятковими. У скалярному випадку множина виняткових параметрів індефінітної інтерполяційної проблеми Каратеодорі-Фейєра було описано В. Болотніковим, О. Хейфецем і Л. Родманом [49, 48]. Для індефінітної дотичної інтерполяційної проблеми задача опису множини виняткових параметрів залишалась відкритою.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені в дисертації, отримано в ході виконання науково-дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"(номер державної реєстрації 0115U000136), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету; "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів"(номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дисертації є впровадження нового підходу до інтерполяційних проблем в узагальнених класах функцій Неванлінни або неванліннівських пар. Задачами дослідження є:

- побудова для кожної нормалізованої узагальненої неванліннівської пари (N_κ-пари) функціональної моделі самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром, такого що задана N_κ-пара є асоційованною з цим самоспряженним відношенням; побудова для кожної узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ функціональної моделі симетричного лінійного оператора в просторі де Бранжа-Ровняка і граничної трійки, таких що відповідна функція Вейля співпадає з функцією m; опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$ узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$.

- введення до розгляду абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар, опис розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар.

- застосування абстрактної інтерполяційної проблеми в класі N_κ-пар до індефінітної проблеми моментів, побудова абстрактної інтерполяційної проблеми, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів.

- доведення аналогу теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

- опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі, розгляд і дослідження допоміжної проективної дотичної інтерполяційної проблеми, пов'язаної з резольвентною матрицею узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є інтерполяційні проблеми в узагальнених класах Неванлінни і Шура.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є функціональна модель самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром, абстрактна інтерполяційна проблема в класі узагальнених неванліннівських пар, індефінітна проблема моментів, проективна дотична інтерполяційна проблема, опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Методи дослідження. У дисертації використовується і розвивається метод абстрактної інтерполяційної проблеми Кацнельсона, Хейфеца і Юдицького, метод граничних трійок в теорії розширень симетричних операторів у просторі Понтрягіна, методи теорії матриць, методи просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

Наукова новизна отриманих результатів У дисертації отримані такі нові результати:

- Введено поняття нормалізованої N_κ-пари. Для кожної узагальненої неванліннівської пари побудовано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Для узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ отримано опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром.

- Розглянуто абстрактну інтерполяційну проблему в класі N_κ-пар. З кожною абстрактною інтерполяційною проблемою пов'язано деяке симетричне лінійне відношення A у просторі Понтрягіна, таке що множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною самоспряжених розширень цього симетричного відношення A. Знайдено вигляд резольвентної матриці оператора в термінах даних інтерполяції. За допомогою цієї матриці отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари.

- Метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Побудовано абстрактну інтерполяційну проблему, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів. Знайдено вигляд резольвентної матриці.

- Введено до розгляду новий клас мероморфних в $\mathbb{D}$ матрично-значних функцій, так званий узагальнений клас Смірнова з κ полюсами в $\mathbb{D}$, який у випадку $\kappa = 0$ співпадає з класичним класом Смірнова. Доведено аналог теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

- Знайдено опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі. Для цього розглянуто нову допоміжну проективну дотичну проблему, яка розв'язана методом абстрактної інтерполяційної проблеми. Множина розв'язків цієї проблеми описана у формі дробово-лінійного перетворення за допомогою резольвентної матриці. В скалярному випадку отриманий опис виняткових пар співпадає з результатами попередніх робіт В. Болотнікова, О. Хейфеца і Л. Родмана.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів інтерполяційних проблем. Інтерполяційні проблеми в узагальнених операторно-значних класах виникають у теорії систем. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі - при викладанні спеціальних курсів по математичному аналізу.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику. Остаточні формулювання та доведення результатів належать здобувачу. Результати розділів 2, 3, 4 та 5 опубліковано відповідно в роботах [86, 88], [87], [88] та [24, 89].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на таких конференціях:

- Міжнародна конференція - VW Summer School 2010, Infinite Dimensional Operator Matrices — Theory and Applications, 5–9 липня 2010, Technische Universitat Berlin, м. Берлін, Німеччина;

- Сучасні проблеми математики і її застосування, 30 квітня 2012, м. Харків, Україна;

- Міжнародна конференція – International conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 вересня 2012, м. Львів, Україна;

- Міжнародна конференція – Кримська Міжнародна математична конференція, 23 вересня – 3 жовтня 2013, м. Судак, Крим, Україна;

- Міжнародна конференція – XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня 2016, м. Київ, Україна;

- Міжнародна конференція – Modeling, Analysis and Approximation Theory toward applications in tomography and inverse problems, 24-28 червня 2016, м. Любек, Німеччина;

- Міжнародна конференція – 7th European Congress of Mathematics, 18–22 липня 2016, м. Берлін, Німеччина.

Результати дисертації доповідались на семінарах:

- Донецький національний університет, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор В.О. Деркач, 2014;

- Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор Г.М. Торбін, 2016;

- Інститут математики НАН України, Київський семінар з функціонального аналізу, керівники: академік НАН України професор Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України професор М.Л. Горбачук, 2016;

- Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, семінар кафедри фундаментальної математики, керівник д.ф.-м.н. професор В.К. Дубовий, 2016.

Публикации Основні результати дисертації опубліковані у 5 статтях [24], [86], [87], [88], [89] та у 5 тезах доповідей на конференціях.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, що подрібнені на підрозділи, висновків та списку літератури, що містить 95 найменувань. Обсяг роботи складає 134 сторінок.

Основний зміст дисертації. Дисертація присвячена дослідженню операторного підходу до розв'язання інтерполяційних проблем в узагальнених класах функцій.

Для розв'язання абстрактної інтерполяційної проблеми отримано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Цю функціональну модель застосовано для побудови симетричного лінійного оператора пов'язаного з абстрактною інтерполяційною проблемою і для обчислення його резольвентної матриці. Отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари. Розроблений метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Знайдено явний вигляд резольвентної матриці цієї проблеми.

Введено до розгляду нові узагальнені класи матричних функцій Смірнова і отримано матричний аналог теореми Руше для матричних функцій з цих класів. Розглянуто нову дотичну інтерполяційну проблему в матричних класах Шура. Цю допоміжну проблему застосовано для опису виняткових параметрів дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору В.О. Деркачу.

1 Огляд літератури

1.1 Основні поняття

Стандартний скалярний добуток в просторі інтегрованих матрично-значних функцій $L_2^{p\times q}$ будемо позначати

$$\langle f, g\rangle_{st} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})^* f(e^{it})dt \quad (f, g \in L_2^{p\times q}).$$

Будемо позначати H_2 – простір функцій f, що є голоморфними в $\mathbb{D}$ і задовольняють умові

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 dt < \infty$$

Будемо ототожнювати функцію $f \in H_2$ з її граничними значеннями на $\mathbb{T}$. Таким чином будемо вважати, що $H_2 \subset L_2$. Будемо позначати H_∞ – простір функцій f, що є голоморфними і обмеженими в $\mathbb{D}$

$$\sup\nolimits_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| < \infty$$

Детальніше про скалярні класи Харді H_2, H_∞ дивись [11]. Нехай $H_k^{p\times q}$ $(1 \le k \le \infty)$ – це класи Харди матрично-значних функцій порядку $p \times q$ (дивись [29]).

Визначимо Π_+, як ортогональний проектор в L_2 на простір H_2 відповідної розмірності, а Π_X, як ортогональний проектор на підпростір X. Для самоспряженого оператора $A = A^*$ будемо позначати $\nu_-(A)$ – розмірність найбільшого підпростору, на якому оператор A є від'ємним. $\nu_-(A)$ дорівнює сумарній кратності власних від'ємних значень оператора A.

Простір Гільберта $\mathcal{H}$ векторнозначних функцій із значеннями у множині $\mathbb{C}^n$, що визначені на множині $\Omega \subset \mathbb{C}$, називається простором Гільберта з відтворюючим ядром (RKHS, reproducing kernel Hilbert space)(дивись [52], а також [41]), якщо існує $\mathbb{C}^{n\times n}$ матрично-значна функція $K_\omega(\lambda)$, яка визначена на $\Omega \times \Omega$, така що виконані умови:

(1) При будь-якому виборі точки $\omega \in \Omega$ і вектора $u \in \mathbb{C}^n$ має місце включення

$$K_\omega(\cdot)u \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

(2) Для всіх $\omega \in \Omega$, $u \in \mathbb{C}^n$ і $f \in \mathcal{H}$ виконується рівність

$$(f, K_\omega u)_{\mathcal{H}} = u^* f(\omega) \tag{1.2}$$

При цьому матрично-значну функцію $K_\omega(\lambda)$ називають відтворюючим ядром простору $\mathcal{H}$.

Нехай $\mathcal{H}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{C}$. Внутрішнім добутком називають відображення $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$, яке є лінійним по першому аргументу і симетричним (дивись [36]). **Простором Крейна** $\big(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ називають лінійний простір $\mathcal{H}$ з внутрішнім добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, який можна розкласти в ортогональну пряму суму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \tag{1.3}$$

відносно внутрішнього добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, де $\big(\mathcal{H}_+, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ і $\big(\mathcal{H}_-, -\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$ є класичними просторами Гільберта. Зображення (1.3) називають **фундаментальним розкладом** простору $\mathcal{H}$.

Лінійний підпростір $\mathcal{G}$ простору Крейна $\mathcal{H}$ називається від'ємним (додатним), якщо

$$\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}} < 0 \quad (\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}} > 0) \quad\quad (\forall f \in \mathcal{G}, f \neq 0).$$

Лінійний підпростір $\mathcal{G}$ простору Крейна $\mathcal{H}$ називається нейтральним (або виродженим), якщо

$$\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad\quad (\forall f \in \mathcal{G}).$$

Кожний замкнений підпростір $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}$ допускає ортогональний розклад

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_+\,[+]\,\mathcal{G}_-\,[+]\,\mathcal{G}_0, \tag{1.4}$$

де $\mathcal{G}_+$ є додатним підпростором, $\mathcal{G}_-$ є від'ємним підпростором, $\mathcal{G}_0$ є нейтральним підпростором в $\mathcal{H}$. При цьому розклад (1.4) не є однозначним, але підпростір $\mathcal{G}_0$ визначається однозначно і називається ізотропним підпростором простору $\mathcal{G}$. Відмітимо, що розмірності

$$\kappa_+(\mathcal{G}) = \dim \mathcal{G}_+ \quad \kappa_-(\mathcal{G}) = \dim \mathcal{G}_- \quad \kappa_0(\mathcal{G}) = \dim \mathcal{G}_0$$

не залежать від вибору розкладу(1.4). Індекси $\kappa_+(\mathcal{G})$ і $\kappa_-(\mathcal{G})$ називають додатнім і від'ємним індексами простору $\mathcal{G}$.

У випадку, коли розмірність простору $\mathcal{H}_-$ з фундаментального розкладу (1.3) є скінченною і дорівнює κ, простір $\mathcal{H}$ називають **простором Понтрягіна** з від'ємним індексом κ. Поняття відтворюючого ядра було розширено до просторів Понтрягіна (дивись [38]).

Простір Понтрягіна $\mathcal{H}$ векторнозначних функцій мероморфних в Ω має відтворююче ядро $K_\omega(\lambda)$ (RKPS, reproducing kernel Pontriagin space), якщо виконані умови (1.1) і (1.2) (при цьому в формулі (1.2) мається на увазі внутрішній добуток в просторі $\mathcal{H}$).

1.2 Клас стискаючих функцій. Добуток Бляшке-Потапова

Функцію s з класу H_∞ відносять до класу Шура $\mathcal{S}$, якщо $|s(z)| \leq 1$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Як відомо [11], нулі α_j $(j \leq N \leq \infty)$ скалярної функції $f \in H_\infty$, що є занумерованими з урахуванням кратності, задовольняють умові $\sum\limits_{j=1}^{N} \big(1 - |\alpha_j|\big) < \infty$, а сама функція f має факторизацію

$$f(\lambda) = b(\lambda) f_0(\lambda), \quad b(\lambda) = \prod_{1}^{N} b_{\alpha_j}(\lambda), \quad N \leq \infty,$$

де $b(\lambda)$ є добутком Бляшке, $b_{\alpha_j}(\lambda) = \frac{\alpha_j}{\overline{\alpha_j}} \frac{\lambda - \alpha_j}{1 - \lambda\overline{\alpha_j}}$ – множники Бляшке, а $f_0(\lambda)$ належить до H_∞ і не має нулів в $\mathbb{D}$. Число N називають ступінню добутку Бляшке $b(\lambda)$.

Нагадаємо, що матрично-значну функцію $s(z)$ порядку $p \times q$ відносять до матричного класу Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$, якщо $s(z)^* s(z) \leq I_q$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Матрично-значна функція ψ порядку $p \times q$ з класу $H_\infty^{p\times q}$ називається *зовнішньою*, якщо множина $\psi H_2^q(\mathbb{D})$ є щільною в $H_2^q(\mathbb{D})$. Матрично-значна функція $\varphi(\lambda) \in H^{p\times q}$ називається *внутрішньою*, якщо

$$\varphi(\zeta)^* \varphi(\zeta) = I_q \text{ (для майже всіх } \zeta \in \mathbb{T}).$$

$\mathcal{S}_{in}^{p\times q}$ – це множина всіх внутрішніх матрично-значних функцій $s \in \mathcal{S}^{p\times q}$.

Прикладом внутрішньої матричної функції є множник Бляшке-Потапова [28], тобто матрично-значна функція, що задана формулою

$$B_\alpha(\lambda) = I_n - \Pi + b_\alpha(\lambda)\Pi, \tag{1.5}$$

де $b_\alpha(\lambda)$ – множник Бляшке, а Π – ортогональний проектор в $\mathbb{C}^n$. Множник Бляшке-Потапова $B_\alpha(\lambda)$ називається простим, якщо ортогональний проектор Π в (1.5) має ранг 1. Матрично-значна функція

$$B_\ell(\lambda) = \overset{\curvearrowleft}{\prod}{}_{j=1}^{N} B_{\alpha_j}(\lambda), \quad N \leq \infty, \tag{1.6}$$

де $B_{\alpha_j}(\lambda)$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$ — прості множники Бляшке-Потапова і $\sum\limits_{j=1}^{N}\big(1 - |\alpha_j|\big) < \infty$, називаються лівим добутком Бляшке-Потапова. Зображення (1.6) для матрично-значної функції $B_\ell(\lambda)$ не є однозначним, але при умові, що всі множники b_{α_j} є простими, виявляється, що їхня кількість є сталою [28]. Кількість множників Бляшке-Потапова в розкладі (1.6) називають ступінню лівого добутку Бляшке-Потапова і позначається $\deg B_\ell$.

Аналогічно визначається поняття правого добутку Бляшке-Потапова і виявляється, що ступені лівого і правого добутків Бляшке-Потапова співпадають. Як відомо [28], матрично-значна функція $F \in H_\infty^{n\times n}$, така що $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ допускає факторизації

$$F(\lambda) = B_\ell(\lambda)G_\ell(\lambda) = G_r(\lambda)B_r(\lambda)$$

де $B_\ell(\lambda)$ і $B_r(\lambda)$ є добутками Бляшке-Потапова, а $G_\ell, G_r \in H_\infty^{n\times n}$ є оборотними для всіх $\lambda \in \mathbb{D}$.

Означення 1.1. *Нульовою кратністю $\mathcal{M}_\zeta$ для $F \in H_\infty^{n\times n}$ ми будемо називати ступінь добутку Бляшке-Потапова B_ℓ, яка дорівнює ступеню добутку Бляшке-Потапова B_r [81].*

$$\mathcal{M}_\zeta(F) = \deg B_\ell (= \deg B_r).$$

1.3 Інтерполяційна проблема Неванлінни-Піка

В роботах Шура [93], Неванлінни [90], Піка [92] була розглянута така інтерполяційна проблема:

Проблема Неванлінни-Піка. Маємо послідовність точок $z_j \in \mathbb{D}$ $(j = 1, ..., n)$ і послідовність чисел $w_j \in \mathbb{D}$ $(j = 1, ..., n)$. Треба знайти функцію $f \in \mathcal{S}$, таку що

$$f(z_j) = w_j \quad (j = 1, ..., n). \tag{1.7}$$

Як виявляється така проблема не завжди має розв'язок. З проблемою (1.7) пов'язують рівняння Ляпунова-Стейна

$$P - Z^*PZ = W^*j_{11}W, \tag{1.8}$$

де

$$Z = diag(z_1, ..., z_n), \quad W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots w_n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad j_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком цього рівняння є матриця Піка

$$P = \left[\frac{1 - \overline{w}_j w_k}{1 - \overline{z}_j z_k} \right]_{j,k=1}^{n}. \tag{1.9}$$

Як показано в [92] необхідною і достатньою умовою для того, щоб проблема Неванлінни-Піка (1.7) мала розв'язок, є невід'ємність матриці Піка

$$P \geq 0. \tag{1.10}$$

Шур розробив покроковий алгоритм для опису розв'язків проблеми (1.7) [93]. Пізніше Неванлінна [90] застосував алгоритм Шура для опису розв'язків інтерполяційної проблеми (1.7) з нескінченним числом точок інтерполяції. Матричні інтерполяційні проблеми з кратними точками інтерполяції були розглянуті в [15], [26], [31], [43].

Загальний підхід до інтерполяційних проблем Шура-Неванлінни-Піка був запропонований в роботах Арова [2], де інформація про дані інтерполяції міститься в деяких функціях класу Шура. Ці функції утворюють асоційовану пару в термінології Арова [2]. При цьому внутрішнім точкам інтерполяції відповідають внутрішні функції спеціального вигляду – добутки Бляшке-Потапова.

1.4 Узагальнений клас Шура

Нехай $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Ω – область у $\mathbb{D}$. Будемо казати, що ядро $\mathsf{K}_\zeta(z) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{p \times p}$ має *κ від'ємних квадратів*, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких різних $z_j \in \Omega$ і $u_j \in \mathbb{C}^p$ $(j = 1, \ldots, n)$ матриця

$$\left(\left\langle \mathsf{K}_{z_j}(z_k) u_j, u_k \right\rangle \right)_{j,k=1}^{n}$$

має не більш ніж κ, і при деяких $n \in \mathbb{N}$, $z_j \in \mathbb{D}$ і $u_j \in \mathbb{C}^p$ рівно κ від'ємних власних значень (дивись [77]).

Нехай s – $\mathbb{C}^{p \times q}$-значна функція, що є мероморфною в $\mathbb{D}$. Матричнозначну функцію s відносять до *узагальненого класу Шура* $\mathcal{S}_\kappa^{p \times q}$, якщо ядро

$$\mathsf{\Lambda}_\zeta^s(z) = \frac{I_p - s(z)s(\zeta)^*}{1 - z\overline{\zeta}} \quad (z, \zeta \in \mathfrak{h}_s) \tag{1.11}$$

має κ від'ємних квадратів в $\mathfrak{h}_s \times \mathfrak{h}_s$.

Відмітимо, що клас $\mathcal{S}^{p \times q} := \mathcal{S}_0^{p \times q}$ є звичайним класом Шура, тобто класом матричних функцій голоморфних в $\mathbb{D}$ і обмежених за нормою одиницею.

Як випливає з теореми Крейна-Лангера [77], будь яка функція $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, що належить до узагальненого класу Шура, припускає факторизацію

$$s(z) = b_l(z)^{-1}s_l(z) \quad (z \in \mathfrak{h}_s), \tag{1.12}$$

де b_l – добуток Бляшке-Потапова ступеню κ, s_l – функція класу Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$ і

$$\ker s_l(z)^* \cap \ker b_l(z)^* = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.13}$$

Така факторизація (1.12) називається *лівою взаємно простою факторизацію* матрично-значної функції s.

Аналогічно, будь-яка матрично-значна функція $s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ з класу Шура допускає *праву взаємно просту факторизацію*

$$s(z) = s_r(z)b_r(z)^{-1} \quad (z \in \mathfrak{h}_s), \tag{1.14}$$

де b_r – добуток Бляшке-Потапова ступеню κ і $s_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$ задовольняє умови

$$\ker s_r(z) \cap \ker b_r(z) = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.15}$$

В розкладах (1.12) і (1.14) матрично-значні функції b_ℓ і b_r визначається однозначно з точністю до лівого, відповідно правого, постійного унітарного множника. Зазначимо, що виконуються такі твердження (дивись [59]) в яких умови (1.13) і (1.15) взаємної простоти факторизацій (1.12) і (1.14) переформульовані в еквівалентному вигляді.

Пропозиція 1.2. *([59]) Нехай $s_\ell \in \mathcal{S}^{p\times q}$, $s_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$, $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$. Тоді:*

(i) Факторизація (1.12) є лівою взаємно простою, тоді і лише тоді, коли існує пара матрично-значних функцій $c \in H_\infty^{p\times p}$ і $d \in H_\infty^{q\times p}$ таких, що

$$b_\ell(z)c(z) + s_\ell(z)d(z) = I_p \quad (z \in \mathbb{D}).$$

(ii) Факторизація (1.14) є правою взаємно простою, тоді і лише тоді, коли існує пара матрично-значних функцій $c \in H_\infty^{q\times q}$ і $d \in H_\infty^{q\times p}$ таких, що

$$c(z)b_r(z) + d(z)s_r(z) = I_q \quad (z \in \mathbb{D}).$$

1.5 АІП в класах Шура

Операторний підхід до класичної інтерполяційної проблеми Неванлінни-Піка (1.7) був запропонований в [29], [76] (дивись також [4, Глава 3]). В роботах М.Г. Крейна велика кількість інтерполяційних проблем була розв'язана за допомогою його теорії зображення симетричних операторів і формули узагальнених резольвент.

В 1986 році в роботі [14] була запропонована схема розв'язку абстрактної інтерполяційної проблеми (дивись також [75]). В [14] абстрактна інтерполяційна проблема розглядалась, як узагальнення підходу В.П. Потапова до інтерполяційних задач [15]. Опис усіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми було зведено до опису всіх матриць розсіювання унітарних розширень часткової ізометрії V ([3]). В низці статей [45], [74], [75], [82] було показано, що багато задач аналізу, такі як, бідотична проблема, проблема моментів, проблема ліфтинга коммутанта та інші, можна включити в загальну схему абстрактної інтерполяційної проблеми.

Перш ніж формулювати абстрактну інтерполяційну проблему дамо визначення простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{B}(w)$ (дивись [53]).

Нехай $w \in \mathcal{S}^{p\times r}$. Простір $\mathcal{B}(w)$ складається з векторнозначних функцій $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} \in H_2^p \oplus (H_2^r)^\perp$ таких, що

$$f(\tau) \in \operatorname{Ran} \begin{bmatrix} I_p & w(\tau) \\ w(\tau)^* & I_r \end{bmatrix} \quad (\text{ м.в. } \mathbb{T}), \tag{1.16}$$

$$\int_{\mathbb{T}} f(\tau)^* \begin{bmatrix} I_p & w(\tau) \\ w(\tau)^* & I_r \end{bmatrix}^{[-1]} f(\tau) d\tau < \infty. \tag{1.17}$$

При цьому простір $\mathcal{B}(w)$ є простором Гільберта з нормою, що задається формулою (1.17).

Зараз перейдемо до формулювання абстрактної інтерполяційної проблеми

Проблема $AIP(X, E_1, E_2, T_1, T_2, M_1, M_2, D)$. Нехай X – лінійний простір; E_1 і E_2 – сепарабельні простори Гільберта; T_1 і T_2 – лінійні оператори в X; M_1 і M_2 – лінійні відображення з X в E_1 і E_2, відповідно; D – невід'ємна квадратична форма на X. Нехай для $f, g \in X$ оператори T_1, T_2, M_1, M_2, D пов'язані співвідношенням

$$D(T_1 f, T_1 g) - D(T_2 f, T_2 g) = (M_1 f, M_1 g)_{E_1} - (M_2 f, M_2 g)_{E_2}. \tag{1.18}$$

Треба описати усі $[E_1, E_2]$-значні функції w, які є стискаючими і аналітичними в $\mathbb{D}$, і для яких існує лінійне відображення $F : X \to \mathcal{B}(w)$, що задовольняє такі умови:

(C1) $FT_1 f = t \cdot FT_2 f - \begin{bmatrix} I_{E_1} & w \\ w^* & I_{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 f \\ M_2 f \end{bmatrix}$, при $f \in X$ для м.в. $t \in \mathbb{T}$;

(C2) $||Ff||^2_{\mathcal{B}(w)} \leq D(f, f)$ при $f \in X$.

Наступний опис розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми було наведено в [14] (дивись також [75]).

Теорема 1.3. *Множина усіх розв'язків $AIP(X, E_1, E_2, T_1, T_2, M_1, M_2, D)$ параметризується стискаючими операторними функціями $\varepsilon \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, де $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – дефектні підпростори ізометрії V, що побудована за даними проблеми (дивись [14]). А саме, для будь-якої функції $\varepsilon \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ розв'язок AIP визначається за формулою*

$$w = s_0 + s_2(I_{\mathcal{L}_2} - \varepsilon s)^{-1}\varepsilon s_1., \tag{1.19}$$

де $S = \begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix}$ – матриця розсіювання ізометрії V (дивись [3]).

Індефінітний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми в узагальнених класах Шура було розглянуто в [57]. Було введено індефінітний простір де Бранжа-Ровняка $\mathcal{B}(w)$ відповідної матрично-значної функції $w \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$. Відмітимо, що простір $\mathcal{B}(w)$ є унітарно еквівалентним деякому простору Понтрягіна з відтворюючим ядром, який є пов'язаним з матрично-значною функцією $w \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ ([59, Theorem 2.20]).

1.6 Клас Неванлінни і неванліннівськіх пар

До скалярного класу N відносять голоморфні функції, котрі діють з $\mathbb{C}_+$ до $\mathbb{C}_+$.

Як відомо (дивись [5, §69, Теорема 2]) будь-яка функція з класу N допускає інтегральне перетворення

$$m(\lambda) = a + b\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\sigma(t), \tag{1.20}$$

де a, b дійсні числа, $b \geq 0$ і $\sigma(t)$ – неперервна праворуч неспадна функція, така що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty. \tag{1.21}$$

Підкласом N^0 називають функції $m_0 \in N$, котрі мають інтегральне зображення

$$m_0(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} \tag{1.22}$$

з обмеженою функцією $\sigma(t)$, що не спадає. Кожна функція m з класу N допускає примусове продовження до півплощіни $\mathbb{C}_-$, яке визначається формулою (1.20) і в подальшому позначається тим же символом $m(\lambda)$, при цьому

$$m(\lambda) = m(\bar{\lambda})^*, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{1.23}$$

Відмітимо, що будь-яка функція m з класу N задовольняє умову $m(\lambda) = O(\lambda)$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$. Тут $\lambda \widehat{\to} \infty$ означає, що λ прямує до ∞ недотичним шляхом, тобто в деякому секторі $|\arg(\lambda) - \pi/2| < \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Як відомо (дивись [5, §69 Теорема 3]) функція $m_0 \in N$ належить до класу N^0, тоді і лише тоді, коли

$$m_0(\lambda) = O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \widehat{\to} \infty).$$

З Теореми Гамбургера-Неванлінни (дивись [4, Теорема 3.2.1]) випливає, що функція $m_0 \in N^0$ вигляду (1.22) допускає асимптотичний розклад

$$m_0(\lambda) = -\frac{s_0^0}{\lambda} - \frac{s_1^0}{\lambda^2} - \frac{s_2^0}{\lambda^3} - \ldots, \qquad \lambda \widehat{\to} \infty. \tag{1.24}$$

де $s_j^0 \in \mathbb{R}$, тоді і лише тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j d\sigma(t) = s_j^0 \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.25}$$

Зауваження 1.4. *З* (1.25) *випливає, що будь-який поліном належить до простору* $L_2(d\sigma)$.

Клас $N(\mathcal{L})$ складається з операторно-значних функцій $m(\lambda)$, які є голоморфними у верхній напівплощині $\mathbb{C}_+$ зі значеннями у множині $[\mathcal{L}]$ обмежених операторів у просторі Гільберта $\mathcal{L}$ і таких, що ядро

$$\mathsf{N}_\omega^m(\lambda) = \frac{m(\lambda) - m(\omega)^*}{\lambda - \bar{\omega}} \tag{1.26}$$

є невід'ємним на $\mathbb{C}_+$. З цієї умови автоматично випливає, що для примусового продовження функції m, визначенного формулой (1.23), ядро $\mathsf{N}_\omega^m(\lambda)$ також буде невід'ємним на $\mathbb{C}_- \cap \mathbb{C}_+$.

Наступне поняття неванліннівської пари є узагальненням поняття функції Неванлінни.

Означення 1.5. *Пара* $\{\Phi,\Psi\}$ $[\mathcal{L}]$*-значних функцій* $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ *голоморфних в* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *називається* N*-парою (неванліннівською парою) якщо:*

(i) *ядро*

$$\mathsf{N}_{\omega}^{\Phi\Psi}(\lambda)=\frac{\Psi(\bar{\lambda})^{*}\Phi(\bar{\omega})-\Phi(\bar{\lambda})^{*}\Psi(\bar{\omega})}{\lambda-\bar{\omega}}$$

невід'ємне на $\mathbb{C}_{+}$*;*

(ii) $\Psi(\bar{\lambda})^{*}\Phi(\lambda)-\Phi(\bar{\lambda})^{*}\Psi(\lambda)=0$ *при всех* $\lambda\in\mathbb{C}_{+}$*;*

(iii) $0\in\rho(\Phi(\lambda)-\lambda\Psi(\lambda))$ *для всіх* $\lambda\in\mathbb{C}_{+}$.

Дві N-пари $\{\Phi,\Psi\}$ і $\{\Phi_1,\Psi_1\}$ називають еквівалентними, якщо $\Phi_1(\lambda)=\Phi(\lambda)\chi(\lambda)$ і $\Psi_1(\lambda)=\Psi(\lambda)\chi(\lambda)$ для деякої операторної функції $\chi(\cdot)$ із значеннями в $[\mathcal{L}]$, яка є голоморфною і оборотною на $\mathbb{C}_{+}$. Множину всіх класів еквівалентності N-пар в $\mathcal{L}$ будемо позначати $\widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$.

Якщо $\Phi(\lambda)\equiv I_{\mathcal{L}}$, де $I_{\mathcal{L}}$ є одиничний оператор в просторі $\mathcal{L}$, то з Означення 1.5 випливає, що $\Psi(\lambda)$ є $N(\mathcal{L})$-функцією в сенсі [21]. В цьому випадку умова (iii) виконується автоматично. Якщо $\{\Phi,\Psi\}$ є N-парою такою, що $0\in\rho\big(\Phi(\lambda)\big)$ $\lambda\in\mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$, то вона є еквівалентною парі $\big\{I_{\mathcal{L}},\Psi(\lambda)\Phi(\lambda)^{-1}\big\}$, де $\Psi\Phi^{-1}\in N(\mathcal{L})$. Це дає підставу вважати, що клас $N(\mathcal{L})$ є вкладеним в клас $\widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$.

Аналогічно, будемо казати, що операторно-значна функція $m(\lambda)$ належить до *узагальненого класу Неванлінни* $N_{\kappa}(\mathcal{L})$, якщо ядро $\mathsf{N}_{\omega}^{m}(\lambda)$ має κ від'ємних квадратів в $\mathfrak{h}_m\times\mathfrak{h}_m$.

Означення 1.6. N*-пара* $\{\varphi,\psi\}$ *називається нормалізованою* N*-парою, якщо для неї також виконується умова:*

(iii′) $\varphi(\lambda)-\lambda\psi(\lambda)\equiv I_{\mathcal{L}}$ *для всіх* $\lambda\in\mathbb{C}_{+}$.

Будь-яка N-пара $\{\Phi,\Psi\}$ така, що $0\in\rho\big(\Phi(\lambda)-\lambda\Psi(\lambda)\big)$ при $\lambda\in\mathbb{C}_{+}$ еквівалентна нормалізованій N-парі $\{\varphi,\psi\}$, яка отримана перетворенням

$$\varphi(\lambda)=\Phi(\lambda)\big(\Phi(\lambda)-\lambda\Psi(\lambda)\big)^{-1},\quad \psi(\lambda)=\Psi(\lambda)\big(\Phi(\lambda)-\lambda\Psi(\lambda)\big)^{-1}. \qquad (1.27)$$

1.7 AIP в класах Неванлінни

Нехай $m\in N(\mathcal{L})$. Будемо позначати простір Гільберта з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_{\omega}^{m}(\lambda)$, яке визначено за формулою (1.26), як $\mathcal{H}(m)$. В роботі В.О. Деркача [58] була розглянута паралельна версія AIP для класу Неванлінни $N(\mathcal{L})$.

Нехай $\mathcal{X}$ є комплексним лінійним простором; $\mathcal{L}$ є простором Гільберта; B_1, B_2 є лінійними операторами в $\mathcal{X}$; C_1, C_2 є лінійними операторами з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{L}$; K є невід'ємною півторалінійну формою в $\mathcal{X}$. Розглянемо неперервний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми.

Проблема $AIP(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умові

(A1) $K(B_2h, B_1g) - K(B_1h, B_2g) = (C_1h, C_2g)_{\mathcal{L}} - (C_2h, C_1g)_{\mathcal{L}} \quad \forall h, g \in \mathcal{X}$;

Знайти функцію $m(\lambda)$ з класу $N(\mathcal{L})$ таку, що існує лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$, для якого виконуються наступні умови при будь-якому $h \in \mathcal{X}$:

(C1) $(FB_2h)(\lambda) - \lambda(FB_1h)(\lambda) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & -m(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1h \\ C_2h \end{bmatrix}$;

(C2) $\langle Fh,\, Fh \rangle_{\mathcal{H}(m)} \leq K(h, h)$;

Для дослідження проблеми AIP в класі Неванлінни в роботі [58] робиться факторизація простору $\mathcal{X}$ відносно ядра $\ker K$ лінійної форми K. Будемо вважати, що $\ker K = \{h \in \mathcal{X} : K(h, h) = 0\} = 0$. Нехай $\mathcal{H}$ є поповненням простору $\mathcal{X}$ відносно норми $||h||_{\mathcal{H}} = \big(K(h, h)\big)^{\frac{1}{2}}$.

З умови (A1) випливає, що лінійне відношення

$$\widehat{A} = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} B_1h \\ C_1h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2h \\ C_2h \end{bmatrix} \right\} : h \in \mathcal{X} \right\}$$

є симетричним в просторі $\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}$.

В [58] отримано опис множини усіх розв'язків проблеми AIP.

Теорема 1.7. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умові (A1). Тоді проблема $AIP(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ має розв'язок, і всі її розв'язки $m(\lambda)$ параметризуються у вигляді*

$$m(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}\big(I_{\mathcal{L}} + \lambda \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}\big)^{-1}, \tag{1.28}$$

де $\widetilde{A}$ пробігає множину всіх самоспряжених $\mathcal{L}$-регулярних розширень лінійного відношення $\widehat{A}$ в простір $\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L} \supset \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$. Відповідне лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$ задається формулою

$$(Fh)(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}h, \quad h \in \mathcal{X}.$$

Як випливає з Теореми 1.7 опис усіх розв'язків m проблеми $AIP(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ зводиться до опису всіх $\mathcal{L}$-регулярних $\mathcal{L}$-резольвент лінійного відношення $\widehat{A}$. Такий опис бере початок з робіт М.Г. Крейна [20] (дивись також [23]).

Відповідно до [58] накладемо додаткові умови на дані проблеми:

(A2) $\dim \ker K < \infty$ і простір $\mathcal{X}$ допускає зображення

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \ker K \tag{1.29}$$

таке, що $B_j \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}_0$ $(j = 1, 2)$.

(A3) $B_2 = I_{\mathcal{X}}$ і оператори $B_1 : \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $C_1, C_2 : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ є обмеженими.

Визначимо операторно-значну функцію Θ формулою

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(\lambda) & \theta_{12}(\lambda) \\ \theta_{21}(\lambda) & \theta_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = I_{\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}} - \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

Теорема 1.8. *Нехай оператори* B_1, B_2, C_1, C_2, K *задовольняють умови (A1)-(A3) і* $\operatorname{ran} C_2 = \mathcal{L}$. *Нехай* $\Theta(\lambda)$ *визначається співвідношенням* (1.30). *Тоді формула*

$$m(\lambda) = (\theta_{11}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)p(\lambda))(\theta_{21}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{22}(\lambda)p(\lambda))^{-1} \tag{1.31}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною усіх розв'язків $m(\lambda)$ *проблеми* $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ *і множиною класів еквівалентності неванліннівськіх пар* $\{p, q\} \in \widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$.

1.8 Метод граничних трійок в теорії розширень симетричних операторів

Теорія розширення щільно визначених симетричних операторів бере свій початок в 1930-ті роки з робіт Джона фон Неймана. Повний опис для всіх самоспряжених розширень симетричного оператора в термінах дефектних підпросторів було отримано в [85] (дивись також [94]). У подальшому Калкіним був розроблений інший підхід, що базується на понятті "абстрактних граничних умов". Цей метод зводить проблему розширення оператора до проблеми опису гіпер-максимальних нейтральних підпросторів деяких допоміжних просторів Гільберта (дивись [7, Chapter 2]). Продовження цього підходу до крайових проблем можна знайти в роботах [19], [8], [6], а потім в [91], [71], [30], [10]. Під впливом цих робіт було розроблене поняття граничної трійки

А.Н. Кочубеєм в [16] і В.М. Бруком в [7] (дивись також [9]). Головним об'єктом цієї концепції є абстрактна версія тотожності Гріна для щільно визначеного симетричного оператора A в просторі Гільберта $\mathcal{H}$ з рівними індексами дефекту.

Означення 1.9. *Нехай $\mathcal{L}$ є простором Гільберта. Трійка $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, де $\Gamma_i : \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{L}$, $i = 1, 2$ лінійні відображення, називається граничною трійкою для A^*, якщо для всіх $f, g \in \operatorname{dom} A^*$ виконується формула*

$$(A^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, A^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{L}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{L}}, \tag{1.32}$$

і відображення $\Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} : \operatorname{dom} A^* \to \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix}$ є сюр'єктивним.

Відображення Γ співпадає з оператором, який Калкін називає оператором редукції. Це відображення встановлює взаємно однозначну відповідність між фактор-простором $\operatorname{dom} A^* \restriction_{\operatorname{dom} A}$ і $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$. Цей факт приводить до параметризації множини самоспряжених розширень оператора A в термінах абстрактних граничних умов.

Нехай оператор A_0 – це звуження оператора A^* на простір $\operatorname{dom} A_0 = \ker \Gamma_2$. Власні самоспряжені розширення $\widetilde{A}$ є звуження оператора A^* на підпростір

$$\operatorname{dom} \widetilde{A} = \left\{ f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = B \Gamma_2 f \right\}, \tag{1.33}$$

де B пробігає множину всіх самоспряжених операторів в $\mathcal{H}$. Відмітимо, що опис (1.33) не потребує знання дефектних підпросторів, і параметризація усіх розширень подається безпосередньо в термінах абстрактної граничних умов.

