

Задача №4

Расчет толстостенных цилиндров

Составной цилиндр, образованный из двух длинных цилиндров посадкой с натягом Δ , подвергается действию внутреннего давления p_1 . Размеры цилиндров: r_1 – радиус внутренней поверхности составного цилиндра; r_c – радиус поверхности сопряжения внутреннего и наружного цилиндров;

r_2 – радиус наружной поверхности составного цилиндра. Допускаемое напряжение для материала цилиндров $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,3$.

Определить оптимальную величину натяга Δ и допускаемую величину внутреннего давления $[p_1]$. Определить также допускаемую величину внутреннего давления $[p_1]$ для сплошного однослойного цилиндра с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 и сравнить с допускаемым внутренним давлением для составного цилиндра. Построить эпюры радиального, окружного и продольного нормальных напряжений в составном и сплошном цилиндрах при большем из допускаемых внутренних давлений $[p_1]$.

Дано: $r_1 = 30 \text{ мм}$; $r_c = 40 \text{ мм}$; $r_2 = 55 \text{ мм}$; гипотеза предельного состояния IV.

1. Радиальное и окружное напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{r_B^2 r_H^2 (p_B - p_H)}{r^2 (r_H^2 - r_B^2)}, \quad (1)$$

где p_B и p_H – внутреннее и наружное давления; r_B и r_H – внутренний и наружный радиусы; r – радиус-вектор точки, в которой определяются напряжения. Знак (–) соответствует напряжению σ_r , знак (+) соответствует напряжению σ_t .

Напряжения в составном цилиндре определяются суммированием напряжений (σ_r' , σ_t') в цилиндре с радиусами r_1 и r_2 от действия внутреннего давления p_1 и напряжений (σ_r'' , σ_t'') в цилиндре с радиусами r_1 и r_c от действия натяга p_c :

$$\sigma_r = \sigma_r' \left(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_r'' \left(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c, \right) \quad (2) \quad \sigma_t = \sigma_t' \left(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_t'' \left(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c, \right) \quad (3).$$

Продольное напряжение: $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_t)$. (4)

Подставим значения в уравнения (1)–(4).

$$\begin{aligned} \sigma_t' &= \frac{p_1 \cdot 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 \cdot 55^2 \cdot p_1}{30^2 \cdot (55^2 - 30^2)} = 1,85 p_1; \quad \sigma_t'' = \frac{-p_c \cdot 40^2}{40^2 - 30^2} + \frac{30^2 \cdot 40^2 \cdot (-p_c)}{30^2 \cdot (40^2 - 30^2)} = -4,57 p_c; \quad \sigma_t = 1,85 p_1 - 4,57 p_c = \sigma_1; \\ \sigma_r' &= \frac{p_1 \cdot 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 \cdot 55^2 \cdot p_1}{30^2 \cdot (55^2 - 30^2)} = -p_1; \quad \sigma_r'' = \frac{-p_c \cdot 40^2}{40^2 - 30^2} - \frac{30^2 \cdot 40^2 \cdot (-p_c)}{30^2 \cdot (40^2 - 30^2)} = 0; \quad \sigma_r = -p_1 = \sigma_3; \\ \sigma_z &= 0,3 \cdot (-p_1 + 1,85 p_1 - 4,57 p_c) = 0,26 p_1 - 1,37 p_c = \sigma_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке внутреннего цилиндра по IV-й гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{\text{экв}}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r - \sigma_r \sigma_t} = \\ &= \sqrt{(1,85 p_1 - 4,57 p_c)^2 + (0,26 p_1 - 1,37 p_c)^2 + (-p_1)^2 - (1,85 p_1 - 4,57 p_c)(0,26 p_1 - 1,37 p_c) - (0,26 p_1 - 1,37 p_c)(-p_1) - (-p_1)(1,85 p_1 - 4,57 p_c)} = \\ &= \sqrt{6,12 p_1^2 - 19,84 p_1 p_c + 16,50 p_c^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Вычисляем напряжения в опасной точке наружного цилиндра (при $r=r_c$).

