

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Необходимый признак сходимости:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Следствие: Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расх-ся.

Достаточные признаки сходимости:

1. Признак сравнения.

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $a_n \leq b_n$, то

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх-ся, значит и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся;

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ся, значит и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

2. Предельный признак сравнения.

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $L \neq 0, L \neq \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх-ся или расх-ся одновременно.

3. Признак Д'Аламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Тогда:

1) если $k < 1$, то ряд сходится;

2) если $k > 1$, то ряд расходится;

3) если $k = 1$ — ?.

4. Признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Тогда:

1) если $k < 1$, то ряд сходится;

2) если $k > 1$, то ряд расходится;

3) если $k = 1$ — ?.

5. Интегральный признак Коши

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, где

$f(n)$ — интегрируемая на промежутке $[1; +\infty)$

функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Основные ряды, выбираемые для сравнения:

I. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится

Ia. Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Он сх-ся при $p > 1$ и расх-ся при $p \leq 1$.

II. Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Он сх-ся при $q < 1$ и расх-ся при $q \geq 1$.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

— сходится абсолютно;

— сходится условно;

— расходится.

Признак Лейбница

Если все члены знакопеременующегося ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ удовлетворяют условиям:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Разложения в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$;

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$-\infty < x < +\infty$;

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$-\infty < x < +\infty$;

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$;

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$,

$-1 < x \leq 1$;

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$,

$-1 \leq x \leq 1$;

7. $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$,

$-1 < x < 1$

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Необходимый признак сходимости:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Следствие: Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расх-ся.

Достаточные признаки сходимости:

5. Признак сравнения.

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $a_n \leq b_n$, то

- 1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх-ся, значит и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся;
- 2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ся, значит и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

6. Предельный признак сравнения.

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $L \neq 0, L \neq \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх-ся или расх-ся одновременно.

7. Признак Д'Аламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Тогда:

- 4) если $k < 1$, то ряд сходится;
- 5) если $k > 1$, то ряд расходится;
- 6) если $k = 1$ — ?.

8. Признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Тогда:

- 1) если $k < 1$, то ряд сходится;
- 2) если $k > 1$, то ряд расходится;
- 3) если $k = 1$ — ?.

5. Интегральный признак Коши

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, где

$f(n)$ — интегрируемая на промежутке $[1; +\infty)$

функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Основные ряды, выбираемые для сравнения:

I. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится

Ia. Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Он сх-ся при $p > 1$ и расх-ся при $p \leq 1$.

II. Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Он сх-ся при $q < 1$ и расх-ся при $q \geq 1$.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

— сходится абсолютно;

— сходится условно;

— расходится.

Признак Лейбница

Если все члены знакопеременующегося ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ удовлетворяют условиям:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Разложения в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$;

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$-\infty < x < +\infty$;

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$-\infty < x < +\infty$;

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$;

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$,

$-1 < x \leq 1$;

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$,

$-1 \leq x \leq 1$;

7. $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$,

$-1 < x < 1$

