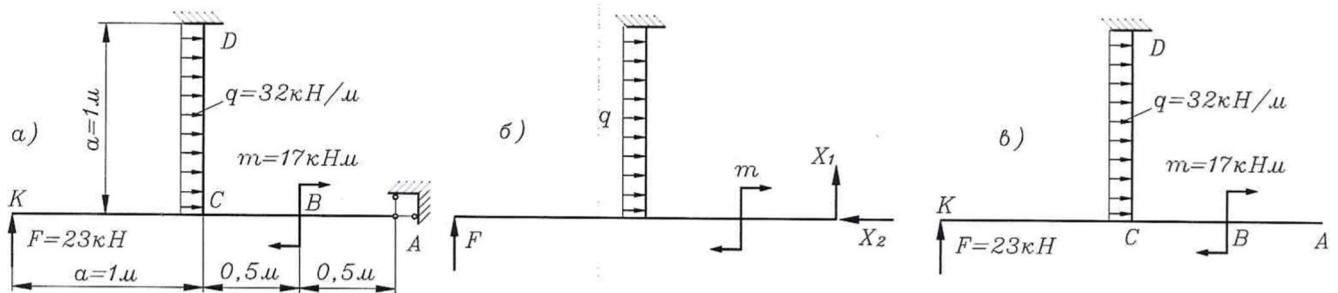


Задача №3

Расчет статически неопределимой рамы

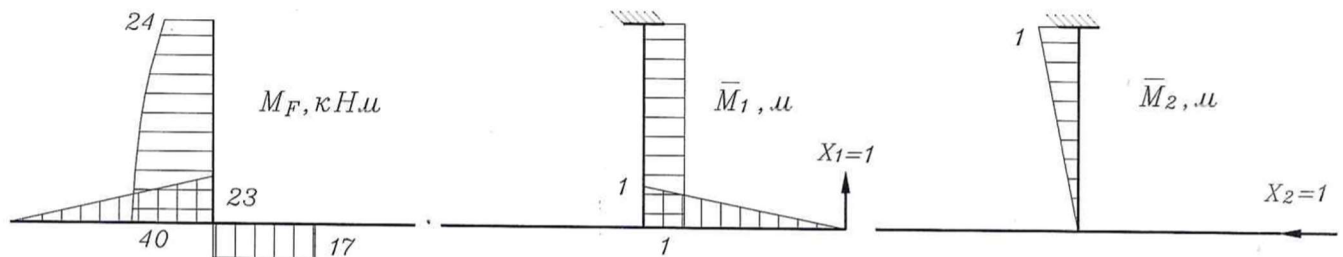
Для заданной рамы построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое сечение и определить вертикальное перемещение точки К.

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $q = 32 \text{ кН/м}$; $F = 23 \text{ кН}$; $m = 17 \text{ кНм}$; $y_K = ?$



Опора D (заделка) накладывает на раму 3 связи и еще 2 связи накладывает шарнирная опора А.. Так как всего наложено 5 связей, то рама 2 раза внешне статически неопределима. Отбросим опору А и приложим заменяющие её действие неизвестные реакции X_1 и X_2 . Получили эквивалентную систему (рис. б). На рис. в) приведена основная система. Вычисляем изгибающие моменты в основной системе от действия заданной нагрузки: $M_{FA} = 0$, $M_{FB}^{ПРAB} = 0$, $M_{FB}^{ЛЕВ} = M_{FC}^{ПР} = -17 \text{ кНм}$, $M_{FK} = 0$, $M_{FC}^{ЛЕВ} = 23 \cdot 1 = 23 \text{ кНм}$, $M_{FC}^{БЕРХ} = 17 + 23 = 40 \text{ кНм}$, $M_{FD} = 40 - 0,5 \cdot 32 \cdot 1^2 = 24 \text{ кНм}$.