Функція Вейля, що відповідає граничній трійці Υ для спряженого оператора A^*, була введена і досліджена в роботах В.А. Деркача і М.М. Маламуда [13], [65].

Означення 1.10. *Оператор-значна функція M, що визначається рівністю*

$$\Gamma_1 \widehat{f}_\lambda = M(\lambda) \Gamma_2 \widehat{f}_\lambda, \quad \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda, \ \lambda \in \rho(A_0), \tag{1.34}$$

називається абстрактною функцією Вейля симетричного оператора A, що відповідає граничній трійці $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Як показано в роботі [13] функція Вейля симетричного оператора належить до класу функцій Неванлінни N. Ця функція є абстрактним аналогом відомої функції Вейля-Тітчмарша, що пов'язана з оператором Штурма-Лиувилля. Оператор функція $M(\lambda)$ є дробово-лінійним перетворенням характеристичної функції (яка була введена А.Н. Кочубеєм в [17]), що відповідає граничній трійці Υ. Абстрактна функція Вейля M визначає оператор A, а також саму граничну трійку Υ, однозначно з точністю до унітарної еквівалентності (дивись [65], а також [83]).

2 Функціональна модель

В 1946 М.Г. Крейн в [18] ввів поняття Q-функції симетричного оператора A в просторі Гільберта зі скінченими індексами дефекту (m, m). Ця функція відіграє важливу роль в описі узагальнених резольвент оператора A. У подальшому М.Г. Крейн та Х. Лангер в [77] узагальнили це поняття на випадок симетричного оператора A з нескінченними індексами дефекту, який діє у просторі Понтрягіна, і показали, що Q-функція однозначно визначає простий симетричний оператор A з точністю до унітарної еквівалентності. Більш того, у [77] була введена та досліджена функціональна модель для симметричного оператора. Ця модель дозволяє вирішувати обернену проблему для Q-функцій, проблему пошуку критерію для узагальненої функції Неванлінни яка є Q-функцією π-Ермітова оператора.

Функціональна модель для симметричного оператора в просторі Гільберта в термінах Q-функції була побудована в [83], [72]. В [66] В.А. Деркачем та М.М. Маламудом були використані інші функціональні моделі для симетричних операторів (дивись також [84]) для розв'язання оберненої проблеми для функції Вейля. А саме, починаючи від R-функції $M(\cdot)$ такої, що $0 \in \rho\big(\operatorname{Im} M(\lambda)\big)$ для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ автори в [66] будують модель симетричного оператора A і граничну трійку для A^* таку, що відповідна функція Вейля співпадає з $M(\cdot)$.

Більш загальне поняття граничного відношення було запропоновано в [50]. Використовуючи це поняття автори [50] представили довільну Неванліннівську пару $\{\varphi, \psi\}$, як сім'ю Вейля симетричного оператора, який відповідає граничній трійці. Доведення в [50] базується на теоремі Наймарка про ділатації. Моделі для симетричних операторів, які реалізують будь-яку Неванлиннівську пару, як сім'ю Вейля, що відповідає граничному відношенню Γ було представлено також в [47].

2.1 Узагальнені неванліннівські пари

Нехай $\mathcal{L}$ є простором Гільберта. Ядром називають функцію $\mathsf{K}_\omega(\lambda)$ на $\Omega\times\Omega$ із значеннями у просторі неперервних операторів у просторі Гільберта $\mathcal{L}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$). Ми будемо казати, що ядро $\mathsf{K}_\omega(\lambda)$ має κ від'ємних квадратів і писати $sq_{-}\mathsf{K} = \kappa$, якщо для будь-яких точок $\omega_1, ..., \omega_n$ в Ω, векторів $u_1, ..., u_n$ в $\mathcal{L}$ квадратична форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(\mathsf{K}_{\omega_j}(\omega_i)u_j,\, u_i\big)_{\mathcal{L}}\xi_j\overline{\xi}_i, \quad \xi_j \in \mathbb{C}^n$$

має не менше ніж κ від'ємних власних значень, і при деякому виборі n, ω_j, u_j ця матриця має рівно κ від'ємних власних значень ([36]).

Означення 2.1. *Клас $N_\kappa(\mathcal{L})$ є множиною мероморфних в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ операторно-значних функцій $m(\lambda)$, таких що $m(\overline{\lambda}) = m(\lambda)^*$, і ядро*

$$\mathsf{N}_\omega^m(\lambda) = \frac{m(\lambda) - m(\omega)^*}{\lambda - \overline{\omega}} \tag{2.1}$$

має κ від'ємних квадратів у $\mathfrak{h}_m$ – області голоморфності m.

Означення 2.2. *Пара $\{\Phi, \Psi\}$ $[\mathcal{L}]$-значних функцій $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ мероморфних на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ зі спільною областю голоморфності $\mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$ називається N_κ-парою (узагальненою неванліннівською парою) якщо:*

(i) *ядро*

$$\mathsf{N}_\omega^{\Phi\Psi}(\lambda) = \frac{\Psi(\bar{\lambda})^*\Phi(\bar{\omega}) - \Phi(\bar{\lambda})^*\Psi(\bar{\omega})}{\lambda - \bar{\omega}},$$

має κ від'ємних квадратів на $\mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$;

(ii) $\Psi(\overline{\lambda})^*\Phi(\lambda) - \Phi(\overline{\lambda})^*\Psi(\lambda) = 0$ *for all* $\lambda \in \mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$*;*

(iii) *для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\Phi\Psi} \cap \mathbb{C}_+$ існує $\mu \in \mathbb{C}_+$, таке що*

$$0 \in \rho\big(\Phi(\lambda) - \mu\Psi(\lambda)\big) \text{ і } 0 \in \rho\big(\Phi(\overline{\lambda}) - \overline{\mu}\Psi(\overline{\lambda})\big).$$

Дві N_κ-пари $\{\Phi, \Psi\}$ і $\{\Phi_1, \Psi_1\}$ називаються еквівалентними, якщо $\Phi_1(\lambda) = \Phi(\lambda)\chi(\lambda)$ та $\Psi_1(\lambda) = \Psi(\lambda)\chi(\lambda)$ для деякої операторно-значної функції $\chi(\cdot)$ зі значеннями в $[\mathcal{H}]$, яка голоморфна і оборотна для усіх $\lambda \in \mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$. Множина усіх класів еквівалентності N_κ-пар в $\mathcal{L}$ визначається як $\widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$. Ми будемо писати $\{\Phi, \Psi\} \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$ для узагальненої неванліннівської парі $\{\Phi, \Psi\}$.

Якщо $\Phi(\lambda) \equiv I_\mathcal{L}$, де $I_\mathcal{L}$ – це одиничний оператор у просторі $\mathcal{L}$, тоді з Означення 2.2 випливає, що $\Psi(\lambda)$ є $N_\kappa(\mathcal{L})$-функцією у сенсі [21]. А також якщо $\{\Phi, \Psi\}$ є N_κ-пара така, що $0 \in \rho\big(\Phi(\lambda)\big)$ $\lambda \in \mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$, то вона еквівалентна парі $\big\{I_\mathcal{L}, m(\lambda)\big\}$, де функція $m := \Psi\Phi^{-1}$ належить до класу $N_\kappa(\mathcal{L})$.

Означення 2.3. *N_κ-пара $\{\varphi, \psi\}$ називається нормалізованною N_κ-парою, якщо:*

(iii′) $\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda) \equiv I_\mathcal{L}$ *for all* $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$.

Будь-яка N_κ-пара $\{\Phi, \Psi\}$ така, що $0 \in \rho\big(\Phi(\lambda) - \lambda\Psi(\lambda)\big)$ для $\lambda \in \mathfrak{h}_{\Phi\Psi}$ еквівалентна єдиній нормалізованній N_κ-парі $\{\varphi, \psi\}$, яка визначається

$$\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda)\big(\Phi(\lambda) - \lambda\Psi(\lambda)\big)^{-1}, \quad \psi(\lambda) = \Psi(\lambda)\big(\Phi(\lambda) - \lambda\Psi(\lambda)\big)^{-1}. \tag{2.2}$$

2.2 N_κ-пара, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню

Нехай $\mathcal{H}$ – це простір Понтрягіна, і $\mathcal{L}$ – це простір Гільберта. Лінійним відношенням A в $\mathcal{H}$ називають лінійний підпростір в $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ (дивись [40]). Спряжене лінійне відношення A^* визначається рівністю

$$A^* = \left\{(f,f')^\top : \langle f', g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, g'\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{для всіх } (g,g')^\top \in A\right\}.$$

Лінійне відношення A називається симетричним, якщо $A \subset A^*$ і самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ називається точкою регулярного типу для замкнутого симетричного лінійного відношення A, якщо множина $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ є замкненою в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$. Будемо позначати через $\widehat{\rho}(A)$ множину усіх точок регулярного типу для лінійного відношення A. Відомо ([70]), що всі точки $\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-$ за виключенням якнайбільше κ пар комплексно-спряжених чисел є точками регулярного типу, і дефектний підпростір

$$\mathfrak{N}_\lambda(A) := (\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}) \ominus \operatorname{ran}(A-\bar{\lambda})$$

має розмірності $n_+(A)$ і $n_-(A)$ при $\lambda\in\mathbb{C}_+$ і $\lambda\in\mathbb{C}_-$, відповідно, котрі називають дефектними числами симетричного лінійного відношення A.

Означення 2.4. *Лінійне відношення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$ називаєтьcя $\mathcal{L}$-мінімальним, якщо*

$$\mathcal{H}_0 := \overline{span}\{\Pi_{\mathcal{H}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\mathcal{L} : \lambda\in\rho(\widetilde{A})\} = \mathcal{H}, \tag{2.3}$$

де $\Pi_{\mathcal{H}}$ – це ортогональний проектор на простір Понтрягіна $\mathcal{H}$.

Нехай $\widetilde{A}$ – це самоспряжене лінійне відношення в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$, і $\Pi_{\mathcal{L}}$ – це ортогональний проектор на масштабний простір $\mathcal{L}$. Позначимо операторно-значні функції

$$\varphi(\lambda) := I_{\mathcal{L}} + \lambda\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}, \quad \psi(\lambda) := \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}} \quad (\lambda\in\rho(\widetilde{A})). \tag{2.4}$$

Очевидно, що

$$\varphi(\lambda)^* = \varphi(\overline{\lambda}), \quad \psi(\lambda)^* = \psi(\overline{\lambda}) \ \ (\lambda\in\rho(\widetilde{A})). \tag{2.5}$$

Пропозиція 2.5. *Нехай $\mathcal{H}$ – це Π_κ-простір, $\mathcal{L}$ – це простір Гільберта, $\widetilde{A}$ – це самоспряжене лінійне відношення в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$. Пара операторно-значних* *функцій $\{\varphi, \psi\}$ асоційованих з $\widetilde{A}$ за формулою (2.4) є нормалізованною $N_{\kappa'}$-парою, де $0 \le \kappa' \le \kappa$. Якщо, до того ж, лінійне відношення $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-мінімальним, то $\kappa' = \kappa$.*

Доведення. Як можна побачити з властивостей (2.5) ядро $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda)$ для пари $\{\varphi, \psi\}$ приймає вигляд

$$\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)\varphi(\bar{\omega}) - \varphi(\lambda)\psi(\bar{\omega})}{\lambda - \bar{\omega}}, \quad \lambda, \omega \in \rho(\widetilde{A}). \tag{2.6}$$

З Означення (2.4) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda) &= \frac{\psi(\lambda) - \psi(\omega)^*}{\lambda - \bar{\omega}} - \psi(\lambda)\psi(\omega)^* \\ &= \Pi_{\mathcal{L}} \frac{R_\lambda - R_{\bar{\omega}}}{\lambda - \bar{\omega}} \upharpoonright_{\mathcal{L}} - \Pi_{\mathcal{L}} R_\lambda \Pi_{\mathcal{L}} R_{\bar{\omega}} \upharpoonright_{\mathcal{L}} \\ &= \Pi_{\mathcal{L}} R_\lambda \Pi_{\mathcal{H}} R_{\bar{\omega}} \upharpoonright_{\mathcal{L}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

де $R_\lambda = (\widetilde{A} - \lambda)^{-1}$ – це резольвента лінійного відношення $\widetilde{A}$. Нехай ω_j належать до $\rho(\widetilde{A})$, u_j належать до простору $\mathcal{L}$ при $j = 1, ..., n$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\mathsf{N}_{\omega_j}^{\varphi\psi}(\omega_k) u_j,\, u_k\right)_{\mathcal{L}} \xi_j \,\overline{\xi}_k &= \sum_{j,k=1}^{n} \left((\Pi_{\mathcal{L}} R_{\omega_k} \Pi_{\mathcal{H}} R_{\overline{\omega}_j|\mathcal{L}}) u_j,\, u_k\right)_{\mathcal{L}} \xi_j \,\overline{\xi}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} [\Pi_{\mathcal{H}} R_{\overline{\omega}_j} u_j,\, \Pi_{\mathcal{H}} R_{\overline{\omega}_k} u_k]_{\mathcal{H}} \,\xi_j \,\overline{\xi}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} [g_j,\, g_k]_{\mathcal{H}} \,\xi_j \,\overline{\xi}_k, \end{aligned} \tag{2.8}$$

де $g_j = \Pi_{\mathcal{H}} R_{\overline{\omega}_j} u_j$. Так як $\mathcal{H}$ є Π_κ-простором і u_j $(j = 1, ..., n)$ – довільні вектори в $\mathcal{L}$, то квадратична форма (2.8) має κ' від'ємних квадратів, де $\kappa' \le \kappa$. Таким чином доведено властивість (i) Означення 2.2.

Властивість (ii) легко перевіряється. Очевидно, що $\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda) \equiv I_{\mathcal{L}}$ для усіх $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$ і, значить пара $\{\varphi, \psi\}$ є нормалізованною $N_{\kappa'}$-парою.

Якщо відношення $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-мінімальним, то множина

$$\operatorname{span}\left\{\Pi_{\mathcal{H}} R_\omega u : \ \omega \in \rho(\widetilde{A}),\, u \in \mathcal{L}\right\}$$

є щільною у просторі $\mathcal{H}$. В цьому випадку квадратична форма (2.8) має точно κ від'ємних квадратів, а значить ядро $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda)$ має κ від'ємних квадратів. Таким чином пара $\{\varphi, \psi\}$ є нормалізованою N_κ-парою. $\square$

Означення 2.6. *Пара операторно-значних функцій* $\{\varphi,\psi\}$, *що визначена формулою* (2.4) *називається* N_κ*-парою, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню* $\widetilde{A}$ *і масштабу* $\mathcal{L}$.

Зауважимо, що векторнозначні функції $\varphi(\lambda)$ і $\psi(\lambda)$ визначені формулою (2.4), мають спільну область голоморфності $\mathfrak{h}_{\varphi\psi} = \mathfrak{h}_\varphi = \mathfrak{h}_\psi$.

2.3 Функціональна модель для самоспряженого лінійного відношення

Розглянемо простір Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$, який характеризується властивостями:

(1) $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u \in \mathcal{H}(\varphi,\psi)$ для усіх $\omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$ та $u \in \mathcal{L}$;

(2) для всіх $f \in \mathcal{H}(\varphi,\psi)$ виконується така тотожність

$$\left[f(\cdot), \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u\right]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = (f(\omega), u)_{\mathcal{L}}, \quad \omega \in \mathfrak{h}_{\varphi,\psi}, u \in \mathcal{L}. \tag{2.9}$$

Як випливає з (2.9) оператор евалюації

$$E(\lambda) : f \mapsto f(\lambda) \quad (f \in \mathcal{H}(\varphi,\psi))$$

є обмеженим оператором з $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ в $\mathcal{L}$. Також відмітимо, що множина функцій $\{\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u : \ \ \omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi},\ u \in \mathcal{L}\}$ є тотальною для $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ ([36]).

У наступній теоремі ми отримаємо функціональну модель для самоспряженого лінійного відношення $\widetilde{A}$.

Теорема 2.7. *Нехай* $\mathcal{L}$ *є простором Гільберта, і* $\{\varphi,\psi\}$ *є нормалізованою* N_κ*-парою. Тоді лінійне відношення*

$$A(\varphi,\psi) = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix} \right\} : \begin{array}{c} f, f' \in \mathcal{H}(\varphi,\psi);\ u, u' \in \mathcal{L}; \\ f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) = \varphi(\bar{\lambda})^* u - \psi(\bar{\lambda})^* u' \quad \lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi} \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

є самоспряженим в $\mathcal{H}(\varphi,\psi) \oplus \mathcal{L}$, *і нормалізована пара* $\{\varphi,\psi\}$ *є* N_κ*-парою, що відповідає самоспряженому відношенню* $A(\varphi,\psi)$ *та масштабу* $\mathcal{L}$.

Доведення. *Крок 1.* Покажемо, що $A(\varphi,\psi)$ містить в собі вектори вигляду

$$\{F_\omega v, F'_\omega v\} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{N}_\omega(\cdot)v \\ \psi(\bar{\omega})v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\omega}\mathsf{N}_\omega(\cdot)v \\ \varphi(\bar{\omega})v \end{bmatrix} \right\}, \quad v \in \mathcal{L},\ \omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}, \tag{2.11}$$

де $\mathsf{N}_\omega(\cdot) := \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)$ і

$$A' := \operatorname{span}\Big\{\{F_\omega v, F'_\omega v\} : \ v \in \mathcal{L}, \ \omega \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}\Big\}$$

є симетричним лінійним відношенням.

Дійсно, з формули (2.10) і тотожності

$$(\bar{\omega} - \lambda)\mathsf{N}_\omega(\lambda)v = \varphi(\bar{\lambda})^*\psi(\bar{\omega})v - \psi(\bar{\lambda})^*\varphi(\bar{\omega})v$$

випливає, що $\{F_\omega v, F'_\omega v\} \in A(\varphi, \psi)$.

Для довільних $\omega_j \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$, $v_j \in \mathcal{L}$ $(j = 1, 2)$ отримаємо, що

$$\begin{aligned}
&\Big[\bar{\omega}_1 \mathsf{N}_{\omega_1}(\cdot)v_1, \mathsf{N}_{\omega_2}(\cdot)v_2\Big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} - \Big[\mathsf{N}_{\omega_1}(\cdot)v_1, \bar{\omega}_2 \mathsf{N}_{\omega_2}(\cdot)v_2\Big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \\
&\quad + \Big(\varphi(\bar{\omega}_1)v_1, \psi(\bar{\omega}_2)v_2\Big)_{\mathcal{L}} - \Big(\psi(\bar{\omega}_1)v_1, \varphi(\bar{\omega}_2)v_2\Big)_{\mathcal{L}} \\
&\quad = (\bar{\omega}_1 - \omega_2)\Big(\mathsf{N}_{\omega_1}(\omega_2)v_1, v_2\Big)_{\mathcal{L}} - \Big(\big(\varphi(\bar{\omega}_2)^*\psi(\bar{\omega}_1) - \psi(\bar{\omega}_2)^*\varphi(\bar{\omega}_1)\big)v_1, v_2\Big)_{\mathcal{L}} \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

отже, A' є симетричним відношенням у $\mathcal{H}(\varphi, \psi) \oplus \mathcal{L}$.

Крок 2. Покажемо, що множина $\operatorname{ran}(A' - \lambda)$ є щільною в $\mathcal{H}(\varphi, \psi) \oplus \mathcal{L}$ для $\lambda \in \mathfrak{h}_{\varphi\psi}$. Виберемо вектор $\{F_\omega v, F'_\omega v\}$ з $\omega = \bar{\lambda}$. Так як $\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda) = I_{\mathcal{L}}$, то

$$\begin{aligned}
\big\{F_{\bar{\lambda}} v, F'_{\bar{\lambda}} v - \lambda F_{\bar{\lambda}} v\big\} &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{N}_{\bar{\lambda}}(\cdot)v \\ \psi(\lambda)v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(\lambda)v - \lambda\psi(\lambda)v \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{N}_{\bar{\lambda}}(\cdot)v \\ \psi(\lambda)v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\} \in A' - \lambda.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Отже $0 \oplus \mathcal{L} \subset \operatorname{ran}(A' - \lambda)$. Розглянемо пару $\{F_\omega v, F'_\omega v\}$ з $\omega \neq \bar{\lambda}$, ми отримаємо, з формули (2.11)

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{N}_\omega(\cdot)v \\ \psi(\bar{\omega})v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\bar{\omega} - \lambda)\mathsf{N}_\omega(\cdot)v \\ \varphi(\bar{\omega})v - \lambda\psi(\bar{\omega})v \end{bmatrix} \right\} \in A' - \lambda,$$

отже $\begin{bmatrix} \mathsf{N}_\omega(\cdot)v \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{ran}(A' - \lambda)$ для усіх $\omega \neq \bar{\lambda}$. Використовуючи властивості (1) і (2) простору Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$ отримаємо твердження, яке нам потрібне. Таким чином, A' є самоспряженим лінійним відношенням, і отже $(A')^+$ є самоспряженим лінійним відношенням в $\mathcal{H}(\varphi, \psi) \oplus \mathcal{L}$.

Крок 3. Покажемо, що $A(\varphi,\psi)=(A')^+$. Дійсно, для будь-якого вектору

$$\widehat{F}:=\{F,F'\}=\left\{\left[\begin{array}{c} f(\cdot)\\ u\end{array}\right],\left[\begin{array}{c} f'(\cdot)\\ u'\end{array}\right]\right\}\in A(\varphi,\psi)$$

де $f,f'\in\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ і $u,u'\in\mathcal{L}$, і довільна $\omega\in\mathfrak{h}_{\varphi\varphi}$, $v\in\mathcal{L}$. З тотожності (2.10) випливає, що

$$\begin{aligned}\big[F',F_\omega v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)\oplus\mathcal{L}}-\big[F,F'_\omega v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)\oplus\mathcal{L}}&=\big[f',\mathsf{N}_\omega(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}-\big[f,\bar\omega\mathsf{N}_\omega(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}\\&+\big(u',\psi(\bar\omega)v\big)_{\mathcal{L}}-\big(u,\varphi(\bar\omega)v\big)_{\mathcal{L}}\\&=\big(f'(\omega)-\omega f(\omega)+\psi(\bar\omega)^*u'-\varphi(\bar\omega)^*u,v\big)_{\mathcal{L}}=0.\end{aligned}$$

Отже $\widehat{F}\in(A')^+$ and $A(\varphi,\psi)\subset(A')^+$. Навпаки, якщо

$$\big[f',\mathsf{N}_\omega(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}-\big[f,\bar\omega\mathsf{N}_\omega(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}+\big(u',\psi(\bar\omega)v\big)_{\mathcal{L}}-\big(u,\varphi(\bar\omega)v\big)_{\mathcal{L}}=0$$

для деякого $f,f'\in\mathcal{H}(\varphi,\psi)$, $u,u'\in\mathcal{L}$ і для усіх $\omega\in\mathfrak{h}_{\varphi,\psi}$, $v\in\mathcal{L}$, тоді

$$f'(\omega)-\omega f(\omega)-\big(\varphi(\overline{\omega})^*u-\psi(\overline{\omega})^*u'\big)=0$$

і отже, $\widehat{F}\in A(\varphi,\psi)$. Це доводить, що $(A')^+\subset A(\varphi,\psi)$, і означає, що $(A')^+=A(\varphi,\psi)$. Тому $A(\varphi,\psi)$ є самоспряженим лінійним відношенням.

Крок 4. Нарешті, ми покажемо, що $\{\varphi,\psi\}$ є парою, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню $\widetilde{A}$ і масштабу $\mathcal{L}$. Дійсно, з (2.12) і Означення 2.3 (iii′) випливає, що

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{L}}\big(\widetilde{A}(\varphi,\psi)-\lambda\big)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{L}}&=\psi(\lambda),\\ I_{\mathcal{L}}+\lambda\Pi_{\mathcal{L}}\big(\widetilde{A}(\varphi,\psi)-\lambda\big)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{L}}&=\varphi(\lambda).\end{aligned}$$

Отже пара $\{\varphi,\psi\}$ є нормалізованою N_κ-парою, що відповідає лінійному відношенню $A(\varphi,\psi)$ і масштабу $\mathcal{L}$. □

Зауваження 2.8. *З формули* (2.12) *випливає, що лінійне відношення* $A(\varphi,\psi)$, *яке отримане формулою* (2.10), *є* $\mathcal{L}$-*мінімальним.*

Зауваження 2.9. *Для будь-якої нормалізованої* N_κ-*пари* $\{\varphi,\psi\}$ *і* $h\in\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ *виконуеться така рівність*

$$\Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi,\psi)-\lambda)^{-1}\begin{bmatrix}h\\0\end{bmatrix}=h(\lambda),\quad(\lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}).\tag{2.13}$$

Дійсно, як слідує з (2.12), для будь-яких $v \in \mathcal{L}$ отримаємо, що

$$\left(\Pi_{\mathcal{L}}\big(A(\varphi,\psi)-\lambda\big)^{-1}\begin{bmatrix}h\\0\end{bmatrix}, v\right)_{\mathcal{L}} = \left[\begin{bmatrix}h\\0\end{bmatrix}, \big(A(\varphi,\psi)-\bar{\lambda}\big)^{-1}\begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)\oplus\mathcal{L}}$$
$$= \big[h, \mathsf{N}_{\lambda}(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \big(h(\lambda), v\big)_{\mathcal{L}}.$$

Отже, $E(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}\big(A(\varphi,\psi)-\lambda\big)^{-1}\restriction_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}$ *є оператором евалюації в* $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$*.*

Позначимо лінійний простір $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega}$ формулою

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega} := \left\{\mathsf{N}_{\varpi}^{\varphi\psi}(\cdot)u,\ u \in \mathcal{L}\right\}. \tag{2.14}$$

Пропозиція 2.10. *Нехай* $\{\varphi,\psi\}$ *є нормалізованою* N_{κ}*-парою в просторі* $\mathcal{L}$*. Тоді:*

(i) простір $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\varpi}$ *є додатним підпростором в* $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\omega)$ *є строго додатний оператор в* $\mathcal{L}$*.*

(ii) якщо до того ж $\bigcap_{\lambda}\ker \mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\lambda) = \{0\}$*, то простір* $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\varpi}$ *є виродженим підпростором в* $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ *тоді і лише тоді, коли* 0 *є власним значенням* $\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\omega)$*.*

Доведення. Будемо позначати $\mathsf{N}_{\omega}(\cdot) := \mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\cdot)$. Доведемо перше твердження. Так як

$$\big[\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u, \mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \big(\mathsf{N}_{\omega}(\omega)u, u\big)_{\mathcal{L}} \quad (u \in \mathcal{L})$$

то умови $\mathsf{N}_{\omega}(\omega) > 0$ еквівалентні нерівності $\big(\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u, \mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u\big)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} > 0$, яке виконується для усіх $(0 \neq)u \in \mathcal{L}$.

Зараз ми доведемо друге твердження. Спочатку відмітимо, що простір $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\varpi}$ є виродженим підпростором. Тоді існує $(0 \neq)u_0 \in \mathcal{L}$ таке, що

$$0 = \big[\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u_0, \mathsf{N}_{\omega}(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \big(\mathsf{N}_{\omega}(\omega)u_0, v\big)_{\mathcal{L}}$$

для усіх $v \in \mathcal{L}$. Отже $\mathsf{N}_{\omega}(\omega)u_0 = 0$, це означає, що 0 є власним значенням $\mathsf{N}_{\omega}(\omega)$.

Навпаки, нехай $\mathsf{N}_{\omega}(\omega)u_0 = 0$, де $(0 \neq)u_0 \in \mathcal{L}$. Тоді

$$0 = \big(\mathsf{N}_{\omega}(\omega)u_0, v\big)_{\mathcal{L}} = \big[\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u_0, \mathsf{N}_{\omega}(\cdot)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)},$$

тому $\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u_0$ є ортогональне простору $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega}$. Так як $\mathsf{N}_{\omega}(\cdot)u_0 \not\equiv 0$, тоді це ізотропний вектор у просторі $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega}$. $\square$

Пропозиція 2.11. *Нехай* $\widetilde{A}$ *є самоспряженим лінійним відношенням у просторі* $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$ *і нехай* $\{\varphi,\psi\}$ *є нормалізованою неванліннівською парою, що отримана за формулою* (2.4)*. Нехай операторно-значна функція* $\gamma(\lambda):\mathcal{L}\to\mathcal{H}$ *визначена формулою*

$$\gamma(\lambda) := \Pi_{\mathcal{H}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}|_{\mathcal{L}} \quad (\lambda\in\rho(\widetilde{A})). \tag{2.15}$$

Тоді виконується така рівність

$$\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})^*\gamma(\bar{\omega}). \tag{2.16}$$

Доведення. Дійсно, як випливає з (2.7), ядро $\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\lambda)$ має форму

$$\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\lambda) = (\Pi_{\mathcal{L}}R_{\lambda}\Pi_{\mathcal{H}})(\Pi_{\mathcal{H}}R_{\bar{\omega}}|_{\mathcal{L}}) = \gamma(\bar{\lambda})^*\gamma(\bar{\omega}).$$

□

Нагадаємо, що лінійний оператор називається *нормально розв'язуваним*, якщо він має замкнену область визначення.

Пропозиція 2.12. *Нехай* $\{\varphi,\psi\}$ *є нормалізованою* N_{κ}*-парою в просторі* $\mathcal{L}$*. Тоді* $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega}$ *є замкненим простором тоді і лише тоді, коли оператор* $\mathsf{N}_{\omega}(\omega)$ *є нормально розв'язуваним.*

Доведення. Позначимо $B := \mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\omega)$ і розглянемо його спектральний розклад

$$B = B_+ \oplus B_- \oplus B_0 \tag{2.17}$$

і відповідний розклад простору Гільберта $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_0 \tag{2.18}$$

де $B_+ > 0$, $B_- < 0$, і $B_0 = 0_{\mathcal{L}_0}$. Як випливає з (2.12) і (2.15),

$$\gamma(\omega)v = \mathsf{N}_{\bar{\omega}}^{\varphi\psi}(\cdot)v \quad \forall v\in\mathcal{L}.$$

Так як $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega} = \gamma(\omega)\mathcal{L}$, то $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega}$ можна розкласти

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\omega} = \mathfrak{N}_{\omega}^{+}[+]\mathfrak{N}_{\omega}^{-}[+]\mathfrak{N}_{\omega}^{0}, \tag{2.19}$$

де $\mathfrak{N}_{\omega}^{\pm} = \gamma(\omega)\mathcal{L}_{\pm}$ і $\mathfrak{N}_{\omega}^{0} = \gamma(\omega)\mathcal{L}_0$. Цей розклад є ортогональним, так як

$\mathsf{N}_\omega(\omega) = \mathsf{N}_{\bar\omega}(\bar\omega)$. Наприклад, якщо $v_+ \in \mathcal{L}_+$, $v_- \in \mathcal{L}_-$ тоді

$$\begin{aligned}\big[\gamma(\omega)v_+,\, \gamma(\omega)v_-\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} &= \big[\mathsf{N}_{\overline{\omega}}(\cdot)v_+, \mathsf{N}_{\overline{\omega}}(\cdot)v_-\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \big(\mathsf{N}_{\overline{\omega}}(\overline{\omega})v_+,\, v_-\big)_{\mathcal{L}} \\ &= \big(\mathsf{N}_\omega(\omega)v_+, v_-\big)_{\mathcal{L}} = 0.\end{aligned}$$

Нехай $B = \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\omega)$ є нормально розв'язуваним, $\operatorname{ran} B$ є замкненим в $\mathcal{L}$. Оскільки $\mathcal{L}_-$ і $\mathcal{L}_0$ є скінченновимірним підпростором в $\mathcal{L}$, тоді $\operatorname{ran} B_+$ є замкненим, отже за теоремою Банаха існує число $c > 0$ таке, що

$$(B_+v,\, v)_{\mathcal{L}} \geq c^2||v||^2_{\mathcal{L}} \quad (v \in \mathcal{L}^+). \tag{2.20}$$

З Пропозиції 2.11 випливає, що виконується нерівність

$$\big[\gamma(\omega)v,\, \gamma(\omega)v\big]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \geq c^2||v||^2_{\mathcal{L}} \quad (v \in \mathcal{L}^+). \tag{2.21}$$

Таким чином $\mathfrak{N}_\omega^+ = \gamma(\omega)\mathcal{L}_+$ є замкненою множиною. Так як $\dim \mathfrak{N}_\omega^- \leq \kappa$ і $\dim \mathfrak{N}_\omega^0 \leq \kappa$, то це означає, що $\widetilde{\mathfrak{N}}_\omega$ є замкненою множиною.

Навпаки, нехай $\widetilde{\mathfrak{N}}_\omega$ є замкненою множиною, тоді $\mathfrak{N}_\omega^+$ є також замкненою множиною. Так як $\gamma(\omega)\restriction_{\mathcal{L}_+}$ є оборотною, то існує $c > 0$ таке, що виконується рівність (2.21). З Пропозиції 2.11 випливає, що множини $\operatorname{ran} B_+$ є замкненою у просторі $\mathcal{L}$. Так як B_- є скінченновимірним, то множина $\operatorname{ran} B$ є замкненою. Це доводить твердження. □

Зауваження 2.13. *Якщо m є функцією з класу $N_\kappa(\mathcal{L})$ це означає, що $I - \lambda m(\lambda)$ є оборотною для усіх $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ тоді пара $\big\{I_{\mathcal{L}},\, m(\lambda)\big\}$ є еквівалентною до нормалізованої N_κ-пари*

$$\{\varphi, \psi\} = \left\{\big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big)^{-1},\, m(\lambda)\big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big)^{-1}\right\}$$

і відповідне модельне відношення можна записати, як

$$A(\varphi,\psi) = \left\{\left\{\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix}\right\} : \begin{array}{c} f, f' \in \mathcal{H}(\varphi,\psi);\ u, u' \in \mathcal{L}; \\ f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) = u - m(\lambda)u' \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \end{array}\right\}. \tag{2.22}$$

Розглядаючи проекцію цієї моделі на простір $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$, можна побудувати, модель симетричного оператора S з абстрактною функцією Вейля $m(\lambda)$ у просторі Понтрягіна. Зокрема модель для самоспряженого розширення A_0 оператора S можна записати, як (2.22) у вигляді:

$$A_0 = \left\{\{f,\, f'\} \in \mathcal{H}(\varphi,\psi)^2 : f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) \equiv u \text{ для деякого } u \in \mathcal{L}\right\}. \tag{2.23}$$

2.4 Узагальнене перетворення Фур'є

Зараз ми покажемо, що будь-яке $\mathcal{L}$-мінімальне самоспряжене лінійне відношення A є унітарно еквівалентним її функціональній моделі $A(\varphi,\psi)$, яке було побудовано в Теоремі 2.7. Оператор $\mathcal{F}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ визначений формулою

$$h \mapsto (\mathcal{F}h)(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})^* h = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} h \quad (h \in \mathcal{H}) \tag{2.24}$$

називається узагальненим перетворенням Фур'є, що асоційоване з $\widetilde{A}$ і масштабом $\mathcal{L}$.

Теорема 2.14. *Нехай $\widetilde{A}$ є самоспряженим лінійним відношенням в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$ і $\{\varphi,\psi\}$ є відповідна N_κ-пара, що визначається формулою* (2.4). *Тоді:*

1) *Узагальнене перетворення Фур'е $\mathcal{F}$ є ізометричним оператором з підпростору $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ і $\mathcal{F}$ тотожньо дорівнює 0 на підпросторі $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0$;*

2) *Для будь-якої пари $\left\{\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix}\right\} \in \widetilde{A}$ виконується така рівність*

$$E(\lambda)\mathcal{F}(f'-\lambda f) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Доведення. 1) Для будь-якого вектору $h=\gamma(\bar{\omega})v$ ($\omega\in\rho(\widetilde{A})$, $v\in\mathcal{L}$) з Пропозиції 2.11 випливає, що

$$(\mathcal{F}h)(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})^*\gamma(\bar{\omega})v = \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda)v.$$

Отже, $\mathcal{F}$ відображає лінійний простір $\operatorname{span}\{\gamma(\bar{\omega})\mathcal{L} : \omega\in\rho(\widetilde{A})\}$, який є щільним у $\mathcal{H}_0$, на лінійний простір $\operatorname{span}\{\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)\mathcal{L} : \omega\in\rho(\widetilde{A})\}$, який є щільним у $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$. Більше того, це відображення є ізометричним так як,

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} &= [\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)v, \mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)v]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \\ &= (\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\omega)v, v)_{\mathcal{L}} = [h,h]_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Це доводить перше твердження. Як можна побачити з (2.24) $\mathcal{F}h\equiv 0$ для $h\in\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0$.

2) Нехай $h=\gamma(\bar{\omega})v=\Pi_{\mathcal{H}}(\widetilde{A}-\bar{\omega})^{-1}v$, де $v\in\mathcal{L}$. З (2.4), (2.15) випливає, що

$$\begin{bmatrix} h \\ \psi(\bar{\omega})v \end{bmatrix} = (\widetilde{A}-\bar{\omega})^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{\omega}h \\ \varphi(\bar{\omega})v \end{bmatrix} = \left(I+\bar{\omega}(\widetilde{A}-\bar{\omega})^{-1}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

і значить
$$\left\{\begin{bmatrix} h \\ \psi(\bar\omega)v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar\omega h \\ \varphi(\bar\omega)v \end{bmatrix}\right\} \in \widetilde{A}.$$
Так як $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$, то одержуємо для усіх $\left\{\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix}\right\} \in \widetilde{A}$
$$[f', h]_{\mathcal{H}} - [f, \bar\omega h]_{\mathcal{H}} + \big(u', \psi(\bar\omega)\big)_{\mathcal{L}} - \big(u, \varphi(\bar\omega)v\big)_{\mathcal{L}} = 0, \quad v \in \mathcal{L}.$$
Це означає, що
$$\gamma(\bar\omega)^*(f' - \bar\omega f) = \varphi(\omega)u - \psi(\omega)u', \quad \omega \in \rho(\widetilde{A}). \tag{2.27}$$
Рівність (2.25) доведена. □

Наслідок 2.15. *У випадку, коли лінійне відношення $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-мінімальним, воно є унітарно еквівалентним лінійному відношенню $A(\varphi, \psi)$ за формулою*
$$A(\varphi, \psi) = \left\{\left\{\begin{bmatrix} \mathcal{F}f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{F}f' \\ u' \end{bmatrix}\right\} : \left\{\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix}\right\} \in \widetilde{A}\right\}. \tag{2.28}$$
Оператор $\mathcal{F} \oplus I_{\mathcal{L}}$ здійснює цю еквівалентність.

Наслідок 2.16. *Як випливає з* (2.13) *перетворення Фур'є $\mathcal{F}$, яке є асоційованим з оператором $A(\varphi, \psi)$ є тотожнім, так як*
$$(\mathcal{F}h)(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi, \psi) - \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} = h(\lambda) \quad \text{для всіх } h \in \mathcal{H}(\varphi, \psi).$$

Лема 2.17. *Нехай $\widetilde{A}$ – це самоспряжене лінійне відношення в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$, нехай $\{\varphi, \psi\}$ – нормалізована N_κ-пара, що отримана за формулою* (2.4). *Тоді виконуються такі імплікації:*

(i) $\ker \psi(\lambda) = \{0\}$ *для деякого* $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \Rightarrow \Pi_{\mathcal{L}} \operatorname{dom} \widetilde{A}$ *є щільною в* $\mathcal{L}$;

(ii) $\ker \varphi(\lambda) = \{0\}$ *для деякого* $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \Rightarrow \Pi_{\mathcal{L}} \operatorname{ran} \widetilde{A}$ *є щільною в* $\mathcal{L}$.

