Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика, искусственный интеллект и системы управления» (ИУ)

КАФЕДРА «Информационная безопасность» (ИУ8)

Отчёт по домашней работе № 1

по дисциплине «Аппаратные средства вычислительной техники»

Тема: «Минимизация булевых функций»

Вариант 5

Выполнил: Григорьев Е.Г.,
студент группы ИУ8-63

Проверил: Рафиков А.Г.,
преподаватель каф. ИУ8

г. Москва,
2022 г.

1. Цель работы

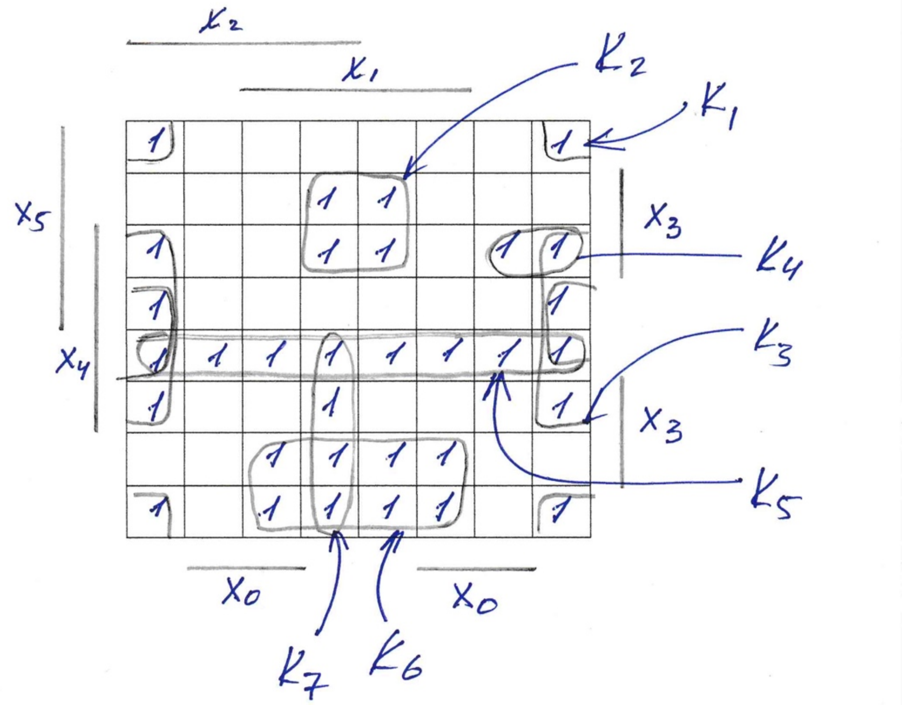
Минимизировать функцию алгебры логики, используя табличный метод (метод карт Карно), расчетно-табличный метод (метод Квайна-Мак'Класски) и метод неопределенных коэффициентов

2. Условие задачи

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

1011101100110011111111111000101010001000001000101000100011101010

3. Метод карт Карно



МДНФ

$$Y_{min} = \underbrace{\bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_0 x_1 x_3 x_5}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_0 \bar{x}_1 x_4}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5}_{K_4} \vee$$

$$\vee \underbrace{\bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5}_{K_5} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5}_{K_6} \vee \underbrace{\bar{x}_0 x_1 x_2 \bar{x}_5}_{K_7}$$

Кол-во импликант: 7

Кол-во термов: 25

Задача нахождения СДНФ легко автоматизируется и программируется:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
&= \bar{x}_0\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 + \bar{x}_0x_1x_2x_3\bar{x}_4x_5 + \bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5 \\
&+ \bar{x}_0\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5 + \bar{x}_0x_1x_2x_3x_4x_5 + \bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 + x_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 \\
&+ \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \\
&+ x_0\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + x_0x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \\
&+ x_0x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 \\
&+ \bar{x}_0x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 + x_0x_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0x_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \\
&+ \bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_0x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \\
&+ \bar{x}_0x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_0x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5
\end{aligned}
$$

4. Метод Квайна-Мак'Класски

Наборы, вошедшие в СДНФ:

000000, 010000, 110000, 001000, 011000, 111000, 010100, 110100, 011100, 111100, 000010, 100010, 010010, 110010, 001010, 101010, 011010, 111010, 000110, 001110, 011110, 000001, 001001, 010101, 011101, 000011, 001011, 000111, 100111, 010111, 001111, 011111.

Проводится группировка наборов по весу и склеиваются соседние группы, после чего склеиваются наборы внутри группы пока это возможно:

011~~0, 01~10~, 0~1~10, ~00111, 0111~~, 0~111~, 01~1~1, 0~~111, 0~~0~0, 00~0~~, ~1~~00, ~1~0~0, ~~~010, 00~~1~.

