Еще раз повторюсь – это <u>указания</u> к решению, а не подробные решения, они нужны тем, кто попытался решить выданные вам варианты и хочет сверить ответы. Если Вы вообще не представляете, как решать тест, то здесь пока делать нечего: для вас в конце каждого примера стоит ссылка на раздел, куда надо обратиться, где похожие примеры разбираются подробнейшим образом. Сначала нужно обратиться туда, а уже потом пытаться решить задачки и сверить с предложенным решением.

Интегралы

1а) $\int\left(6x+\frac{2}{x}\right)^2 dx = 36\int x^2dx + 24\int dx + 4\int x^{-2}dx = 36\frac{x^3}{3} + 24x + 4\frac{x^{-1}}{-1} + C = 12x^3 + 24x - \frac{4}{x} + C$

(***<u>табличный</u>*** интеграл, см. тему 5.1 «Табличное интегрирование»);

1б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-8}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C$ (***<u>табличный</u>*** интеграл, см. тему 5.1 «Табличное интегрирование»);

2. (***<u>подведение под знак дифференциала</u>*** или заменой $t = 6x^2 - 5$; см. тему 5.1)

$$\int\frac{4xdx}{(6x^2-5)^7} = \left[d(6x^2-5) = 12xdx\right] = \frac{1}{3}\int\frac{12xdx}{(6x^2-5)^7} = \frac{1}{3}\int(6x^2-5)^{-7}d(6x^2-5) = \frac{1}{3}\frac{(6x^2-5)^{-6}}{-6} + C =$$

$$= -\frac{1}{18(6x^2-5)^6} + C$$

3. ***<u>Интегрирование по частям</u>*** (см. более подробно тему 5.1)

$$\int_0^{\pi}(2-4x)\cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = (2-4x) & du = -4dx \\ dv = \cos 2x\,dx & v = \int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = uv - \int vdu =$$

$$= (2-4x)\frac{1}{2}\sin 2x + 4\int\frac{1}{2}\sin 2xdx = (1-2x)\sin 2x - \cos 2x + C$$

4. ***Выделяем полный квадрат в знаменателе*** (см. тему 5.1 «Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе»)

$$\int\frac{7dx}{-x^2-4x-8} = -7\int\frac{dx}{x^2+4x+8} = -7\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+4} = -7\int\frac{dx}{(x+2)^2+4} =$$

$$= -7\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{2} + C.$$

5. Здесь могут потребоваться формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int (2\sin 3x \cos 3x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 6x = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 12x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 12x) dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x \right) + C$$

6а)

$$\int_0^{\pi/12} \frac{tg^4 3x}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/12} tg^4 3x \cdot d(tg 3x) = \frac{1}{3}\cdot \frac{tg^5 3x}{5}\Bigg|_0^{\pi/12} = \frac{1}{15}(tg^5 3\pi/12 - tg^5 0) = \frac{1}{15}(1-0) = \frac{1}{15}$$

<u>(подведение под знак дифференциала</u> и «Определенный интеграл». Вспоминаем, что для вычисления <u>определенного</u> интеграла надо воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница: в первообразнуювместо икса подставить верхний предел, знак минус, и нижний предел).

6б). ***<u>Интегрирование по частям </u>*** и «Определенный интеграл»)

$$\int_0^{7\pi} (x-4)\cos\frac{x}{7} dx = \begin{bmatrix} u = (x-4) & du = dx \\ dv = \cos\frac{x}{7} dx & v = 7\sin\frac{x}{7} \end{bmatrix} = uv - \int v du =$$

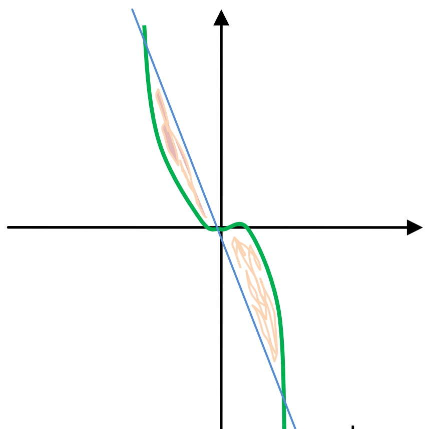
$$= (x-4)\cdot 7\sin\frac{x}{7}\Bigg|_0^{7\pi} - 7\int_0^{7\pi} \sin\frac{x}{7} dx = 0 + 49\cos\frac{x}{7}\Bigg|_0^{\pi} = [\cos\pi = -1,\ \cos 0 = 1] = 49(-1-1) = -98 .$$

7. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной данными линиями

$$D: y = -x^3,\ y = -4x$$

Решение

Алгоритм такой: рисуем графики (если уж совсем не представляем, как они выглядят, можно это сделать по точкам), ищем точки пересечения, считаем интеграл.



$y = -x^3$ – кубическая парабола, $y = -4x$ – прямая.