Якщо до того ж відношення $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-мінімальним, та $\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\omega) > 0$ для деякого $\omega \in \rho(\widetilde{A})$, то
$$\ker \varphi(\omega) = \{0\}, \quad \ker \psi(\omega) = \{0\}.$$

Доведення. Доведемо спочатку перше твердження. Множина $\Pi_{\mathcal{L}}\mathrm{dom}\,\widetilde{A}$

складається з векторів $u \in \mathcal{L}$ таких, що

$$\left\{ \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \quad \text{для деяких} \quad f, f' \in \mathcal{H}, u' \in \mathcal{L}.$$

Якщо існує вектор $v \in \mathcal{L}$ такий, що $v \perp u$ для усіх $u \in \Pi_{\mathcal{L}} \mathrm{dom}\, \widetilde{A}$, то

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\} \in \widetilde{A},$$

тому з (2.4) випливає, що $\varphi(\lambda)v = 0$. Але $\ker \psi(\lambda) = \{0\}$, отже $v = 0$.

Доведення другої частини є аналогічним.

Будемо вважати, що $\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\omega) > 0$ для деякого $\omega \in \rho(\widetilde{A})$ і, що $\psi(\omega)v = 0$. Тоді, як можна бачити з (2.4), що $\varphi(\omega)v = v$ і

$$\begin{aligned} \big(\mathsf{N}_{\omega}(\omega)v, v\big)_{\mathcal{L}} &= \big(\mathsf{N}_{\overline{\omega}}(\overline{\omega})v, v\big)_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\omega - \bar{\omega}} \Big(\big(\psi(\bar{\omega})\varphi(\omega) - \varphi(\bar{\omega})\psi(\omega)\big)v, v \Big)_{\mathcal{L}} \\ &= \frac{1}{\omega - \bar{\omega}} \big(v, \varphi(\omega)v\big)_{\mathcal{L}} = 0. \end{aligned}$$

Це означає, що $v = 0$. □

Критерії для правих частин в (i) та (ii) також вірні.

Лема 2.18. *Нехай $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-мінімальним самоспряженим лінійним відношенням у $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$, нехай $\{\varphi, \psi\}$ є нормалізованою N_κ-парою, що отримана за формулою* (2.4)*. Тоді*

(i) $\bigcap_{\lambda \in \rho(\widetilde{A})} \ker \psi(\lambda) = \{0\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\Pi_{\mathcal{L}} \operatorname{dom} \widetilde{A}$ *є щільною у* $\mathcal{L}$*;*

(ii) $\bigcap_{\lambda \in \rho(\widetilde{A})} \ker \varphi(\lambda) = \{0\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\Pi_{\mathcal{L}} \operatorname{ran} \widetilde{A}$ *є щільною у* $\mathcal{L}$*.*

Доведення. Необхідність умов в (i) та (ii) випливає з Леми 2.17. Для доведення достатності розглянемо лінійне відношення $A(\varphi, \psi)$, яке отримане за формулою. Завдяки Наслідку 2.15 відношення $A(\varphi, \psi)$ є унітарно еквівалентним лінійному відношенню $\widetilde{A}$. Отже достатньо довести твердження для відношення $A(\varphi, \psi)$.

Припустимо, що $\psi(\lambda)v = 0$ для деякого $v \in \mathcal{L}$ і для усіх $\lambda \in \rho\big(A(\varphi, \psi)\big)$. Тоді з (2.4) випливає, що $\varphi(\lambda)v = v$ та

$$\mathsf{N}_{\bar{\lambda}}^{\varphi\psi}(\omega)v = \frac{1}{\omega - \lambda} \big(\psi(\omega)\varphi(\lambda) - \varphi(\omega)\psi(\lambda)\big)v = 0$$

для усіх λ, $\omega \in \rho\big(A(\varphi,\psi)\big)$. З (2.11) випливає, що

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\cdot)v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\omega}\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\cdot)v \\ v \end{bmatrix} \right\} \in A(\varphi,\psi).$$

Отже $v \perp \Pi_{\mathcal{L}} \mathrm{dom}\, \widetilde{A}$. $\square$

2.5 Функціональна модель для симетричного оператора в просторі Понтрягіна

Як показано в Зауваженні 2.13 кожній узагальненій операторно-значної функції Неванлінни $m \in N_\kappa(\mathcal{L})$ відповідає самоспряжене лінійне відношення $A(m)$ в просторі $\mathcal{H}(m)$, таке що пара $(I_{\mathcal{L}}, m(\lambda))$ є асоційованою з цим лінійним відношенням.

У цьому параграфі буде побудовано модельний симетричний оператор $S(m)$ у просторі $\mathcal{H}(m)$ і деяку граничну трійку $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для лінійного відношення $S(m)^*$, таку що оператор функція $m(\lambda)$ є функцією Вейля оператора $S(m)$, яка відповідає граничній трійці $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. Цей результат випливає з попереднього результату про функціональну модель для лінійного відношення $A(m)$ за допомогою так званого "основного перетворення"граничного лінійного відношення, пов'язаного з граничною трійкою $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ (дивись [50]).

Теорема 2.19. *Нехай $m \in N_\kappa(\mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} < \infty$ і $\det \mathrm{Im}\, m(\lambda) \not\equiv 0$. Нехай $\mathcal{H}(m)$ – це простір Понтрягіна з відтворюючим ядром* (1.26)*, $S(m)$ – оператор множення в $\mathcal{H}(m)$. Тоді:*

(1) $S(m)$ є симетричним оператором в $\mathcal{H}(m)$;

(2) спряжене лінійне відношення $S(m)^*$ співпадає з

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(m)^2 : g'(\lambda) - \lambda g(\lambda) = u_1 - m(\lambda)u_0, \quad u_0, u_1 \in \mathcal{L} \right\}; \tag{2.29}$$

(3) гранична трійка для $S(m)^*$ може бути визначена у вигляді $\{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$

$$\Gamma_1 \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} = u_1, \quad \Gamma_2 \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} = u_0; \tag{2.30}$$

(4) функція Вейля, що відповідає трійці $\{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, співпадає з $m(\lambda)$.

Доведення. Переходячи, якщо необхідно, від матрично-значної функції $m(\lambda)$ до матрично-значної функції $cm(\lambda)$ $(c > 0)$, будемо вважати, що

$$\det(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)) \not\equiv 0.$$

Тоді пара $\{I_{\mathcal{L}}, m(\lambda)\}$ є еквівалентною нормалізованій N_κ-парі

$$\{\varphi(\lambda),\ \psi(\lambda)\} = \{(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda))^{-1},\ m(\lambda)(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda))^{-1}\}.$$

З тотожності

$$\mathsf{N}_\omega^{\varphi\psi}(\lambda) = (I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda))^{-1}\mathsf{N}_\omega^{m}(\lambda)(I_{\mathcal{L}} - \overline{\omega} m(\overline{\omega}))^{-1}$$

випливає, що матрично-значна функція $f(\lambda)$ належить до простору $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$ тоді і лише тоді, коли матрично-значна функція $\big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big) f(\lambda)$ належить до простору $\mathcal{H}(m)$.

Розглянемо самоспряжене лінійне відношення $A(\varphi, \psi)$ вигляду (2.10) і визначимо лінійне відношення G формулою

$$G := \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \end{bmatrix} \right\} : \left\{ \begin{bmatrix} f \\ u_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u_1 \end{bmatrix} \right\} \in A(\varphi, \psi) \right\} \tag{2.31}$$

`Крок 1. Унітарність лінійного відношення` G. Симетричність лінійного відношення $A(\varphi, \psi)$ означає, що для вектора

$$\left\{ \begin{bmatrix} f \\ u_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u_1 \end{bmatrix} \right\} \in A(\varphi, \psi)$$

виконується рівність

$$(f', f)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + (u_1, u_0)_{\mathcal{L}} = (f, f')_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + (u_0, u_1)_{\mathcal{L}}. \tag{2.32}$$

Перепишемо (2.32) у вигляді

$$(f', f)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} - (f, f')_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = (u_0, u_1)_{\mathcal{L}} - (u_1, u_0)_{\mathcal{L}}. \tag{2.33}$$

Розглянемо простори Крейна $(\mathcal{H}(\varphi, \psi)^2, J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)})$ і $(\mathcal{L}^2, J_{\mathcal{L}})$, де фундаментальні симетрії $J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}$ і $J_{\mathcal{L}}$ визначені формулами

$$J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \begin{bmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \\ iI_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{L}} \\ iI_{\mathcal{L}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Позначимо $\widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}$ і $\widehat{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \end{bmatrix}$. Отримуємо

$$\begin{aligned}(J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}\widehat{f}, \widehat{f})_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)^2} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \\ iI_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)^2} \\ &= \left(\begin{bmatrix} -if' \\ if \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)^2} \\ &= -(f', f)_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + i(f, f')_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}.\end{aligned}$$

Застосовуючи співвідношення (2.32), отримуємо

$$(J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}\widehat{f}, \widehat{f})_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)^2} = -i(u_0, u_1)_{\mathcal{L}} + i(u_1, u_0)_{\mathcal{L}}. \tag{2.35}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned}(J_{\mathcal{L}}\widehat{u}, \widehat{u})_{\mathcal{L}^2} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{L}} \\ iI_{\mathcal{L}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{L}^2} \\ &= \left(\begin{bmatrix} iu_1 \\ iu_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{L}^2} \\ &= i(u_1, u_0)_{\mathcal{L}} - i(u_0, u_1)_{\mathcal{L}}.\end{aligned}$$

Отже з рівності (2.35) випливає, що

$$(J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}\widehat{f}, \widehat{f})_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)^2} = (J_{\mathcal{L}}\widehat{u}, \widehat{u})_{\mathcal{L}^2}.$$

Це означає, що лінійне відношення G визначене формулою (2.31) є $(J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}, J_{\mathcal{L}})$-ізометричним.

Легко бачити, що з умови самоспряженості лінійного відношення $A(\varphi, \psi) = A(\varphi, \psi)^*$ випливає рівність

$$G^{-1} = G^*,$$

що означає $(J_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}, J_{\mathcal{L}})$-унітарність лінійного відношення G.

`Крок 2.`

$$S(m) = \ker G, \quad T = \operatorname{dom} G.$$

Дійсно, перша рівність випливає з (2.31) і (2.10). Покажемо друге співвідношення.

Нехай $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} \in \operatorname{dom} G$. Тоді в силу означення лінійного відношення G

(2.31) існують вектори $u_0, u_1 \in \mathcal{L}$, такі що

$$f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) = \big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big)^{-1} u_1 - m(\lambda)\big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big)^{-1} u_0.$$

Припустимо, що

$$g(\lambda) := \big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big) f(\lambda) \in \mathcal{H}(m), \quad g'(\lambda) := \big(I_{\mathcal{L}} - \lambda m(\lambda)\big) f'(\lambda) \in \mathcal{H}(m).$$

Тоді попередня рівність приймає вигляд

$$g'(\lambda) - \lambda g'(\lambda) = u_1 - m(\lambda) u_0.$$

Таким чином, $\operatorname{dom} G \subset T$. Аналогічно доводиться обернене твердження.

`Крок 3.` Покажемо, що

$$\operatorname{ran} G = \mathcal{L}^2, \quad \operatorname{mul} G = \{0\}. \tag{2.36}$$

Для цього розглянемо векторнозначні функції

$$h(\lambda) = \mathsf{N}_{\omega}^{m}(\lambda) v, \quad h'(\lambda) = \overline{\omega} \mathsf{N}_{\omega}^{m}(\lambda) v \quad (v \in \mathcal{L},\ \omega \in \mathfrak{h}_m \cap \mathbb{C}_+),$$

які належать до простору $\mathcal{H}(m)$. Так як

$$h'(\lambda) - \lambda h(\lambda) = (\overline{\omega} - \lambda) \mathsf{N}_{\omega}^{m}(\lambda) v = m(\omega)^{+} v - m(\lambda) v,$$

то в силу (2.31)

$$\begin{bmatrix} v \\ m(\omega)^* v \end{bmatrix} \in \operatorname{ran} G, \quad \begin{bmatrix} v \\ m(\omega) v \end{bmatrix} \in \operatorname{ran} G.$$

Це означає, що $\operatorname{ran} G = \mathcal{L}^2$. З [50, Prop 2.12] випливає, що $\operatorname{mul} G = \{0\}$, тобто G є однозначний оператор.

`Крок 4.` З (2.36) випливає, що $T = \operatorname{clos} T$, тому $T = S(m)^*$, що доводить твердження (2).

З тотожності (2.33) випливає формула Гріна (1.32), а сюр'єктивність відображення $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix}$ слідує з властивості (2.36).

Твердження (4) також випливає з тотожності (2.33). Дійсно,

$$h'(\lambda) - \lambda h(\lambda) = \overline{\omega} \mathsf{N}_{\overline{\omega}}^{m}(\lambda) v - \lambda \mathsf{N}_{\overline{\omega}}^{m}(\lambda) v = m(\omega)^* v - m(\lambda) v = u_1 - m(\lambda) u_0,$$

тобто при $\widehat{h} = \begin{bmatrix} \mathsf{N}^m_{\overline{\omega}}(\lambda)v \\ \overline{\omega}\mathsf{N}^m_{\overline{\omega}}(\lambda)v \end{bmatrix} \in \mathfrak{N}_\omega\big(S(m)\big)$ отримаємо

$$\Gamma_2\widehat{h} = m(\lambda)\Gamma_1\widehat{h}.$$

Таким чином, $m(\lambda)$ є функцією Вейля оператора $S(m)$, яка відповідає граничній трійці $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. $\square$

Зауваження 2.20. *Результат Теореми 2.19 було поширено на випадок N_κ-пар у роботі [46, Theorem 4.7].*

2.6 Узагальнений простір $\mathcal{H}(m)$

У скалярному випадку пара $\{\varphi, \psi\}$ із класу $N_\kappa(\mathbb{C})$ відповідає деякій функції m з класу N_κ за єдиним винятком, коли пара $\{\varphi, \psi\}$ є еквівалентною парі $\{0, 1\}$, що можливе тільки у випадку $\kappa = 0$. Дійсно, ядро

$$\mathsf{N}^{0,1}_\omega(\lambda) = \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{\lambda - \overline{\omega}} \equiv 0$$

не має від'ємних квадратів.

Розглянемо довільну скалярну функцію $m \in N_\kappa$ і ядро $\mathsf{N}^m_\omega(\lambda)$, що визначається формулою (2.1). Простір Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathsf{N}^m_\omega(\lambda)$ будемо називати *узагальненим простором де Бранжа-Ровняка* $\mathcal{H}(m)$. У випадку $\kappa = 0$ такий простір було розглянуто у [51] де наведено також його опис в термінах інтегральних зображень функції m.

Теорема 2.21. *([53, Theorem 5]) Нехай функція m_0 належить до класу N і допускає інтегральне зображення* (1.20). *Тоді:*

(i) простір $\mathcal{H}(m_0)$ співпадає з множиною функцій

$$\mathcal{H}(m_0) = \left\{ c + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \lambda} d\sigma(t), \quad c \in \mathbb{C},\ f \in L_2(d\sigma) \right\}.$$

(ii) Якщо окрім цього функція m_0 належить до класу N^0 і допускає зображення (1.22), *то*

$$\mathcal{H}(m_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \lambda} d\sigma(t), \quad f(t) \in L_2(d\sigma) \right\}. \tag{2.37}$$

В матричному випадку аналог Теореми 2.21 наведено в [37]. Нижче буде наведено аналог Теореми 2.21 для функції з класу N_κ. При цьому ми будемо використовувати теорему про факторизацію довільної функції класу N_κ

Нехай $p(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$ є поліном степеню n. Визначимо $p^\#(\lambda)$ формулою

$$p^\#(\lambda) := p(\overline{\lambda})^* = \overline{p}_0\lambda^n + \overline{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \overline{p}_{n-1}\lambda + \overline{p}_n.$$

Теорема 2.22. *([67], [62]) Будь-яка функція $m \in N_\kappa$ допускає факторизацію*

$$m(\lambda) = \frac{p(\lambda)p^\#(\lambda)}{q(\lambda)q^\#(\lambda)} m_0(\lambda), \tag{2.38}$$

де p і q – однозначно визначені взаємно прості монічні поліноми та $m_0 \in N$. При цьому

$$\max\big\{\deg(p), \deg(q)\big\} = \kappa.$$

Нехай раціональна функція r визначена через формулу

$$r(\lambda) := \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}, \quad r^\#(\lambda) := \frac{p^\#(\lambda)}{q^\#(\lambda)}. \tag{2.39}$$

Тоді формула (2.38) може бути переписана, як

$$m(\lambda) = r(\lambda)m_0(\lambda)r^\#(\lambda). \tag{2.40}$$

Нехай p, q є поліномами, $\kappa = \max\{\deg p, \deg q\}$ і нехай коефіцієнти b_{ij} визначені за правилом

$$\frac{p(x)q(y) - p(y)q(x)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{\kappa-1} b_{ij}x^i y^j.$$

Матриця $B_{p,q} := \big(b_{ij}\big)_{i,j=0}^{\kappa-1}$ називається *безутіантою* поліномів p та q (дивись [22]). Безутіанта $B_{p,q}$ є оборотною матрицею, якщо p та q є взаємно простими поліномами.

Визначимо матриці

$$\Lambda := \Lambda_\kappa = (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{\kappa-1}), \quad M := M_\kappa = (1, \mu, \mu^2, ..., \mu^{\kappa-1}).$$

Теорема 2.23. *Нехай $m \in N_\kappa$ допускає факторизацію* (2.38)*. Тоді простір*

$\mathcal{H}(m)$ співпадає з простором $\big(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}\big)$, де $\mathcal{H}$ – це множина функцій

$$f(\lambda) = r(\lambda) f_0(\lambda) + \frac{1}{q(\lambda)}\varphi_1(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{q^{\#}(\lambda)} m_0(\lambda)\varphi_2(\lambda), \tag{2.41}$$

а внутрішній добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ визначається як

$$\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}} = (f_0, f_0)_{\mathcal{H}(m_0)} + \mathcal{F}^* \mathcal{B}^{-1}\mathcal{F}, \tag{2.42}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\kappa}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_{p,q} \\ B_{p,q}^* & 0 \end{bmatrix},$$

де $f_0 \in \mathcal{H}(m_0)$; φ_1, φ_2 – довільні поліноми формального ступеню $\kappa - 1$; $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^{\kappa}$ – стовпці коефіцієнтів поліномів φ_1 та φ_2, відповідно; $B_{p,q}$ – безутіанта поліномів p та q.

Доведення. Будь-яка функція f виду (2.41) допускає зображення

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} r(\lambda) & \frac{1}{q(\lambda)}\Lambda & \frac{r(\lambda)}{q^{\#}(\lambda)} m_0(\lambda)\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

де $f_0 \in \mathcal{H}(m_0)$, та $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^{\kappa}$. Тоді функція $\mathsf{N}_{\mu}^{m}(\lambda)$ при будь якому $\mu \in \mathfrak{h}_m^+$ має форму

$$\mathsf{N}_{\mu}^{m}(\lambda) = \begin{bmatrix} r(\lambda) & \frac{1}{q(\lambda)}\Lambda & \frac{r(\lambda)}{q^{\#}(\lambda)} m_0(\lambda)\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{pq} \\ 0 & B_{pq}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{\#}(\overline{\mu}) \mathsf{N}_{\mu}^{m_0}(\lambda) \\ \frac{1}{q^{\#}(\overline{\mu})} M^* \\ \frac{r^{\#}(\overline{\mu}) m_0(\overline{\mu})}{q(\overline{\mu})} M^* \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\mathcal{H}$ є простором Понтрягіна з від'ємним індексом κ. Більш того $\mathcal{H}$ є простором Понтрягіна з відтворювальним ядром $\mathsf{N}_{\mu}^{m}(\lambda)$, так як для будь-якої функції f виду (2.43) отримаємо

$$\begin{aligned} \big\langle f(\cdot), \mathsf{N}_{\mu}^{m}(\cdot)\big\rangle_{\mathcal{H}} &= \big(f_0(\cdot), \mathsf{N}_{\mu}^{m_0}(\cdot) r^{\#}(\overline{\mu})\big)_{\mathcal{H}(m_0)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{q(\mu)} M & m_0^*(\overline{\mu}) \frac{r(\mu)}{q^{\#}(\mu)} M \end{bmatrix} \mathcal{B}^* \mathcal{B}^{-1} \mathcal{F} \\ &= r(\mu) f_0(\mu) + \frac{1}{q(\mu)}\varphi_1(\mu) + m_0(\mu)\frac{r(\mu)}{q^{\#}(\mu)}\varphi_2(\mu), \end{aligned}$$

де $\varphi_j(\mu) = M f^{(j)}$ $(j = 1, 2)$. Це доводить відтворювальну властивість простору $\mathcal{H}$. Таким чином, $\mathcal{H}$ співпадає з $\mathcal{H}(m)$. $\square$

2.7 Висновки до розділу 2

Результати глави були представлені в [86] і [88].

1) Введено поняття нормалізованої N_κ-пари, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню у просторі Понтрягіна. В Теоремі 2.7 показано, що для кожної нормалізованої N_κ-пари існує єдине з точністю до унітарної еквівалентності мінімальне самоспряжене лінійне відношення A у просторі Понтрягіна, таке що пара $\{\varphi, \psi\}$ відповідає цьому відношенню A. Побудовано функціональну модель такого самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром.

2) Для узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ в Теоремі 2.23 наведено опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_\omega^m(\lambda)$.

3 Абстрактна інтерполяційна проблема в узагальнених класах Неванлінни

3.1 Постановка та розв'язання абстрактної інтерполяційної проблеми

Нехай $\mathcal{X}$ є комплексним лінійним простором, $\mathcal{L}$ – це простір Гільберта. Нехай B_1, B_2 – це лінійні оператори в $\mathcal{X}$, і C_1, C_2 – це лінійні оператори з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{L}$. Нехай K – це півторалінійна форма в $\mathcal{X}$, що має ν від'ємних квадратів. Розглянемо неперервний аналог абстрактної інтерполяційної проблеми.

Проблема $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. Нехай $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ і нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови:

(A1) $K(B_2h, B_1g) - K(B_1h, B_2g) = (C_1h, C_2g)_\mathcal{L} - (C_2h, C_1g)_\mathcal{L} \quad \forall h, g \in \mathcal{X}$;

(A2) $\ker K = \{0\}$, де $\ker K = \{h \in \mathcal{X} : \ K(h, u) = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{X}\}$.

Знайти N_κ-пару $\{\varphi, \psi\} \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{L})$, таку що існує лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, для якого виконуються такі умови:

(C1) $(FB_2h)(\lambda) - \lambda(FB_1h)(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1h \\ C_2h \end{bmatrix}$, для усіх $h \in \mathcal{X}$;

(C2) $\langle Fh, \ Fh\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \le K(h, h)$, для усіх $h \in \mathcal{X}$.

Зауваження 3.1. *Для розв'язності проблеми* $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$*, необхідно щоб*

$$\nu \le \kappa. \tag{3.1}$$

Дійсно, розкладемо простір $\mathcal{X}$ в пряму суму від'ємного $\mathcal{X}_-$ і невід'ємного $\mathcal{X}_+$ підпросторів відносно форми $K(h, h)$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_- \dot{+} \mathcal{X}_+. \tag{3.2}$$

При цьому $\deg \operatorname{clos}(\mathcal{X}_-) = \nu$, а отже $\mathcal{X}_-$ – це замкнений підпростір простору $\mathcal{X}$. З умови (C2) випливає, що, $\langle Fh, \ Fh\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} < 0$ при будь-якому $h (\neq 0) \in \mathcal{X}_-$. Таким чином, лінійний оператор F не обертається в 0 на підпросторі $\mathcal{X}_-$, окрім нульового вектору. Тому звуження оператора F на скінченновимірний підпростір $\mathcal{X}_-$ має оборотний оператор, а отже зберігає розмірність

$$\dim F(\mathcal{X}_-) = \nu.$$

При цьому множина $F(\mathcal{X}_-)$ є частиною від'ємного підпростору простору $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$. Отже розмірність від'ємного підпростору простору $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ не менш ніж ν.

При $\kappa=\nu=0$ задача (C1)-(C2) була розглянута в [58].

Визначимо простір Понтрягіна $\mathcal{H}$ з від'ємним індексом ν, як поповнення простору $\mathcal{X}$ відносно добутку

$$\langle h,g\rangle_{\mathcal{H}}=K(h,g),\quad h,g\in\mathcal{X}. \tag{3.3}$$

При цьому ми будемо ототожнювати оператори $B_1,\ B_2:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ з лінійними операторами $B_1,\ B_2:\mathcal{X}\to\mathcal{H}$.

Пропозиція 3.2. *Нехай оператори B_1,B_2,C_1,C_2,K задовольняють умові (A1). Тоді лінійне відношення*

$$\widehat{A}=\left\{\left\{\begin{bmatrix}B_1h\\C_1h\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B_2h\\C_2h\end{bmatrix}\right\}:h\in\mathcal{X}\right\} \tag{3.4}$$

є симетричним в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$.

Доведення. Твердження випливає з пропозиції (A1), так як

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{bmatrix}B_2h\\C_2h\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B_1h\\C_1h\end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}}-\left\langle\begin{bmatrix}B_1h\\C_1h\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B_2h\\C_2h\end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}}\\&=K(B_2h,B_1h)+(C_2h,C_1h)_{\mathcal{L}}-K(B_1h,B_2h)-(C_1h,C_2h)_{\mathcal{L}}=0.\end{aligned}$$

□

Означення 3.3. *Лінійне відношення $\widetilde{A}=\widetilde{A}^*$ в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$ називається $\mathcal{L}$-регулярним, якщо $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0$ є простором Гільберта, де $\mathcal{H}_0$ визначено формулою* (2.3).

У випадку ізометричного оператора в просторі Понтрягіна поняття $\mathcal{L}$-регулярності було представлено в [57].

Теорема 3.4. *Нехай оператори B_1,B_2,C_1,C_2,K задовольняють умовам (A1)-(A2) і $\nu=sq_-(K)\le\kappa$. Тоді проблема $AIP_\kappa(B_1,B_2,C_1,C_2,K)$ є розв'язною, і множина всіх її нормалізованих розв'язків параметризується формулою*

$$\begin{bmatrix}\psi(\lambda)\\\varphi(\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{\mathcal{L}}&0\\\lambda&I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{L}}\\I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

де $\widetilde{A}$ пробігає множину усіх самоспряжених $\mathcal{L}$-регулярних розширень лінійного відношення $\widehat{A}$ в просторі Понтрягіна $\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L} \supset \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ таких, що $\kappa_-(\widetilde{\mathcal{H}}) = \kappa$. Відповідне лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ задається формулою

$$(Fh)(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}h, \quad h \in \mathcal{X}. \tag{3.6}$$

Доведення. *Достатність.* Нехай $\widetilde{A}$ є самоспряженим $\mathcal{L}$-регулярним розширенням лінійного відношення $\widehat{A}$ і нехай $\{\varphi, \psi\}$ – нормалізована N_κ-пара, що відповідає лінійному відношенню $\widetilde{A}$ і масштабному простору $\mathcal{L}$. Тоді формула (3.5) випливає з (2.4).

Нехай $\mathcal{F} : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ – це узагальнене перетворення Фур'є, що відповідає $\widetilde{A}$. Тоді з (2.24) випливає, що лінійне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, яке визначене за формулою (3.6), є пов'язаним з $\mathcal{F}$ співвідношенням

$$Fh = \mathcal{F}h \quad (h \in \mathcal{X}). \tag{3.7}$$

Так як $\mathcal{F}$ задовольняє тотожності (2.25) і

$$\left\{ \begin{bmatrix} B_1 h \\ C_1 h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2 h \\ C_2 h \end{bmatrix} \right\} \in \widehat{A} \subset \widetilde{A}$$

отримає з (2.25), що

$$\begin{aligned} (FB_2h)(\lambda) - \lambda(FB_1h)(\lambda) &= (\mathcal{F}B_2h)(\lambda) - \lambda(\mathcal{F}B_1h)(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 h \\ C_2 h \end{bmatrix} \quad \forall h \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Це доводить твердження (C1) для відображення F.

Так як $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-регулярним розширенням лінійного відношення $\widehat{A}$, то з Теореми 2.14 випливає, що

$$\langle \mathcal{F}h, \mathcal{F}h \rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \le \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}} \quad (h \in \mathcal{H}) \tag{3.9}$$

і $\kappa = \kappa_-(\widetilde{\mathcal{H}})$. Дійсно, нерівність (3.9) виконується, так як узагальнене перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ ізометрично відображає простір Понтрягіна $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$ і тотожньо дорівнює 0 на просторі Гільберта $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$. Далі з формул (3.7) і (3.3) отримуємо, для усіх $h \in \mathcal{X}$

$$\langle Fh, Fh \rangle_{\mathcal{H}\langle\varphi,\psi\rangle} = \langle \mathcal{F}h, \mathcal{F}h \rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \le \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}} = K(h, h),$$

що доводить твердження (C2). Так як $\mathcal{H} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ і $\nu = \kappa_-(\mathcal{H})$, $\kappa = \kappa_-(\widetilde{\mathcal{H}})$, то виконується нерівність (3.1).

Таким чином ми отримали, що лінійно відображення F задовольняє умови (C1)-(C2) і отже, N_κ-пара $\{\varphi, \psi\}$ дійсно є розв'язком проблеми AIP_κ.

Необхідність. Нехай нормалізована N_κ-пара $\{\varphi, \psi\}$ є роз'язком AIP_κ і нехай відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ задовольняє умови (C1)-(C2). Побудуємо самоспряжене $\mathcal{L}$-регулярне розширення $\widetilde{A}$ лінійного відношення $\widehat{A}$ для якого виконуються відношення (3.5) і (3.6).

Крок 1. Побудова ізометричного вкладення $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$. Розглянемо відображення $\widehat{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, як продовження відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ на простір $\mathcal{H} \supset \mathcal{X}$.

Відображення $\widehat{F}$ є стискаючим. Дійсно. це випливає з означення $\widehat{F}$ і (C2)

$$\left\langle (\widehat{F}h)(\lambda), (\widehat{F}h)(\lambda) \right\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} = \left\langle (Fh)(\lambda), (Fh)(\lambda) \right\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \leq K(h, h) = \langle h, h \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Таким чином оператор $I_{\mathcal{H}} - \widehat{F}^* \widehat{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ є невід'ємним.

Нехай $D = D^* (\geq 0)$ є дефектним оператором стискаючого оператора $\widehat{F}$, котрий задається рівністю

$$D^2 = I - \widehat{F}^* \widehat{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{3.10}$$

Нехай $\mathcal{D} = \overline{\operatorname{ran}}\, D$ – це дефектний підпростір відображення $\widehat{F}$ в $\mathcal{H}$. Відмітимо, що простір $\mathcal{D}$ є простором Гільберта, так як оператор D невід'ємний. Розглянемо розширення оператора $\widehat{F}$ до ізометричного відображення $\widetilde{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{D} \oplus \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, що представлено формулою

$$\widetilde{F}h = \begin{bmatrix} Dh \\ \widehat{F}h \end{bmatrix}, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{3.11}$$

Крок 2. Побудова самоспряженого лінійного відношення $\widetilde{A}$. Нехай $A_{\mathcal{D}}$ – це лінійне відображення в $\mathcal{D}$, що визначено як

$$A_{\mathcal{D}} = \left\{ \{DB_1h, DB_2h\} : h \in \mathcal{X} \right\}.$$

Покажемо, що $A_{\mathcal{D}}$ є симетричним лінійним відношенням в $\mathcal{D}$. Для цього треба довести, що

$$\langle DB_2h, DB_1h \rangle_{\mathcal{H}} - \langle DB_1h, DB_2h \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{3.12}$$

З формули (3.10) випливає, що

$$\begin{aligned}\langle DB_2h, DB_1h\rangle_{\mathcal{H}} - \langle DB_1h, DB_2h\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle (I - \widehat{F}^*\widehat{F})B_2h, B_1h\rangle_{\mathcal{H}} - \langle (I - \widehat{F}^*\widehat{F})B_1h, B_2h\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle B_2h, B_1h\rangle_{\mathcal{H}} - \langle B_1h, B_2h\rangle_{\mathcal{H}} \\ &- \langle \widehat{F}B_2h, \widehat{F}B_1h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + \langle \widehat{F}B_1h, \widehat{F}B_2h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} \\ &= K(B_2h, B_1h) - K(B_1h, B_2h) \\ &- \langle \widehat{F}B_2h, \widehat{F}B_1h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + \langle \widehat{F}B_1h, \widehat{F}B_2h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Умова (C1) означає, що

$$\begin{aligned}(\widehat{F}B_2h)(\lambda) - \lambda(\widehat{F}B_1h)(\lambda) &= (FB_2h)(\lambda) - \lambda(FB_1h)(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1h \\ C_2h \end{bmatrix} \quad \forall h \in \mathcal{X}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Отже, у зв'язку з Теоремою 2.7 випливає, що

$$\left\{ \begin{bmatrix} \widehat{F}B_1h \\ C_1h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widehat{F}B_2h \\ C_2h \end{bmatrix} \right\} \in A(\varphi, \psi).$$

Так як $A(\varphi, \psi)$ є самоспряженим лінійним відображенням, то

$$\langle \widehat{F}B_2h, \widehat{F}B_1h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} + (C_2h, C_1h)_{\mathcal{L}} - \langle \widehat{F}B_1h, \widehat{F}B_2h\rangle_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)} - (C_1h, C_2h)_{\mathcal{L}} = 0.$$

Тоді праву частину рівності (3.13) можна переписати у вигляді

$$K(B_2h, B_1h) - K(B_1h, B_2h) - (C_1h, C_2h)_{\mathcal{L}} + (C_2h, C_1h)_{\mathcal{L}}.$$

Цей вираз дорівнює 0 в силу умови (A1). Таким чином рівність (3.12) доведена, отже $A_{\mathcal{D}}$ дійсно є симетричним лінійним відношенням в $\mathcal{D}$.

Нехай $\widetilde{A}_{\mathcal{D}}$ це самоспряжене розширення лінійного відношення $A_{\mathcal{D}}$ в простір Гільберта $\widetilde{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}$ і нехай

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\mathcal{D}} \oplus A(\varphi, \psi). \tag{3.15}$$

Відмітимо, що $\widetilde{A}$ є самоспряжене лінійне відношення, як пряма сума самоспряжених лінійних відношень.

Крок 3. Лінійне відношення $\widetilde{A}$ задовольняє формулам (3.5) *і* (3.6). Ототожнюємо вектор $h \in \mathcal{H}$ з $\widetilde{F}h$. Тоді можна ототожнювати симетричне лінійне відображення $\widehat{A}$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ з симетричним лінійним відношенням

$$\begin{aligned} A_1 &= (\widetilde{F} \oplus I_{\mathcal{L}})\widehat{A}(\widetilde{F} \oplus I_{\mathcal{L}})^{-1} \\ &= \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} DB_1h \\ \widehat{F}B_1h \\ C_1h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} DB_2h \\ \widehat{F}B_2h \\ C_2h \end{bmatrix} \right\} : h \in \mathcal{X} \right\} \end{aligned}$$

в $\widetilde{\mathcal{H}} := \widetilde{\mathcal{D}} \oplus \mathcal{H}(\varphi, \psi) \oplus \mathcal{L}$. Більше того з результатів Кроку 2 цієї теореми випливає, що A_1 міститься в самоспряженому лінійному відношенні $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\mathcal{D}} \oplus A(\varphi, \psi)$, так як $\{DB_1h, DB_2h\} \in A_{\mathcal{D}} \subset \widetilde{A}_{\mathcal{D}}$ і

$$\left\{ \begin{bmatrix} \widehat{F}B_1h \\ C_1h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widehat{F}B_2h \\ C_2h \end{bmatrix} \right\} \in A(\varphi, \psi).$$

Формула (3.5) випливає з аналогічної формули для лінійного відношення $A(\varphi, \psi)$

$$\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & 0 \\ \lambda I_{\mathcal{L}} & I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi, \psi) - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}} \\ I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix}$$

так як

$$\Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi, \psi) - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}} = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}.$$

З означення лінійного відношення $\widetilde{A}$ і відображення $\widehat{F}$ випливає, що для усіх $h \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{F}h \\ 0 \end{bmatrix} &= \Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi, \psi) - \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{F}h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \Pi_{\mathcal{L}}(A(\varphi, \psi) - \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} Fh \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Далі, підставимо в (3.16) результат Зауваження 2.9. Отримаємо

$$\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{F}h \\ 0 \end{bmatrix} = (Fh)(\lambda).$$

Для завершення доведення формули (3.6) залишилось відмітити тотожність $\widetilde{F}h$ і h.

Крок 4. Доведемо $\mathcal{L}$-регулярність розширення $\widetilde{A}$. Розглянемо простір

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \overline{\operatorname{span}} \Big\{ \Pi_{\widetilde{\mathcal{D}} \oplus \mathcal{H}(\varphi, \psi)}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\mathcal{L} : \quad \lambda \in \rho(\widetilde{A}) \Big\}.$$

Так як самоспряжене відношення $A(\varphi,\psi)$ є $\mathcal{L}$-мінімальним і

$$\Pi_{\widetilde{\mathcal{D}}\oplus\mathcal{H}(\varphi,\psi)}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{L}} = \Pi_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}(A(\varphi,\psi)-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{L}},$$

то $\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}(\varphi,\psi)$. Отже підпростір

$$\left(\widetilde{\mathcal{D}}\oplus\mathcal{H}(\varphi,\psi)\right)\ominus\widetilde{\mathcal{H}}_0$$

співпадає з простором Гільберта $\widetilde{\mathcal{D}}$, що доводить $\mathcal{L}$-регулярність лінійного відношення $\widetilde{A}$. $\square$

3.2 Опис роз'язків абстрактної інтерполяційної проблеми в класах Неванлінни

В цій частині, ми будемо припускати, що кількість від'ємних квадратів ядра $\mathsf{N}_{\omega}^{\varphi\psi}(\lambda)$ дорівнює кількості від'ємних квадратів форми K. Інакше кажучи, ми досліджуємо проблему AIP_{κ}, де $\kappa=\nu$.

Означення 3.5. *Нехай $\widetilde{A}$ це самоспряжене розширення лінійного відношення A в простір Понтрягіна $\widetilde{\mathcal{H}}\oplus\mathcal{L}$. Оператор-функцію $\mathbf{R}_{\lambda}=\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright\mathcal{L}$ називають $\mathcal{L}$-резольвентою відношення A.*

Якщо $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-регулярним лінійним відношенням, то $\mathcal{L}$-резольвенту $\mathbf{R}_{\lambda}$ будемо називати $\mathcal{L}$-регулярною.