$$\begin{aligned} \sigma_t' &= \frac{p_1 \cdot 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 \cdot 55^2 \cdot p_1}{40^2 \cdot (55^2 - 30^2)} = 1,22 p_1; \quad \sigma_t'' = \frac{p_c \cdot 40^2}{55^2 - 40^2} + \frac{40^2 \cdot 55^2 \cdot p_c}{40^2 \cdot (55^2 - 40^2)} = 3,25 p_c; \quad \sigma_t = 1,22 p_1 + 3,25 p_c = \sigma_1; \\ \sigma_r' &= \frac{p_1 \cdot 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 \cdot 55^2 \cdot p_1}{40^2 \cdot (55^2 - 30^2)} = -0,38 p_1; \quad \sigma_r'' = \frac{p_c \cdot 40^2}{55^2 - 40^2} - \frac{40^2 \cdot 55^2 \cdot p_c}{40^2 \cdot (55^2 - 40^2)} = -p_c; \quad \sigma_r = -0,38 p_1 - p_c = \sigma_3; \\ \sigma_z &= 0,3 \cdot (-0,38 p_1 - p_c + 1,22 p_1 + 3,25 p_c) = 0,25 p_1 + 0,68 p_c = \sigma_2. \end{aligned} \quad (7)$$

					КР_ММиК_2022_06		
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	<div style="text-align: center;"> <p>Расчет толстостенных цилиндров</p> <p>ГГТУ им.П.О.Сухого, гр.К-21</p> </div>		
Разраб.	Бадретдинов А.Э.						
Пров.	Кириллюк С.И.						
Н. Контр.							
Утв.							
					Литера	Лист	Листов
					у	25	

Эквивалентное напряжение в опасной точке наружного цилиндра по IV-й гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned}\sigma_{I_{экв}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r - \sigma_r \sigma_t} = \\ &= \sqrt{(1,22p_1 + 3,25p_c)^2 + (0,25p_1 + 0,68p_c)^2 + (-0,38p_1 - p_c)^2 - (1,22p_1 + 3,25p_c)(0,25p_1 + 0,68p_c) - (0,25p_1 + 0,68p_c)(-0,38p_1 - p_c) - (-0,38p_1 - p_c)(1,22p_1 + 3,25p_c)} = \\ &= \sqrt{1,94p_1^2 + 10,36p_1p_c + 13,74p_c^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

3. Согласно условию равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров приравняем выражения (6) и (8):

$$\sigma_{I_{экв}} = \sigma_{II_{экв}}, \quad \sqrt{6,12p_1^2 - 19,84p_1p_c + 16,50p_c^2} = \sqrt{1,94p_1^2 + 10,36p_1p_c + 13,74p_c^2},$$

$$4,18p_1^2 - 30,20p_1p_c + 2,76p_c^2 = 0, \quad p_1^2 - 7,22p_1p_c + 0,66p_c^2 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$p_1 = 3,61p_c + \sqrt{(3,61p_c)^2 - 0,66p_c^2} = 7,13p_c. \quad (9)$$

4. Оптимальную величину давления натяга находим из условия $\sigma_{I_{экв}} = [\sigma]$, подставив $p_1 = 7,13p_c$ в $\sigma_{I_{экв}}$:

$$\sqrt{6,12p_1^2 - 19,84p_1p_c + 16,50p_c^2} = [\sigma], \quad \sqrt{6,12 * (7,13p_c)^2 - 19,84 * 7,13p_cp_c + 16,50p_c^2} = [\sigma], \quad 13,6p_c = 300, \quad \text{откуда}$$

$p_c = 22 \text{ МПа}$. При этом допускаемое внутреннее давление будет равно $[p_1] = 7,13 * 22 = 157 \text{ МПа}$.

5. Величину натяга находим из формулы Гадолина (при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$):

$$\begin{aligned}p_c &= \frac{\Delta}{2r_c \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{r_c^2 + r_1^2}{r_c^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} + \mu_2 \right) \right]}, \\ \Delta &= \frac{2p_cr_c}{E} \left(\frac{r_c^2 + r_1^2}{r_c^2 - r_1^2} + \frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} \right) = \frac{2 * 22 * 40}{2 * 10^5} \left(\frac{40^2 + 30^2}{40^2 - 30^2} + \frac{55^2 + 40^2}{55^2 - 40^2} \right) = 0,060 \text{ мм}.\end{aligned}$$

6. Определяем допускаемую величину внутреннего давления в однослойном цилиндре с $r_1 = 30 \text{ мм}$ и $r_2 = 55 \text{ мм}$.

