В. Ю. Златина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ $\delta-$ФУНКЦИИ ДИРАКА

Введение. Решение задач квантовой теории рассеяния невозможно без использования аппарата математической физики. Так даже простейшие задачи расчета наблюдаемых на эксперименте величин в физике элементарных частиц требуют специализированных методов.

Работа посвящена приложениям $\delta-$функции Дирака. В разделе **1** приведено определение функции Дирака в терминах функционального анализа. В разделе **2** изложены основные тождества для $\delta-$функции. Как результат работы, в разделе **3** приведен пример использования функции Дирака для расчета фазового объема конечного двухчастичного состояния.

1. Определение $\delta-$функции Дирака. Сформулируем задачу определения плотностии точки единичной массы [1]. Для простоты будем считать, что эта точка совпадает с началом координат. От такой плотности потребуем, чтобы интеграл по любому объему V давал бы массу вещества, заключенного в этом объеме, т.е.

$$\int\limits_V \delta(x)dx = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \in V, \\ 0, \text{ если } 0 \overline{\in} V, \end{cases} \tag{1}$$

где $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$, $f_\varepsilon(x)$ – средняя плотность такой точки, $f_\varepsilon(x) = 3/_{4\pi\varepsilon^3}$. Показано [1], для любой непрерывной функций $\varphi(x)$ предел при $\varepsilon \to 0$ числовой последовательности определен как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{2}$$

Действительно, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $|\varphi(x)-\varphi(0)| < \eta$ при условии $|x| < \varepsilon_0$. Отсюда при всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$ получаем

$$\left|\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \le \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx\right| < \eta\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int\limits_{|x|<\varepsilon}dx = \eta \tag{3}$$

Таким образом, слабым пределом последовательности функции [1] $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ является функционал, сопоставляющей каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ – её значение в точке $x = 0$. Вот этот функционал и принимается за определение плотности $\delta(x)$, или за $\delta-$функцию Дирака.

2. Свойства $\delta-$функции Дирака. Приведем основные математические соотношения для $\delta-$функции Дирака. Исходя из соотношения $\delta(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_{\varepsilon}(x)$ под $\delta-$функцией далее будем понимать функцию со свойством

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0,\end{cases} \tag{4}$$

или в общем случае

$$\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & \text{если } x=a,\\ 0, & \text{если } x\neq a.\end{cases} \tag{5}$$

Важным в дальнейших вычислениях представится соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \tag{6}$$

с его следствиями

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a). \tag{7}$$

Полезным окажется соотношение [2,3]

$$\delta(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{8}$$

где x_i – корни функции $f(x)$. Так, к примеру в случае выражения $f(x)=x^2-a^2$ соотношение (8) приводит к

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\big). \tag{9}$$

Ниже приведем пример использования соотношений (6), (7) и (9) для расчета интегралов по фазовому пространству.

3. Вычисление интегралов фазового пространства. Рассмотрим интеграл [4]

$$\int\frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-P), \tag{10}$$

возникающий при вычислении наблюдаемых процесса распада $1\to 2$. Для вычисления (10) воспользуемся соотношением

$$\int\delta(p_1^2-m_1^2)d^4p_1=\frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1}, \tag{11}$$

которое следует из выражения (9) и связи энергии и импульса релятивистской частицы $E^2=\vec{p}^{\,2}+m^2$, $p=\{E,\vec{p}\}$. Подставляя (11) в (10) и проводя интегрирование по переменной p_1 с учетом соотношения (7), получаем

$$\int\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}((P-p_2)^2-m_1^2)=\int\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(P^2-2\left(p_2\cdot P\right)+m_2^2-m_1^2). \quad (12)$$

Дальнейшие вычисления удобно проводить в системе покоя исходной частицsы [4], т.е. $\vec{P}=0$, откуда $P^2=M^2$ и $\left(p_2\cdot P\right)=M\cdot E_2$. Следуя выражению (8), определим модуль производной

$$\left|\frac{d}{dE_2}\left(M^2-2M\cdot E_2+m_2^2-m_1^2\right)\right|=2E_2 \quad (13)$$

и с учетом выражения [4]

$$\frac{d^3\vec{p}_2}{E_2}=\left|\vec{p}_2\right|dE_2d\Omega_2 \quad (14)$$

для выражения (10) окончательно получаем

$$\int\frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-P)=\frac{\left|\vec{p}_2\right|}{4E_2}\int d\Omega_2. \quad (15)$$

Дальнейшее вычисление интеграла по телесному углу $\int d\Omega_2$ не входит в цели предлагаемой работы.

Заключение. Работа посвящена некоторым физическим приложениям $\delta-$функции Дирака. Авторы отмечают, что все приложения функции Дирака достаточно многообразны, поэтому подробное использование представлено только для задачи теории рассеяния релятивистских частиц.

Литература

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1967. – 436 с.
2. Тахтаджян, Л. А. Квантовая механика для математиков / Л. А. Тахтаджян. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 496 с.
3. Блохинцев, Д. И. Основы квантовой механики: учебное пособие / Д. И. Блохинцев. – Москва.: Наука, 1976. – 664 с.
4. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С. М. Биленький. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.