Як випливає з Теореми 3.4 опис множини усіх розв'язків проблеми AIP_{κ} зводиться до опису усіх $\mathcal{L}$-регулярних $\mathcal{L}$-резольвент лінійного відношення $\widehat{A}$.

Накладемо додаткові умови на оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K:

(A3) $B_2 = I_{\mathcal{X}}$ і оператори $B_1:\mathcal{X}\subseteq\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $C_1,C_2:\mathcal{X}\subseteq\mathcal{H}\to\mathcal{L}$ є обмеженими.

Симетричне лінійне відношення $\widehat{A}$ можна переписати у вигляді

$$\widehat{A}=\left\{\left\{\begin{bmatrix} B_1h\\ C_1h\end{bmatrix},\begin{bmatrix} h\\ C_2h\end{bmatrix}\right\}:h\in\mathcal{X}\right\}. \tag{3.17}$$

Як слідує з (A3) замикання лінійного відношення $\widehat{A}$ має вигляд

$$A:=\operatorname{clos}\widehat{A}=\left\{\left\{\begin{bmatrix} B_1h\\ C_1h\end{bmatrix},\begin{bmatrix} h\\ C_2h\end{bmatrix}\right\}:h\in\mathcal{H}\right\}. \tag{3.18}$$

Далі ми покажемо, що симетричне лінійне відношення A, яке визначено за формулою (3.18), має рівні дефектні числа $n_+(A) = n_-(A) = \dim \mathcal{L}$ і, крім того, $0 \in \widehat{\rho}(A)$.

Пропозиція 3.6. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3). Тоді:*

1) спряжене лінійне відношення A^* має вигляд

$$A^* = \left\{ \widehat{g} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g' \\ v' \end{bmatrix} \right\} : \begin{array}{c} v, v' \in \mathcal{L}, g' \in \mathcal{H}; \\ g = B_1^* g' + C_1^* v' - C_2^* v \end{array} \right\}; \tag{3.19}$$

2) множина $\widehat{\rho}(A)$ точок регулярного типа симетричного лінійного відношення A містить у собі резольвентну множину лінійного відношення B_1^{-1}

$$\rho(B_1^{-1}) = \left\{ \lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) : 1/\lambda \in \rho(B_1) \right\} \cup \{0\};$$

3) дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda(A)$ при $\lambda \in \rho(B_1^{-1})$ складається з векторів

$$\begin{bmatrix} -F(\overline{\lambda})^* u \\ u \end{bmatrix}, \quad u \in \mathcal{L}, \tag{3.20}$$

де операторно-значна функція $F(\lambda) : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$, є визначеною формулою

$$F(\lambda) = (C_2 - \lambda C_1)(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1}. \tag{3.21}$$

Доведення. 1) Нехай

$$\widehat{g} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g' \\ v' \end{bmatrix} \right\} \in A^* \quad (g, g' \in \mathcal{H}; v, v' \in \mathcal{L}).$$

Тоді з формули (3.18) випливає, що

$$\langle g', B_1 h \rangle_{\mathcal{H}} - \langle g, h \rangle_{\mathcal{H}} + (v', C_1 h)_{\mathcal{L}} - (v, C_2 h)_{\mathcal{L}} = 0$$

для усіх $h \in \mathcal{H}$. Так як простір Понтрягіна $\mathcal{H}$ є виродженим, то

$$B_1^* g' - g + C_1^* v' - C_2^* v = 0,$$

що можна записати в еквівалентному вигляді

$$g = B_1^* g' + C_1^* v' - C_2^* v. \tag{3.22}$$

2) Як випливає з (3.18)

$$A-\lambda=\left\{\left\{\begin{bmatrix} B_1h \\ C_1h \end{bmatrix},\begin{bmatrix} (I_{\mathcal{H}}-\lambda B_1)h \\ (C_2-\lambda C_1)h \end{bmatrix}\right\}:h\in\mathcal{H}\right\}, \tag{3.23}$$

отже

$$\operatorname{ran}(A-\lambda)=\left\{\begin{bmatrix} h \\ F(\lambda)h \end{bmatrix}:\ h\in\mathcal{H}\right\}.$$

де $F(\lambda)$ задається формулою (3.21). Тому множина $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ є замкненою для усіх $\lambda\in\rho(B_1^{-1})$.

3) Якщо $\lambda\in\rho(B_1^{-1})$ і $\widehat{g}\in\mathfrak{N}_\lambda(A)=\ker(A^*-\lambda)$, то $g'=\lambda g$, $v'=\lambda v$. Підставимо ці рівняння в формулу (3.22), ми отримаємо

$$(I_{\mathcal{H}}-\lambda B_1^*)g=-(C_2^*-\lambda C_1^*)v.$$

Ця рівність доводить третю частину твердження, так як $g=-F(\bar{\lambda})^*v$. □

3.2.1 Зображення Крейна для симетричного відношення A

Нагадаємо деякі факти з теорії представлень Крейна для симетричного лінійного відношення ([20], [66]). Будемо казати, що $\lambda\in\rho(A,\mathcal{L})$ для симетричного лінійного відношення A в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$, якщо λ є точкою регулярного типу і

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}=\operatorname{ran}(A-\lambda)\dotplus\mathcal{L}. \tag{3.24}$$

Покладемо $\rho_s(A,\mathcal{L}):=\rho(A,\mathcal{L})\cap\overline{\rho(A,\mathcal{L})}$. Для будь-якого $\lambda\in\rho(A,\mathcal{L})$ визначимо операторно-значну функцію $\mathcal{P}(\lambda):\mathcal{H}\to\mathcal{L}$, як косий проектор на підпростір $\mathcal{L}$ в розкладі (3.24), і $\mathcal{Q}(\lambda):\mathcal{H}\to\mathcal{L}$, як

$$\mathcal{Q}(\lambda)=\Pi_{\mathcal{L}}(A-\lambda)^{-1}(I-\mathcal{P}(\lambda)),\quad \lambda\in\rho(A,\mathcal{L}). \tag{3.25}$$

Нехай матриця $J\in\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}$ є визначеною формулою

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{L}} \\ iI_{\mathcal{L}} & 0 \end{bmatrix}$$

В наступній теоремі ми представимо $\mathcal{P}(\lambda)$ і $\mathcal{Q}(\lambda)$ через дані проблеми AIP_κ.

Теорема 3.7. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1) – (A3). Визначимо операторно-значну функцію $F(\lambda)$ за формулою (3.21). Тоді:*

1) $\rho(A,\mathcal{L}) = \rho(B_1^{-1})$ *і для* $\lambda \in \rho(A,\mathcal{L})$ *операторно-значні функції* $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{Q}(\lambda)$ *визначаються за формулами*

$$\mathcal{P}(\lambda)\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} = u - F(\lambda)f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad u \in \mathcal{L}, \tag{3.26}$$

$$\mathcal{Q}(\lambda)\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} = C_1(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1}f, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{3.27}$$

2) Спряжені оператори до операторів $\mathcal{P}(\lambda), \mathcal{Q}(\lambda) : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix} \to \mathcal{L}$ *мають вигляд*

$$\mathcal{P}(\lambda)^*u = \begin{bmatrix} -F(\lambda)^*u \\ u \end{bmatrix} \quad u \in \mathcal{L},\, \lambda \in \rho(A,\mathcal{L}), \tag{3.28}$$

$$\mathcal{Q}(\lambda)^*u = \begin{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \bar{\lambda}B_1^*)^{-1}C_1^*u \\ 0 \end{bmatrix} \quad u \in \mathcal{L},\, \lambda \in \rho(A,\mathcal{L}); \tag{3.29}$$

Доведення. 1) Припустимо, що $\lambda \in \rho(A,\mathcal{L})$ і має місце розклад (3.24). Тоді для $f \in \mathcal{H}$, $u \in \mathcal{L}$ однозначно визначені $h \in \mathcal{H}$ і $v \in \mathcal{L}$ такі, що

$$(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)h = f, \quad (C_2 - \lambda C_1)h + v = u. \tag{3.30}$$

Зокрема це означає, що $\lambda \in \rho(B_1^{-1})$.

Навпаки, якщо $\lambda \in \rho(B_1^{-1})$, то система рівнянь (3.30) має єдиний роз'язок $h \in \mathcal{H}$ і $v \in \mathcal{L}$. Отже $\lambda \in \rho(A,\mathcal{L})$. Як бачимо з (3.30) ці розв'язки мають вигляд

$$h = (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1}f, \quad v = \mathcal{P}(\lambda)\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} = u - F(\lambda)f. \tag{3.31}$$

Зі співвідношень (3.25), (3.31) і (3.23) випливає, що

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\lambda)\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} &= \Pi_{\mathcal{L}}(A-\lambda)^{-1}(I - \mathcal{P}(\lambda))\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \\ &= \Pi_{\mathcal{L}}(A-\lambda)^{-1}\begin{bmatrix} f \\ F(\lambda)f \end{bmatrix} \\ &= \Pi_{\mathcal{L}}\begin{bmatrix} B_1(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1}f \\ C_1(C_2 - \lambda C_1)^{-1}F(\lambda)f \end{bmatrix} \\ &= C_1(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1}f.\end{aligned}$$

2) Формули (3.28), (3.29) випливають з вже доведених співвідно-

шень (3.26), (3.27) і рівностей

$$\left\langle \mathcal{P}(\lambda)^* v, \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}} = (v, u - F(\lambda)f)_{\mathcal{L}} = \left\langle \begin{bmatrix} -F(\lambda)^* v \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}},$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{Q}(\lambda)^* v, \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}} &= (v, C_1(I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} f)_{\mathcal{L}} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1^*)^{-1} C_1^* v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

□

Позначимо $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ як граничну трійку для A^*, де $\Gamma_i : A^* \to \mathcal{L}$, $i = 1, 2$. В цьому разі абстрактна формула Грина для всіх $\widehat{f} = \{f, f'\}$, $\widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*$ має вигляд

$$\langle f', g \rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}} - \langle f, g' \rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}} = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_2 \widehat{g})_{\mathcal{L}} - (\Gamma_2 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g})_{\mathcal{L}} \tag{3.32}$$

і відображення $\Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} : A^* \to \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix}$ є сюр'єктивним.

3.2.2 Гранична трійка для A^*

Нехай операторно-значні функції $\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^*$ і $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^*$ визначені за формулами

$$\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* u = \{\mathcal{P}(\lambda)^* u, \bar{\lambda}\mathcal{P}(\lambda)^* u\}, \quad u \in \mathcal{L}, \tag{3.33}$$

$$\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* u = \{\mathcal{Q}(\lambda)^* u, u + \bar{\lambda}\mathcal{Q}(\lambda)^* u\}, \quad u \in \mathcal{L}, \tag{3.34}$$

де $\mathcal{P}(\lambda)^*$, $\mathcal{Q}(\lambda)^* : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ оператори спряжені до операторів $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{Q}(\lambda) : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$.

Теорема 3.8. *([56]) Нехай $\lambda \in \rho_s(A, \mathcal{L})$, тоді справедливий такий прямий розклад лінійного відношення A^**

$$A^* = A \dotplus \widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* \mathcal{L} \dotplus \widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* \mathcal{L}. \tag{3.35}$$

Пропозиція 3.9. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3). Тоді гранична трійка $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ для A^* може бути знайдена за формулою*

$$\Gamma_1 \widehat{g} = v - C_1 g', \quad \Gamma_2 \widehat{g} = -v' + C_2 g'. \tag{3.36}$$

Доведення. Для двох векторів

$$\widehat{f} = \left\{ \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f' \\ u' \end{bmatrix} \right\}, \quad \widehat{g} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g' \\ v' \end{bmatrix} \right\} \in A^*$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \langle f', g\rangle_{\mathcal{H}} - \langle f, g'\rangle_{\mathcal{H}} + (u', v)_{\mathcal{L}} - (u, v')_{\mathcal{L}} &= (u', v)_{\mathcal{L}} - (u, v')_{\mathcal{L}} \\ + \langle f', B_1^* g' + C_1^* v' - C_2^* v\rangle_{\mathcal{H}} &- \langle B_1^* f' + C_1^* u' - C_2^* u, g'\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

З властивостей (A1) випливає, що права частина рівності (3.37) має вигляд

$$\begin{aligned} &\langle B_1 f', g'\rangle_{\mathcal{H}} - \langle f', B_1 g'\rangle_{\mathcal{H}} + (C_1 f', v')_{\mathcal{L}} - (C_2 f', v)_{\mathcal{L}} \\ &\quad - (u', C_1 g')_{\mathcal{L}} + (u, C_2 g')_{\mathcal{L}} + (u', v)_{\mathcal{L}} - (u, v')_{\mathcal{L}} \\ &\quad = (C_2 f', C_1 g')_{\mathcal{L}} - (C_1 f', C_2 g')_{\mathcal{L}} + (C_1 f', v')_{\mathcal{L}} - (C_2 f', v)_{\mathcal{L}} \\ &\quad - (u', C_1 g')_{\mathcal{L}} + (u, C_2 g')_{\mathcal{L}} + (u', v)_{\mathcal{L}} - (u, v')_{\mathcal{L}} \\ &\quad = (C_2 f' - u', C_1 g' - v)_{\mathcal{L}} - (C_1 f' - u, C_2 g' - v')_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Отже для відображеннь Γ_1 і Γ_2, що визначені за формулами (3.36) виконується абстрактна формула Гріна (3.32).

Так як $0 \in \rho(A, \mathcal{L})$, то формулу (3.35) можна переписати у вигляді

$$A^* = A \dotplus \widehat{\mathcal{P}}(0)^* \mathcal{L} \dotplus \widehat{\mathcal{Q}}(0)^* \mathcal{L}.$$

З рівностей (3.28), (3.29), (3.33), (3.34) випливає, що при будь-яких $u \in \mathcal{L}$

$$\widehat{\mathcal{P}}(0)^* u = \left\{ \begin{bmatrix} -\widetilde{C}_2^* u \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \widehat{\mathcal{Q}}(0)^* u = \left\{ \begin{bmatrix} C_1^* u \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right\}.$$

Тоді, з формул (3.36) випливає, що

$$\Gamma \widehat{\mathcal{P}}(0)^* u = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma \widehat{\mathcal{Q}}(0)^* u = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \end{bmatrix}.$$

Отже відображення $\Gamma : A^* \to \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ є сюр'єктивним. Таким чином, $\{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ дійсно є граничною трійкою для лінійного відношення A^*. □

3.2.3 $\mathcal{L}$-резольвентна матриця

Означення 3.10. *([66], [56]) Нехай $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ є граничною трійкою для A^*, і $\lambda \in \rho_s(A, \mathcal{L})$. Матрицю вигляду*

$$W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda) = [w_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2 = \begin{bmatrix} -\Gamma_2\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* & \Gamma_2\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* \\ -\Gamma_1\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* & \Gamma_1\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* \end{bmatrix}^* \tag{3.38}$$

називають $\mathcal{L}$-резольвентною матрицею лінійного відношення A, яка відповідає граничній трійці Υ (або $\Upsilon\mathcal{L}$-резольвентною матрицею).

Пропозиція 3.11. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3). Тоді $\mathcal{L}$-резольвентна матриця лінійного відношення A, що відповідає граничній трійці $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, задається формулою*

$$W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & 0 \\ -\lambda & I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \left(I + i\lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}^* J \right). \tag{3.39}$$

Доведення. З співвідношень (3.33), (3.28) і (3.36) отримаємо, що

$$\Gamma_2\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* v = -\bar{\lambda} v - \bar{\lambda} C_2 F(\lambda)^* v, \tag{3.40}$$

$$\Gamma_1\widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* v = v + \bar{\lambda} C_1 F(\lambda)^* v. \tag{3.41}$$

Аналогічно, з формул (3.34), (3.29) і (3.36) випливає, що

$$-\Gamma_2\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* v = v - \bar{\lambda} C_2 (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1^*)^{-1} C_1^* v, \tag{3.42}$$

$$-\Gamma_1\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* v = \bar{\lambda} C_1 (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1^*)^{-1} C_1^* v. \tag{3.43}$$

Тоді, з рівностей (3.40)-(3.43) і (3.38) отримаємо, що

$$W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & -\bar{\lambda} \\ 0 & I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} - \bar{\lambda} \begin{bmatrix} C_2 \\ -C_1 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \bar{\lambda} B_1^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* - \bar{\lambda} C_1^* \end{bmatrix}$$

і отже

$$\begin{aligned} W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda & I \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - \lambda C_1 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} C_2^* & -C_1^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda & I \end{bmatrix} \left(I_{\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}} - \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} C_2^* & -C_1^* \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

що співпадає з формулою (3.39) □

Нагадаємо основні властивості $\Upsilon\mathcal{L}$-резольвентної матриці $W_{\Upsilon\mathcal{L}}$. Введемо блочні операторно-значні функції $\mathcal{V}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q}(\lambda) \\ \mathcal{P}(\lambda) \end{bmatrix} \in [\mathcal{H}, \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}]$ і $\widehat{\mathcal{V}}(\lambda)^* = \begin{bmatrix} -\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)^* \\ \widehat{\mathcal{P}}(\lambda)^* \end{bmatrix}$. Тоді формулу (3.38) можна представити у вигляді

$$W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda) = (\Gamma\widehat{\mathcal{V}}(\lambda)^*)^*. \tag{3.44}$$

Пропозиція 3.12. *([56]) Нехай A є симетричним лінійним відношенням в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$, $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ є граничною трійкою для лінійного відношення A^* і $\rho_s(A, \mathcal{L}) \neq 0$, нехай $W(\lambda) = W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda)$ є $\Upsilon\mathcal{L}$-резольвентною матрицею. Тоді:*

1) $0 \in \rho(W(\lambda))$ *для усіх* $\lambda \in \rho_s(A, \mathcal{L})$;

2) $\mathcal{L}$-*резольвентна матриця* $W(\lambda)$ *задовольняє співвідношенням*

$$W(\lambda)JW(\mu)^* = J + i(\lambda - \bar{\mu})\mathcal{V}(\lambda)\mathcal{V}(\mu)^* \quad (\lambda, \mu \in \rho(A, \mathcal{L})); \tag{3.45}$$

$$W(\lambda) = I + i\lambda\mathcal{V}(\lambda)\mathcal{V}(0)^*J \quad (\lambda \in \rho(A, \mathcal{L})); \tag{3.46}$$

3) $\mathcal{L}$-*резольвентна матриця* $W(\lambda)$ *належить до класу Потапова* $\mathcal{P}(J)$, *тобто*

$$\frac{W(\lambda)JW(\lambda)^* - J}{i(\lambda - \bar{\lambda})} \geq 0 \quad (\lambda \in \rho(A, \mathcal{L}));$$

4) *клас* $\mathcal{L}$-*резольвентних матриць лінійного відношення* A, *що відповідають граничній трійці* Υ, *є інваріантним відносно множення на правий* J-*унітарний множник.*

Відмітимо, що спочатку тотожність (3.45) використовувалась М.Г. Крейном як означення $\mathcal{L}$-резольвентної матриці в [20], [23].

Отримаємо формулу для знаходження $\mathcal{L}$-резольвентної матриці лінійного відношення A для більш загальної проблеми.

Наслідок 3.13. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови $(A1), (A2)$ і умові*

$(A3')$ *оператор $D = B_2 - \mu B_1$ є ізоморфізмом в $\mathcal{X}$ для деякого $\mu \in \mathbb{R}$, і оператори $B_1 D^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $G(\mu) : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^2$ є обмеженими, де оператор $G(\mu) : \mathcal{X} \to \mathcal{L}^2$ задається рівністю*

$$G(\mu) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (B_2 - \mu B_1)^{-1} \quad (\mu \in \mathbb{R}). \tag{3.47}$$

Тоді $\mathcal{L}$-резольвентна матриця лінійного відношення A може бути знайдена за формулою

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda & I \end{bmatrix}^{-1} W^{\mu}(\lambda) \\ &= I + i(\lambda-\mu) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (B_2-\lambda B_1)^{-1}(B_2^*-\mu B_1^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}^* J. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Доведення. Оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K

$$(B_1(B_2-\mu B_1)^{-1}, I_{\mathcal{X}}, C_1(B_2-\mu B_1)^{-1}, (C_2-\mu C_1)(B_2-\mu B_1)^{-1}, K)$$

задовольняють умови (A1)-(A3). Дійсно, умова (A1) доводиться безпосередньо підстановкою в формулу (A1) векторів

$$h = (B_2-\mu B_1)h', \quad g = (B_2-\mu B_1)g';$$

а умови (A2) і (A3) випливають з умови (A3$'$).

Відмітимо, що лінійне відношення A, що визначено за формулою (3.18), має однаковий вигляд для проблем $AIP_{\kappa}(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ і

$$AIP_{\kappa}(B_1(B_2-\mu B_1)^{-1}, I_{\mathcal{X}}, C_1(B_2-\mu B_1)^{-1}, (C_2-\mu C_1)(B_2-\mu B_1)^{-1}, K).$$

Розглянемо лінійне відношення $A-\mu$

$$A-\mu = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} B_1(B_2-\mu B_1)^{-1}h \\ C_1(B_2-\mu B_1)^{-1}h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ (C_2-\mu C_1)(B_2-\mu B_1)^{-1}h \end{bmatrix} \right\} : h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Як випливає з (3.39) її $\mathcal{L}$-резольвентна матриця $W(\lambda)$ задовольняє рівності

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -I & 0 \\ \lambda & -I \end{bmatrix}^{-1} W(\lambda) = \\ &= I_{\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}} + i\lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2-\mu C_1 \end{bmatrix} (B_2-(\lambda+\mu)B_1)^{-1}(B_2^*-\mu B_1^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2-\mu C_1 \end{bmatrix}^* J. \end{aligned}$$

Тоді матриця $W^{\mu}(\lambda) = W(\lambda-\mu)$ є $\mathcal{L}$-резольвентною матрицею лінійного відношення A, отже

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda & I \end{bmatrix}^{-1} W^{\mu}(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda & I \end{bmatrix}^{-1} W(\lambda-\mu)$$
$$= \left(I_{\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}} + i(\lambda-\mu) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (B_2 - \lambda B_1)^{-1} (B_2^* - \mu B_1^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}^* J \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mu & I \end{bmatrix}.$$

Це доводить формулу (3.48), так як клас $\mathcal{L}$-резольвентних матриць є інваріантним відносно множення на правий J-унітарний множник. □

Теорема 3.14. *Нехай $dim\mathcal{L} < \infty$. Нехай A є симетричним лінійним відношенням в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$, нехай $\Upsilon = \{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ є граничною трійкою для лінійного відношення A^* і $W_{\Upsilon\mathcal{L}}(\lambda)$ є $\Upsilon\mathcal{L}$-резольвентною матрицею відношення A. Тоді множина $\mathcal{L}$-резольвент симетричного відношення A параметризується формулою*

$$\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}} = (w_{11}(\lambda)q(\lambda)+w_{12}(\lambda)p(\lambda))(w_{21}(\lambda)q(\lambda)+w_{22}(\lambda)p(\lambda))^{-1}, \quad (3.49)$$

де $\{p,q\}$ пробігає множину $\widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$ неванліннівськіх пар таких, що

$$\det(w_{21}q + w_{22}p) \not\equiv 0. \quad (3.50)$$

При цьому $\mathcal{L}$-резольвента $\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}$, що визначена формулою (3.49), є $\mathcal{L}$-регулярною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\big(w_{11}(\lambda)q(\lambda) + w_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \in \mathbf{N}_{\kappa}(\mathcal{L}). \quad (3.51)$$

Доведення. Перше твердження цієї Теореми доведено в роботі [56, Prop. 5.3].

Припустимо, що $\mathcal{L}$-резольвента $\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}$ є $\mathcal{L}$-регулярною. Тоді підпростір

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{\Pi_{\mathcal{H}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\mathcal{L} : \lambda \in \rho(\widetilde{A})\},$$

є невиродженим простором Понтрягіна з від'ємним індексом, що дорівнює κ. Як випливає з Теореми 2.14 перетворення Фур'е, що задається формулою (2.24) ізометрично переводить простір $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$, де функції φ,ψ визначені за формулою (2.4). Тому простір $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ є Π_{κ}-простором. Отже $\{\varphi,\psi\} \in \mathbf{N}_{\kappa}(\mathcal{L})$.

Нехай тепер $\{\varphi,\psi\} \in \mathbf{N}_{\kappa}(\mathcal{L})$. Тоді простір $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ є Π_{κ}-простором, значить $\mathcal{H}_0$ є Π_{κ}-простором. Останнє твердження означає, що симетричне відношення $\widetilde{A}$ є $\mathcal{L}$-регулярним. □

3.2.4 Параметризація множини розв'язків проблеми AIP_κ

Для опису розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми нам залишається використати результати Теорем 3.4 і 3.14. Нехай операторно-значна функція $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$ є визначеною за формулою

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda & I \end{bmatrix} W(\lambda) = \left(I - \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \lambda B_1)^{-1} \begin{bmatrix} C_2^* & -C_1^* \end{bmatrix} \right) \tag{3.52}$$

Теорема 3.15. *Оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3) і $sq_-K = \kappa$. Тоді формула*

$$\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} = \Theta(\lambda) \begin{bmatrix} q(\lambda) \\ p(\lambda) \end{bmatrix} (w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda))^{-1} \tag{3.53}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною усіх нормалізованих розв'язків $\{\varphi, \psi\}$ проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ і множиною усіх класів еквівалентності неванліннівськіх пар $\{p, q\} \in \widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$, таких що виконуються умови (3.50) *і* (3.51).

Відповідне відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, що задовольняє умови (C1)-(C2), визначається парою $\{\varphi, \psi\}$ за формулою

$$(Fg)(\mu) = \begin{bmatrix} \varphi(\mu) & -\psi(\mu) \end{bmatrix} G(\mu) g \quad (\mu \in \mathcal{O},\ g \in \mathcal{X}), \tag{3.54}$$

де $\mathcal{O}$ – деякий окіл точки 0, і матрично-значна функція G визначена формулою

$$G(\mu) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - \mu B_1)^{-1} \quad (\mu \in \mathcal{O}).$$

Доведення. Співвідношення (3.53) випливає з Теореми 3.14 і формул (3.5), (3.52). Дійсно,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & 0 \\ \lambda & I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}} \\ I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}} & 0 \\ \lambda & I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \big(w_{11}(\lambda)q(\lambda) + w_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \\ I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \\
&= \Theta(\lambda) W(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \big(w_{11}(\lambda)q(\lambda) + w_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \\ I_{\mathcal{L}} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Скориставшись співвідношенням

$$W\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}q + w_{12}p \\ w_{21}q + w_{22}p \end{bmatrix}$$

ми отримаємо праву частину формули (3.55) у вигляді

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} &= \Theta(\lambda)W(\lambda)^{-1}W(\lambda)\begin{bmatrix} q(\lambda) \\ p(\lambda) \end{bmatrix}\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \\ &= \Theta\begin{bmatrix} q(\lambda) \\ p(\lambda) \end{bmatrix}\big(w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1}\end{aligned}$$

Таким чином, формулу (3.53) доведено.

Нехай $\mathcal{O}$ – це окіл точки 0 такий, що оператор $(I_{\mathcal{H}} - \mu B_1)$ є оборотним в $\mathcal{H}$ для $\mu \in \mathcal{O}$, і нехай $g \in (I - \mu B_1)\mathcal{X}$ $(\mu \in \mathcal{O})$. Застосовуючи умову (C1) до вектора $h = h_\mu := (I - \mu B_1)^{-1}g$, отримаємо

$$\begin{aligned}(Fg)(\lambda) &= (Fh_\mu)(\lambda) - \mu(FB_1h_\mu)(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} G(\mu)g + (\lambda - \mu)(FB_1h_\mu)(\lambda).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Підставляючи у формулу (3.56) $\lambda = \mu$, отримаємо

$$(Fg)(\mu) = \begin{bmatrix} \varphi(\mu) & -\psi(\mu) \end{bmatrix} G(\mu)g \quad (\mu \in \mathcal{O}, g \in (I - \mu B_1)\mathcal{X}). \tag{3.57}$$

Нехай $g \in \mathcal{X}$, $g_n \in (I - \mu B_1)\mathcal{X}$ і $g_n \to g$ при $n \to \infty$ (тобто g_n збігається до g у просторі Понтрягіна $\mathcal{H}$). Тоді переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівності

$$(Fg_n)(\mu) = \begin{bmatrix} \varphi(\mu) & -\psi(\mu) \end{bmatrix} G(\mu)g_n$$

отримаємо формулу (3.54) для $g \in \mathcal{X}$. □

Теорема 3.16. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1), (A2), (A3') ($sq_-K = \kappa$) і нехай*

$$\begin{aligned}\Theta^\mu(\lambda) &:= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda & I \end{bmatrix} W^\mu(\lambda) \\ &= \left(I + i(\lambda - \mu)\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}(B_2 - \lambda B_1)^{-1}(B_2^* - \mu B_1^*)^{-1}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}^* J\right)V.\end{aligned}$$

Тоді формула

$$\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} = \Theta^{\mu}(\lambda) \begin{bmatrix} q(\lambda) \\ p(\lambda) \end{bmatrix} (w_{21}^{\mu}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}^{\mu}(\lambda)p(\lambda))^{-1} \tag{3.58}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх нормалізованих розв'язків $\{\varphi, \psi\}$ *проблеми* $AIP_{\kappa}(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ *і множиною всіх класів еквівалентності неванліннівськіх пар* $\{p, q\} \in \widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$*, таких що виконуються умови*

$$\det(w_{21}^{\mu}q + w_{22}^{\mu}p) \not\equiv 0,$$

$$\big(w_{11}^{\mu}(\lambda)q(\lambda) + w_{12}^{\mu}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(w_{21}^{\mu}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}^{\mu}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \in \mathbf{N}_{\kappa}(\mathcal{L}).$$

Доведення. Твердження теореми випливає з щойно доведеної Теореми 3.15 і Наслідку 3.13. □

3.2.5 Однозначність відображення F

Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A2), і $\nu \le \kappa$. Тоді відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$, у загальному випадку, визначається розв'язком $\{\varphi, \psi\}$ проблеми $AIP_{\kappa}(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ і умовами(C1)-(C2) не однозначно. Ми накладемо додаткову умову на дані проблеми AIP_{κ}:

(U) відображення $B_2 - \lambda B_1$ є ізоморфізмом в $\mathcal{X}$ для всіх λ, що належать деякому околу $\mathcal{O}_{\pm} \subset \mathbb{C}_{\pm}$.

Як показано в наступному твердженні умова (U) гарантує єдиність відображення F. Покладемо

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (B_2 - \lambda B_1)^{-1} \quad (\lambda \in \mathcal{O}_{\pm}). \tag{3.59}$$

Пропозиція 3.17. *Нехай оператори* B_1, B_2, C_1, C_2, K *задовольняють умови (A1)-(A2) і (U)* $(\nu \le \kappa)$*. Тоді відображення* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ *визначається умовами (C1)-(C2) однозначно при фіксованому розв'язку* $\{\varphi, \psi\}$ *проблеми* $AIP_{\kappa}(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$*. Відображення* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi, \psi)$ *знаходиться за формулою*

$$(Fh)(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda) & -\psi(\lambda) \end{bmatrix} G(\lambda)h \quad (\lambda \in \mathcal{O}_{\pm}). \tag{3.60}$$

Доведення. Застосуємо умову (C1) до вектора

$$h = h_{\mu} := (B_2 - \mu B_1)^{-1} g \quad (\mu \in \mathcal{O}_{\pm},\ g \in \mathcal{X}),$$

отримаємо, що

$$\begin{aligned}(Fg)(\lambda) &= (FB_2h_\mu)(\lambda) - \mu(FB_1h_\mu)(\lambda)\\ &= (FB_2h_\mu)(\lambda) - \lambda(FB_1h_\mu)(\lambda) + (\lambda-\mu)(FB_1h_\mu)(\lambda)\\ &= \left[\varphi(\lambda) \quad -\psi(\lambda)\right] G(\mu)g + (\lambda-\mu)(FB_1h_\mu)(\lambda).\end{aligned} \tag{3.61}$$

При $\lambda = \mu$ отримаємо з (3.61), що $(Fg)(\mu) = \left[\varphi(\mu) \quad -\psi(\mu)\right] G(\mu)g$. □

Зауваження 3.18. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A3). Тоді умова (U) для цих операторів виконується автоматично. Отже за умов Теореми 3.15 відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(\varphi,\psi)$, яке задовольняє умови (C1)-(C2), визначається однозначно за парою $\{\varphi,\psi\}$. Це відображення можна знайти за формулою* (3.54).

3.3 Розв'язність AIP_κ в класі N_κ-функцій

Нехай N_κ-пара $\{\varphi,\psi\}$ є розв'язком AIP_κ. Функцію $m \in N_\kappa(\mathcal{L})$ будемо називати розв'язком AIP_κ, якщо пара $\{I_\mathcal{L}, m\}$ еквівалентна парі $\{\varphi,\psi\}$. Взагалі кажучи, не кожна абстрактна інтерполяційна проблема має розв'язки в класі однозначних оператор-функцій. Накладемо додаткову умову на оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K

(A4) для деяких різних точок $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$ $(j = 1, ..., \kappa)$ виконано співвідношення

$$\ker\left[C_2^* \quad (1-\lambda_1 B_1^*)^{-1}C_2^* \quad (1-\lambda_2 B_1^*)^{-1}C_2^* \quad \cdots \quad (1-\lambda_\kappa B_1^*)^{-1}C_2^*\right] = \{0\}.$$

Вперше умова вигляду (A4), мабуть, зустрічається у роботі [27]. В роботі [39] аналогічна умова використовувалася для розв'язання деякої інтерполяційної проблеми у множині функцій.

Теорема 3.19. *Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови*

(A1) $K(B_2h, B_1g) - K(B_1h, B_2g) = (C_1h, C_2g)_\mathcal{L} - (C_2h, C_1g)_\mathcal{L} \quad \forall h, g \in \mathcal{X}$;

(A2) $\ker K = \{0\}$, *де* $\ker K = \{h \in \mathcal{X} : \ K(h,u) = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{X}\}$.

(A3) $B_2 = I_\mathcal{X}$ *і оператори* $B_1 : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $C_1, C_2 : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ *є обмеженими.*

(A4) для деяких різних точок $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$ $(j = 1, ..., \kappa)$ *виконується співвідношення*

$$\ker\left[C_2^* \quad (1-\lambda_1 B_1^*)^{-1}C_2^* \quad (1-\lambda_2 B_1^*)^{-1}C_2^* \quad \cdots \quad (1-\lambda_\kappa B_1^*)^{-1}C_2^*\right] = \{0\}.$$

Тоді проблема $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ *має розв'язки. Всі її розв'язки є однозначними функціями і параметризуються у вигляді*

$$m(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}\big(I_{\mathcal{L}} + \lambda\Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}\big)^{-1},$$

де $\widetilde{A}$ *пробігає множину всіх самоспряжених* $\mathcal{L}$*-регулярних розширень лінійного відношення* $\widehat{A}$ *в простір Понтрягіна* $\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L} \supset \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$*. Відповідне лінійне відображення* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$ *задається через формулу*

$$(Fh)(\lambda) = \Pi_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}h, \quad h \in \mathcal{X}.$$

Доведення. Згідно з Теоремою 3.4 нам залишилось показати, що будь-який розв'язок проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ є оператор-функцією. Нехай пара $\{\varphi, \psi\}$ є розв'язком AIP_κ, і не еквівалентна парі вигляду $\{I_{\mathcal{L}}, m\}$. Це означає, що існує ще одна точка $\lambda_{\kappa+1} \in \mathbb{C}_+ (\neq \lambda_j)$ і вектор $f_j \in \mathcal{L}$ $(j = 1, ..., \kappa+1)$, такі що виконані такі умови

$$\varphi(\lambda_j)f_j = 0, \quad \psi(\lambda_j)f_j \neq 0 \quad (j = 1, ..., \kappa + 1). \tag{3.62}$$

Так як N_κ-пара $\{\varphi, \psi\}$ є нормалізованою, то $\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda) = I_{\mathcal{L}}$. Нехай симетричне лінійне відношення $\widetilde{A}$ є самоспряженим $\mathcal{L}$-регулярним розширенням лінійного відношення $\widehat{A}$ в просторі Понтрягіна $\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L} \supset \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$, і при цьому виконується формула (3.5). Визначимо вектори $h_j \in \widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}$ співвідношеннями

$$h_j := \lambda_j(\widetilde{A} - \lambda_j)^{-1}f_j + f_j, \quad (j = 1, ...\kappa + 1). \tag{3.63}$$

Тоді

$$\{h_j - f_j,\, \lambda_j h_j\} \in \widetilde{A} \quad (j = 1, ...\kappa + 1). \tag{3.64}$$

Покажемо, що вектори h_j належать простору $\widetilde{\mathcal{H}}$. Дійсно,

$$\Pi_{\mathcal{L}}h_j = \Pi_{\mathcal{L}}(\lambda_j(\widetilde{A} - \lambda_j)^{-1} + I_{\mathcal{L}})f_j = \varphi(\lambda_j)f_j = 0.$$

Так як лінійне відношення $\widetilde{A}$ є самоспряженим, а простори $\widetilde{\mathcal{H}}$ і $\mathcal{L}$ є ортогональними, то при будь-яких $j, k = 1, ..., \kappa + 1$

$$0 = \langle h_j - f_j,\, \lambda_k h_k\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}\oplus\mathcal{L}} - \langle \lambda_j h_j,\, h_k - f_k\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}\oplus\mathcal{L}} = (\lambda_j - \overline{\lambda}_k)\langle h_j,\, h_k\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}}.$$

Отже усі $\kappa + 1$ вектори h_j належать нейтральному підпростору простора $\widetilde{\mathcal{H}}$. Так як розмірність нейтрального підпростору простора $\widetilde{\mathcal{H}}$ не перевищує κ, то система векторів $\{h_j\}_1^{\kappa+1}$ лінійно залежна, тобто існують числа $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$(j = 1, \dots, \kappa+1)$ такі, що

$$\sum_{j=1}^{\kappa+1} \alpha_j h_j = 0. \tag{3.65}$$

Припустимо, що $\alpha_{\kappa+1} = -1$, тобто

$$h_{\kappa+1} = \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j h_j.$$

Тоді з включень (3.64) випливає, що

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_{\kappa+1}}(h_{\kappa+1} - f_{\kappa+1}) - \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\alpha_j}{\lambda_j}(h_j - f_j),\, 0 \right\} \in \widetilde{A},$$

отже

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \left(\frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} - \frac{1}{\lambda_j} \right) h_j - \frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} f_{\kappa+1} + \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\alpha_j}{\lambda_j} f_j,\, 0 \right\} \in \widetilde{A}. \tag{3.66}$$

Визначимо вектори $g_0 \in \mathcal{L}$ і $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ рівностями

$$g_0 := \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\alpha_j}{\lambda_j} f_j - \frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} f_{\kappa+1}, \quad \widetilde{g} := \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \left(\frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} - \frac{1}{\lambda_j} \right) h_j.$$

Тоді співвідношення (3.66) можна переписати у вигляді $\{g_0 + \widetilde{g},\, 0\} \in \widetilde{A}$.