$$\text{Напряжения в опасной точке при } r = r_1 = 30 \text{ мм: } \sigma_r' = \frac{p_1 * 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 * 55^2 * p_1}{30^2 * (55^2 - 30^2)} = -p_1;$$

$$\sigma_t' = \frac{p_1 * 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 55^2 * p_1}{30^2 * (55^2 - 30^2)} = 1,85p_1, \quad \sigma_z = \mu(\sigma_r' + \sigma_t') = 0,3 * (-1 + 1,85)p_1 = 0,26p_1.$$

$$\text{Определяем } [p_1]: \sigma_{I_{экв}} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r - \sigma_r \sigma_t} =$$

$$= \sqrt{(1,85p_1)^2 + (0,26p_1)^2 + (-p_1)^2 - (1,85p_1)(0,26p_1) - (0,26p_1)(-p_1) - (-p_1)(1,85p_1)} = 2,47p_1; \quad \sigma_{I_{экв}} = [\sigma], \quad 2,47p_1 = 300; \\ [p_1] = 121 \text{ МПа}.$$

Величина допускаемого давления в сплошном цилиндре оказалась меньше, чем в составном в $n = \frac{157}{121} = 1,3$ раза.

7. Для построения эпюр напряжений вычисляем их значения для точек с $r = r_1$, $r = r_c$ и $r = r_2$ при $[p_1] = 157 \text{ МПа}$.

Напряжения во внутреннем цилиндре при $r = r_1$ находим по выражениям (5).

$$\sigma_t = 1,85 * 157 - 4,57 * 22 = 190 \text{ МПа}; \quad \sigma_r = -p_1 = -157 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (-157 + 190) = 10 \text{ МПа}.$$

Напряжения во внутреннем цилиндре при $r = r_c$ равны

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r' \left(r = r_c, p_B = p_1, p_H = 0, \right) + \sigma_r'' \left(r = r_c, p_B = 0, p_H = p_c, \right) = \frac{p_1 * 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 * 55^2 * p_1}{40^2 * (55^2 - 30^2)} + \frac{-p_c * 40^2}{40^2 - 30^2} - \frac{30^2 * 40^2 * (-p_c)}{40^2 * (40^2 - 30^2)} = \\ &= -0,38p_1 - p_c = -0,38 * 157 - 22 = -82 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sigma_t' \left(r = r_c, p_B = p_1, p_H = 0, \right) + \sigma_t'' \left(r = r_c, p_B = 0, p_H = p_c, \right) = \frac{p_1 * 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 55^2 * p_1}{40^2 * (55^2 - 30^2)} + \frac{-p_c * 40^2}{40^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 40^2 * (-p_c)}{40^2 * (40^2 - 30^2)} = \\ &= 1,22p_1 - 3,57p_c = 1,22 * 157 - 3,57 * 22 = 113 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (-82 + 113) = 10 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Напряжения в наружном цилиндре при $r = r_c$ определяем по формулам (7):

$$\sigma_r = -0,38p_1 - p_c = -0,38 * 157 - 22 = -82 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = 1,22p_1 + 3,25p_c = 1,22 * 157 + 3,25 * 22 = 263 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 0,3 * (-82 + 263) = 55 \text{ МПа}.$$

Напряжения в наружном цилиндре при $r = r_2$: $\sigma_r(r=r_2) = 0$;

$$\sigma_t = \sigma_t' \left(r=r_2, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_t'' \left(r=r_2, p_B=p_C, p_H=0, \right) = \frac{p_1 * 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 55^2 * p_1}{55^2 * (55^2 - 30^2)} + \frac{p_C * 40^2}{55^2 - 40^2} + \frac{40^2 * 55^2 * p_C}{55^2 * (55^2 - 40^2)} =$$

$$= 0,85p_1 + 2,25p_C = 0,85 * 157 + 2,25 * 22 = 183 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (0 + 183) = 55 \text{ МПа}.$$

Напряжения в сплошном цилиндре определяем по формулам (1) и (4) при $r_B=r_1$, $r_H=r_2$, $p_B=p_1$, $p_H=0$.

Для $r=r_1$: $\sigma_r = \frac{157 * 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 * 55^2 * 157}{30^2 * (55^2 - 30^2)} = -157 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = \frac{157 * 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 55^2 * 157}{30^2 * (55^2 - 30^2)} = 290 \text{ МПа};$

$$\sigma_z = 0,3 * (-157 + 290) = 40 \text{ МПа}.$$

Для $r=r_2$: $\sigma_r = \frac{157 * 30^2}{55^2 - 30^2} - \frac{30^2 * 55^2 * 157}{55^2 * (55^2 - 30^2)} = 0; \quad \sigma_t = \frac{157 * 30^2}{55^2 - 30^2} + \frac{30^2 * 55^2 * 157}{55^2 * (55^2 - 30^2)} = 133 \text{ МПа};$

$$\sigma_z = 0,3 * (0 + 133) = 40 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры окружных, радиальных и продольных напряжений