В результате получается таблица (см. следующую страницу).

Затем находятся ядерные импликанты: 00~~1~, ~00111, 00~0~~, ~1~~00, ~~~010, которые удаляются из построенной таблицы и из оставшихся импликант находится минимальное покрытие.

МДНФ, найденная методом Квайна-Мак'Класски:

$$f = \bar{x}_0x_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_2x_3x_4\bar{x}_5 + x_0x_2x_4\bar{x}_5 + x_0x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_4$$

Вывод программы: !x2x1!x0 + !x5!x4x1 + !x5x4x3x2 + !x5x4x2x0 + !x4!x3x2x1x0 + !x5!x4!x2 + x4!x1!x0

Количество импликант: 7;

Количество термов: 25.

	000000	010000	110000	001000	011000	111000	010100	110100	011100	111100	000010	100010	010010	110010	001010	101010	011010	111010	000110	001110	011110	000001	001001	010101	011101	000011	001011	000111	100111	010111	001111	011111
~00111																												X	X			
0111~~									X												X				X							X
0~111~																				X	X										X	X
01~1~1																								X	X					X		X
0~~111																												X		X	X	X
011~~0					X				X								X				X											
01~10~							X		X															X	X							
0~1~10															X		X			X	X											
0~~0~0	X	X		X	X						X		X		X		X															
00~0~~	X			X							X				X							X	X			X	X					
~1~~00		X	X		X	X	X	X	X	X																						
~1~0~0		X	X		X	X							X	X			X	X														
~~010											X	X	X	X	X	X	X	X														
00~~1~											X				X				X	X						X	X	X			X	

5. Метод неопределенных коэффициентов

Сначала составляется система уравнений для коэффициентов и приравнивается, соответственно, к значению функции (0 или 1). После чего удаляются все уравнения, которые равны 0 и коэффициенты, которые входили в них также удаляем в других уравнениях. Получается система:

K_(025)^(000) + K_(0125)^(0000) + K_(0235)^(0000) + K_(01235)^(00000) + K_(0245)^(0000) + K_(01245)^(00000) + K_(1245)^(0000) + K_(245)^(000) + K_(02345)^(00000) + K_(012345)^(000000) + K_(12345)^(00000) + K_(2345)^(0000) = 1

K_(014)^(001) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0001) + K_(0134)^(0001) + K_(0234)^(0001) + K_(01234)^(00001) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0000) + K_(0235)^(0000) + K_(01235)^(00000) + K_(0145)^(0010) + K_(0245)^(0010) + K_(01245)^(00010) + K_(01345)^(00010) + K_(02345)^(00010) + K_(012345)^(000010) = 1

K_(014)^(001) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0001) + K_(0134)^(0001) + K_(0234)^(0001) + K_(01234)^(00001) + K_(0145)^(0011) + K_(0245)^(0011) + K_(01245)^(00011) + K_(01345)^(00011) + K_(02345)^(00011) + K_(012345)^(000011) = 1

K_(025)^(000) + K_(0125)^(0000) + K_(0235)^(0010) + K_(01235)^(00010) + K_(0245)^(0000) + K_(01245)^(00000) + K_(1245)^(0000) + K_(245)^(000) + K_(02345)^(00100) + K_(012345)^(000100) + K_(12345)^(00100) + K_(2345)^(0100) = 1

K_(014)^(001) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0001) + K_(0134)^(0011) + K_(0234)^(0011) + K_(01234)^(00011) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0000) + K_(0235)^(0010) + K_(01235)^(00010) + K_(0145)^(0010) + K_(0245)^(0010) + K_(01245)^(00010) + K_(0345)^(0110) + K_(01345)^(00110) + K_(02345)^(00110) + K_(012345)^(000110) = 1

K_(014)^(001) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0001) + K_(0134)^(0011) + K_(0234)^(0011) + K_(01234)^(00011) + K_(0145)^(0011) + K_(0245)^(0011) + K_(01245)^(00011) + K_(01345)^(00111) + K_(02345)^(00111) + K_(012345)^(000111) = 1

K_(014)^(001) + K_(0124)^(0011) + K_(0134)^(0001) + K_(01234)^(00101) + K_(0145)^(0010) + K_(01245)^(00110) + K_(1245)^(0110) + K_(01345)^(00010) + K_(012345)^(001010) + K_(12345)^(01010) = 1

K_(014)^(001) + K_(0124)^(0011) + K_(0134)^(0001) + K_(01234)^(00101) + K_(0145)^(0011) + K_(01245)^(00111) + K_(01345)^(00011) + K_(012345)^(001011) = 1