Строим эпюру M_F . Среднее значение на участке CD: $M^{CP} = 0,5 \cdot (40 + 24) + \frac{32 \cdot 1^2}{8} = 36 \text{ кНм}$. Приложим силы $X_1 = 1$ и



$X_2 = 1$ и строим единичные эпюры моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Система канонических уравнений:

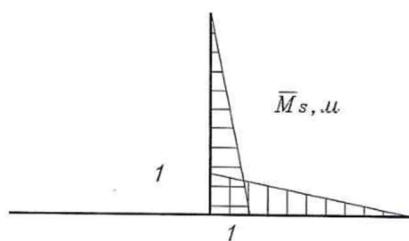
$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты находим способом Верещагина. Перемножаем эпюры M_F , \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1^3 \right) = \frac{1,333}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-1 \cdot 1 \cdot 0,5) = \frac{-0,5}{EI}; \quad \delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{0,333}{EI}; \quad \Delta_{1F} = \int \frac{M_F \bar{M}_1 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-17 \cdot 0,5 \cdot 0,75 - \frac{1}{6} \cdot (24 \cdot 1 + 4 \cdot 36 \cdot 1 + 40 \cdot 1) \right] = \frac{-41,04}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \int \frac{M_F \bar{M}_2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (24 \cdot 1 + 4 \cdot 36 \cdot 0,5) \right] = \frac{16,0}{EI}. \text{ Выполним проверку. Строим суммарную единичную эпюру}$$



$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$. При перемножении эпюр M_F и \bar{M}_S должно выполняться:

$$\int \bar{M}_S^2 ds = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} \text{ и } \int M_F \bar{M}_S ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}.$$

$$\int \bar{M}_S^2 ds = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,666, \quad \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = 1,333 - 2 \cdot 0,5 + 0,333 = 0,666$$

$$\int M_F \bar{M}_S ds = -17 \cdot 0,5 \cdot 0,75 - \frac{1}{6} \cdot (4 \cdot 36 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1) = -25,04,$$

КР_ММиК_2022_06

Изм	Лист	№ докум	Подпись	Дата	Литера		
Разраб	Богданов И.В.						
Пров	Кирилюк С.И.				у		
Н. Контр.					ГТТУ им.П.О.Сухого, гр.К-21		
Утв							

Расчет статически
неопределимой рамы

$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -41,04 + 16 = -24,04$. Подставим в канонические уравнения:

$$\begin{cases} 1,333 * X_1 - 0,5 * X_2 - 41,04 = 0, \\ -0,5 * X_1 + 0,333 * X_2 + 16 = 0, \end{cases}$$

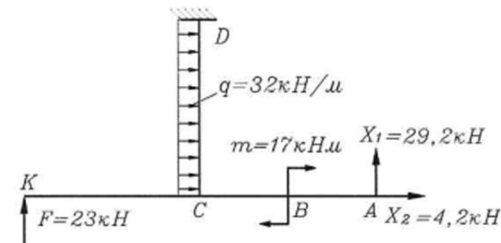
откуда $X_1 = 29,2$ кН; $X_2 = -4,2$ кН. Знак (-) означает, что сила X_2 направлена в противоположную сторону. Вычисляем продольные и поперечные силы и изгибающие моменты: $N_{AC} = 4,2$ кН, $N_{KC} = 0$, $N_{CD} = -23 - 29,2 = -52,2$ кН;

$Q_{AC} = -29,2$ кН, $Q_{KC} = 23$ кН, $Q_C = -4,2$ кН, $Q_D = -4,2 - 32 * 1 = -36,2$ кН; $M_A = 0$, $M_B^{PP} = 0,5 * 29,2 = 14,6$ кНм,

$M_B^{ЛЕВ} = -17 + 14,6 = -2,4$ кНм, $M_C^{PP} = -17 + 29,2 * 1 = 12,2$ кНм, $M_K = 0$, $M_C^{ПРАВ} = 23$ кНм,