Так як $\widehat{A} = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} B_1 x \\ C_1 x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ C_2 x \end{bmatrix} \right\} : x \in \mathcal{X} \right\}$ і лінійне відношення $\widetilde{A}$ є його самоспряженим розширенням, то при будь-якому $x \in \mathcal{X}$

$$0 = \left\langle \widetilde{g} + g_0,\, \begin{bmatrix} x \\ C_2 x \end{bmatrix} \right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}} = (g_0, C_2 x)_{\mathcal{L}} + \langle \widetilde{g}, x \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}}. \tag{3.67}$$

Розглянемо вектор $\widetilde{g}$. Застосовуючи до нього визначення (3.63) векторів h_j

отримаємо

$$\widetilde{g} = \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \left(\frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} - \frac{1}{\lambda_j} \right) h_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \left(\frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} - \frac{1}{\lambda_j} \right) (\lambda_j(\widetilde{A} - \lambda_j)^{-1} + I_{\mathcal{L}}) f_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} (\lambda_j(\widetilde{A} - \lambda_j)^{-1} + I) g_j,$$

де вектори $g_j \in \mathcal{L}$, визначаються рівностями

$$g_j = \alpha_j \left(\frac{1}{\lambda_{\kappa+1}} - \frac{1}{\lambda_j} \right) f_j \in \mathcal{L}.$$

Далі відмітимо, що з співвідношення (3.23) випливає

$$K_{\lambda_j} := \lambda_j(\widehat{A} - \lambda_j)^{-1} + I = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} (I - \lambda_j B_1)x \\ (C_2 - \lambda_j C_1)x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ C_2 x \end{bmatrix} \right\} : \ x \in \mathcal{H} \right\}$$
$$= \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ (C_2 - \lambda_j C_1)(I - \lambda_j B_1)^{-1} x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - \lambda_j B_1)^{-1} x \\ C_2 (I - \lambda_j B_1)^{-1} x \end{bmatrix} \right\} : \ x \in \mathcal{H} \right\}.$$

Отже, знову з самоспряженості лінійного відношення $\widetilde{A} \supset \widehat{A}$ випливає, що $K_{\lambda_j}^* = K_{\overline{\lambda}_j}$. Таким чином отримаємо для будь-якого $x \in \mathcal{X}$

$$\langle \widetilde{g}, x \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \sum_{j=1}^{\kappa} \langle (\lambda_j(\widetilde{A} - \lambda_j)^{-1} + I) g_j, x \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} \left\langle K_{\lambda_j} \begin{bmatrix} 0 \\ g_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} \left\langle K_{\lambda_j} \begin{bmatrix} 0 \\ g_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ (C_2 - \overline{\lambda}_j C_1)(I - \overline{\lambda}_j B_1)^{-1} x \end{bmatrix} \right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ g_j \end{bmatrix}, K_{\overline{\lambda}_j} \begin{bmatrix} x \\ (C_2 - \overline{\lambda}_j C_1)(I - \overline{\lambda}_j B_1)^{-1} x \end{bmatrix} \right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ g_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - \overline{\lambda}_j B_1)^{-1} x \\ C_2 (I - \overline{\lambda}_j B_1)^{-1} x \end{bmatrix} \right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{L}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\kappa} (g_j, C_2 (I - \overline{\lambda}_j B_1)^{-1} x)_{\mathcal{L}}.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (3.67) маємо рівність

$$
\begin{aligned}
0 &= (g_o,\, C_2x)_{\mathcal{L}} + \sum_{j=1}^{\kappa}(g_j,\, C_2(I-\overline{\lambda}_jB_1)^{-1}x)_{\mathcal{L}} \\
&= (C_2^*g_o,\, x)_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{\kappa}((I-\lambda_jB_1^*)^{-1}C_2^*g_j,\, x)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Ця рівність виконується для будь-яких x з всюди щільної підмножини $\mathcal{X}$ простору Понтрягіна $\mathcal{H}$. Тому з умови (A4) випливає, що

$$
g_0 = g_1 = g_2 = ... = g_\kappa = 0.
$$

Це означає, що

$$
\alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2 = ... = \alpha_k f_k = 0, \quad f_{\kappa+1} = 0,
$$

Що приводить до протиріччя з умовою $f_{\kappa+1} \neq 0$.

Відмітимо, що з лінійної залежності векторів $\{h_j\}_1^{\kappa+1}$ випливає, що якщо коефіцієнт $\lambda_{\kappa+1}$ при $h_{\kappa+1}$ в (3.65) дорівнює 0, то ми також отримаємо протиріччя. Дійсно, виражаємо довільний вектор h_k через $\kappa-1$ тих, що залишились (окрім вектора $h_{\kappa+1}$). Аналогічно вже доведеному отримаємо, що $f_k = 0$.

Таким чином, не існує векторів $\{f_j\}_1^{\kappa+1}$, що задовольняють умови (3.62). Отже в N_κ-парі $\{\varphi, \psi\}$ оператор-функція $\varphi(\lambda)$ є оборотною для усіх $\lambda \in \mathbb{C}_+$ окрім, можливо, κ точок. Таким чином, N_κ-функція $m(\lambda) = \psi(\lambda)\varphi^{-1}(\lambda)$ є розв'язком проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. □

Як випливає з Теореми 3.19 опис усіх розв'язків m проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ зводиться до проблеми опису усіх $\mathcal{L}$-регулярних $\mathcal{L}$-резольвент симетричного відношення $\widehat{A}$. Наступний опис возходить до роботи Крейна [20] (дивись також [23]).

Теорема 3.20. *Нехай $\kappa = \nu$. Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A4), і нехай $\Theta(\lambda)$ визначається співвідношенням* (3.52). *Тоді формула*

$$
m(\lambda) = \big(\theta_{11}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(\theta_{21}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \tag{3.69}
$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною усіх розв'язків $m(\lambda)$ проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ і множиною класів екві-

валентності неванліннівськіх пар $\{p,q\} \in \widetilde{\mathbf{N}}(\mathcal{L})$, *таких що виконані умови*

$$\det(\theta_{21}q + \theta_{22}p) \not\equiv 0,$$

$$\big(\theta_{11}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)p(\lambda)\big)\big(\theta_{21}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{22}(\lambda)p(\lambda)\big)^{-1} \in \mathbf{N}_\kappa(\mathcal{L}).$$

Доведення. Нехай пара $\{\varphi,\psi\}$ є розв'язком проблеми $AIP_\kappa(B_1,B_2,C_1,C_2,K)$. З Теореми 3.15 випливає, що

$$\begin{bmatrix} \psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)p(\lambda) \\ \theta_{21}(\lambda)q(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)p(\lambda) \end{bmatrix} (w_{21}(\lambda)q(\lambda) + w_{22}(\lambda)p(\lambda))^{-1}.$$

З Теореми 3.19 випливає, що розв'язком проблеми $AIP_\kappa(B_1,B_2,C_1,C_2,K)$ є N_κ-функції $m(\lambda) = \psi(\lambda)\varphi(\lambda)^{-1}$. Звідси випливає формула (3.69). $\square$

3.4 Висновки до розділу 3

Результати глави опубліковано в [87].

1) Розглянуто абстрактну інтерполяційну проблему в класі N_κ-пар. З кожною абстрактною інтерполяційною проблемою пов'язано деяке симетричне відношення $\widehat{A}$ у просторі Понтрягіна, таке що множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ цього симетричного відношення $\widehat{A}$.

2) Знайдено вигляд резольвентної матриці оператора $\widehat{A}$ в термінах даних інтерполяції. За допомогою цієї матриці отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари. Розглянуто питання про однозначність побудови узагальненого перетворення Фур'є по розв'язку абстрактної інтерполяційної проблеми.

4 Індефінітна проблема моментів

Класична проблема моментів полягає у тому, щоб знайти міру σ на дійсний вісі $\mathbb{R}$ по наперед відомим моментам $s_k \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) = s_k \quad (k = 0, 1, ...). \tag{4.1}$$

Ця проблема вивчалась Т. Стилт'єсом, Г. Гамбургером, М. Рисом, Р. Неванлінною та іншими. Як відомо необхідна умова для того, щоб проблема моментів (4.1) була розв'язна, полягає у тому, що матриці Ганкеля $D_n := (s_{j+k})_{j,k=0}^{n-1}$ є невід'ємними для будь-яких $n \in \mathbb{N}$. Зв'язок цієї проблеми з деякою кратною інтерполяційною проблемою на ∞ був знайдений Гамбургером в 1920. Їм було показано, що σ є розв'язком класичної проблеми моментів (4.1) тоді і лише тоді, коли її асоційована функція

$$m(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} \tag{4.2}$$

допускає таке асимптотичне розвинення

$$m(\lambda) \sim -\frac{s_0}{\lambda} - \frac{s_1}{\lambda^2} - \frac{s_2}{\lambda^3} - ..., \qquad (\lambda \widehat{\to} \infty) \tag{4.3}$$

де λ прямує до ∞ недотичним шляхом (дивись Розділ 1.6).

Індефінітна проблема моментів була розглянута в 1979 М.Г. Крейном і Г. Лангером [80]. Ця проблема формулюється наступним чином:

Проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$. Маємо послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\infty}$. Знайти функцію $m \in N_\kappa$ таку, що виконується формула (4.3).

Позначимо через H_κ клас послідовностей дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\infty}$ таких, що Ганкелева матриця D_n має рівно κ від'ємних власних значень для всіх достатньо великих n. Як було показано в [80] проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$ має роз'язок для будь-яких $\mathbf{s} \in H_\kappa$. Ця проблема називається *визначеною*, якщо вона має єдиний роз'язок і *невизначеною*, в іншому випадку. В подальшому ми будемо вважати, що

$$\text{проблема } MP_\kappa(\mathbf{s}) \text{ є невизначеною.} \tag{4.4}$$

Множина розв'язків невизначеної проблеми моментів була описана в [80] методами теорії розширеннь. Ми будемо розглядати абстрактну інтерполяційну проблему (AIP_κ), асоційовану з проблемою $MP_\kappa(\mathbf{s})$ і отримаємо опис розв'язків AIP_κ.

4.1 Допоміжні твердження

4.1.1 Формальні ряди та матриці Тепліца

Наступна допоміжна умова була доведена в роботі [58, Lemma 2.12] у більш загальному сенсі.

Лема 4.1. *([58]) Нехай $m_0 \in N$, тоді*

(i) $f(\lambda) = O(1)$ *(*$\lambda \widehat{\rightarrow} \infty$*) для всіх* $f \in \mathcal{H}(m_0)$*;*

(ii) Якщо до того ж, $m_0 \in N^0$ *тоді* $f(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ *(*$\lambda \widehat{\rightarrow} \infty$*) для всіх* $f \in \mathcal{H}(m_0)$*.*

Будемо позначати $\mathcal{P}_n$ множину поліномів формального ступеню n.

Доведемо алгебраїчне твердження, яке стосується формальних степеневих рядів $p(\lambda)$ ступеню n

$$p(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... \tag{4.5}$$

і відповідних матриць Тепліца $T_k(p) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ їх k старших коефіцієнтів

$$T_k(p) := \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-1} \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{k-2} \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots & p_{k-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Пропозиція 4.2. *Нехай p і q – це формальні ряди ступенів k і n, відповідно,*

$$p(\lambda) = p_0\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ..., \quad q(\lambda) = q_0\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + ... \quad (p_0, q_0 \neq 0).$$

Нехай $T_j(p)$ і $T_j(q)$ є матрицями j старших коефіцієнтів рядів p і q. Тоді

$$T_j(pq) = T_j(p)T_j(q). \tag{4.7}$$

Доведення. Добуток $T_j(p)T_j(q)$ дорівнює

$$T_j(p)T_j(q) = \begin{bmatrix} p_0q_0 & p_0q_1 + p_1q_0 & p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0 & \cdots & p_0q_{j-1} + p_1q_{j-2} + ... + p_{j-1}q_0 \\ 0 & p_0q_0 & p_0q_1 + p_1q_0 & \cdots & p_0q_{j-2} + p_1q_{j-3} + ... + p_{j-2}q_0 \\ 0 & 0 & p_0q_0 & \cdots & p_0q_{j-3} + p_1q_{j-4} + ... + p_{j-3}q_0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_0q_0 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Добуток рядів $p(\lambda)q(\lambda)$ має форму

$$p(\lambda)q(\lambda) = p_0q_0\lambda^{k+n} + (p_0q_1 + p_1q_0)\lambda^{k+n-1} + (p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0)\lambda^{k+n-2} + ... \\ + (p_0q_{j-1} + p_1q_{j-2} + ... + p_{j-1}q_0)\lambda^{k+n-j+1} + o(\lambda^{k+n-j+1}). \tag{4.9}$$

Отже формула (4.7) доведена. □

Наслідок 4.3. *Так як добутки $p(\lambda)q(\lambda)$ і $q(\lambda)p(\lambda)$ формальних рядів співпадають, то матриці $T_j(p)$ і $T_j(q)$ комутують*

$$T_j(p)T_j(q) = T_j(q)T_j(p).$$

Наслідок 4.4. *Нехай $q(\lambda) = q_0\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + ...$ формальний ряд з $q_0 \neq 0$. Тоді j старших коефіцієнтів ряду*

$$\frac{1}{q(\lambda)} = \frac{q'_0}{\lambda^n} + \frac{q'_1}{\lambda^{n+1}} + \frac{q'_2}{\lambda^{n+2}} + ...$$

будуються по матриці $T_j(1/q)$, яка пов'язана з $T_j(q)$ співвідношенням $T_j\big(1/q\big) = \big(T_j(q)\big)^{-1}$.

Пропозиція 4.5. *Нехай $c(\lambda) = \lambda^j + c_1\lambda^{j-1} + ... + c_j$ є поліномом ступеню j. Нехай функція $m_0 \in N^0$ допускає інтегральне зображення (1.22) і допускає розклад у ряд (1.24). Тоді функція*

$$d(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) - c(\lambda)}{t - \lambda} d\sigma(t)$$

є поліномом від λ ступеню $j-1$ і

$$T_j(d) = T_j(c)T_j(s^0), \tag{4.10}$$

де $T_j(c)$ і $T_j(s^0)$ матриці j старших коефіцієнтів поліномів $c(\lambda)$ і

$$s^0(\lambda) = s^0_0\lambda^{j-1} + s^0_1\lambda^{j-2} + ... + s^0_j.$$

Доведення. Покладемо $c_0 = 1$. Тоді функція $d(\lambda)$ має форму

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{t^j - \lambda^j}{t-\lambda} c_0 + \frac{t^{j-1} - \lambda^{j-1}}{t-\lambda} c_1 + ... + \frac{t-\lambda}{t-\lambda} c_{j-1}) d\sigma(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(c_0(t^{j-1} + t^{j-2}\lambda + ... + \lambda^{j-1}) + c_1(t^{j-2} + ... + \lambda^{j-2}) + ... + c_{j-1}\big) d\sigma(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Як випливає з рівностей (1.25) та (4.11)

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= c_0(s^0_{j-1} + ... + s^0_0 \lambda^{j-1}) + c_1(s^0_{j-2} + ... + s^0_0\lambda^{j-2}) + ... + c_{j-1}s^0_0 \\ &= c_0 s^0_0 \lambda^{j-1} + (c_0 s^0_1 + c_1 s^0_0)\lambda^{j-2} + ... + (c_0 s^0_{j-1} + c_1 s^0_{j-2} + ... + c_{j-1}s^0_0). \end{aligned}$$

Отже з (4.8) випливає (4.10). □

4.1.2 Одна допоміжна лема

Лема 4.6. *Функція $m \in N_\kappa$ задовольняє умову*

$$m(\lambda) = -\frac{s_0}{\lambda} - \frac{s_1}{\lambda^2} - \frac{s_2}{\lambda^3} - ... - \frac{s_{j-1}}{\lambda^j} + O(\frac{1}{\lambda^{j+1}}), \qquad \lambda \widehat{\to} \infty \ \ (\textit{для всіх } j \in \mathbb{Z}) \tag{4.12}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda^j m(\lambda) + s_0\lambda^{j-1} + s_1\lambda^{j-2} + .. + s_{j-1} \in \mathcal{H}(m) \quad (\textit{для всіх } j \in \mathbb{Z}). \tag{4.13}$$

Доведення. *Достатність.* Припустимо, що функція $m \in N_\kappa$ задовольняє (4.13). Покажемо, що умова (4.12) виконана. Нехай поліноми p, q і функція $m_0 \in N$ визначені факторизацією (2.38) для функції $m \in N_\kappa$.

Випадок 1. Нехай $\kappa = n = \deg q > \deg p = k$. Тоді $r(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$. Так як $m_0 \in N$, то

$$m_0(\lambda) = O(\lambda) \quad (\lambda \widehat{\to} \infty). \tag{4.14}$$

З Леми 4.1 випливає, що

$$f_0(\lambda) = O(1) \quad (\lambda \widehat{\to} \infty) \tag{4.15}$$

для усіх $f_0 \in \mathcal{H}(m_0)$. З формули (2.41) отримуємо, що для усіх $f \in \mathcal{H}(m)$

$$f(\lambda) = O(1/\lambda) \quad (\lambda \widehat{\to} \infty). \tag{4.16}$$

Таким чином, співвідношення (4.13) означає, що

$$m(\lambda)+\frac{s_0}{\lambda}+\frac{s_1}{\lambda^2}+...+\frac{s_{j-1}}{\lambda^j}=O(\frac{1}{\lambda^{j+1}})\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).$$

Випадок 2. Нехай $\kappa=\deg q=\deg p$. Тоді $r(\lambda)=O(1)$ при $\lambda\widehat{\to}\infty$. Швидкість зростання на нескінченності функції $m_0(\lambda)$ показано в (4.14) та (4.15). Тоді з Теореми 2.23 випливає, що для усіх $f\in\mathcal{H}(m)$

$$f(\lambda)=O(1)\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).\tag{4.17}$$

З формули (4.13) слідує, що

$$m(\lambda)=O(1/\lambda)\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).$$

Отже, з припущення $\deg q=\deg p$ та факторизації (2.38) випливає, що

$$m_0(\lambda)=O(1/\lambda)\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).\tag{4.18}$$

З Леми 4.1 отримаємо, що

$$f_0(\lambda)=O(1/\lambda)\quad(\lambda\widehat{\to}\infty)\tag{4.19}$$

для усіх $f_0\in\mathcal{H}(m_0)$. Отже з (2.41), (4.18) і (4.19) ми маємо (4.16). Закінчення доведення аналогічне *Випадку 1* цієї Леми.

Випадок 3. Нехай $n=\deg q<\deg p=k=\kappa$. Тоді $r(\lambda)=O(\lambda^{k-n})$ при $\lambda\widehat{\to}\infty$. Як слідує з Теореми 2.23 і співвідношень (4.14), (4.15), для усіх $f\in\mathcal{H}(m)$ маємо

$$f(\lambda)=O(\lambda^{2k-2n})\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).\tag{4.20}$$

Умова (4.13) при $j=2$ дає

$$m(\lambda)=O(\lambda^{2k-2n-2})\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).$$

Таким чином з факторизації (2.38) випливає, що

$$m_0(\lambda)=O(\lambda^{-2})\quad(\lambda\widehat{\to}\infty).\tag{4.21}$$

Співвідношення (4.21) є протиріччям умові $m_0\in N$. Отже нерівність $\deg q<\deg p$ є неможливою, для функцій m, які задовольняють умови (4.13).

Необхідність. Нехай функція $m\in N_\kappa$ задовольняє умові (4.12). Визначимо поліном $s(\lambda)$ формального ступеню $j-1$ формулою

$$s(\lambda) := s_0\lambda^{j-1} + s_1\lambda^{j-2} + ... + s_{j-1}. \tag{4.22}$$

Нехай функція $m_0 \in N$ та монічні поліноми p і q визначені факторизацією (2.38). Нехай ступені поліномів p і q дорівнюють k та n, відповідно,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k, \\ q(\lambda) &= \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + ... + q_{n-1}\lambda + q_n, \end{aligned} \tag{4.23}$$

і нехай функція $m_0 \in N$ визначена факторизацією (2.38).

Випадок 1: $\kappa = k = \deg p = \deg q = n$**.**

З умови (4.12) випливає, що $m_0 = O(1/\lambda)$, тому, функція m_0 належить до класу N^0 та має інтегральне зображення (1.22).

Нехай c є деякій монічний поліном ступеню j ($c_i \in \mathbb{C}$ при $i = 1, 2, ..., j$)

$$c(\lambda) := \lambda^j + c_1\lambda^{j-1} + c_2\lambda^{j-2} + ... + c_j. \tag{4.24}$$

Розглянемо такий розклад функції $\lambda^j m(\lambda) + s(\lambda)$

$$\lambda^j m(\lambda) + s(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} f(\lambda) + \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)q^{\#}(\lambda)} m_0(\lambda)\varphi_2(\lambda) + \frac{1}{q(\lambda)}\varphi_1(\lambda), \tag{4.25}$$

де

$$f(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t)}{t-\lambda} d\sigma(t), \tag{4.26}$$

$$\varphi_1(\lambda) := q(\lambda)s(\lambda) + p(\lambda)m_0(\lambda)c(\lambda) - p(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t)}{t-\lambda} d\sigma(t), \tag{4.27}$$

$$\varphi_2(\lambda) := p^{\#}(\lambda)\lambda^j - q^{\#}(\lambda)c(\lambda). \tag{4.28}$$

Ми покажемо, що поліном c можна вибрати таким чином, що

$$f(\cdot) \in \mathcal{H}(m_0); \quad \varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}. \tag{4.29}$$

Тоді за Теоремою 2.23 це буде означати, що (4.13) виконано.

Включення $f(\cdot) \in \mathcal{H}(m_0)$ випливає з Зауваження 1.4 і Теореми 2.21.

Нехай $P_i = T_i(p)$, $Q_i = T_i(q)$, $S_i = T_i(s)$, $C_i = T_i(c)$, $S_i^0 = T_i(s^0)$ матриці i старших коефіцієнтів поліномів $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $s(\lambda)$, $c(\lambda)$, $s^0(\lambda)$, відповідно, і нехай $\overline{P}_i$, $\overline{Q}_i$ матриці з комплексно спряженими елементами до елементів матриць P_i та Q_i. Відмітимо, що $\overline{P}_i = T_i(p^{\#})$, $\overline{Q}_i = T_i(q^{\#})$.

Функція φ_2 є поліномом формального ступеню $\kappa + j$. Визначимо поліном

$c(\lambda)$ так, щоб $\varphi_2(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}$. Ця умова є еквівалентною умові

$$\overline{P}_i - \overline{Q}_i C_i = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., j+1).$$

Таким чином

$$C_i = (\overline{Q}_i)^{-1}\overline{P}_i = \overline{P}_i(\overline{Q}_i)^{-1} \qquad (i = 1, 2, ..., j+1). \tag{4.30}$$

Відмітимо, що матриця $\overline{Q}_{j+1}$ є оборотною, а тому коефіцієнти $c_1, c_2, ..., c_j$ знаходяться однозначно.

Далі доведемо включення $\varphi_1(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}$. З факторизації (2.38) випливає, що

$$-S_j = P_j \overline{P}_j Q_j^{-1} (\overline{Q}_j)^{-1}(-S_j^0), \tag{4.31}$$

при чому всі матриці в (4.31) комутують (дивись Наслідок 4.3). З інтегрального вигляду (1.22) випливає

$$\varphi_1(\lambda) = q(\lambda)s(\lambda) - p(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) - c(\lambda)}{t - \lambda} d\sigma(t).$$

Пропозиція 4.5 означає, що $\varphi_1(\lambda)$ – це поліном формального ступеню $\kappa + j - 1$ і

$$T_j(\varphi_1) = Q_j S_j - P_j C_j S_j^0. \tag{4.32}$$

Використовуючи формулу (4.30) при $i = j$ і співвідношення (4.31) отримаємо

$$T_j(\varphi_1) = Q_j P_j \overline{P}_j Q_j^{-1}(\overline{Q}_j)^{-1} S_j^0 - P_j (\overline{Q}_j)^{-1} \overline{P}_j S_j^0 = 0.$$

Таким чином, ми отримали (4.29).

Випадок 2: $k = \deg p < \deg q = n = \kappa$**.** Позначимо $d := n - k (> 0)$. З розкладу (1.20) для функції $m_0 \in N$ випливає, що

$$m_0(\lambda) = a\lambda + b + m_{00}(\lambda). \tag{4.33}$$

З факторизації (2.38) для $m \in N_\kappa$ і умови (4.12) отримаємо, що $m_{00}(\lambda) = O(1/\lambda)$, так що $m_{00} \in N^0$. Отже функція m_{00} має інтегральне зображення, що є аналогічним (1.22).

Нехай коефіцієнт a в (4.33) не дорівнює 0, тоді $m_0(\lambda) = O(\lambda)$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$ (випадки коли $m_0(\lambda) = O(1)$ і $m_0(\lambda) = m_{00}(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$ розглядаються аналогічно). З факторизації (2.38) випливає, що $m(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda^{2d-1}})$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$ і

$$s_0 = s_1 = ... = s_{2d-3} = 0, \quad s_{2d-2} \neq 0 \tag{4.34}$$

($s_0 = ... = s_{2d-2} = 0$, $s_{2d-1} \neq 0$ при $a = 0$; $s_0 = ... = s_{2d-1} = 0$, $s_{2d} \neq 0$ при $a = b = 0$). Більш того, поліном $s(\lambda)$, що є визначеним формулою (4.22), має ступінь $j - 2d + 1$

$$s(\lambda) = s_{2d-2}\lambda^{j-2d+1} + s_{2d-1}\lambda^{j-2d} + ... + s_{j-1}.$$

Нехай $j \geq 2d - 1$. Розглянемо розклад (4.25) функції $\lambda^j m(\lambda) + s(\lambda)$. Відміна від розглянутого випадку $d = 0$ полягає у тому, що функція $m_0 \in N$ має зображення (4.33); міра $d\sigma$, знаходиться з інтегрального розкладу (1.22) для функції m_{00}; поліном c має ступінь $j - d$

$$c(\lambda) := \lambda^{j-d} + c_1\lambda^{j-d-1} + c_2\lambda^{j-d-2} + ... + c_{j-d}. \tag{4.35}$$

Покажемо, що поліном c можна вибрати так, що умова (4.29) буде виконана.

З Зауваження 1.4 і Теореми 2.21 випливає включення $f(\cdot) \in \mathcal{H}(m_0)$. Умова $\varphi_2(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}$ є еквівалентною до умови (4.30) при $i = j - d + 1$.

Далі покажемо включення $\varphi_1(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}$. З представлень (4.33) та (1.22) випливає, що

$$\varphi_1(\lambda) = q(\lambda)s(\lambda) + p(\lambda)c(\lambda)(a\lambda + b) - p(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) - c(\lambda)}{t - \lambda} d\sigma(t). \tag{4.36}$$

Нехай

$$A_{j-2d+2} = T_{j-2d+2}(a\lambda + b) := \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(відповідно $A = bI$, де I – це одинична матриця, коли $a = 0$, $b \neq 0$; та $A = 0$ коли $a = b = 0$). Визначимо поліном s^0 з формальним ступенем $\deg s^0 = j - d + 2$

$$s^0(\lambda) := 0 \cdot \lambda^{j-d+2} + 0 \cdot \lambda^{j-d+1} + s_0^0\lambda^{j-d} + s_1^0\lambda^{j-d-1} + ... + s_{j-d}^0.$$

де $\{s_i^0\}_{i=0}^{j-d}$ – це коефіцієнти з розкладу (1.24) для функції $m_{00} \in N^0$. Ми маємо добавити до полінома s^0 нульові доданки так, щоб ступені доданків φ_1

співпадали. Нехай

$$S^0_{j-2d+2} = T_{j-2d+2}(s^0) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & s^0_0 & s^0_1 & \cdots & s^0_{j-2d-1} \\ 0 & 0 & 0 & s^0_0 & \cdots & s^0_{j-2d-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s^0_{j-2d-3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

З Пропозиції 4.5 випливає, що φ_1 є поліномом формального ступеню $j+n-2d+1$ і

$$T_{j-2d+2}(\varphi_1) = Q_{j-2d+2}S_{j-2d+2} + P_{j-2d+2}C_{j-2d+2}A_{j-2d+2} - P_{j-2d+2}C_{j-2d+2}S^0_{j-2d+2}.$$

Факторизація (2.38) і зображення (4.33) означають, що

$$-S = P\overline{P}Q^{-1}(\overline{Q})^{-1}(A - S^0), \tag{4.37}$$

де усі матриці мають розмір $(j-2d+2)\times(j-2d+2)$.

З формули (4.30) для $i = j-2d+2$ і співвідношення (4.36) отримаємо,

$$T(\varphi_1) = QP\overline{P}Q^{-1}(\overline{Q})^{-1}(-A + S^0) + P\overline{P}(\overline{Q})^{-1}A - P\overline{P}(\overline{Q})^{-1}S^0 = 0.$$

Таким чином $\varphi_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$ і формула (4.29) виконана.

Нехай $d \le j < 2d-1$. З умови (4.34) випливає, що $s(\lambda) \equiv 0$. Розглянемо зображення вигляду (4.25) для функції $\lambda^j m(\lambda)$, де поліном c визначений формулою (4.35).

Включення $f(\cdot) \in \mathcal{H}(m_0)$ і $\varphi_2(\cdot) \in \mathcal{P}_{\kappa-1}$ доводяться аналогічно. Розглянемо функцію

$$\varphi_1(\lambda) = p(\lambda)c(\lambda)(a\lambda + b) - p(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) - c(\lambda)}{t-\lambda}d\sigma(t).$$

З Пропозиції 4.5 і умови $j < 2d-1$ випливає, що φ_1 є поліномом, та

$$\deg \varphi_1 = j + k - d + 1 < d + k = n = \kappa.$$

Отже $\varphi_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$, і таким чином відношення (4.29) виконано.

Нехай $j < d$. З умов (4.34) випливає, що $s(\lambda) \equiv 0$. Розглянемо ступінь полінома $p(\lambda)\lambda^j$

$$\deg\big(p(\lambda)\lambda^j\big) = k + j < k + d = n = \kappa.$$

Як випливає з Теореми 2.23 $\lambda^j m(\lambda) \in \mathcal{H}(m)$.

Випадок 3: $\kappa = \deg p > \deg q$ є неможливий з умови (4.12). $\square$

Наслідок 4.7. *Нехай функція* $m \in N_\kappa$ *задовольняє умові* $m(\lambda) = O(1/\lambda)$ *для* $\lambda \widehat{\to} \infty$. *Визначимо ядро* $\mathsf{K}_\mu^m(\lambda)$ *формулою*

$$\mathsf{K}_\mu^m(\lambda) = \frac{\lambda m(\lambda) - \overline{\mu} m(\overline{\mu})}{\lambda - \overline{\mu}} \qquad (\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_m). \tag{4.38}$$

Тоді

$$\mathsf{K}_\mu^m(\lambda) \in \mathcal{H}(m) \tag{4.39}$$

Доведення. Відношення (4.39) випливає з тотожності

$$\mathsf{K}_\mu^m(\lambda) = m(\lambda) + \overline{\mu} \mathsf{N}_\mu^m(\lambda). \tag{4.40}$$

Включення $m \in \mathcal{H}(m)$ доведено в Лемі 4.6, а включення $\mathsf{N}_\mu^m \in \mathcal{H}(m)$ випливає з означення простору з відтворювальним ядром. $\square$

4.2 Абстрактна інтерполяційна проблема, асоційована з проблемою моментів

Нехай $\mathcal{X} = \mathbb{C}[x]$ – це простір поліномів $h(x) = \sum_{j=0}^n h_j x^j \quad (n = 0, 1, 2, ...)$. Позначимо послідовність $\mathbf{s} = \{s_j\}_0^\infty \in H_\kappa$. Визначимо півторалінійну форму $K(\cdot, \cdot)$ на множині $\mathcal{X} = \mathbb{C}[\lambda]$ формулою

$$K(h, h) = \sum_{j,k=0}^n s_{j+k} h_j \overline{h}_k. \tag{4.41}$$

Так як послідовність чисел $\{s_j\}_0^\infty$ належить до класу H_κ, то форма $K(\cdot, \cdot)$ має κ від'ємних квадратів. Стандартна процедура замикання простору $\mathcal{X}$ відносно внутрішнього добутку (4.41) приводить до простору Понтрягіна $\mathcal{H}$.

Визначимо оператори B_1, B_2 і C_1, C_2 за формулами (дивись [74], [58])

$$\begin{aligned} &B_1, B_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad B_1 h = \frac{h(x) - h(0)}{x}, \quad B_2 h = h; \\ &C_1, C_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}, \quad C_1 h = \sum_{j=1}^n s_{j-1} h_j, \quad C_2 h = -h(0). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Покажемо, що оператори B_1, B_2, C_2, C_2, K задовольняють умови (A1)-(A4). Але спершу доведемо кілька допоміжних властивостей.

Пропозиція 4.8. *Означення* (4.42) *для оператора* C_1 *можна переписати*

$$C_1 h = \widetilde{h}(0) \quad (h \in \mathcal{X}), \tag{4.43}$$

де суміжний поліном $\widetilde{h}$ *визначений формулою*

$$\widetilde{h}(\lambda) = K\left(\frac{h(x) - h(\lambda)}{x - \lambda}, \mathbf{1}\right) \quad (h \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C}). \tag{4.44}$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \sum_{j=1}^{n} h_j x^{j-1} \quad (h \in \mathcal{X}),$$

тоді

$$\widetilde{h}(0) = K(\sum_{j=1}^{n} h_j x^{j-1}, \mathbf{1}) = \sum_{j=1}^{n} s_{j-1} h_j = C_1 h \quad (h \in \mathcal{X}).$$

□

Пропозиція 4.9. *Нехай оператори* B_1, C_1, C_2 *визначені формулами* (4.42). *Тоді виконуються таке співвідношення*

$$(I - \lambda B_1)^{-1} h = \frac{xh(x) - \lambda h(\lambda)}{x - \lambda}, \quad (h \in \mathcal{X}); \tag{4.45}$$

$$C_1 (I - \lambda B_1)^{-1} h = \widetilde{h}(\lambda), \quad C_2 (I - \lambda B_1)^{-1} h = -h(\lambda), \tag{4.46}$$

де суміжний поліном $\widetilde{h}$ *визначений формулою* (4.44).

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{X}$. Тоді

$$(I - \lambda B_1) f(x) = f(x) - \lambda \frac{f(x) - f(0)}{x} =: h(x). \tag{4.47}$$

Підставимо $x = \lambda$ в рівність (4.47), отримаємо $f(0) = h(\lambda)$. Як випливає з (4.47), що

$$f(x) = \frac{xh(x) - \lambda h(\lambda)}{x - \lambda}. \tag{4.48}$$

Таким чином рівність (4.45) доведена.

З формул (4.46) та (4.42) отримаємо

$$C_2 (1 - \lambda B_1)^{-1} h = C_2 f = -f(0) = -h(\lambda).$$

Аналогічно, з формул (4.46) та (4.43) отримаємо

$$C_1(1-\lambda B_1)^{-1}h = C_1 f = \widetilde{f}(0)$$
$$= K(\frac{f(x)-f(0)}{x}, \mathbf{1}) = K(\frac{h(x)-h(\lambda)}{x-\lambda}, \mathbf{1}) = \widetilde{h}(\lambda).$$

□

Пропозиція 4.10. *Нехай* $\{s_j\}_0^\infty \in H_\kappa$ *і виконується умова* (4.4). *Тоді оператори* B_1, B_2, C_1, C_2, K *задовольняють умови (А1)-(А4) Теореми 3.19 .*

Доведення. Властивість (A1) доводиться безпосередніми обчисленнями.

(A2). Доведемо умову (A2) від супротивного. Припустимо, шо $\ker K \neq 0$. Тобто існує поліном $h(x)$ ступеню n такий, що $K(h,u) = 0$ для будь-якого полінома $u \in \mathbb{C}[x]$. Отже Ганкелева матриця $D_n := \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n$ є такою, що вироджується ($\det D_n = 0$). Так як проблема MP_κ (4.3) має розв'язок, то за Теоремою [64, Theorem 1.3] цій розв'язок є єдиним. Отримуємо протиріччя припущенню (4.4). Таким чином $\ker K = \{0\}$.

(A3). Нехай $\mathcal{H}$ - це поповнення простору $\mathcal{X}$ з внутрішнім добутком $K(\cdot,\cdot)$. Нехай M_0 є оператор множення в $\mathcal{X}$ і нехай оператор M – це замикання M_0 в просторі $\mathcal{H}$. Так як виконується умова (4.4), то оператор M є цілим π-симетричним оператором в $\mathcal{H}$ з масштабом $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ (дивись [80, Proposition 1.1]).

Нехай $\widetilde{B}_1$ є замиканням графіка оператора B_1

$$\widetilde{B}_1^{-1} = \{\{h, Mh+u\} : \ h \in \operatorname{dom} M, \ u \in \mathbb{C}\}.$$

Так як оператор M є цілим, то $0 \in \rho(M, \mathbb{C})$ і

$$\operatorname{ran} \widetilde{B}_1^{-1} = \operatorname{ran} M \dot{+} \mathbb{C} = \mathcal{H}, \qquad \ker \widetilde{B}_1^{-1} = \operatorname{ran} M \cap \mathbb{C} = \{0\}.$$

Отже $\widetilde{B}_1$ це графік обмеженого оператора в просторі $\mathcal{H}$.

Обмеженість оператора C_1 випливає з вже доведеної обмеженості оператора B_1 і Пропозиції 4.8. Дійсно

$$C_1 h = K(\frac{h(x)-h(0)}{x}, \mathbf{1}) = \langle B_1 h, \mathbf{1}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Оператор C_2 є обмеженим, так як $0 \in \rho(M, \mathbb{C})$ і

$$C_2 h = -\Pi_{M,\mathbb{C}}(0)h,$$

де $\Pi_{M,\mathbb{C}}(0)$ – це косий проектор на простір $\mathbb{C}$ в розкладі $\mathcal{H} = \operatorname{ran} M \dot{+} \mathbb{C}$.

(A4). Тепер покажемо, що оператори B_1, B_2, C_1, C_2 задовольняють умові (A4). Для різних точок $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$ $(j = 1, ..., \kappa)$ виконується

$$\operatorname{ran} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2(1 - \overline{\lambda}_1 B_1)^{-1} \\ \vdots \\ C_2(1 - \overline{\lambda}_\kappa B_1)^{-1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{\kappa+1}. \tag{4.49}$$

Як випливає з співвідношення (4.46)

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2(1 - \overline{\lambda}_1 B_1)^{-1} \\ \vdots \\ C_2(1 - \overline{\lambda}_\kappa B_1)^{-1} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} -f(0) \\ -f(\overline{\lambda}_1) \\ \vdots \\ -f(\overline{\lambda}_\kappa) \end{bmatrix}.$$

Так як поліноми $f(x)$ є довільними, ми отримаємо умови (4.49). $\square$

Абстрактну інтерполяційну проблему AIP_κ, що асоційована з $MP_\kappa(\mathbf{s})$, можна формулювати таким чином.