K_(014)^(001) + K_(0124)^(0011) + K_(0134)^(0011) + K_(01234)^(00111) + K_(0145)^(0010) + K_(01245)^(00110) + K_(1245)^(0110) + K_(0345)^(0110) + K_(01345)^(00110) + K_(02345)^(01110) + K_(012345)^(001110) + K_(12345)^(01110) + K_(2345)^(1110) = 1

K_(014)^(001) + K_(0124)^(0011) + K_(0134)^(0011) + K_(01234)^(00111) + K_(0145)^(0011) + K_(01245)^(00111) + K_(01345)^(00111) + K_(012345)^(001111) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0100) + K_(0124)^(0100) + K_(01234)^(01000) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0100) + K_(0235)^(0000) + K_(01235)^(01000) + K_(0145)^(0100) + K_(145)^(100) + K_(0245)^(0000) + K_(01245)^(01000) + K_(1245)^(1000) + K_(245)^(000) + K_(01345)^(01000) + K_(1345)^(1000) + K_(02345)^(00000) + K_(012345)^(010000) + K_(12345)^(10000) + K_(2345)^(0000) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0100) + K_(0124)^(0100) + K_(01234)^(01000) + K_(0125)^(0101) + K_(01235)^(01001) + K_(01245)^(01001) + K_(012345)^(010001) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0100) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0101) + K_(0234)^(0001) + K_(01234)^(01001) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0100) + K_(0235)^(0000) + K_(01235)^(01000) + K_(0245)^(0010) + K_(01245)^(01010) + K_(02345)^(00010) + K_(012345)^(010010) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0100) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0101) + K_(0234)^(0001) + K_(01234)^(01001) + K_(0125)^(0101) + K_(01235)^(01001) + K_(0245)^(0011) + K_(01245)^(01011) + K_(02345)^(00011) + K_(012345)^(010011) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0101) + K_(0124)^(0100) + K_(01234)^(01010) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0100) + K_(0135)^(0110) + K_(0235)^(0010) + K_(01235)^(01010) + K_(0145)^(0100) + K_(145)^(100) + K_(0245)^(0000) + K_(01245)^(01000) + K_(1245)^(1000) + K_(245)^(000) + K_(01345)^(01100) + K_(1345)^(1100) + K_(02345)^(00100) + K_(012345)^(010100) + K_(12345)^(10100) + K_(2345)^(0100) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0101) + K_(0124)^(0100) + K_(01234)^(01010) + K_(0125)^(0101) + K_(01235)^(01011) + K_(01245)^(01001) + K_(012345)^(010101) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0101) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0101) + K_(0234)^(0011) + K_(01234)^(01011) + K_(025)^(000) + K_(0125)^(0100) + K_(0135)^(0110) + K_(0235)^(0010) + K_(01235)^(01010) + K_(0245)^(0010) + K_(01245)^(01010) + K_(0345)^(0110) + K_(01345)^(01110) + K_(02345)^(00110) + K_(012345)^(010110) = 1

K_(012)^(010) + K_(0123)^(0101) + K_(024)^(001) + K_(0124)^(0101) + K_(0234)^(0011) + K_(01234)^(01011) + K_(0125)^(0101) + K_(01235)^(01011) + K_(0245)^(0011) + K_(01245)^(01011) + K_(02345)^(00111) + K_(012345)^(010111) = 1

K_(0145)^(0100) + K_(145)^(100) + K_(01245)^(01100) + K_(1245)^(1100) + K_(01345)^(01000) + K_(1345)^(1000) + K_(012345)^(011000) + K_(12345)^(11000) = 1

K_(0135)^(0110) + K_(01235)^(01110) + K_(1235)^(1110) + K_(0145)^(0100) + K_(145)^(100) + K_(01245)^(01100) + K_(1245)^(1100) + K_(01345)^(01100) + K_(1345)^(1100) + K_(012345)^(011100) + K_(12345)^(11100) = 1

K_(0135)^(0110) + K_(01235)^(01110) + K_(1235)^(1110) + K_(0345)^(0110) + K_(01345)^(01110) + K_(02345)^(01110) + K_(012345)^(011110) + K_(12345)^(11110) + K_(2345)^(1110) = 1

K_(0245)^(1000) + K_(01245)^(10000) + K_(1245)^(0000) + K_(245)^(000) + K_(02345)^(10000) + K_(012345)^(100000) + K_(12345)^(00000) + K_(2345)^(0000) = 1

K_(0245)^(1000) + K_(01245)^(10000) + K_(1245)^(0000) + K_(245)^(000) + K_(02345)^(10100) + K_(012345)^(100100) + K_(12345)^(00100) + K_(2345)^(0100) = 1

