2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+5}{n(n+2)}$;

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n(n+2)}=0$ и $a_n=\dfrac{n+5}{n(n+2)}>\dfrac{n+6}{(n+1)(n+3)}=a_{n+1}$,

то выполнены условия признака Лейбница и данный ряд сходится.

Для установления характера сходимости составим ряд из абсолютных

величин элементов, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n(n+2)}$. Сравним данный ряд с рядом

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – расходящийся гармонический ряд.

Используем предельный $\left(b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n(n+2)}\div n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n(n+2)}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1\neq 0,$$

следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n(n+2)}$ расходится, а заданный ряд сходится условно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$;

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{matrix}\text{Используем}\\ \text{правило Лопиталя}\end{matrix}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n)'}{(2^n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\cdot\ln 2}=0,$

и $a_n=\frac{n}{2^n}>\frac{n+1}{2^{n+1}}=a_{n+1}$,

то выполнены условия признака Лейбница и данный ряд сходится.

Для установления характера сходимости составим ряд из абсолютных величин элементов, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\div\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2\cdot 2^n}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится, а заданный ряд сходится абсолютно.

4. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 3x \, dx \quad \text{с точностью } \alpha = 0{,}001.$$

Разложим подынтегральную функцию по формуле:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, |x| < \infty,$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{3^6 \cdot x^6}{6!} + \cdots$$

$$f(x) = x^2 \cos 3x = x^2 \left(1 - \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{3^6 \cdot x^6}{6!} + \cdots \right) =$$

$$= x^2 - \frac{3^2 \cdot x^4}{2!} + \frac{3^4 \cdot x^6}{4!} - \frac{3^6 \cdot x^8}{6!} + \cdots$$

Так как отрезок интегрирования $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ находится внутри интервала сходимости данного ряда, то ряд можно почленно интегрировать. Подставляя в интеграл вышеприведенное разложения подынтегральной функции и почленно интегрируя в указанных пределах, получаем

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 3x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{3^2 \cdot x^4}{2!} + \frac{3^4 \cdot x^6}{4!} - \frac{3^6 \cdot x^8}{6!} + \cdots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3^2 \cdot x^5}{2! \cdot 5} + \frac{3^4 \cdot x^7}{4! \cdot 7} - \frac{3^6 \cdot x^9}{6! \cdot 9} + \cdots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{2! \cdot 5} + \frac{3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{4! \cdot 7} - \frac{3^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9}{6! \cdot 9} + \cdots - 0.$$

Ряд знакочередующийся. Поскольку $\frac{3^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9}{6! \cdot 9} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно взять первые три слагаемых. Итак,

$$I = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{2! \cdot 5} + \frac{3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{4! \cdot 7} \approx 0{,}042 - 0{,}028 + 0{,}004 = 0{,}018.$$

9. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти плотность распределения вероятности $f(x)$. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a, b]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{15}(x^2 + 2x), & \text{при } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2.$$

Плотность распределения вероятности:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{15}(2x + 2), & \text{при } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{2}{15}(x + 1), & \text{при } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

б) Математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{15}(x+1)\, dx = \frac{2}{15}\int_0^3 (x^2 + x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^3 = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 0\right) = \frac{2}{15} \cdot \left(9 + \frac{9}{2}\right) = \frac{2}{15} \cdot \frac{27}{2} = \frac{9}{5} = 1{,}8;$$

Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X];$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2}{15}(x+1)\, dx = \frac{2}{15}\int_0^3 (x^3 + x^2)\, dx =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^3 = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} - 0\right) = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{81}{4} + 9\right) = \frac{2}{15} \cdot \frac{117}{4} = \frac{39}{10} = 3{,}9;$$

$$D[X] = 3{,}9 - 1{,}8^2 = 0{,}66$$

Вероятность попадания СВ X на отрезок $[-1; 2]$:

$$P(-1 \le X \le 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{15}(2^2 + 2 \cdot 2) - 0 = \frac{8}{15} \approx 0{,}533.$$