Проблема $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. Нехай послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$ належить H_κ та виконана умова (4.4). Нехай оператори B_1, B_2, C_1, C_2, K визначені формулами (4.42) та F визначена рівністю (3.60). Знайти N_κ функцію $m(\lambda)$, таку що:

(C1) $Fh \in \mathcal{H}(m)$ для будь-яких $h \in \mathcal{X}$;

(C2) $\langle Fh, Fh\rangle_{\mathcal{H}(m)} \le K(h,h)$ для будь-яких $h \in \mathcal{X}$.

Пропозиція 4.11. *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty \in H_\kappa$ *та оператори* B_1, B_2, C_1, C_2, K *визначені формулами* (4.42). *Тоді функція* m*, що визначена формулою* (3.69), *належить класу* N_κ.

Доведення. Нехай $\varphi \in \widetilde{N} = N \cup \{\infty\}$ та $m \in N_{\kappa'}$ ($\kappa' \le \kappa$, випадок $\kappa' > \kappa$ є неможливим) визначена формулою (3.69). Нехай лінійне відношення A отримано формулою (3.17). За Теоремою 3.19 існує самоспряжене розширення $\widetilde{A}$ лінійного відношення A, таке що

$$(Fh)(\lambda) = P_{\mathcal{L}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} h \in \mathcal{H}(m) \quad (h \in \mathcal{X}).$$

і відображення $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$ задовольняє тотожності $(C1)$. З іншого боку, з Пропозиції 3.17 випливає, що відображення F має форму (3.60), де $G(\lambda)$

визначена формулою (3.59)

$$(Fh)(\lambda) = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & -m(\lambda)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (\mathbf{1} - \lambda B_1)^{-1} h \quad (h \in \mathcal{X}).$$

З (4.42) та (4.45) отримаємо, для $h = x^j$

$$G(\lambda)h = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (x^j + x^{j-1}\lambda + ... + \lambda^j) = \begin{bmatrix} s_0\lambda^{j-1} + s_1\lambda^{j-2} + ... + s_{j-1} \\ -\lambda^j \end{bmatrix},$$

отже

$$(Fh)(\lambda) = \lambda^j m(\lambda) + s_0\lambda^{j-1} + s_1\lambda^{j-2} + .. + s_{j-1} \in \mathcal{H}(m) \quad (h = x^j). \qquad (4.50)$$

Як випливає з Леми 4.6, функція m задовольняє зображенню (4.3). Таким чином, з [80, Proposition 1.3] отримаємо, що $m \in N_{\kappa'}$ ($\kappa' \geq \kappa$).

Отже m належить до класу N_κ. □

4.3 Еквівалентність проблем AIP_κ та $MP_\kappa(\mathbf{s})$

Теорема 4.12. *Нехай* $\{s_j\} \in H_\kappa$, *оператори* B_1, B_2, C_1, C_2, K *визначені формулами* (4.42). *Тоді функція* m *є розв'язком проблеми* $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$ *тоді і лише тоді, коли* m *є розв'язком проблеми* $MP_\kappa(\mathbf{s})$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $m \in N_\kappa$ є розв'язком $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. З Пропозиції 3.17 випливає, що відображення F, що відповідає функції m, єдине. Це відображення має вигляд (3.60) та задовольняє (4.50). З Леми 4.6 випливає, що функція m має розвинення (4.12) для будь-якого $j \in \mathbb{Z}_+$. Отже функція m є розв'язком проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$.

Достатність. Нехай $m \in N_\kappa$ – це розв'язок проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$. Визначимо відображення F за формулою (3.60).

Крок 1. *Покажемо, що* F *задовольняє* (C1). З формули (4.50) та Леми 4.6 отримаємо, що

$$Fh \in \mathcal{H}(m) \quad (h = x^j,\ j \in \mathbb{Z}_+),$$

отже $Fh \in \mathcal{H}(m)$ для будь-яких $h \in \mathcal{X}$. За Пропозицією 3.17 відображення F, що визначене формулою (3.60), задовольняє (C1).

Крок 2. *Покажемо, що* F *задовольняє* (C2). Нехай $\widetilde{A}$ – це самоспряжений оператор в просторі де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$ (дивись [86])

$$\widetilde{A} = \left\{\{f,\, f'\} \in \mathcal{H}(m)^2 : f'(\lambda) - \lambda f(\lambda) \equiv \textsc{const} \in \mathbb{C}\right\}. \tag{4.51}$$

Визначимо функції

$$f_j(\lambda) := \lambda^j m(\lambda) + \lambda^{j-1}s_0 + \lambda^{j-2}s_1 + ... + s_{j-1} \quad (j = 0, 1, ...).$$

З Леми 4.6 випливає, що $f_j \in \mathcal{H}(m)$ $(j = 0, 1, ...)$. Таким чином, функції f_j для $j = 0, 1, ...$ задовольняють відношенню

$$f_{j+1}(\lambda) - \lambda f_j(\lambda) \equiv s_j = \textsc{const}.$$

Отже $\{f_j, f_{j+1}\} \in \widetilde{A}$ означає, що

$$\widetilde{A} f_j = f_{j+1}. \tag{4.52}$$

З означення простору Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathcal{H}(m)$ та Наслідку 4.7 випливає, що

$$\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot) \in \mathcal{H}(m) \;\text{ і }\; \mathsf{K}_{\bar{\mu}}^m(\cdot) \in \mathcal{H}(m).$$

Більш того, з рівності (4.40) випливає, що

$$\left\{\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot),\, \mathsf{K}_{\bar{\mu}}^m(\cdot)\right\} = \left\{\frac{m(\lambda) - m(\mu)}{\lambda - \mu}, \lambda\frac{m(\lambda) - m(\mu)}{\lambda - \mu} + m(\mu)\right\} \in \widetilde{A}$$

і отже

$$\left\{\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot),\, m(\cdot)\right\} = \left\{\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot), \mathsf{K}_{\bar{\mu}}^m(\cdot) - \mu\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot)\right\} \in \widetilde{A} - \mu.$$

Це означає, що

$$(\widetilde{A} - \mu)^{-1} m(\cdot) = (\widetilde{A} - \mu)^{-1} f_0(\cdot) = \mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot).$$

Тоді відтворююча властивість в просторі $\mathcal{H}(m)$ дає рівність

$$\left\langle(\widetilde{A} - \mu)^{-1} f_0(\cdot), f_0(\cdot)\right\rangle_{\mathcal{H}(m)} = \left\langle\mathsf{N}_{\bar{\mu}}^m(\cdot), m(\cdot)\right\rangle_{\mathcal{H}(m)} = m(\mu). \tag{4.53}$$

Так як m допускає асимптотичний розклад (4.3), то $f_0 \in \operatorname{dom}(\widetilde{A}^j)$ для будь-яких $j \in \mathbb{N}$ (дивись [78, Satz 1.10], а також [63]) і

$$\langle \widetilde{A}^j f_0, f_0\rangle_{\mathcal{H}(m)} = s_j \quad (j = 0, 1, ...). \tag{4.54}$$

Так як $\widetilde{A}^j f_0 = f_j$, то

$$\langle f_j, f_i\rangle_{\mathcal{H}(m)} = \langle \widetilde{A}^{i+j} f_0, f_0\rangle_{\mathcal{H}(m)} = s_{i+j} \quad (i, j = 0, 1, 2, ...). \tag{4.55}$$

Отже для будь-якого $h = \sum_{j=0}^{n} h_j x^j \in \mathcal{X}$ отримаємо, що $Fh = \sum_{j=0}^{n} h_j f_j$, і з (4.55) випливає

$$\begin{aligned}\langle Fh, Fh\rangle_{\mathcal{H}(m)} &= \langle \sum_{j=0}^{n} h_j f_j, \sum_{j=0}^{n} h_j f_j\rangle_{\mathcal{H}(m)} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \langle h_i f_i, h_j f_j\rangle_{\mathcal{H}(m)} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} h_i \overline{h}_j s_{i+j} = K(h, h).\end{aligned}$$

□

Зауваження 4.13. *Відмітимо, що у процесі доведення Теореми 4.12 ми показали, що для узагальненого перетворення Фур'є* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{H}(m)$, *пов'язаного з розв'язком* m *проблеми* $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$, *виконується рівність Парсеваля*

$$\langle Fh,\, Fh\rangle_{\mathcal{H}(m)} = K(h, h) \quad (\forall h \in \mathcal{X}). \tag{4.56}$$

У випадку $\kappa = 0$ *ця рівність* (4.56) *була показана в [74].*

4.4 Опис розв'язків проблеми MP_κ

Базиси $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $\mathbb{C}[x]$ називаються *біортогональними* відносно форми $K(\cdot,\cdot)$, якщо

$$K(f_j, g_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 0, 1, ...),$$

де $\delta_{jk} = 0$ для $k \neq j$ та $\delta_{jj} = 1$ $(k, j = 0, 1, ...)$. Якщо форма $K(\cdot,\cdot)$ є невід'ємною, то будь-який ортогональний базис є біортогональним сам до себе. Конструкцію біортогонального базису у загальному випадку буде подано нижче.

Система суміжних поліномів $\{\widetilde{g}_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ визначається рівностями

$$\widetilde{g}_k(\lambda) = K\left(\frac{g_k(t) - g_k(\lambda)}{t - \lambda}, \mathbf{1}\right) \quad (k = 0, 1, ...). \tag{4.57}$$

Пропозиція 4.14. *Нехай* $s \in H_\kappa$ *і виконана умова* (4.4). *Нехай базиси* $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ *та* $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ *є біортогональними відносно форми* $K(\cdot,\cdot)$. *Тоді,*

$$C_1 = \sum_{k=0}^\infty f_k(\cdot)\widetilde{g}_k(0)^*, \quad C_2 = -\sum_{k=0}^\infty f_k(\cdot)g_k(0)^*. \tag{4.58}$$

Доведення. Дійсно, з розкладу функцій C_1^* і C_2^* за базисом $\{f_k\}$, та формул (4.43), (4.42) випливає, що

$$(C_1^*1)(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\big\langle C_1^*1, g_k(\cdot)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\big(1, C_1 g_k(\cdot)\big)_{\mathbb{C}} = \sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\widetilde{g}_k(0)^*,$$

$$(C_2^*1)(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\big\langle C_2^*1, g_k(\cdot)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\big(1, C_2 g_k(\cdot)\big)_{\mathbb{C}} = -\sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)g_k(0)^*.$$

□

Наступна теорема дає опис множини розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$.

Теорема 4.15. *Нехай послідовність* $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$ *належить до* H_κ *і виконується умова* (4.4). *Визначимо внутрішній добуток* $K(\cdot,\cdot)$ *на множині* $\mathbb{C}[x]$ *формулою* (4.41). *Нехай* $\{f_k(\lambda)\}_{k=0}^\infty$ *та* $\{g_k(\lambda)\}_{k=0}^\infty$ *є біортогональними базисами відносно форми* K. *Нехай матрична функція* $\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix}\theta_{11}(\lambda) & \theta_{12}(\lambda)\\ \theta_{21}(\lambda) & \theta_{22}(\lambda)\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *визначена формулою*

$$\begin{aligned} \theta_{11}(\lambda) &= 1 + \lambda\sum_{k=0}^\infty \widetilde{f}_k(\lambda)g_k(0)^*, \quad \theta_{12}(\lambda) = \lambda\sum_{k=0}^\infty \widetilde{f}_k(\lambda)\widetilde{g}_k(0)^*,\\ \theta_{21}(\lambda) &= -\lambda\sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)g_k(0)^*, \quad \theta_{22}(\lambda) = 1 - \lambda\sum_{k=0}^\infty f_k(\lambda)\widetilde{g}_k(0)^*. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Тоді формула

$$m(\lambda) = \big(\theta_{11}(\lambda)\varphi(\lambda) + \theta_{12}(\lambda)\big)\big(\theta_{21}(\lambda)\varphi(\lambda) + \theta_{22}(\lambda)\big)^{-1}, \tag{4.60}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між розв'язками $m(\lambda)$ *проблеми* $MP_\kappa(\mathbf{s})$ *та множиною* $\varphi \in \widetilde{N} = N \cup \{\infty\}$.

Нехай матрично-значна функція $\Theta(\lambda)$ визначена за формулою (3.52). З співвідношень (4.46) та (4.58) випливає, що

$$\begin{aligned}
\theta_{11}(\lambda) &= 1 + \lambda C_1(I - \lambda B_1)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\cdot) g_k(0)^* = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}_k(\lambda) g_k(0)^*, \\
\theta_{12}(\lambda) &= \lambda C_1(I - \lambda B_1)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\cdot) \widetilde{g}_k(0)^* = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}_k(\lambda) \widetilde{g}_k(0)^*, \\
\theta_{21}(\lambda) &= \lambda C_2(I - \lambda B_1)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\cdot) g_k(0)^* = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda) g_k(0)^*, \\
\theta_{22}(\lambda) &= 1 + \lambda C_2(I - \lambda B_1)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\cdot) \widetilde{g}_k(0)^* = 1 - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda) \widetilde{g}_k(0)^*.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Отже $\Theta(\lambda)$ збігається з матрично-значною функцією в (4.59).

Нехай m – це розв'язок проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$. Тоді за Теоремою 4.12 функція m є розв'язком проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$, отже допускає зображення (3.69) з $\varphi \in \widetilde{N}$.

Навпаки, нехай $\varphi \in \widetilde{N}$. Тоді функція m визначена формулою (3.69) належить до класу N_κ за Пропозицією 4.11. За Теоремою 3.20 функція m є розв'язком проблеми $AIP_\kappa(B_1, B_2, C_1, C_2, K)$. За Теоремою 4.12 функція m є також і розв'язком проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$. □

У випадку $\kappa = 0$ формули тотожні (4.61) було знайдено в [4].

4.4.1 Опис розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ у формі Крейна-Лангера

Множина поліномів $\mathcal{G} = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ називається *майже ортогональною системою* ([79, §7.1], дивись також [80, §3.1]) відносно форми $K(\cdot,\cdot)$, якщо для будь-якого $g_k \in \mathcal{G}$ існує $g_{k'} \in \mathcal{G}$ з властивостями:

(i) $K(g_k, g_j) = 0$ для будь-яких j $(j \neq k')$;

(ii) $K(g_k, g_{k'}) = \pm 1$.

Покладемо $\varepsilon_k := K(g_k, g_{k'})$ для $k = 0, 1, \ldots.$

Як випливає з [79, Behauptung 7.1]), існує майже ортогональна система $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ відносно форми $K(\cdot,\cdot)$ така, що $g_0 \equiv 1$, та g_k це дійсний поліном степеню k. Отже базиси $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{\varepsilon_{k'} g_{k'}\}_{k=0}^{\infty}$ є біортогональними відносно форми $K(\cdot,\cdot)$. З формул (4.59) випливає, що

$$\theta_{11}(\lambda) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \widetilde{g}_k(\lambda) g_{k'}(0), \ \ \theta_{12}(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \widetilde{g}_k(\lambda) \widetilde{g}_{k'}(0)$$
$$\theta_{21}(\lambda) = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k g_k(\lambda) g_{k'}(0), \ \ \theta_{22}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k g_k(\lambda) \widetilde{g}_{k'}(0),$$

де $\{\widetilde{g}_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ – це система суміжних поліномів, що визначена формулою (4.57).

Цей опис розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ співпадає з описом [80, Theorem 1.4] (дивись також [79, Satz 7.5]).

4.4.2 Опис розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ у формі Деревягіна-Деркача

Інший опис розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ було представлено в [55]. Цей опис також можна отримати з Теореми 4.15, якщо обрати інші біортогональні системи $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$.

З вкладення $\{s_j\}_0^{\infty} \in H_\kappa$ випливає, що існує номер N такий, що $\kappa = \nu_-(D_{\mathrm{N}}) = \nu_-(D_{\mathrm{N}+1}) = \nu_-(D_{\mathrm{N}+2}) = ...$, де $\nu_-(D_n)$ – це кількість від'ємних власних значень Ганкелевої матриці $D_n := \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^{n-1}$. Індекс n називається *нормальним*, якщо $\det D_n \neq 0$. Нехай $n_0 = 0$ та $n_1 < n_2 < ...$ – це послідовність усіх нормальних індексів $\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$. Нехай $k_j = n_{j+1} - n_j$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$. Визначимо поліноми P_{n_j} рівністю

$$P_{n_j}(\lambda) = c_j \det \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n_j} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n_j-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n_j} \end{bmatrix} \qquad (j \in \mathbb{Z}_+), \tag{4.62}$$

де нормалізуючі коефіцієнти c_j є визначеними співвідношеннями

$$K\big(P_{n_j}(\lambda), \lambda^{k_j-1} P_{n_j}(\lambda)\big) = \varepsilon_j \quad |\varepsilon_j| = 1 \quad (j \in \mathbb{Z}_+).$$

Далі визначимо поліноми $P_n(\lambda)$ при $n \neq n_j$

$$P_{n_j+k}(\lambda) = \lambda^k P_{n_j}(\lambda) \quad k = 1, 2, ...k_j - 1 \quad (j \in \mathbb{Z}_+).$$

Тоді матриця Грама

$$G = (G_{jk})_{j,k=0}^{\infty} \qquad G_{jk} = K(P_j, P_k)$$

системи $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ приймає блочну форму (дивись [54])

$$G = \mathrm{diag}(G^{(0)}, G^{(1)}, ...),$$

де G^j – це $n_{j-1} \times n_{j-1}$ невироджена матриця, і $G_j = 1$ для $j \geq M$. З [54] випливає, що $\mathcal{H}$ є ізоморфним простору $\big(\mathbf{l}_2, \langle G\cdot, \cdot\rangle_{\mathbf{l}_2}\big)$ через відображення

$$V : P_j \mapsto e_j \qquad (j \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

де $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – це стандартний базис у просторі $\mathbf{l}_2$.

Нехай $\pi(\lambda) = \big(P_0(\lambda), P_1(\lambda), ...\big)$. З умови (4.4) випливає, що $\pi(\lambda) \in \mathbf{l}_2$. Нехай

$$f_k(\lambda) = P_k(\lambda), \qquad g_k(\lambda) = \big(G^{-1}\pi(\lambda), e_k\big)_{\mathbf{l}_2} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Система $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ є біортогональною до $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ відносно форми $K(\cdot, \cdot)$, так як

$$\begin{aligned} K(f_j, g_k) &= (GVf_j, Vg_k)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (Ge_j, G^{-1}e_k)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (e_j, e_k)_{\mathbf{l}_2} = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Пропозиція 4.16. *Нехай поліноми* P_{n_j} $(j \in \mathbb{Z}_+)$, *що визначені формулами* (4.62), *та* Q_{n_j} *є суміжними поліномами*

$$Q_{n_j}(\lambda) := \widetilde{P}_{n_j}(\lambda) = K\left(\frac{P_{n_j}(\lambda) - P_{n_j}(t)}{\lambda - t}, 1\right).$$

Нехай

$$Q_{n_j+k}(\lambda) := \lambda^k Q_{n_j}(\lambda) \quad (k = 1, 2, ..., k_j - 1).$$

Тоді

$$Q_{n_j+k}(\lambda) = \widetilde{P}_{n_j+k}(\lambda) \quad (k = 1, 2, ..., k_j - 1). \tag{4.63}$$

Доведення. Для будь яких $j \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, ..., k_j - 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{n_j+k}(\lambda) &= K\left(\frac{\lambda^k P_{n_j}(\lambda) - t^k P_{n_j}(t)}{\lambda - t}, 1\right) \\ &= \lambda^k K\left(\frac{P_{n_j}(\lambda) - P_{n_j}(t)}{\lambda - t}, 1\right) + K\left(P_{n_j}(t), \frac{\overline{\lambda}^k - t^k}{\overline{\lambda} - t}\right). \end{aligned} \tag{4.64}$$

З (4.64) виливає (4.63), так як останній член дорівнює 0. □

Таким чином формула (4.59) співпадає з результатом [55, Corollary 3.17] при цьому виборі біортогональної системи $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$.

4.5 Висновки до розділу 4

Основні результати розділу наведені у роботі [88].

Метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Побудовано абстрактну інтерполяційну проблему, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів. Показано, що для цієї абстрактної інтерполяційної проблеми виконується властивість Парсеваля. Знайдено вигляд резольвентної матриці $W(\lambda)$.

5 Дотична інтерполяційна проблема в узагальнених класах Шура

В цьому розділі ми будемо вивчати інтерполяційні проблеми у відкритому одиничному крузі $\mathbb{D}$.

5.1 Узагальнена проблема Шура-Такагі

5.1.1 Узагальнений клас Смірнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$

Класом Смірнова $\mathcal{N}_{+}^{p\times q}$ називається множина матрично-значчних функцій вигляду $h^{-1}s$, де $s \in \mathcal{S}^{p\times q}$, а h – скалярна зовнішня функція.

Полюсна кратність $p\times q$-мероморфної матрично-значчної функції $F(z)$ з полюсами в $\mathbb{D}$, у відповідності з [1], рахується за коефіцієнтами рядів Лорана. А саме, нехай розклад у ряд Лорана функції $F(z)$ в околі точці $\alpha \in \mathbb{D}$ має вигляд

$$F(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} F_j (z-\alpha)^j.$$

Визначимо полюсну кратність функції F в точці α як

$$\mathcal{M}_\pi(F,\alpha) = \operatorname{rank}(F_{-k+i-j})_{i,j=0}^{k-1}.$$

Означення 5.1. Полюсна кратність *мероморфної в одиничному крузі* $p\times q$*-матрично-значчної функції* F *дорівнює*

$$\mathcal{M}_\pi(F) = \sum_{\alpha\in\mathbb{D}} \mathcal{M}_\pi(F,\alpha).$$

Для квадратної матрично-значчної функції $F(z) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ визначимо *нульову кратність* співвідношенням

$$\mathcal{M}_\zeta(F) = \mathcal{M}_\pi(F^{-1}) \quad (\det F(z) \not\equiv 0).$$

Це означення не є тривіальним у випадку, якщо нулі матрично-значчної функції F співпадають з її полюсами. Наприклад, матрично-значчна функція $F(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\lambda & 1 \end{pmatrix}$ має і нуль і полюс у точці 0 одночасно, так як $F(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\lambda & 1 \end{pmatrix}$. У цьому випадку отримаємо, що $\mathcal{M}_\zeta(F) = \mathcal{M}_\pi(F) = 1$.

Відмітимо, що ступінь скінченого добутку Бляшке-Потапова $b \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$

співпадає з $\mathcal{M}_\zeta(b)$.

Теорема 5.2. ([28]) *Будь-яка матрично-значна функція* $F \in H_\infty^{n\times n}(\mathbb{D})$ *має зображення*

$$F(\lambda) = b_0(\lambda)F_0(\lambda) = F_1(\lambda)b_1(\lambda),$$

де b_0, b_1 *– добутки Бляшке-Потапова;* F_0, $F_1 \in H_\infty^{n\times n}$ *і не мають нулів в* $\mathbb{D}$. *При цьому ступені добутків Бляшке-Потапова* b_0 *і* b_1 *співпадають.*

Означення 5.3. *(дивись [24] і [61]) Мероморфну в* $\mathbb{D}$ *матрично-значну функцію* F *будемо називати такою, що належить до узагальненого класу Смірнова* $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, *якщо вона допускає зображення у вигляді*

$$F = f + r,$$

де f *функція з класу Смірнова* $\mathcal{N}_+^{p\times q}$, *а* r *– раціональна матрично-значна функція з полюсною кратністю* $\mathcal{M}_\pi(r) = \kappa$.

Наступне твердження ілюструє інший спосіб визначення функції з узагальненого класу Смірнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$.

Пропозиція 5.4. *([61, Proposition 2.2]) Нехай* F *це –* $p\times q$*-матрично-значна функції, що є мероморфною в* $\mathbb{D}$. *Тоді твердження є еквівалентними:*

(i) $F \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$;

(ii) F *має взаємно просту ліву факторизацію*

$$F(z) = b_\ell(z)^{-1}F_\ell(z), \tag{5.1}$$

де $b_\ell \in S_{in}^{p\times p}$, $F_\ell \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$, $\mathcal{M}_\zeta(b_\ell) = \kappa$ *і*

$$\ker b_\ell(z)^* \cap \ker F_\ell(z)^* = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D});$$

(iii) F *має взаємно просту праву факторизацію*

$$F(z) = F_r(z)b_r(z)^{-1}$$

де $b_r \in S_{in}^{q\times q}$, $F_r \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$, $\mathcal{M}_\zeta(b_r) = \kappa$ *і*

$$\ker F_r(z) \cap \ker b_r(z) = \{0\} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Відмітимо, що з Пропозиції (5.4) випливає, що узагальнений клас Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ міститься в класі $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$.

5.1.2 Узагальнена теорема Руше

Нехай F і G голоморфні в замкненому одиничному крузі $\mathbb{D}$ функції, такі що $|F(\lambda)| > |G(\lambda)|$, для усіх $\lambda \in \mathbb{T}$. Відома теорема Руше [34] стверджує, що функції F і $F+G$ мають однакову кількість нулів в $\mathbb{D}$.

В [81] було отримано таке узагальнення теореми Руше

Теорема 5.5. (Крейн-Лангер) *Нехай $F, G \in \mathcal{N}_{+}^{n\times n}$, $\det(F(\lambda)+G(\lambda)) \not\equiv 0$ (в $\mathbb{D}$) і $||G(\lambda)\cdot F(\lambda)^{-1}|| \le 1$ (м.в. на $\mathbb{T}$). Якщо F має внутрішній дільник ступеню κ_F ($<\infty$), то $F+G$ має внутрішній дільник ступеню $\kappa_{F+G} \le \kappa_F$. Якщо до того ж $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, тоді $\kappa_{F+G} = \kappa_F$.*

Доведення Теореми 5.5 в [81] має пробіл, який було усунено в [61, Theorem B1]. Інше узагальнення Теореми Руше на матрично-значні функції, що є мероморфними в $\mathbb{D}$ отримано в [12].

Означення 5.6. *Нехай $F \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{n\times n}(\mathbb{D})$ має ліву факторизацію* (5.1). *Тоді число*

$$\mathcal{M}(F) := \mathcal{M}_{\zeta}(F_l) - \kappa$$

називаєтьса сумарною кратністю мероморфної матрично-значної функції $F(\lambda)$ відносно області $\mathbb{D}$.

Лема 5.7. *Для довільних мероморфних матрично-значних функцій A і B з класів $\mathcal{N}_{+,\kappa_1}^{n\times n}$ і $\mathcal{N}_{+,\kappa_2}^{n\times n}$ відповідно, виконуєтьса відношення*

$$\mathcal{M}(A\cdot B) = \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B). \tag{5.2}$$

Доведення. Якщо $n=1$, то A і B – скалярні функції, і твердження (5.2) очевидно. Дійсно, при добутку функцій A і B відповідні порядки нулів і полюсів додаються. Якщо $n>1$, то як випливає з [12]

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}\big(\det(A)\big), \quad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}\big(\det(B)\big). \tag{5.3}$$

Переходячи, до скалярних функцій ми отримаємо з формул (5.3) формулу

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(AB) &= \mathcal{M}\big(\det(AB)\big)\\ &= \mathcal{M}\big(\det(A)\cdot\det(B)\big)\\ &= \mathcal{M}\big(\det(A)\big) + \mathcal{M}\big(\det(B)\big)\\ &= \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)\end{aligned}$$

□

Теорема 5.8. *Нехай* $F \in \mathcal{N}^{n\times n}_{+,\kappa}(\mathbb{D})$, $G \in \mathcal{N}^{n\times n}_{+,\kappa_1}(\mathbb{D})$. *Якщо* $\det(F(\lambda)+G(\lambda)) \not\equiv 0$ *(в* $\mathbb{D}$*) і* $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| \le 1$ *(м. в. на* $\mathbb{T}$*), то*

$$\mathcal{M}(F+G) \le \mathcal{M}(F). \tag{5.4}$$

Якщо до того ж $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, *то*

$$\mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F). \tag{5.5}$$

Доведення. З Пропозиції 5.4 випливає, що функції F і G можна представити у вигляді

$$F = b^{-1}F_1, \quad G = G_1 d^{-1},$$

де b і d – добутки Бляшке-Потапова ступенів κ і κ_1, відповідно; $F_1,\ G_1 \in \mathcal{N}^{n\times n}_{+}$. Тоді

$$F+G = b^{-1}(F_1 d + bG_1)d^{-1}.$$

З Леми 5.7 випливає, що:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(F+G) &= \mathcal{M}(b^{-1}) + \mathcal{M}(F_1 d + bG_1) + \mathcal{M}(d^{-1}) \\ &= -\kappa_1 + \mathcal{M}(F_1 d + bG_1) - \kappa. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Далі застосуємо Теорему 5.5 до функції $F_1 d + bG_1$. Перевіримо, що виконуються усі умови Теореми 5.5:

По-перше $F_1 d,\ bG_1 \in \mathcal{N}^{n\times n}_{+}$ так як $F_1, G_1 \in \mathcal{N}^{n\times n}_{+}$ і $b, d \in H^{n\times n}_{\infty}$.

Далі для всіх $\lambda \in \mathbb{T}$ виконується нерівність

$$||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| \le 1.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} ||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| &= ||b(\lambda)G_1(\lambda)d^{-1}(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| \\ &= ||b(\lambda)G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| \\ &= ||G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)b(\lambda)|| \\ &= ||G(\lambda)F^{-1}(\lambda)|| \le 1 \text{ (на } \mathbb{T}) \end{aligned}$$

При цьому виконується рівність $||b(\lambda)G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| = ||G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)b(\lambda)||$, яка є справедливою на $\mathbb{T}$, так як $b(\lambda)$ є унітарною на границі $\mathbb{T}$. Звідси випливає, що

$$||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| \le 1$$

на $\mathbb{T}$.

Покажемо, що $\det\big(b(\lambda)G_1(\lambda) + F_1(\lambda)d(\lambda)\big) \not\equiv 0$. Дійсно, для усіх $\lambda \in \mathbb{D}$ отримаємо

$$\begin{aligned}\det\big(b(\lambda)G_1(\lambda) + F_1(\lambda)d(\lambda)\big) &= \det\big(b^{-1}(\lambda)\big) \\ &\qquad \cdot \det\big(b(\lambda)G_1(\lambda) + F_1(\lambda)d(\lambda)\big) \cdot \det\big(d^{-1}(\lambda)\big) \\ &= \det\Big(b^{-1}(\lambda)\big(b(\lambda)G_1(\lambda) + F_1(\lambda)d(\lambda)\big)d^{-1}(\lambda)\Big) \\ &= \det\big(F(\lambda) + G(\lambda)\big) \not\equiv 0.\end{aligned}$$

Отже ми можемо застосувати Теорему 5.5.

$$\mathcal{M}(F_1 d + bG_1) \le \mathcal{M}(F_1 d). \tag{5.7}$$

З Леми 5.7 випливає, що

$$\mathcal{M}(F_1 d) = \mathcal{M}(F_1) + \mathcal{M}(d) = \mathcal{M}_\zeta(F_1) + \kappa_1. \tag{5.8}$$

Підставимо (5.8) в (5.6):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(F+G) &\le -\kappa + \mathcal{M}_\zeta(F_1) + \kappa_1 - \kappa_1 \\ &= -\kappa + \mathcal{M}_\zeta(F_1) = \mathcal{M}(F).\end{aligned}$$

Таким чином нерівність (5.4) доведена.

Залишилось перевірити приналежність $F_1 d(F_1 d + bG_1)^{-1} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Дійсно, за умовою

$$F(F+G)^{-1} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T}).$$

Тому

$$\begin{aligned}F(F+G)^{-1} &= b^{-1}F_1(b^{-1}F_1 + G_1 d^{-1}) \\ &= b^{-1}F_1\big(b^{-1}(F_1 d + bG_1)d^{-1}\big)^{-1} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

Позначимо $B := b^{-1}F_1 d(F_1 d + bG_1)^{-1} b \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Так як $\kappa < \infty$, то bBb^{-1} є визначеною м.в. на $\mathbb{T}$, а так як b є унітарною на $\mathbb{T}$, то матрично-значна функція bBb^{-1} належить $L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, але $bBb^{-1} = F_1 d(F_1 d + bG_1)^{-1}$.

Застосовуючи Теорему 5.5 до функції $F_1 d + bG_1$, аналогічно доводимо рівність (5.5) при виконанні умови $F(F+G)^{-1} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Теорема доведена. $\square$

Наслідок 5.9. *Нехай $F \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{n\times n}$, $G \in \mathcal{N}_{+,\kappa_1}^{n\times n}$. Якщо $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| < \rho < 1$ на $\mathbb{T}$, то $\mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F)$.*

Доведення. Для доведення достатньо показати, що $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in$

$L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Дійсно,

$$\begin{aligned}||F(\lambda)\big(F(\lambda)+G(\lambda)\big)^{-1}|| &= ||F(\lambda)\cdot F(\lambda)^{-1}\big(1+F(\lambda)^{-1}G(\lambda)\big)^{-1}|| \\ &= ||I\cdot\big(1+F(\lambda)^{-1}G(\lambda)\big)^{-1}|| \\ &\le (1-\rho)^{-1}<\infty \text{ (на } \mathbb{T}).\end{aligned}$$

Ми використали співвідношення, що $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| = ||F(\lambda)^{-1}G(\lambda)||$. □

Це твердження є більш загальним ніж результат отриманий у [12], бо ми не накладали умову нормальності матрично-значних функцій F і G та їх неперервність аж до контуру. В той же час відмітимо, що в [12] йдеться про операторно-значні функції.

5.1.3 Проблема $GSTP_\kappa(K,b)$

Сформулюємо інтерполяційну проблему, яку поставили та розв'язали В. Деркач і Г. Дим в [61].

Узагальнена проблема Шура-Такагі $GSTP_\kappa(K,b)$. Маємо внутрішню матрично-значну функцію $b\in\mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, функцію $K\in H_\infty^{p\times q}$ і ціле число $\kappa\ge 0$. Знайти усі матрично-значні функції $s\in\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ такі, що

$$(s-K)b^{-1}\in\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{5.9}$$

Визначимо $\mathcal{H}_*(b)$, як модельний простір $\mathcal{H}_*(b):=H_2^\perp\ominus b^*H_2^\perp$, і Π_-, як ортогональний проектор в L_2 на простір $H_2^\perp$ відповідної розмірності

Визначимо оператори $\Gamma:\mathcal{H}_*(b)\to(H_2^p)^\perp$ і $\mathbf{P}:\mathcal{H}_*(b)\to\mathcal{H}_*(b)$, які діють за правилом

$$\Gamma f=\Pi_-Kf\quad (f\in\mathcal{H}_*(b)), \tag{5.10}$$

$$\mathbf{P}=I-\Gamma^*\Gamma\quad (f\in\mathcal{H}_*(b)). \tag{5.11}$$

Теорема 5.10. *([61]) Для того щоб проблема $GSTP_\kappa(K,b)$ мала розв'язки необхідно і достатньо, щоб*

$$\nu_-(\mathbf{P})\le\kappa,$$

де оператор $\mathbf{P}$ визначаєтьcя рівністю (5.11).

Визначимо оператор

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\Gamma\\ I_{\mathcal{H}_*(b)}\end{bmatrix}:\mathcal{H}_*(b)\to(H_2^p)^\perp\oplus\mathcal{H}_*(b)$$

Нехай
$$\mathbf{F}(z) = E(z)\mathbf{F} \quad (z \in \mathfrak{h}_{b^\#}), \tag{5.12}$$
де $E(z)$ – оператор евалюації $E(z) : f \to f(z) \in \mathbb{C}^{p+q}$ в точці $z \in \mathfrak{h}_{b^\#}$, $\varphi \in H_2^\perp$.

Визначимо матрично-значну функцію $W(z)$ рівністю

$$W(z) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = I - (1 - z\overline{\zeta})\mathbf{F}(z)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\zeta)^* j_{pq} \quad (z, \zeta \in \mathfrak{h}_{b^\#} \cap \mathbb{T}). \tag{5.13}$$

Як показано в [61] матрично-значна функція $\begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ допускає взаємно просту факторизацію

$$\begin{bmatrix} w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = b^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

тобто
$$\ker b(z)^* \cap \ker \begin{bmatrix} \varphi_{21}(z) & \varphi_{22}(z) \end{bmatrix}^* = \{0\}.$$

Теорема 5.11. *([61]) Нехай оператор* $\mathbf{P}$*, що визначений формулою* (5.11)*, має оборотний, і* $\nu_-(\mathbf{P}) = \kappa$*. Нехай матрично-значна функція* $W(\lambda)$ *визначена формулою* (5.13)*. Тоді дробово-лінійне перетворення*

$$s = T_W[\varepsilon] = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1} \tag{5.15}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною розв'язків проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$ *і множиною функцій* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *таких, що факторизація*
$$w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z) = b(z)^{-1}\big(\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)\big) \tag{5.16}$$
є взаємно простою на $\mathbb{D}$*, де* $\varphi_{21}(z)$ *і* $\varphi_{22}(z)$ *визначаються рівністю* (5.14)*.*

5.2 Допоміжна дотична інтерполяційна проблема

Розглянемо наступну допоміжну інтерполяційну проблему.

Проблема $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ (Узагальнена дотична інтерполяційна проблема). Маємо матрично-значні функції $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. Описати усі матричні функції $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$, для яких виконується умова

$$\theta^{-1}(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2) \in H_\infty^{q\times r}. \tag{5.17}$$

У випадку, коли $q = p$ і $\varphi_1 \equiv I_q$ проблема $GTIP(\theta, I_q, \varphi_2)$ співпадає з дотичною інтерполяційною проблемою, що була розглянута в [2], [73], [27]. Далі буде наведено різні методи опису розв'язків проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

5.2.1 Абстрактна інтерполяційна проблема, що асоційована з допоміжною інтерполяційною проблемою $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$

Сформулюємо інтерполяційну проблему $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, як абстрактну інтерполяційну проблему, для цього розглянемо декілька допоміжних тверджень.

Нехай $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. Для внутрішньої функції $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ введемо два модельних простори

$$\mathcal{H}(\theta) = H_2^q \ominus \theta H_2^q, \quad \mathcal{H}_*(\theta) = (H_2^q)^\perp \ominus \theta^*(H_2^q)^\perp.$$

Введемо оператори $N_1 : H_2^p \to \mathcal{H}(\theta)$ і $N_2 : H_2^r \to \mathcal{H}(\theta)$, які діють за правилом

$$N_1 f = \Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_1 f, \quad N_2 g = -\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_2 g \ \ (f \in H_2^p,\ g \in H_2^r). \tag{5.18}$$

Тоді оператори $N_1^* : \mathcal{H}(\theta) \to H_2^p$ і $N_2^* : \mathcal{H}(\theta) \to H_2^r$ діють за правилом

$$N_1^* f = \Pi_+\varphi_1^* f, \quad N_2^* f = -\Pi_+\varphi_2^* f \ \ (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{5.19}$$

Позначимо

$$Pf = (N_1N_1^* - N_2N_2^*)f, \tag{5.20}$$

для $f \in \mathcal{H}(\theta)$.