K_(0245)^(1110) + K_(01245)^(10110) + K_(1245)^(0110) + K_(02345)^(11010) + K_(012345)^(101010) + K_(12345)^(01010) = 1

K_(0245)^(1110) + K_(01245)^(10110) + K_(1245)^(0110) + K_(02345)^(11110) + K_(012345)^(101110) + K_(12345)^(01110) + K_(2345)^(1110) = 1

K_(0145)^(1100) + K_(145)^(100) + K_(0245)^(1000) + K_(01245)^(11000) + K_(1245)^(1000) + K_(245)^(000) + K_(01345)^(11000) + K_(1345)^(1000) + K_(02345)^(10000) + K_(012345)^(110000) + K_(12345)^(10000) + K_(2345)^(0000) = 1

K_(0145)^(1100) + K_(145)^(100) + K_(0245)^(1000) + K_(01245)^(11000) + K_(1245)^(1000) + K_(245)^(000) + K_(01345)^(11100) + K_(1345)^(1100) + K_(02345)^(10100) + K_(012345)^(110100) + K_(12345)^(10100) + K_(2345)^(0100) = 1

K_(01234)^(11100) + K_(0125)^(1110) + K_(01235)^(11100) + K_(0145)^(1100) + K_(145)^(100) + K_(01245)^(11100) + K_(1245)^(1100) + K_(01345)^(11000) + K_(1345)^(1000) + K_(012345)^(111000) + K_(12345)^(11000) = 1

K_(01234)^(11100) + K_(012345)^(111001) = 1

K_(0125)^(1110) + K_(01235)^(11100) + K_(0245)^(1110) + K_(01245)^(11110) + K_(02345)^(11010) + K_(012345)^(111010) = 1

K_(0125)^(1110) + K_(01235)^(11110) + K_(1235)^(1110) + K_(0145)^(1100) + K_(145)^(100) + K_(01245)^(11100) + K_(1245)^(1100) + K_(01345)^(11100) + K_(1345)^(1100) + K_(012345)^(111100) + K_(12345)^(11100) = 1

K_(0125)^(1110) + K_(01235)^(11110) + K_(1235)^(1110) + K_(0245)^(1110) + K_(01245)^(11110) + K_(02345)^(11110) + K_(012345)^(111110) + K_(12345)^(11110) + K_(2345)^(1110) = 1

Затем в данной системе оставляются коэффициенты с минимальным количеством индексов, которые присутствуют в максимальном количестве строк. В итоге получается следующая система:

K_(245)^(000) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(245)^(000) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(014)^(001) = 1

K_(012)^(010) + K_(145)^(100) + K_(245)^(000) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(012)^(010) + K_(145)^(100) + K_(245)^(000) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(012)^(010) = 1

K_(145)^(100) = 1

K_(1235)^(1110) + K_(145)^(100) = 1

K_(1235)^(1110) = 1

K_(245)^(000) = 1

K_(245)^(000) = 1

K_(0245)^(1110) = 1

K_(0245)^(1110) = 1

K_(145)^(100) + K_(245)^(000) = 1

K_(145)^(100) + K_(245)^(000) = 1

K_(01234)^(11100) + K_(145)^(100) = 1

K_(01234)^(11100) = 1

K_(0245)^(1110) = 1

K_(1235)^(1110) + K_(145)^(100) = 1

K_(1235)^(1110) + K_(0245)^(1110) = 1

МДНФ, найденная методом неопределенных коэффициентов:

$$f = x_1\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_0\bar{x}_1x_4 + \bar{x}_0x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5 + x_0x_2x_4\bar{x}_5 + x_2x_3x_4\bar{x}_5 + x_0x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Вывод программы: !x5!x4x1 + x4!x1!x0 + !x2x1!x0 + !x5!x4!x2 + !x5x4x2x0 + !x5x4x3x2 + !x4!x3x2x1x0

Количество импликант: 7;

Количество термов: 25.

6. Выводы

В работе была проведена минимизация ФАЛ тремя различными методами: табличным (карты Карно), расчетно-табличным (метод Квайна– Мак’Класки) и методом неопределенных коэффициентов во всех трех методах результаты совпали(в первом методе обратная нумерация x). Каждый метод привел к одинаковой сложности мДНФ, так можно сделать вывод что карты Карно удобны для ручного вычисления при числе переменных < 4, в отличии от двух других методов которые легче алгоритмизировать и запрограммировать для вычисления от большего числа переменных. Однако важно учитывать, что сложность алгоритмов Квайна– Мак’Класки и неопределенных коэффициентов растет экспоненциально.