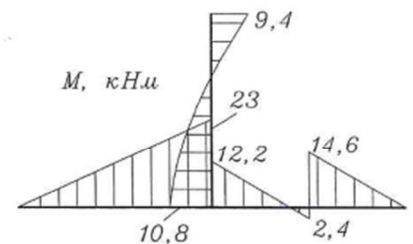
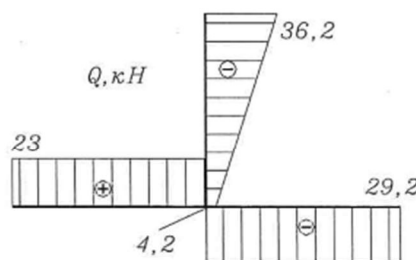
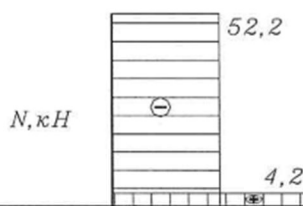
$M_C^{ВЕРХ} = 40 - 1 * 29,2 = 10,8$ кНм, $M_D = 24 - 1 * 29,2 - 1 * 4,2 = -9,4$ кНм. Среднее значение на участке CD:

$M^{CP} = 0,5 * (-9,4 + 10,8) + \frac{32 * 1^2}{8} = 4,7$ кНм. Строим эпюры N, Q, M. Выполним деформационную проверку,



умножая суммарную эпюру M на единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Должно выполняться: $\int M \bar{M}_1 ds = 0$ и $\int M \bar{M}_2 ds = 0$.

$$\begin{aligned} \int M \bar{M}_1 ds &= 0,5 * 14,6 * 0,5 * \frac{1}{3} + \\ &+ \frac{1}{6} * (-2 * 2,4 * 0,5 + 2 * 12,2 * 1 - 2,4 * 1 + 12,2 * 0,5) + \end{aligned}$$



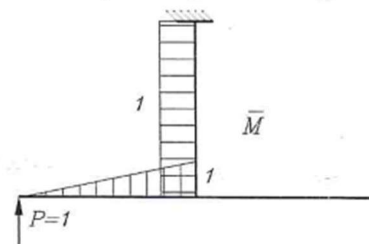
$+ \frac{1}{6} * (-10,8 * 1 - 4 * 4,7 * 1 + 9,4 * 1) = -0,008 \approx 0$; $\int M \bar{M}_2 ds = \frac{1}{6} * (-9,4 * 1 + 4 * 4,7 * 0,5) = 0,000$. Таким образом, эпюра M построена правильно. Максимальный момент: $M_{MAX} = 23$ кНм. Продольная сила в опасном сечении: $N = 0$. Из условия прочности при изгибе $\sigma = \frac{M_{MAX}}{W_X} \leq [\sigma]$ находим требуемый осевой момент сопротивления сечения:

$W_X \geq \frac{M_{MAX}}{[\sigma]} = \frac{23 * 10^6}{160} = 144000 \text{ мм}^3$. Выбираем двутавр №20 с $W_X = 152 \text{ см}^3 = 152000 \text{ мм}^3$, моментом

инерции $I_X = 1,52 * 10^7 \text{ мм}^4$. Максимальные напряжения в раме: $\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{W_X} = \frac{23 * 10^6}{152000} = 151 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ –

условие прочности выполняется.

Находим вертикальное перемещение сечения К. Приложим в точке К силу $P=1$ и умножим суммарную эпюру M на единичную \bar{M} (учитывая при этом, что $1 \text{ кН} * \text{м}^3 = 10^{12} \text{ Н} * \text{мм}^3$):



$$\begin{aligned} y_K &= \frac{10^{12}}{EI} * \left[\frac{1}{2} * 23 * 1 * \frac{2}{3} + \frac{1}{6} * (10,8 * 1 + 4 * 4,7 * 1 - 9,4 * 1) \right] = \\ &= \frac{11,03 * 10^{12}}{2 * 10^5 * 1,52 * 10^7} = 3,629 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Так как получили $y_K > 0$, то сечение К перемещается по направлению единичной силы, т.е. вверх.