Введемо у просторі $\mathcal{H}(\theta)$ скалярний добуток за формулою

$$(f,g)_{\mathcal{H}(\theta)} = \left\langle (N_1N_1^* - N_2N_2^*)f,\, g\right\rangle_{st} = \langle Pf,\, g\rangle_{st}. \tag{5.21}$$

Розглянемо оператори $M_1 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^p$ і $M_2 : \mathcal{H}(\theta) \to \mathbb{C}^r$, які діють за правилом

$$M_1 f = (N_1^* f)(0), \ \ M_2 f = (N_2^* f)(0) \ \ (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{5.22}$$

Нехай оператор T – це оператор зсуву в просторі H_2^q. Нехай оператор $T_\theta : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{H}(\theta)$ – є зрізаним оператором зсуву в просторі $\mathcal{H}(\theta)$

$$T_\theta = \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} T \upharpoonright_{\mathcal{H}(\theta)},$$

тоді оператор T_θ^* є оператором зворотного зсуву в просторі $\mathcal{H}(\theta)$.

Лема 5.12. *Наступні тотожності є вірними*

$$N_j^* T_\theta^* = T^* N_j^* \quad (j = 1, 2), \tag{5.23}$$

де оператор T є оператором зсуву в просторі H_2^p або H_2^r, відповідно, при $j = 1, 2$.

Доведення. Нехай $f, g \in \mathcal{H}(\theta)$. Тоді за означенням оператора N_j

$$\begin{aligned}\langle N_j^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st} &= \langle \Pi_+ \varphi_j^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st}\\ &= \langle \varphi_j^* T_\theta^* f,\, g\rangle_{st}\\ &= \langle \varphi_j(\lambda)^* f(\lambda),\, \lambda g(\lambda)\rangle_{st}\\ &= \langle \Pi_+ \varphi_j^*(\lambda) f(\lambda),\, \lambda g(\lambda)\rangle_{st} = \langle T^* N_j^* f,\, g\rangle_{st}.\end{aligned}$$

Отже, дійсно, $N_j^* T_\theta^* = T^* N_j^*$ при $j = 1, 2$. □

Наслідок 5.13. *З рівностей* (5.23) *також слідують тотожності*

$$T_\theta N_j = N_j T \quad (j = 1, 2). \tag{5.24}$$

Лема 5.14. *Оператор P, що визначений рівністю* (5.20)*, і оператори M_1, M_2, які задаються рівностями* (5.22) *задовольняють рівнянню Ляпунова*

$$P - T_\theta P T_\theta^* = M_1^* M_1 - M_2^* M_2. \tag{5.25}$$

Доведення. Дійсно для будь-яких $f, g \in \mathcal{H}(\theta)$, використовуємо означення простору $\mathcal{H}$ і застосовуючи тотожності (5.23) і (5.24), отримаємо такий ланцюг перетворень

$$\begin{aligned}&\langle Pf,\, g\rangle_{st} - \langle T_\theta P T_\theta^* f,\, g\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) f,\, g\rangle_{st} - \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) T_\theta^* f,\, T_\theta^* g\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (N_1 N_1^* - N_2 N_2^*) f,\, g\rangle_{st} - \left\langle \big(N_1 (TT^*) N_1^* - N_2 (TT^*) N_2^*\big) f,\, g\right\rangle_{st}\\ &\quad= \left\langle \big(N_1 (I - TT^*) N_1^* - N_2 (I - TT^*) N_2^*\big) f,\, g\right\rangle_{st}\\ &\quad= \langle (M_1^* M_1 - M_2^* M_2) f,\, g\rangle_{st}.\end{aligned}$$

Отже, P задовольняє рівнянню Ляпунова (5.25). □

Пропозиція 5.15. *Рівняння Ляпунова* (5.25) *має єдиний розв'язок.*

Доведення. Нехай рівняння Ляпунова (5.25) має розв'язки P_1 і P_2. Нехай $\widetilde{P} = P_1 - P_2$. Тоді

$$\widetilde{P} = T_\theta \widetilde{P} T_\theta^*. \tag{5.26}$$

Підставимо (5.26) само в себе отримаємо, що

$$\widetilde{P} = T_\theta^n \widetilde{P} (T_\theta^*)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{5.27}$$

З [25, стр. 66] випливає, що $(T_\theta^*)^n \xrightarrow{s} 0$ і $||T_\theta^*|| \le 1$. Тоді (5.27) означає, що $\widetilde{P} = 0$, тобто $P_1 = P_2$. $\square$

З рівняння Ляпунова (5.25) випливає, що при умові $P \ge 0$ оператори $(\mathcal{H}(\theta), \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^r, I, T_\theta^*, M_1, M_2, P)$ задовольняють співвідношенню (1.18). Отже, ми можемо сформулювати абстрактну інтерполяційну проблему, що відповідає $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Проблема $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Маємо матричні функції $\theta \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_1 \in H_\infty^{q\times p}$, $\varphi_2 \in H_\infty^{q\times r}$. Нехай T^* – це оператор зворотного зсуву в просторі $\mathcal{H}(\theta)$, оператори M_1, M_2 визначені рівністю (5.22), оператор P задається формулою (5.20). Описати всі функції $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$, для яких існує лінійне відображення $F : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{B}(\varepsilon)$, що задовольняє такі умови:

(C1) $Ff = t \cdot FT^* f - \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 f \\ M_2 f \end{bmatrix}$, при $f \in \mathcal{H}(\theta)$ для м.в. $t \in \mathbb{T}$;

(C2) $||Ff||^2_{\mathcal{B}(\varepsilon)} \le \langle Pf, f\rangle_{st}$ при $f \in \mathcal{H}(\theta)$.

Зауваження 5.16. *Проблема* $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ *має розв'язок тоді і лише тоді, коли оператор* P*, що визначається формулою* (5.20)*, є невід'ємним оператором в просторі* $\mathcal{H}(\theta)$*. Далі будемо вважати, що* $P \ge 0$.

5.2.2 Еквівалентність GTIP і AIP'

Теорема 5.17. *Нехай оператори* N_1*,* N_2 *визначаються формулами* (5.18)*. Якщо функція* $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ *є розв'язком проблеми* $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$*, тоді відображення* $F : \mathcal{H}(\theta) \to \mathcal{B}(\varepsilon)$*, що відповідає функції* ε*, є єдиним, і задається формулою*

$$Ff = \begin{bmatrix} I_r & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix} \quad (\forall f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{5.28}$$

Доведення. Нехай

$$Ff = t \cdot FT_\theta^* f - \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 f \\ M_2 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_+ f \\ F_- f. \end{bmatrix}$$

Розглянемо аналітичне продовження $Ff(\cdot)$ в $\mathbb{D}$. З співвідношення $(C1)$ випливає, що

$$(F_+ f)(z) - z(F_+ T_\theta^* f)(z) = M_1 f - \varepsilon(z) M_2 f \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{5.29}$$

Підставимо в (5.29) $f = (I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g$, де $g \in \mathcal{H}(\theta)$ і $\zeta \in \mathbb{D}$, отримаємо

$$F_+(I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g - z F_+ T_\theta^* (I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g = (M_1 - \varepsilon(z) M_2)(I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g. \quad (5.30)$$

Підставимо співвідношення

$$T_\theta^*(1 - \zeta T_\theta^*)^{-1} = \frac{1}{\zeta}\big(-I + (I - \zeta T_\theta^*)^{-1}\big), \quad (5.31)$$

у формулу (5.30), отримаємо

$$F_+(I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g - \frac{z}{\zeta} F_+\big(-I + (I - \zeta T_\theta^*)^{-1}\big) g = (M_1 - \varepsilon(z) M_2)(I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g.$$

Помножимо обидві частини на ζ отримаємо, що

$$\zeta(F_+ g)(z) + (\zeta - z)\big(F_+(I - \zeta T^*)^{-1} g\big)(z) = \zeta\big((M_1 - \varepsilon(z) M_2)(I - \zeta T_\theta^*)^{-1} g\big)(z)$$

Підставимо у попередню рівність $\zeta = z$ отримаємо, що

$$(F_+ g)(z) = \big((M_1 - \varepsilon(z) M_2)(I - z T_\theta^*)^{-1} g\big)(z). \quad (5.32)$$

Використовуючи визначення (5.22) оператора M_1 і співвідношення (5.23) отримаємо, що

$$\begin{aligned} M_1(I - z T_\theta^*)^{-1} g &= E_0 N_1^* (I - z T_\theta^*)^{-1} g \\ &= E_0 (I - z T^*)^{-1} N_1^* g = (N_1^* g)(z). \end{aligned}$$

Аналогічно, маємо, що

$$M_2(I - z T_\theta^*)^{-1} g = (N_2^* g)(z).$$

Підставимо ці рівності в співвідношення (5.32), отримаємо, що

$$(F_+ g)(z) = (N_1^* g)(z) - \varepsilon(z)(N_2^* g)(z).$$

Аналогічно доводиться, що $(F_- g)(z) = \varepsilon(z)^*(N_1^* g)(z) - (N_2^* g)(z)$.
Дійсно, з співвідношення $(C1)$ випливає, що

$$(F_- f)(z) - z(F_- T_\theta^* f)(z) = \varepsilon^* M_1 f(z) - M_2 f(z).$$

Підставимо $f := (I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g$, де $g \in \mathcal{H}(\theta)$ і $\zeta \in \mathbb{D}$, отримаємо

$$F_-(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g - zF_-T_\theta^*(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g = \varepsilon^* M_1(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g - M_2(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g.$$

Далі з співвідношення (5.31) отримаємо, що

$$F_-(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g - \frac{z}{\zeta}F_-(I+(1-\zeta T_\theta^*)^{-1})g = \varepsilon^* M_1(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g - M_2(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g,$$

звідки, помноживши на ζ отримаємо, що

$$zF_-g + (\zeta - z)F_-(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g = \zeta\varepsilon^* M_1(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g - \zeta M_2(I-\zeta T_\theta^*)^{-1}g.$$

Підставимо $\zeta = z$ і використаємо вже доведені формули для N_1^*, N_2^* будемо мати, що

$$\begin{aligned}(F_-g)(z) &= \varepsilon^* M_1(I-zT_\theta^*)^{-1}g - M_2(I-zT_\theta^*)^{-1}g \\ &= \varepsilon^*(z)(N_1^*g)(z) - (N_2^*g)(z).\end{aligned}$$

□

Теорема 5.18. *Множини розв'язків проблем* $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ *і* $AIP'(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ *співпадають.*

Доведення. Крок 1. Нехай матрично-значна функція ε належить до класу $\mathcal{S}^{p\times r}$. Розглянемо відображення $F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$, яке задано формулою (5.28).

Відмітимо, що F_+f належить до класу H_2^p при будь-якому $f \in \mathcal{H}(\theta)$. Дійсно, з співвідношення (5.19) випливає, що

$$F_+f = \Pi_+\varphi_1^*f + \varepsilon\Pi_+\varphi_2^*f \in H_2^p.$$

Зараз розглянемо умови приналежності F_-f простору $(H_2^r)^\perp$. З співвідношень (5.19) випливає, що

$$F_-f = \varepsilon^*\Pi_+\varphi_1^*f + \Pi_+\varphi_2^*f. \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)) \tag{5.33}$$

Приналежність функції F_-f простору $(H_2^r)^\perp$ означає, що

$$\Pi_+F_-f = \Pi_+(\varepsilon^*\Pi_+\varphi_1^* + \Pi_+\varphi_2^*)f = 0. \quad (f \in \mathcal{H}(\theta))$$

Перепишемо ці рівності у спряженному вигляді

$$\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2)g = 0. \quad (g \in H_2^p) \tag{5.34}$$

Співвідношення (5.34) означає, що $(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2)g \in \theta H_2$, що відповідає умові (5.17) проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

`Крок 2.` Нехай функція $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ – це розв'язок проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. З формули (5.28) випливає, що відображення F задовольняє умові $(C1)$ проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Також з доведеного на Кроці 1 випливає, що відображення F діє у просторі $H_2^p \oplus (H_2^r)^\perp$.

Для того, щоб функція ε була розв'язком проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ залишилось довести, що виконуються умова $(C2)$. Дійсно, при будь-якому $f \in \mathcal{H}(\theta)$ виконано співвідношення

$$\begin{aligned}(Ff, Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} &= \int_{\mathbb{T}} \langle \begin{bmatrix} I_p & \varepsilon \\ \varepsilon^* & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_1^* f \\ -N_2^* f \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}} d\tau \\ &= \langle N_1^* f - \varepsilon N_2^* f, N_1^* f \rangle_{st} + \langle \varepsilon^* N_1^* f - N_2^* f, -N_2^* f \rangle_{st} . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Так як $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times r}$ – це розв'язок $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, то з рівності (5.34) випливає, що другий доданок у правій частині рівності (5.35) дорівнює нулю. Тоді рівність (5.35) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}(Ff, Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} &= \langle N_1^* f, N_1^* f \rangle_{st} - \langle \varepsilon N_2^* f, N_1^* f \rangle_{st} \\ &= \langle N_1 N_1^* f, f \rangle_{st} - \langle N_2^* f, \varepsilon^* N_1 f \rangle_{st} .\end{aligned}$$

Знову використовуючи співвідношенням (5.34) для другого доданку, отримаємо, що

$$(Ff, Ff)_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \langle N_1 N_1^* f, f \rangle_{st} - \langle N_2 N_2^* f, f \rangle_{st} = \langle Pf, f \rangle_{st} .$$

Таким чином, умову $(C2)$ доведено.

`Крок 3.` Нехай функція ε – це розв'язок $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Тоді за Теоремою 5.17 відображення $F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$, яке задане формулою (5.28) діє в простір $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Отже функція F_- діє в простір $(H_2^r)^\perp$, що є еквівалентним (дивись Крок 1) умові (5.17) проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ $\Box$

Зауваження 5.19. *Відмітимо, що по ходу доведення Теореми 5.18 ми показали, що для абстрактної інтерполяційної проблеми, яка побудована за даними допоміжної інтерполяційної дотичної проблеми* $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ *виконується рівність Парсевалю*

$$||Ff||^2_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \langle Pf, f \rangle_{st}, \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)) \tag{5.36}$$

де P – оператор Піка, що визначений рівністю (5.20).

5.2.3 Розв'язок допоміжної дотичної інтерполяційної проблеми. Метод універсального розширення

Поняття універсального розширення ізометричного оператора було введено в роботі [3] (дивись також [14]). Метод універсального розширення було застосовано для опису розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми. На цьому методі заснований такий опис розв'язку проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Розглянемо оператор $V : \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r \to \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p$, який діє за правилом

$$V : \begin{bmatrix} f \\ M_2 f \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T_\theta^* f \\ M_1 f \end{bmatrix} \quad (f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{5.37}$$

Пропозиція 5.20. *З рівняння Ляпунова* (5.25) *випливає, що оператор V, який визначений формулою* (5.37), *є ізометричним оператором.*

Позначимо дефектні підпростори оператора V як

$$N_{d_V} = \big(\mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r\big) \ominus d_V, \qquad N_{\Delta_V} = \big(\mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p\big) \ominus \Delta_V.$$

Числа $d_1 = \dim N_{d_V}$ і $d_2 = \dim N_{\Delta_V}$ називаються *рангами невизначеності* проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Пропозиція 5.21. *Дефектні підпросторі для оператора V мають вигляд*

$$N_{d_V} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r : \; Pg - \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} \varphi_2 u = 0 \right\}, \tag{5.38}$$

$$N_{\Delta_V} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p : \; T_\theta P g + \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} \varphi_1 u = 0 \right\}. \tag{5.39}$$

Доведення. Вектор $\begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix}$ належить дефектному підпростору N_{d_V}, якщо виконується умова

$$\langle Pg, f \rangle_{st} + (u, M_2 f)_{\mathbb{C}^r} = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{H}(\theta)). \tag{5.40}$$

Використаємо означенням операторів M_2 і N_2, для цього будемо ототожнювати константу u з постійною функцією. Перепишемо ліву частину рівності (5.40) у вигляді

$$\begin{aligned}\langle Pg, f\rangle_{st} + (u, M_2 f)_{\mathbb{C}^r} &= \langle Pg, f\rangle_{st} + \big(u, (N_2^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^r} \\ &= \langle Pg, f\rangle_{st} + \big(u, -(\Pi_+ \varphi_2^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^r} = \langle Pg, f\rangle_{st} - \langle u, \Pi_+ \varphi_2^* f\rangle_{st} \\ &= \big\langle Pg - \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} \varphi_2 u, f\big\rangle_{st} = 0.\end{aligned}$$

Таким чином, рівність (5.38) доведене. Аналогічно, доводиться рівність (5.39). Дійсно, вектор $\begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix}$ належить дефектному підпростору N_{Δ_V}, якщо виконується умова

$$\langle Pg, T_\theta^* f\rangle_{st} + (u, M_1 f)_{\mathbb{C}^p} = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{H}(\theta)).$$

Далі використаємо означенням операторів M_1 і N_1, отримаємо

$$\begin{aligned}\langle T_\theta Pg, f\rangle_{st} + (u, M_1 f)_{\mathbb{C}^p} &= \langle T_\theta Pg, f\rangle_{st} + \big(u, (N_1^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^p} \\ &= \langle T_\theta Pg, f\rangle_{st} + \big(u, (\Pi_+ \varphi_1^* f)(0)\big)_{\mathbb{C}^p} = \langle T_\theta Pg, f\rangle_{st} + \langle u, \Pi_+ \varphi_1^* f\rangle_{st} \\ &= \big\langle T_\theta Pg + \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} \varphi_1 u, f\big\rangle_{st} = 0.\end{aligned}$$

□

Наслідок 5.22. *Якщо оператор P, що визначений рівністю* (5.20), *має обернений, то перший ранг невизначеності d_1 проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ є максимальним, тобто*

$$d_1 = \dim N_{d_V} = r.$$

Дійсно, якщо оператор P має обернений, то дефектний підпростір N_{d_V} можна переписати у вигляді

$$N_{d_V} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r : \ g = P^{-1} \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} \varphi_2 u \right\}.$$

Наслідок 5.23. *Якщо оператор P має обернений, і до того ж $\theta(0)$ є оборотною матрицею, то другий ранг невизначеності d_2 проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ також є максимальним, тобто*

$$d_2 = \dim N_{\Delta_V} = p.$$

Дійсно, якщо $\theta(0)$ є оборотною матрицею, то оператор зсуву T_θ є оберненим. Отже дефектний підпростір N_{Δ_V} можна переписати у вигляді

$$N_{\Delta_V} = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p : \; g = -P^{-1}T_\theta^{-1}\Pi_{\mathcal{H}(\theta)}\varphi_1 u \right\}.$$

Нехай $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ – копії дефектних просторів N_{d_V} і N_{Δ_V}, відповідно. Введемо оператор

$$A : \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2 = d_V \oplus N_{d_V} \oplus \mathcal{L}_2 \to \mathcal{H}(\theta) \oplus \mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1 = \Delta_V \oplus N_{\Delta_V} \oplus \mathcal{L}_1,$$

який є унітарним розширенням ізометричного оператора V, що визначений формулою

$$A\upharpoonright_{d_V} = V, \quad A\upharpoonright_{N_{d_V}} = id : N_{d_V} \to \mathcal{L}_1 \quad A\upharpoonright_{\mathcal{L}_2} = id : \mathcal{L}_2 \to N_{\Delta_V},$$

де id позначає відображення тотожності.

Нехай $S : \mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2 \to \mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1$ – це оператор розсіювання унітарного оператора A, що є визначеним формулою (дивись [75])

$$S(z) = \Pi_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1}(I - zA\Pi_{\mathcal{H}(\theta)})^{-1}A\upharpoonright_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2}. \tag{5.41}$$

Наступний опис розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми було наведено в [73] (дивись також [14]).

Теорема 5.24. *([73]) Нехай $P \geq 0$, де оператор P є визначеним рівністю (5.20), нехай $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ є дефектними підпросторами ізометрії V, що побудована за формулою (5.37), нехай S є оператор розсіювання, що визначений за формулою (5.41). Тоді множина всіх розв'язків проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ параметризується стискаючими матрично-значними функціями $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$. А саме, для будь-якої матрично-значної функції $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ розв'язок $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ визначається за формулою*

$$\varepsilon = \Pi_{\mathbb{C}^p}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - S\upharpoonright_{\mathcal{L}_2}\omega\Pi_{\mathcal{L}_1})^{-1}S\upharpoonright_{\mathbb{C}^r}. \tag{5.42}$$

Зауваження 5.25. *Використовуючи блочне зображення для оператора розсіювання S*

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbb{C}^r \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbb{C}^p \\ \mathcal{L}_1 \end{bmatrix},$$

формулу (5.42) можна переписати у вигляді

$$\varepsilon = s_0 + s_2(I_{\mathcal{L}_2} - \omega s)^{-1}\omega s_1. \quad (\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]) \tag{5.43}$$

Як показано в [32, Теорема 1] з рівності Парсевалю (5.36) випливає

Пропозиція 5.26. *([32]) За умов Теореми* (5.24)*:*

(i) виконуються такі еквівалентні твердження

$$\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = \operatorname{rank}(I_p - s_0 s_0^*) - \dim N_{\Delta_V} \quad (\textit{м.в. на } \mathbb{T}), \tag{5.44}$$

$$\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2} - S^* S) = \operatorname{rank}(I_r - s_0^* s_0) - \dim N_{d_V} \quad (\textit{м.в. на } \mathbb{T}); \tag{5.45}$$

(ii) для будь-якого параметра $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, що відповідає розв'язку ε проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, має місце співвідношення

$$\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = \operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^p} - \varepsilon\varepsilon^*) - \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p} - \omega\omega^*), \tag{5.46}$$

$$\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2} - S^* S) = \operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^r} - \varepsilon^*\varepsilon) - \operatorname{rang}(I_{\mathbb{C}^p} - \omega^*\omega). \tag{5.47}$$

Пропозиція 5.27. *Нехай оператор P, що визначений рівністю* (5.20)*, задовольняє умові $P \geq 0$, і нехай*

$$0 \in \rho(P), \quad \det(\theta(0)) \neq 0. \tag{5.48}$$

Тоді оператор розсіювання S є внутрішньою функцією, тобто

$$I_{p+r} - SS^* = I_{p+r} - S^* S = 0 \quad (\textit{м.в. на } \mathbb{T}). \tag{5.49}$$

Доведення. З Наслідку 5.22 випливає, що ранг невизначеності d_1 проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ є максимальними, тобто $\dim N_{d_V} = r$. Тоді зі співвідношення (5.45) отримуємо, що

$$\operatorname{rank}(I_r - s_0^* s_0) \geq \dim N_{d_V} = r \quad (\text{м.в. на } \mathbb{T}).$$

Ця нерівність є можливою лише за умови $\operatorname{rank}(I_r - s_0^* s_0) = r$. Тоді зі співвідношення (5.45), отримуємо, що $\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^r \oplus \mathcal{L}_2} - S^* S) = 0$.

Аналогічно доводиться, що $\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = 0$. Дійсно, з Наслідку 5.23 випливає, що ранг невизначеності d_2 проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ є максимальними, тобто $\dim N_{\Delta_V} = p$. Зі співвідношення (5.44) отримуємо, що

$$\operatorname{rank}(I_{\mathbb{C}^p \oplus \mathcal{L}_1} - SS^*) = \operatorname{rank}(I_p - s_0 s_0^*) - \dim N_{\Delta_V} = 0 \quad (\text{м.в. на } \mathbb{T}).$$

□

Поєднуючи результати (5.46), (5.47) і (5.49), при виконанні умов (5.48) ми отримаємо класичну теорему Неванлінни-Адамяна-Арова-Крейна для проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ (дивись [1]).

Теорема 5.28. *Нехай оператор $P \geq 0$ є заданим рівністю* (5.20), *і виконуються умови* (5.48). *Тоді розв'язок ε проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ є внутрішньою (*-внутрішньою) матрично-значною функцією тоді і тільки тоді, коли відповідний параметр $\omega \in \mathcal{S}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ в формулі* (5.43) *також є внутрішньою (*-внутрішньою) функцією.*

5.2.4 Розв'язок допоміжної дотичної інтерполяційної проблеми. Метод резольвентної матриці

За деяких додаткових умов на дані проблеми $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ формула (5.43) може бути замінена дробово-лінійним перетворенням, яке породжено деякою матрично-значною функцією. В випадку дотичної і бідотичної інтерполяційної проблеми таке перетворення використовувалося в роботах [27], [2], а в скалярному випадку ($p = q = 1$) ще раніше в [1].

Зараз ми посилимо умову (5.48) на оператор $P \geq 0$, і припустимо у подальшому, що

$$0 \in \rho(P), \quad 1 \in \mathfrak{h}_\theta. \tag{5.50}$$

Перша з умов (5.50) означає, що простір $\mathcal{H}(\theta)$ зі скалярним добутком, що визначений формулою (5.21), є простором Гільберта. Друга умова означає, що для оператора V, який визначений формулою (5.37), точка $z = 1$ є точкою регулярного типу, і виконується рівність

$$\operatorname{ran}(1 - \Pi_{\mathcal{H}(\theta)} V) \dotplus \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{C}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\theta) \\ \mathbb{C}^q \end{bmatrix},$$

яка в свою чергу є еквівалентною умові $1 \in \rho(T_\theta^*)$.

Як показано в [42] множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми $AIP'(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ описується такою теоремою

Теорема 5.29. *Нехай оператори $\theta, \varphi_1, \varphi_2$ задовольняють умови* (5.50) *і $P \geq 0$, де оператор P є визначеним формулою* (5.20). *Нехай матрично-значна функція $U(z) = \begin{bmatrix} u_{11}(z) & u_{12}(z) \\ u_{21}(z) & u_{22}(z) \end{bmatrix} : \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)} \to \mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}$ задана рівністю*

$$U(z) = I - (1 - z) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} (I - zT_\theta^*)^{-1} P^{-1} (I - T_\theta^*)^{-*} \begin{bmatrix} M_1^* & -M_2^* \end{bmatrix}. \tag{5.51}$$

Тоді формула

$$\varepsilon = T_U[\omega] = (u_{11}\omega + u_{12})(u_{21}\omega + u_{22})^{-1} \tag{5.52}$$

дає опис усіх розв'язків інтерполяційної проблеми, коли ω пробігає клас

$\mathcal{S}^{p\times r}$.

Зауваження 5.30. *Перевага формули* (5.52) *полягає в тому, що в* (5.51) *представлена явна формула для резольвентної матриці U інтерполяційної задачі $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$. При цьому в роботі [42] формула* (5.52) *доведена в індефінітному випадку методом абстрактної інтерполяційної проблеми (дивись [57]).*

5.2.5 Максимум ентропії

Як відомо великий клас задач, чиї розв'язки можна описати дробово-лінійним перетворенням функції з класу Шура $\mathcal{S}^{p\times r}$, допускає єдиний розв'язок, у якого ζ-ентропійний інтеграл

$$\mathbf{E}_\zeta(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\ln\det(I-\varepsilon(e^{it})\varepsilon(e^{it})^*)d\sigma_\zeta(t), \tag{5.53}$$

приймає максимальне значення. Тут $\zeta\in\mathbb{D}$ і $d\sigma_\zeta(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|\zeta|^2}{|e^{it}-\zeta|^2}dt$ (дивись [68, Section 11]). Для проблеми $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ має місце таке твердження

Теорема 5.31. *Нехай оператори $\theta,\varphi_1,\varphi_2$ задовольняють умови* (5.50) *і $P\geq 0$, де оператор P є визначеним формулою* (5.20). *Нехай матричнозначна функція $U(\lambda):\mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}\to\mathbb{C}^{(p+r)\times(p+r)}$ задана рівністю* (5.51), *і розв'язок $\varepsilon\in\mathcal{S}^{p\times r}$ проблеми $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ визначається формулою* (5.52) *для деякою функції $\omega\in\mathcal{S}^{p\times r}$. Тоді для деякої фіксованої точки $\zeta\in\mathbb{D}\bigcap\mathfrak{h}_{u_{22}}$*

$$\mathbf{E}_\zeta(\varepsilon)\leq\ln\det\big(u_{22}(\zeta)u_{22}(\zeta)^*-u_{21}(\zeta)u_{21}(\zeta)^*\big). \tag{5.54}$$

При цьому рівність в формулі (5.54) *досягається тоді і лише тоді, коли*

$$\begin{aligned}\varepsilon(z)&=\varepsilon_{\max}(z)\\&=\big(u_{11}(z)u_{21}(\zeta)^*-u_{12}(z)u_{22}(\zeta)^*\big)\big(u_{21}(z)u_{21}(\zeta)^*-u_{22}(z)u_{22}(\zeta)^*\big)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.55}$$

Таким чином, рівність в формулі (5.54) *досягається, якщо розв'язок ε відповідає в формулі* (5.52) *параметру*

$$\omega(z)=\omega_{\max}(z)\equiv-u_{21}(\zeta)^*u_{22}(\zeta)^{-*}. \tag{5.56}$$

Доведення. Формула (5.54) випливає з опису розв'язків проблеми $GTIP(\theta,\varphi_1,\varphi_2)$ у вигляді дробово-лінійного перетворення (5.52). Як показано в [68, Theorem 11.1] ентропійний інтеграл (5.53) досягає максимуму у випадку, якщо ε має вигляд вид (5.55), що відповідає значенню параметра $\omega(z) \equiv -w_{21}(\zeta)^* w_{22}(\zeta)^{-*}$ в формулі (5.52). $\square$

5.3 Виняткові параметри

5.3.1 Класифікація виняткових параметрів

Повернемося до розгляду узагальненої проблеми Шура-Такаги (5.9).

Означення 5.32. *Параметр $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ називається винятковим для проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$, якщо порушується умова взаємної простоти факторизації* (5.16), *тобто $b(z)$ і $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$ мають спільний лівий дільник $\theta \in \mathcal{S}^{q\times q}$.*

Введемо таку класифікацію множини виняткових параметрів проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$. Нехай θ – це лівий дільник матрично-значної функції b ($\theta \not\equiv I$). Розглянемо множину

$$E(\theta) = \Big\{\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q} :\ \theta^{-1}(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}) \in H_\infty^{q\times q}\Big\}.$$

Якщо $\varepsilon \in E(\theta)$, то покладемо

$$\psi = \theta^{-1}(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}),$$

і отримаємо

$$\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22} = \theta\psi,$$

тобто θ є лівим дільником матрично-значної функції $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$. Так як θ – це нетривіальний лівий дільник b, то це означає, що факторизація (5.16) не є взаємно простою.

З іншого боку, будь-який винятковий параметр ε потрапляє у один з класів $E(\theta)$ при деякому виборі лівого дільника θ матрично-значної функції b.

Дійсно, якщо факторизація (5.16) не є взаємно простою, то існують $z_0 \in \mathbb{D}$ і $h_0 \in \mathbb{C}^p$ ($||h_0|| = 1$) такі, що

$$h_0^* b(z_0) = h_0^*\big(\varphi_{21}(z_0)\varepsilon(z_0) + \varphi_{22}(z_0)\big) = 0,$$

і отже обидві матрично-значні функції $b(z)$ і $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$ мають спільний лівий дільник

$$\theta(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\Pi_{h_0} + I - \Pi_{h_0},$$

де $\Pi_{h_0} = h_0 h_0^*$ – це ортогональний проектор на підпростір $\operatorname{span}\{h_0\}$ в $\mathbb{C}^p$. Тобто $\varepsilon \in E(\theta)$.

Зауваження 5.33. *Множина усіх виняткових параметрів проблеми $GSTP_\kappa(K, b)$ є об'єднанням множин $E(\theta)$, де θ є лівим дільником b. При цьому множина $E(\theta)$ є множиною розв'язків проблеми $GTIP(\theta, \varphi_{21}, \varphi_{22})$.*

Лема 5.34. *([60]) Нехай $\Psi \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, $b_1 \in H_\infty^{p\times p}$, $b_2 \in H_\infty^{q\times q}$ матрично-значні функції, такі що*

$$\mathcal{M}_\pi(b_1\Psi) = \mathcal{M}_\pi(\Psi).$$

Тоді

$$\mathcal{M}_\pi(b_1\Psi b_2) = \mathcal{M}_\pi(\Psi b_2).$$

Навпаки, якщо

$$\mathcal{M}_\pi(\Psi b_2) = \mathcal{M}_\pi(\Psi),$$

то

$$\mathcal{M}_\pi(b_1\Psi b_2) = \mathcal{M}_\pi(b_1\Psi).$$

Лема 5.35. *([61, Theorem 4.2]) Матричнозначна функція W, що визначена формулою* (5.13)*, допускає взаємно просту факторизацію*

$$W = \Theta\,\Phi, \quad \text{где } \Theta = \begin{bmatrix} I & Kb^{-1} \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.57}$$

і $\Phi^{\pm 1} \in H_2$.

Представимо матрично-значну функцію Φ, що визначена з факторизації (5.57), у блочному вигляді $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$, де φ_{11} і φ_{22} – матрично-значні функції із значенням у $\mathbb{C}^{p\times p}$ і $\mathbb{C}^{q\times q}$, відповідно.

Визначимо матрично-значні функції

$$H = \varphi_{11}\varepsilon + \varphi_{12}, \quad G = \varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}. \tag{5.58}$$

Лема 5.36. *([61, Lemma 5.5]) Нехай матрично-значна функції W, що визначена формулою* (5.13)*, допускає факторизацію* (5.57)*. Нехай $\nu_-(\mathbf{P}) = \kappa$, де оператор $\mathbf{P}$ визначений формулою* (5.11)*. Нехай матрично-значна функція s визначена дробово-лінійним перетворенням* (5.15) *$s = T_W[\varepsilon]$. Тоді матрично-значна функція $(s-K)b^{-1}$ припускає взаємно просту факторизацію*

$$(s-K)b^{-1} = HG^{-1}, \tag{5.59}$$

де функції H і G визначені формулами (5.58). *При цьому $H \in \mathcal{N}_{+}^{p\times q}$, $G \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{q\times q}$.*

Теорема 5.37. *Нехай $b \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $K \in H_{\infty}^{p\times q}$ і $\kappa \in \mathbb{N}$. Нехай $\nu_{-}(\mathbf{P}) = \kappa$, де оператор $\mathbf{P}$ визначається формулою* (5.11). *Визначимо матрично-значні функції φ_{21} і φ_{22} рівністю* (5.14) *та матрично-значну функцію W рівністю* (5.13).

Нехай θ є лівим дільником матрично-значної функції b, при цьому

$$b(z) = \theta(z)\widetilde{b}(z), \tag{5.60}$$

і $\deg\theta = \kappa_0 \le \kappa$. Нехай $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ є розв'язком проблеми $GTIP(\theta, \varphi_{21}, \varphi_{22})$, тобто

$$\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z) = \theta(z)\psi(z) \tag{5.61}$$

для деякої $\psi \in H_{\infty}^{q\times q}$. Тоді матрично-значна функція $s = T_W[\varepsilon]$ вигляду (5.15), *належить до класу $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p\times q}$, де $\kappa_1 \le \kappa - \kappa_0$, і*

$$(s - K)\widetilde{b}^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}^{p\times q}. \tag{5.62}$$

При цьому

$$(s - K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{5.63}$$

У випадку, коли θ є найбільшим лівим дільником b і $\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}$, виконується рівність $\kappa_1 = \kappa - \kappa_0$.

Умову (5.62) можна трактувати як виконання рівно $\kappa - \kappa_0$ інтерполяційних умов для функції $s \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_0}^{p\times q}$, у той час як (5.63) означає, що не всі інтерполяційні умови проблеми (5.9) виконуються.

Доведення. `Крок 1.` Покажемо, що $s \in S_{\kappa_1}^{p\times q}$. З взаємно простої факторизації (5.59) випливає, що

$$\mathcal{M}_{\pi}(HG^{-1}) = \mathcal{M}_{\pi}(G^{-1}) = \kappa.$$

Тоді з Леми 5.34 слідує, що

$$\mathcal{M}_{\pi}(HG^{-1}b) = \mathcal{M}_{\pi}(G^{-1}b).$$

Далі, так як $HG^{-1}b = s - K$ і $G^{-1}b = \psi^{-1}\widetilde{b}$ (дивись формули (5.59), (5.61) і (5.60)), тоді

$$\mathcal{M}_{\pi}(s) = \mathcal{M}_{\pi}(s - K) = \mathcal{M}_{\pi}(\psi^{-1}\widetilde{b}) \le \kappa - \kappa_0.$$

У випадку, коли θ є найбільшим спільним дільником b і $\varphi_{21}\varepsilon+\varphi_{22}$ отримаємо, що

$$\mathcal{M}_\pi(s)=\mathcal{M}_\pi(\psi^{-1}\widetilde{b})=\kappa-\kappa_0.$$

`Крок 2.` Покажемо, що $(s-K)\widetilde{b}^{-1}\in\mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}^{p\times q}$. Відмітимо, що

$$(s-K)\widetilde{b}^{-1}=HG^{-1}\theta.$$

Знову, за Лемою 5.34

$$\mathcal{M}_\pi(HG^{-1}\theta)=\mathcal{M}_\pi(G^{-1}\theta).$$

Отже, так як θ є дільником G,

$$\mathcal{M}_\pi\big((s-K)\widetilde{b}^{-1}\big)=\mathcal{M}_\pi(G^{-1}\theta)=\kappa-\kappa_0.$$

`Крок 3.` Приналежність $(s-K)b^{-1}$ до класу $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ випливає з Леми (5.36). $\square$

5.3.2 Опис винняткових параметрів у скалярному випадку

Результат, який отримано в Теоремі 5.37, в одновимірному випадку зводиться до відомого результату В. Болотнікова ([48]). В [48] була розглянута така *одновимірна* індефінітна проблема Каратеодорі-Фейєра.

Проблема CF_κ***.*** Маємо k різних точок $z_1,\dots,z_k\in\mathbb{D}$ і додатних цілих чисел $n_1,\dots,n_k$, і $N:=\sum\limits_{i=1}^{k}n_i$ комплексних чисел $s_{i,j}$ $(0\le j\le n_i-1;\ 1\le i\le k)$. Нехай κ – це невід'ємне ціле число. Знайти усі функції $s\in\mathcal{S}_\kappa$, котрі є аналітичними в точках z_i і задовольняють умови

$$s^{(j)}(z_i)=j!s_{i,j}\quad(i=1,\dots,k;\ j=0,\dots,n_i-1). \tag{5.64}$$

Іншими словами, треба знайти усі функції $s\in\mathcal{S}_\kappa$, у яких розклад у ряд Тейлора в точках z_i має вигляд

$$s(z)=s_{i,0}+(z-z_i)s_{i,1}+\dots+(z-z_i)^{n_i-1}s_{i,n_i-1}+o\big((z-z_i)^{n_i-1}\big)$$

для $i=1,\dots,k$.

Введемо декілька умовних позначень.