Чтоб найти точки пересечения, надо приравнять игреки (либо иксы, что удобнее):

$$-x^3 = -4x$$
$$4x - x^3 = 0$$
$$x(4 - x^2) = 0$$
$$x = 0,\ \ x = \pm 2$$

Площадь можно вычислить по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$. Так как в данном случае область остоит из двух одинаковых частей, то ограничимся вычислением одной части (правой), а потом результат умножим на 2:

$$S_1 = \int_0^2 (-x^3 - (-4x))dx = \int_0^2 (-x^3 + 4x)dx = -\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 + 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^2 = 4 .$$

Тогда $S = 2 \cdot 4 = 8$.

2. Дифференциальные уравнения

Решения тут приведены максимально неподробно, но типы уравнений и адрес, куда обратиться, чтоб научиться их решать, указаны.

2.1. а) $(y+5)dx + x^6 dy = 0,\ y(1) = 1$ ***с разделяющимися переменными*** (см.тему 6.1)
Разделяем переменные:
$-\dfrac{dx}{x^6} = \dfrac{dy}{(y+5)}$, интегрируем обе части:

общее решение: $\dfrac{1}{5x^5} = \ln|y+5| + C$,

частное решение с учетом начальных условий (подставляем x=1, y=1):
$\dfrac{1}{5x^5} = \ln|y+5| - \ln 6 + \dfrac{1}{5}$.

б) ***однородное первого порядка*** (см.тему 6.1);
Замена $y = ux$. Приходим к уравнению $u'x = e^u$ – оно с разделяющимися переменными;
Разделив переменные, получаем уравнение: $e^{-u}du = \dfrac{dx}{x}$.

$-e^{-u} = \ln x + C$ – *общее решение*. Учитывая, что $u = \dfrac{y}{x}$, получаем ***ответ***:
$-e^{-y/x} = \ln x + C$.

в) ***линейное первого порядка*** (см. соответствующий материал в теме 6.1);

Замена $y = uv$. Решая, получаем $v = x^{-3}$, $u = \dfrac{x^5}{5} + 2x^4 + C$.

Общее решение: $y = uv = \left(\dfrac{x^5}{5} + 2x^4 + C\right)x^{-3} = \dfrac{x^2}{5} + 2x + \dfrac{C}{x^3}$.

Находим С, используя начальные условия: $1 = \dfrac{25}{5} + 2\cdot 5 + \dfrac{C}{1}$, $\quad C = -14$.

Частное решение: $y = \dfrac{x^2}{5} + 2x - \dfrac{14}{x^3}$.

2.2. Тут все понятно, квадратные уравнения и больше ничего (см. тему 6.2, сделайте шпаргалку)
а) $y'' + 2y' = 0$

$k^2 + 2k = 0$, $k_1 = 0, k_2 = -2$

ответ: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$
б) $y'' + 16y = 0$

$k^2 + 16 = 0$, $k_{1,2} = \pm 4i$

ответ: $y_0 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$
в) $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2+2k+1=0$, $D=0$ $k_1=k_2=-1$

$y=e^{-x}(C_1+C_2x)$

2.3.***<u>Неоднородное ДУ второго порядка</u>*** (загляните, пожалуйста,. тему 6.2 – там есть два <u>подробнейшим</u> образом разобранных примера в **PDF** (поэтому не вижу смысла дублировать) и презентация). Кроме того, на паре Елена Зиновьевна показала шесть подобных примеров – можно обратиться туда.

а) $y''+2y'+y=3e^{4x}$

<u>общее решение однородного уравнения</u> имеет вид: $y_0=e^{-x}(C_1+C_2x)$,

<u>частное решение неоднородного уравнения</u> ищем в виде: $y_н=Ae^{4x}$. Найдя первую и вторую производные и подставив все это в исходное уравнение, найдем $A=\dfrac{3}{25}$, а значит, $y_н=\dfrac{3}{25}e^{4x}$. Общее решение нашего уравнения есть сумма y_0 и $y_н$:

<u>Ответ:</u> $y=y_0+y_н=e^{-x}(C_1+C_2x)+\dfrac{3}{25}e^{4x}$.

б) $y''-y'-6y=\cos 2x-3\sin 2x$

<u>общее решение однородного уравнения</u> имеет вид: $y_0=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$,

<u>частное решение неоднородного уравнения</u> ищем в виде: $y_н=A\cos 2x+B\sin 2x$. Найдем первую и вторую производные и подставим все это в исходное уравнение. Затем приравняем отдельно коэффициенты при синусах и косинусах и получим систему:

$\begin{cases}-10A-2B=1,\\ 2A-10B=-3\end{cases}$, откуда найдем $A=-\dfrac{2}{13}$, $B=\dfrac{7}{26}$ (особенно удобно их находить по формулам Крамера), а значит, $y_н=-\dfrac{2}{13}\cos 2x+\dfrac{7}{26}\sin 2x$.

Общее решение нашего уравнения есть сумма y_0 и $y_н$:

<u>Ответ:</u> $y=y_0+y_н=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-\dfrac{2}{13}\cos 2x+\dfrac{7}{26}\sin 2x$.