Нехай $J_n(\alpha)$ – одноклітинна матриця Жордана розміру $n \times n$

$$J_n(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

За даними проблеми побудуємо матриці

$$\widehat{T} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(z_k) \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{n_1} & \cdots & L_{n_k} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_k \end{bmatrix},$$

де L_{n_i} і C_i – це вектор рядки довжиною n_i вигляду

$$L_{n_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} s_{i,0} & s_{i,1} & \cdots & s_{i,n_i-1} \end{bmatrix}.$$

Нехай $\widehat{P}$ – це матриця Піка, що визначена за правилом

$$\widehat{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{T}^*)^k (L^*L - C^*C)\widehat{T}^k. \tag{5.65}$$

Так як $|z_i| < 1$, то ряд (5.65) збігається і матриця Піка P є розв'язком рівняння Ляпунова-Стейна

$$\widehat{P} - \widehat{T}^* \widehat{P} \widehat{T} = L^*L - C^*C. \tag{5.66}$$

Нехай матриця $\widehat{W}(z) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ обчислюється за формулою

$$\widehat{W}(z) = I_2 + (1-z) \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - \widehat{T})^{-1} \widehat{P}^{-1} (I - \widehat{T}^*)^{-1} \begin{bmatrix} -C^* & L^* \end{bmatrix}. \tag{5.67}$$

Визначимо матрично-значну функцію $\Omega(z)$ рівністю

$$\Omega(z) := \begin{bmatrix} \Omega_{11}(z) & \Omega_{12}(z) \\ \Omega_{21}(z) & \Omega_{22}(z) \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{n_i} \right) \widehat{W}(z). \tag{5.68}$$

Теорема 5.38. *([48]) Нехай матриця Піка $\widehat{P}$ проблеми CF_κ* (5.64) *є визрод-*

женою і має κ від'ємних власних значень. Нехай матрично-значна функція Ω *побудована за формулою* (5.68). *Тоді всі розв'язки* s *проблеми* (5.64) *параметризуються формулою*

$$s(z) = T_\Omega[\varepsilon], \tag{5.69}$$

де параметр $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *задовольняє нерівностями*

$$\Omega_{21}(z_i)\varepsilon(z_i) + \Omega_{22}(z_i) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, k). \tag{5.70}$$

Означення 5.39. *([48]) Функція* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *називається* винятковим параметром *перетворення* (5.69), *якщо вона не задовольняє хоча б одну з умов* (5.70). *Винятковий параметр* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *має* мультипорядок $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_k)$, *якщо функція* $\Omega_{21}(z)\varepsilon(z) + \Omega_{22}(z)$ *має нулі кратності* m_i *в точках* z_i *при* $i = 1, \dots, k$.

З попереднього визначення випливає, що параметр дробово-лінійного перетворення, який не є винятковим – це параметр мультипорядку $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Зафіксуємо мультиіндекс $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$, що визначений даними проблеми CF_κ (5.64). В залежності від мультиіндексу $\mathbf{n}$ розіб'ємо індекси мультипорядку $\mathbf{m}$ на множині

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^- = \Big\{ i \in \{1, \dots, k\} : m_i \leq n_i \Big\}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^+ = \Big\{ i \in \{1, \dots, k\} : m_i > n_i \Big\}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^0 = \Big\{ i \in \{1, \dots, k\} : m_i = 0 \Big\} \subset \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^-.$$

Нехай $\gamma_{\mathbf{m}} := \sum\limits_{i \in \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^-} m_i + \sum\limits_{i \in \mathcal{Z}_{\mathbf{m}}^+} n_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \min\{m_i, n_i\}$.

Теорема 5.40. *([48]) Якщо* $\varepsilon \in \mathcal{S}$ *– це винятковий параметр мультипорядку* $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_k)$, *то функція* $s = T_\Omega[\varepsilon]$ *належить до класу* $\mathcal{S}_{\kappa - \gamma_{\boldsymbol{m}}}$,

$$s = T_\Omega[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa - \gamma_{\boldsymbol{m}}}. \tag{5.71}$$

Крім того, функція s *має полюси порядку* $m_i - n_i$ *в точці* z_i *при* $i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^+$, *і задовольняє інтерполяційні умови*

$$s^{(j)}(z_i) = j! s_{i,j} \quad (j = 0, \dots n_i - m_i - 1) \quad (i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^-), \tag{5.72}$$

а також умові

$$s^{(n_i-m_i)}(z_i) \neq (n_i-m_i)!s_{i,n_i-m_i} \quad (i \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^- \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}^0). \tag{5.73}$$

Зауваження 5.41. *Якщо параметр $\varepsilon \in S$ має мультипорядок $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$, то твердження Теореми 5.40 співпадає з відповідною частиною Теореми 5.38.*

5.3.3 Зіставлення результатів

Покажемо, що наш результат Теорема 5.37 є матричним аналогом результату В. Болотнікова. Сформулюємо задачу CF_κ (5.64), як *скалярну* задачу Шура-Такаги.

Проблема CF'_κ**.** Нехай κ – це невід'ємне ціле число. Нехай b – це добуток Бляшке, що має нулі порядку n_i в точках $z_i \in \mathbb{D}$

$$b(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z-z_i}{1-z\overline{z}_i} \right)^{n_i};$$

і K – це будь-яка голоморфна функція, що задовольняє інтерполяційні умови (5.64)[1]. Знайти всі функції $s \in \mathcal{S}_\kappa$, такі що

$$(s-K)b^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}. \tag{5.74}$$

Проблеми CF_κ (5.64) і CF'_κ (5.74) є еквівалентними. Дійсно, умова (5.74) є еквівалентною умові, що функція $s-K$ є голоморфною в нулях функції b. При цьому нулі функцій $s-K$ і b співпадають з урахування кратності. Тобто

$$s^{(j)}(z_i) = K^{(j)}(z_i) = j!s_{i,j} \quad (i=1,...,k; j=0,...,n_i-1).$$

Відмітимо, що функція K має таких розклад Тейлора в околі точці z_i

$$K(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{i,\ell}(z-z_i)^\ell, \quad (i=1,...,k) \tag{5.75}$$

де

$$c_{i,\ell} = \frac{K^{(\ell)}(z_i)}{\ell!} = s_{i,\ell}. \quad (\ell = 0,..,n_i-1)$$

Покажемо, що формула (5.69), яка описує розв'язок проблеми CF_κ (5.64), співпадає з формулою (5.15), яка описує розв'язок проблеми CF'_κ (5.74).

[1] Наприклад в якості функції K можна вибрати відповідний інтерполяційний поліном Ерміта.

Розглянемо такі оператори в просторі $\mathcal{H}_*(b)$: T – це оператор зворотного зсуву, E – це оператор евалюації в нескінченності

$$(Th)(z) = zh(z) - \lim_{z\to\infty} zh(z) \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)), \tag{5.76}$$

$$Eh = \lim_{z\to\infty} zh(z) \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)). \tag{5.77}$$

Нехай оператор $\mathbf{P} : \mathcal{H}_*(b) \to \mathcal{H}_*(b)$ є визначений формулою (5.11). Як показано в [61, Theorem 3.16], оператор $\mathbf{P}$ можна визначити рівнянням Ляпунова-Стейна

$$\mathbf{P} - T^*\mathbf{P}T = -B^* j_{11} B, \tag{5.78}$$

де $B = \begin{bmatrix} E\Gamma \\ E \end{bmatrix}$ оператор з $\mathcal{H}_*(b)$ в $\mathbb{C}^2$ (оператор Γ визначається формулою (5.10)).

Як відомо, множина функцій

$$\left\{f_{ij}(z)\right\}_{i=1,..,k;\, j=0,...,n_i-1} = \left\{\frac{1}{(z-z_i)^{j+1}}\right\}_{i=1,..,k;\, j=0,...,n_i-1} \tag{5.79}$$

є базисом в просторі $\mathcal{H}_*(b)$. В базису (5.79) оператор зворотного зсуву T задається матрицею

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(z_k) \end{bmatrix} = \widehat{T}.$$

Оператор евалюації E в базисі (5.79) діє як

$$Ef_{i,j} = \begin{cases} 1: & j = 0 \\ 0: & j \neq 0 \end{cases}. \tag{5.80}$$

Тоді цей оператор E задається матрицею

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = L.$$

В базисі (5.79) при $i = 1, .., k$ та $j = 0, ..., n_i - 1$ оператор Γ діє як

$$
\begin{aligned}
\Gamma f_{ij} = \Pi_- K(z) f_{ij} &= \Pi_- \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{i,\ell} (z - z_i)^{\ell} \cdot \frac{1}{(z - z_i)^{j+1}} \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{j} \frac{c_{i,\ell}}{(z - z_i)^{j-\ell+1}} \qquad (5.81) \\
&= \sum_{\ell=0}^{j} c_{i,\ell} f_{i,j-\ell+1},
\end{aligned}
$$

де коефіцієнти $c_{i,j}$ задаються з розкладу в ряд Тейлора (5.75) функції K.

З формул (5.80) і (5.81) випливає, що

$$
E\Gamma f_{i,j} = c_{i,j} = s_{i,j}. \quad (i = 1, .., k, \; j = 0, ..., n_i - 1).
$$

Тоді композиція операторів $E\Gamma$ в базисі (5.79) задається матрицею

$$
\begin{bmatrix} s_{1,0} & \cdots & s_{1,n_1-1} & s_{2,0} & \cdots & s_{k,n_k-1} \end{bmatrix} = C.
$$

Визначимо матрицю Грама $\mathbb{P}$ оператора $\mathbf{P}$ рівністю

$$
\mathbb{P} = \left(\langle \mathbf{P} f_{ij}, f_{i'j'} \rangle_{st} \right)_{i=1,..,k;\, i'=1,...,k}^{j=0,..,n_i-1;\, j'=0,...,n_{i'}-1}. \qquad (5.82)
$$

Таким чином, з рівняння Ляпунова-Стейна (5.78) випливає, що матриця Грама $\mathbb{P}$ задовольняє рівнянню

$$
\mathbb{P} - \widehat{T}^* \mathbb{P} \widehat{T} = L^* L - C^* C.
$$

Відмітимо, що це рівняння співпадає з рівнянням (5.66) для матриці Піка $\widehat{P}$ проблеми CF_κ (5.64). Отже, матриці $\mathbb{P}$ і $\widehat{P}$ співпадають.

Як випливає з роботи [61, Lemma 3.11] оператор $\mathbf{F}(z)$, що заданий рівністю (5.12), можна визначити формулою

$$
(\mathbf{F}h)(z) = \begin{bmatrix} E\Gamma \\ E \end{bmatrix} (1 - zT)^{-1} h \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)). \qquad (5.83)
$$

Запишемо формулу (5.83) в базисі (5.79)

$$
(\mathbf{F}h)(z) = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - \widehat{T})^{-1} h \quad (h \in \mathcal{H}_*(b)).
$$

Підставимо отримані результати в рівність (5.13) для резольвентної матриці W

$$W(z) = I - (1-z)\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}(zI - \widehat{T})^{-1}\widehat{P}^{-1}(I - \widehat{T}^*)^{-1}\begin{bmatrix} C^* & L^* \end{bmatrix} j_{11}.$$

Ця рівність співпадає з формулою (5.67) для резольвентної матриці $\widehat{W}$ проблеми CF_κ (5.64). Отже, описи розв'язків проблеми CF_κ (5.64) і CF'_κ (5.74) є еквівалентними.

Покажемо, що Означення 5.32 виняткових параметрів співпадають з Означенням 5.39. Нехай ε є винятковим параметром в сенсі Означення 5.39. Тоді

$$\Omega_{21}(z_i)\varepsilon(z_i) + \Omega_{22}(z_i) \quad \text{для деякого } i \le k.$$

Це означає, що

$$\left(\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)^{n_j}\big(w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z)\big)\right)\restriction_{z=z_i} = 0,$$

отже

$$\Big(b(z)\big(w_{21}(z)\varepsilon(z) + w_{22}(z)\big)\Big)\restriction_{z=z_i} = 0.$$

Таким чином, функція

$$w_{21}\varepsilon + w_{22} = b^{-1}\big(\varphi_{21}\varepsilon + \varphi_{22}\big) \tag{5.84}$$

має в точці z_i полюс порядку не більше ніж $n_i - 1$, в той час, як взаємна простота факторизації (5.16) означає, що функція (5.84) має полюс порядку n_i в точці z_i.

Проводячи міркування у зворотному порядку, ми отримаємо еквівалентність Означення 5.32 і Означення 5.39.

Нехай ε є винятковим параметром проблеми CF_κ (5.64) мультипорядку $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$, і $m_i \le n_i$ (i=1,...,k),

$$\kappa_0 := m_1 + m_2 + ... + m_k.$$

Тоді функція $\theta(z)$, визначена рівністю

$$\theta(z) = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{z-z_i}{1-z\overline{z}_i}\right)^{m_i}, \tag{5.85}$$

є найбільшим спільним дільником $b(z)$ і $\varphi_{21}(z)\varepsilon(z) + \varphi_{22}(z)$. Відмітимо, що $\deg\theta = \kappa_0$ і

$$\widetilde{b}(z) = b(z)/\theta(z) = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{z - z_i}{1 - z\overline{z}_i}\right)^{n_i - m_i}.$$

В силу Теореми 5.37 отримаємо, що $s = T_W[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_0}$ і

$$\frac{s(z) - K(z)}{\widetilde{b}(z)} \in \mathcal{N}_{+,\kappa-\kappa_0}, \quad \frac{s(z) - K(z)}{b(z)} \in \ \mathcal{N}_{+,\kappa}. \tag{5.86}$$

При цьому перше з включень (5.86) означає, що

$$s^{(j)}(z_i) = j!s_{i,j} \ \ (i = 0, \dots, k; \ \ j = 0, \dots n_i - m_i - 1),$$

а друге означає, що

$$s^{(n_i - m_i)}(z_i) \neq (n_i - m_i)!s_{i,n_i-m_i} \ \ (i = 0, \dots, k).$$

Звідси випливають умови (5.72) і (5.73).

Таким чином опис виняткових параметрів, який ми отримали, містить в собі, як частковий випадок, результати роботи [48].

5.4 Приклад

Нехай $\kappa = 1$, $p = 1$, $q = 2$. Нехай $b = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$. Тоді проблему $GSTP_\kappa(K, b)$ можна сформулювати таким чином: Знайти всі функції $s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_1^{1\times 2}$ такі, що

$$\left(s - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_{+,1}^{1\times 2}. \tag{5.87}$$

Умова (5.87) є еквівалентною системі рівнянь

$$s_1(0) = 0, \quad s_2(0) = 2. \tag{5.88}$$

Простір $\mathcal{H}_*(b)$, що співпадає з множиною

$$\mathcal{H}_*(b) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1/z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/z \end{bmatrix}\right\},$$

будемо ототожнювати з простором $\mathbb{C}^2$. Оператори Γ, $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, визначені формулами (5.10), (5.11), (5.12), відповідно, дорівнюють в базисі $\left\{\begin{bmatrix}1/z\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1/z\end{bmatrix}\right\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Резольвентна матриця W, що визначена формулою (5.13), дорівнює

$$W(z) = \frac{1}{3z}\begin{bmatrix}4-z & 0 & z-2\\0 & 3 & 0\\2-z & 0 & 4z-1\end{bmatrix}$$

За Теоремою 5.11 множина розв'язків задачі (5.87) параметризується формулою

$$s = T_W[\varepsilon] = \begin{bmatrix}\dfrac{-3\varepsilon_1 z}{2\varepsilon_2 z - 2\varepsilon_2 - 4z + 1} & \dfrac{\varepsilon_2 z - 4\varepsilon_2 - 2z + 2}{2\varepsilon_2 z - 2\varepsilon_2 - 4z + 1}\end{bmatrix},$$

де матрично-значна функція $\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix}$ є такою, що факторизація

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}z\\\frac{2-z}{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1(z) & \varepsilon_2(z)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{3}{z} & 0\\0 & \frac{4z-1}{z}\end{bmatrix}\\&\qquad = \begin{bmatrix}\frac{1}{z} & 0\\0 & \frac{1}{z}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\2-z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1(z) & \varepsilon_2(z)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4z-1\end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{5.89}$$

є взаємно простою.

Позначимо матрично-значні функції

$$\varphi_1(z) = \begin{bmatrix}0\\2-z\end{bmatrix}, \quad \varphi_2(z) = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4z-1\end{bmatrix}.$$

Нехай θ – лівий дільник b, і нехай

$$\theta(z) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & z\end{bmatrix}.$$

Для визначення виняткових параметрів ε, що відповідають дільнику θ, розглянемо узагальнену дотичну проблему $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. В проблемі $GTIP(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ нам необхідно знайти всі функції $\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix} \in \mathcal{S}^{1\times 2}$ такі, що

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/z\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\2-z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4z-1\end{bmatrix}\right) \in H_2^2. \tag{5.90}$$

Простір $\mathcal{H}(\theta)$, що співпадає з множиною

$$\mathcal{H}(\theta) = \operatorname{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\},$$

будемо ототожнювати з простором $\mathbb{C}$. Оператори N_1, N_2, P, що визначені формулами (5.18), (5.20), відповідно, дорівнюють

$$N_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Так як $P > 0$, то можна скористатись Теоремою (5.29) для опису розв'язків проблеми (5.90). Матричнозначна функція U, що визначена формулою (5.51) дорівнює

$$U(z) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1-4z & 0 & 2-2z \\ 0 & 3 & 0 \\ 2z-2 & 0 & 4-z \end{bmatrix}.$$

За Теоремою 5.29 множина розв'язків проблеми (5.90) параметризується формулою

$$\varepsilon = T_U[\omega] = \begin{bmatrix} \dfrac{3\omega_1 z}{2\omega_2 z - 2\omega_2 - z + 4} & \dfrac{4\omega_2 z - \omega_2 - 2z + 2}{2\omega_2 z - 2\omega_2 - z + 4} \end{bmatrix},$$

де матрично-значна функція $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix}$ пробігає клас $\mathcal{S}^{1\times 2}$.

Відмітимо, що матрично-значна функція

$$s(z) = T_W[\varepsilon] = T_W\big[T_U[\omega]\big] = \begin{bmatrix} \omega_1 z & \omega_2 \end{bmatrix},$$

належить до класу $\mathcal{S}^{1\times 2}$. При цьому значення в точці 0 матрично-значної функції s дорівнює

$$s(0) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_2(0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, якщо ε є винятковим параметром, що відповідає дільнику θ, то відповідна матрично-значна функція s, що обчислюється за формулою $s = T_W[\varepsilon]$, не задовольняє другому з інтерполяційних умов (5.88)

Зараз розглянемо інший лівий дільник b. Нехай

$$\theta'(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, простір $\mathcal{H}(\theta')$, що співпадає з множиною

$$\mathcal{H}(\theta') = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

будемо ототожнювати з простором $\mathbb{C}$. Оператори N_1', N_2', P', що визначені за формулами (5.18), (5.20), відповідно, дорівнює

$$N_1' = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad N_2' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}.$$

Так як $P' < 0$, то проблема $GTIP(\theta', \varphi_1, \varphi_2)$ не має розв'язків. Отже, не існує виняткових параметрів ε, що відповідають дільнику θ'.

5.5 Висновки до розділу 5

Результати розділу опубліковано в роботах [89], [24].

1) Введено до розгляду новий клас мероморфних в $\mathbb{D}$ матрично-значних функцій, так званий узагальнений клас Смірнова з κ полюсами в $\mathbb{D}$, який у випадку $\kappa = 0$ співпадає з класичним класом Смірнова. Доведено аналог теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

2) Знайдено опис виняткових параметрів узагальненої дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі. Для цього розглянуто нову допоміжну дотичну проблему, яку розв'язано методом абстрактної інтерполяційної проблеми, запропонованим в [14]. Множина розв'язків цієї проблеми наведена у двох формах: у формі перетворення Редхефера за допомогою оператора розсіювання симетричного оператора, що є породженим даними проблеми; і в формі дробово-лінійного перетворення за допомогою резольвентної матриці. В скалярному випадку отриманий опис виняткових пар, що співпадає з результатами робіт В. Болотнікова, О. Хейфеца і П. Юдицького (дивись [48]).

Висновки

В дисертаційній роботі розглянуто і досліджено абстрактну інтерполяційну проблему в класі узагальнених функцій Неванлінни. Основними результатами роботи є:

1) Введено поняття нормалізованої N_κ-пари, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню у просторі Понтрягіна. Показано, що для кожної нормалізованої N_κ-пари існує єдине з точністю до унітарної еквівалентності мінімальне самоспряжене лінійне відношення A у просторі Понтрягіна, таке що пара $\{\varphi, \psi\}$ відповідає цьому відношенню A. Для кожної узагальненої неванліннівської пари побудовано функціональну модель самоспряженого лінійного відношення A у просторі Понтрягіна з відтворюючим ядром. Для узагальненої функції Неванлінни $m \in N_\kappa$ наведено опис простору де Бранжа-Ровняка $\mathcal{H}(m)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathsf{N}_\omega^m(\lambda)$.

2) Розглянуто абстрактну інтерполяційну проблему в класі N_κ-пар. З кожною абстрактною інтерполяційною проблемою пов'язано деяке симетричне відношення $\widehat{A}$ у просторі Понтрягіна, таке що множина розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ цього симетричного відношення $\widehat{A}$. Знайдено вигляд резольвентної матриці оператора $\widehat{A}$ в термінах даних інтерполяції. За допомогою цієї матриці отримано параметризацію всіх розв'язків абстрактної інтерполяційної проблеми у вигляді дробово-лінійного перетворення довільної неванліннівської пари. Розглянуто питання про однозначність побудови узагальненого перетворення Фур'є по розв'язку проблеми абстрактної інтерполяційної проблеми.

3) Метод абстрактної інтерполяційної проблеми застосовано до повної індефінітної проблеми моментів. Побудовано абстрактну інтерполяційну проблему, множина розв'язків якої співпадає з множиною розв'язків індефінітної проблеми моментів. Показано, що для цієї абстрактної проблеми виконується властивість Парсеваля. Знайдено вигляд резольвентної матриці.

4) Введено до розгляду новий клас мероморфних в $\mathbb{D}$ матрично-значних функцій, так званий узагальнений клас Смірнова з κ полюсами в $\mathbb{D}$. Доведено аналог теореми Руше для функцій з узагальненого класу Смірнова.

5) Розглянуто нову дотичну інтерполяційну проблему в матричних класах Шура, яку розв'язано методом абстрактної інтерполяційної проблеми. Цю допоміжну проблему застосовано для опису виняткових параметрів дотичної інтерполяційної проблеми Шура-Такагі.

Список литературы

[1] Адамян В.М. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги / В.М. Адамян, Д.З. Аров, М.Г. Крейн // Матем. сб. — 1971. — Vol. 86. — P. 34–75.

[2] Аров Д.З. Обобщенная бикасательная проблема Каратеодори-Неванлинны-Пика и (j; j0)-внутренние матриц-функции / Д.З. Аров // Изв. Рос. Акад. Наук, Сер. Матем. — 1993. — Vol. 57, no. 1. — P. 121–135.

[3] Аров Д.З. Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов / Д.З. Аров, Л.З. Гроссман // ДАН СССР. — 1983. — Vol. 270, no. 1. — P. 17–20.

[4] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Н.И. Ахиезер. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

[5] Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. — Москва : Наука, 1966.

[6] Бирман М.Ш. Самосопряжённые расширения положительно определённых операторов / М.Ш. Бирман // Мат. Сб. — 1956. — Vol. 38. — P. 431–450.

[7] Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии / В.М. Брук // Мат. сб. — 1976. — Vol. 100. — P. 210–216.

[8] Вишик М.И. Обобщённые граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Труды Моск. Мат. Общ. — 1952. — Vol. 1. — P. 187–246.

[9] Горбачук В.И. Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // Матем. сб. — 1977. — Vol. 102, no. 1. — P. 124—150.

[10] Горбачук М.Л. Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом / М.Л. Горбачук // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Vol. 5. — P. 10–21.

[11] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. — М. : Изд. ин. лит., 1963.

[12] Гохберг И.Ц. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете / И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал // Математический сборник. — 1971. — Vol. 126, no. 4. — P. 607–629.

[13] Деркач В.А. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией / В.А. Деркач, М.М. Маламуд. — Донецк : Донецкий физ.-тех. ин-ут АН УССР, 1985. — Vol. 9. — P. 52.

[14] Кацнельсон В.Е. Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов / В.Е. Кацнельсон, А.Я. Хейфец, П.М. Юдицкий // Операторы в функциональном пространстве и проблемы теории функций. — 1986. — Vol. 1. — P. 83–96.

[15] Ковалишина И.В. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика / И.В. Ковалишина, В.П. Потапов // ДАН АрмССР. — 1974. — Vol. 59, no. 1. — P. 17–22.

[16] Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А.Н. Кочубей // Мат. Заметки. — 1975. — Vol. 1. — P. 41–48.

[17] Кочубей А.Н. Характеристические функции симметрических операторов и их расширений / А.Н. Кочубей // Изв. АН Арм. ССР. — 1980. — Vol. 15, no. 3. — P. 219–232.

[18] Крейн М.Г. О резольвентах эрмитовых операторов с индексами дефекта (m, m) / М.Г. Крейн // Докл. Акад. Наук. СССР. — 1946. — Vol. 52, no. 8. — P. 657–660.

[19] Крейн М.Г. Теория самосопряжённых расширений полуограниченных эрмитовых операторов и приложения / М.Г. Крейн // Мат. Сб. — 1947. — Vol. 21. — P. 365–404.

[20] Крейн М.Г. Фундаментальные аспекты теории представлений эрмитовых операторов с индексами дефекта (m, m) / М.Г. Крейн // Укр. Матем. Журнал. — 1949. — Vol. 2. — P. 3–66.

[21] Крейн М.Г. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ/ М.Г. Крейн, Г.К. Лангер // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Vol. 5, no. 3. — P. 54—69.

[22] Крейн М.Г. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений / М.Г. Крейн, М.А. Наймарк. — Харьков : [s. n.], 1936. — P. 42.

[23] Крейн М.Г. Некоторые новые результаты в теории резольвентных матриц / М.Г. Крейн, Ш.Н. Саакян // Доклады Академии наук СССР. — 1966. — Vol. 169, no. 1. — P. 657–660.

[24] Нейман Е.В. Аналог теоремы Руше в обощённом классе Смирнова / Е.В. Нейман // Труды института прикладной математики и механики. — 2008. — Vol. 17. — P. 148–153.

[25] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига / Н.К. Никольский. — М. Наука. : Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

[26] Нудельман А.А. Об одной проблеме типа проблемы моментов / А.А. Нудельман // ДАН СССР. — 1977. — Vol. 233, no. 5. — P. 792–795.

[27] Нудельман А.А. Об одном обобщении классических интерполяционных задач / А.А. Нудельман // ДАН СССР. — 1981. — Vol. 256, no. 4. — P. 790–793.

[28] Потапов В.П. Мультипликативная структура j-несжимающих матриц-функций / В.П. Потапов // Труды Моск. мат. заметок. — 1955. — Vol. 4. — P. 125–236.

[29] Секефальви-Надь Б. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. — М. : Мир, 1970.

[30] Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряжённые расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Ф.С. Рофе-Бекетов // Теор. Функц., Функц. Анал. и Прилож. — 1969. — Vol. 8. — P. 3–24.

[31] Федчина И.П. Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны-Пика / И.П. Федчина // Матем. Исследов. — 1972. — Vol. 26. — P. 213–226.

[32] Хейфец А.Я. Теорема Неванлинны-Адамяна-Арова-Крейнл в полуопределённом случае / А.Я. Хейфец // Теор. Функц., Функц. Анал. и их приложен. — 1989. — Vol. 53. — P. 128–137.

[33] Хейфец А Обобщенная бикасательная задача Шура–Неванлинны–Пика и связанное с нею равенство Парсеваля / А. Хейфец // Теор. Функц., Функц. Анал. и их приложен. — 1990. — Vol. 54. — P. 89–96.

[34] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. — М. : Наука, 1969.

[35] Юдицкий П. Задача о лифтинге / П. Юдицкий. — [S. l.] : Депонирована в Укр.НИИНТИ, 1983. — Vol. 311.

[36] Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces / D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, H. S. V. de Snoo // Oper. Theory: Adv. Appl. — 1997. — Vol. 96.

[37] Alpay D. Hilbert spaces of analytic functions, inverse scattering and operator models / D. Alpay, H. Dym // Integral Equations and Operator Theory. — 1984. — Vol. 7. — P. 589—641.

[38] Alpay D. Pairs of selfadjoint operators and their invariants / D. Alpay, I. Gohberg // St. Petersburg Math. J. — 2005. — Vol. 16, no. 1. — P. 59–104.

[39] Amirshadyan A. Interpolation in generalized Nevanlinna and Stieltjes classes / A. Amirshadyan, V. Derkach // J. Operator Theory. — 1999. — Vol. 42, no. 1. — P. 145–188.

[40] Amirshadyan A. Operational calculus of linear relations / R. Arens // Pacific J. Math.. — 1961. — Vol. 11 — P. 9–23.

[41] Arov D. J-Contractive matrix valued functions and related topics / D.Z Arov, H.Dym. — Cambrige: Cambridge University Press : Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2008. — P. 575.

[42] Baidiuk D. Abstract interpolation problem in generalized Schur classes / D. Baidiuk // arXiv:1403.4038. — 2014. — P. 1–18.

[43] Ball J. Interpolation of rational matrix functions / J. Ball, I. Gohberg, L. Rodman. 45. — Birkhäuser Verlag, Basel : Operator Theory: Advances and Applications, 1990.

[44] Ball J. Interpolation problems of Pick–Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions / J.A. Ball, J.W. Helton // Integr. Equat. Oper. Th. — 1986. — Vol. 9. — P. 155–203.

[45] Ball J. The abstract Interpolation problem and commutant lifting: a coordinate-free approach / J. Ball, T. Trent. — Birkhäuser Verlag, Basel : Operator Theory: Advances and Applications, 2000. — Vol. 115.

[46] A realization theorem for generalized Nevanlinna families / J. Behrndt, V.A. Derkach, S. Hassi, H.S.V. de Snoo // Oper. Matrices. — 2011. — Vol. 5, no. 4. — P. 679—706.

[47] Behrndt J. Functional models for Nevanlinna families / J. Behrndt, S. Hassi, H.S.V. de Snoo // Opuscula Math. — 2008. — Vol. 28. — P. 233–245.

[48] Bolotnikov V. On the Carathéodory-Fejér interpolation problem for generalized Schur functions / V. Bolotnikov // Int. Eq. Oper. Th. — 2004. — Vol. 50. — P. 9–41.

[49] Bolotnikov V. Nevanlinna-pick interpolation: Pick matrices have bounded number of negative eigenvalues / V. Bolotnikov, A. Kheifets, L. Rodman // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132. — P. 769–780.

[50] Boundary relations and their Weyl families / V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo // Trans. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 358. — P. 5351–5400.

[51] de Branges L. Some Hilbert spaces of entire functions / L.de Branges // Bull. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 67. — P. 129–134.

[52] de Branges L. Perturbation theory / L.de Branges // J. Math. Anal.Appl. — 1977. — Vol. 57. — P. 393–415.

[53] de Branges L. Canonical models in quantum scattering theory / L. de Branges, J. Rovnyak // Perturbation Theory and its Application in Quantum Mechanics. — 1966. — P. 295—391. — Wiley, New York.

[54] Derevyagin M. Spectral problems for generalized Jacobi matrices / M. Derevyagin, V.Derkach // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 382. — P. 1–24.

[55] Derevyagin M. On the convergence of Pade approximations for generalized Nevanlinna functions / M. Derevyagin, V.Derkach // Trans Moscow Math. Soc. — 2007. — Vol. 68. — P. 1–44.

[56] Derkach V. On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces / V. Derkach // Math.Nachr. — 1999. — Vol. 97, no. 5. — P. 4420–4460.

[57] Derkach V. On indefinite abstract interpolation problem / V. Derkach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2001. — Vol. 7, no. 4. — P. 87–100.

[58] Derkach V. Abstract interpolation problem in Nevanlinna classes / V. Derkach // Modern Analysis and Applications: Mark Kreĭn Centenary Conference, vol. 1 – Operator Theory and Related Topics. — 2009. — Vol. 190. — P. 197–236.

[59] Derkach V. On linear fractional transformations associated with generalized j-inner matrix functions / V. Derkach, H. Dym // Integ. Eq. Oper. Th. — 2009. — Vol. 65. — P. 1–50.

[60] Derkach V. On bitangential interpolation in generalized Schur classes / V. Derkach, H. Dym // Complex An. and Oper. Th. — 2010. — Vol. 4. — P. 701–765.

[61] Derkach V. A generalized Schur-Takagi interpolation problem / V. Derkach, H. Dym // Integral Equations and Operator Theory. — 2014. — Vol. 2, no. 80. — P. 165–227.

[62] Derkach V. Operator models associated with Kac subclasses of generalized Nevanlinna functions / V. Derkach, S. Hassi, and H.S.V. de Snoo // Methods of Functional Analysis and Topology. — 1999. — Vol. 5. — P. 65–87.

[63] Derkach V. Generalized Nevanlinna functions with polynomial asymptotic behaviour at infinity and regular perturbations / V.A. Derkach, S. Hassi, H.S.V. de Snoo // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2001. — Vol. 122. — P. 169–189. — Birkhauser Verlag Basel.

[64] Derkach V. Truncated moment problems in the class of generalized Nevanlinna functions / V.A. Derkach, S. Hassi, H.S.V. de Snoo // Math. Nachr. — 2012. — Vol. 285, no. 14–15. — P. 1741–1769.

[65] Derkach V. On Weyl function and Hermitian operators with gaps / V. Derkach, M. Malamud // Doklady Akad. Nauk SSSR. — 1987. — Vol. 293, no. 5. — P. 1041–1046.

[66] Derkach V. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem / V. Derkach, M. Malamud // J.of Math.Sci. — 1995. — Vol. 73, no. 2. — P. 141–242.

[67] A factorization result for generalized Nevanlinna functions of the class N_κ / A. Dijksma, H. Langer, A. Luger, Yu. Shondin // Integr. Equat. Oper. Theory. — 2000. — Vol. 36. — P. 121–125. — Birkhäuser Verlag Basel.

[68] Dym H. J contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation / H. Dym. — Providence, RI : CBMS Regional Series in Math., 1964. — Vol. 71.

[69] Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multi variable systems and their l_∞ error bounds / K. Glover // Int. J. Control. — 1984. — Vol. 39. — P. 1115–1193.

[70] Gohberg I. Matrices and indefinite inner products / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. — Basel—Boston—Stuttgart : Birkhäuser Verlag, 1983.

[71] Grubb G. A characteriz of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator / G Grubb // Ann. Scuola Normale Superiore de Pisa. — 1968. — Vol. 22. — P. 425–513.

[72] A Hilbert space associated with a Nevanlinna function / D. Alpay, P. Bruinsma, A. Dijksma, H.S.V. de Snoo // Proceedings MTNS Meeting. — Amsterdam : [s. n.], 1989. — P. 115–122.

[73] Kheifets A. Parseval equality in abstract interpolation problem and coupling of open systems / A. Kheifets // Journal of Soviet Math. — 1990. — Vol. 49. — P. 1307—1310.

[74] Kheifets A. Hamburger moment problem: Parseval equality and a-singularity / A. Kheifets // J. Funct. Analysis. — 1996. — Vol. 141. — P. 374–420.

[75] Kheifets A. Y. An analysis and extension of V. P. Potapov's approach to interpolation problems with applications to the generalized bitangential Schur–Nevanlinna–Pick problem and j-inner-outer factorization / A. Ya. Kheifets, P. M. Yuditskii // Oper. Theory: Adv. Appl. — 1994. — Vol. 72, no. 2. — P. 133–161.

[76] Koranui A. Relations d'un probleme de Nevanlinna et Pick avee la theorie des operations de l'espace hilbertien / A. Koranui, B. Sz.-Nagy. — [S. l.] : Akta Math. Sci. Hemg., 1957. — Vol. 7.

[77] Kreĭn M. Uber die Q-function eines π-Hermiteschen Operators im Raume π_κ / M.G. Kreĭn, H. Langer // Acta. Sci. Math. (Szeged). — 1973. — Vol. 34. — P. 191–230.

[78] Kreĭn M. *Über* einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie Hermitscher Operatoren in Raume π_κ zusammenhangen, *I.* Einige

Fuktionenklassen und ihre Dahrstellungen / M.G. Kreĭn, H. Langer // Math. Nachr. — 1977. — Vol. 77. — P. 187–236.

[79] Kreĭn M. *Über* einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie Hermitscher Operatoren in Raume π_κ zusammenhangen, *II.* verallgemeinerte resolventen, u-resolventen und ganze operatoren / M.G. Kreĭn, H. Langer // J. Funct. Analysis. — 1978. — Vol. 3. — P. 390–447.

[80] Kreĭn M. On some extension problem which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space π_κ iii. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems, part i / M.G. Kreĭn, H. Langer // Beiträge zur Anal. — 1979. — Vol. 14, no. 25–40.

[81] Kreĭn M. Some propositions of analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ / M.G. Kreĭn, H. Langer // Acta Sci.Math.Szeged. — 1981. — Vol. 43. — P. 181–205.

[82] Kupin S. Lifting theorem as a special case of abstract interpolation problem / S. Kupin // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. — 1996. — Vol. 15, no. 4. — P. 789–798.

[83] Langer H. On generalized resolvents and q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in Hilbert space / H. Langer, B. Textorius // Pacific J. Math. — 1977. — Vol. 72. — P. 135–165.

[84] Malamud M. Spectral theory of operator measures in Hilbert space / M.M. Malamud, S.M. Malamud // St. -Petersburg Math. Journal. — 2003. — Vol. 15, no. 3. — P. 1–77.

[85] von Neumann J. Uber adjungierte operatoren / J von Neumann // Ann. Math. — 1932. — Vol. 33. — P. 294–310.

[86] Neiman E. A functional model associated with a generalized Nevanlinna pair / E. Neiman // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 174, no. 4. — P. 469–480.

[87] Neiman E. Abstract interpolation problem in generalized Nevanlinna classes / E. Neiman // Methods Funct. Anal. Topology. — 2012. — Vol. 18, no. 3. — P. 266–287.

[88] Neiman E. Indefinite moment problem as an abstract interpolation problem / E. Neiman // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — Vol. 19, no. 2. — P. 168–186.

[89] Neiman E. A generalized tangent interpolation problem / E. Neiman // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 207, no. 1. — P. 74–97.

[90] Nevanlinna R. Uber beschrankte analytischen funktionen / R. Nevanlinna // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. — 1929. — Vol. 32. — P. 1–75.

[91] Phillips R. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations / R.S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 90. — P. 193–254.

[92] Pick G. Uber die beschrankungen analytischen funktionen, welche durch vorgegebene funktionswerte bewirkt werden / G. Pick // Math. Ann. — 1916. — Vol. 77, no. 1. — P. 7–23.

[93] Schur I. Uber potenzreihen, die im inner des einheitskreises beschrankt sind / I. Schur // J. reine angew. Math. — 1918. — Vol. 148. — P. 122–145.

[94] Stone M. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis / M.H. Stone. — New York. : Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1932. — Vol. 15.

[95] Vidyasagar M. Robust controllers for uncertain linear multivariable systems / M. Vidyasagar, H. Kimura // Automatica. — 1986. — Vol. 22. — P. 85–94.