

Задача №4

Расчет толстостенных цилиндров

Составной цилиндр, образованный из двух длинных цилиндров посадкой с натягом Δ , подвергается действию внутреннего давления p_1 . Размеры цилиндров: r_1 – радиус внутренней поверхности составного цилиндра; r_c – радиус поверхности сопряжения внутреннего и наружного цилиндров;

r_2 – радиус наружной поверхности составного цилиндра. Допускаемое напряжение для материала цилиндров $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,3$.

Определить оптимальную величину натяга Δ и допускаемую величину внутреннего давления $[p_1]$. Определить также допускаемую величину внутреннего давления $[p_1]$ для сплошного однослойного цилиндра с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 и сравнить с допускаемым внутренним давлением для составного цилиндра. Построить эпюры радиального, окружного и продольного нормальных напряжений в составном и сплошном цилиндрах при большем из допускаемых внутренних давлений $[p_1]$.

Дано: $r_1 = 50 \text{ мм}$; $r_c = 65 \text{ мм}$; $r_2 = 80 \text{ мм}$; гипотеза предельного состояния IV.

1. Радиальное и окружное напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{r_B^2 r_H^2 (p_B - p_H)}{r^2 (r_H^2 - r_B^2)}, \quad (1)$$

где p_B и p_H – внутреннее и наружное давления; r_B и r_H – внутренний и наружный радиусы; r – радиус-вектор точки, в которой определяются напряжения. Знак (–) соответствует напряжению σ_r , знак (+) соответствует напряжению σ_t .

Напряжения в составном цилиндре определяются суммированием напряжений (σ_r' , σ_t') в цилиндре с радиусами r_1 и r_2 от действия внутреннего давления p_1 и напряжений (σ_r'' , σ_t'') в цилиндре с радиусами r_1 и r_c от действия натяга p_c :

$$\sigma_r = \sigma_r' \left(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_r'' \left(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c, \right) \quad (2) \quad \sigma_t = \sigma_t' \left(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_t'' \left(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c, \right) \quad (3).$$

Продольное напряжение: $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_t)$. (4)

Подставим значения в уравнения (1)–(4).

$$\begin{aligned} \sigma_t' &= \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = 2,28 p_1; \quad \sigma_t'' = \frac{-p_c * 65^2}{65^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 65^2 * (-p_c)}{50^2 * (65^2 - 50^2)} = -4,90 p_c; \quad \sigma_t = 2,28 p_1 - 4,9 p_c = \sigma_1; \\ \sigma_r' &= \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = -p_1; \quad \sigma_r'' = \frac{-p_c * 65^2}{65^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 65^2 * (-p_c)}{50^2 * (65^2 - 50^2)} = 0; \quad \sigma_r = -p_1 = \sigma_3; \\ \sigma_z &= 0,3 * (-p_1 + 2,28 p_1 - 4,9 p_c) = 0,38 p_1 - 1,47 p_c = \sigma_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке внутреннего цилиндра по IV-й гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{I\text{экв}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r - \sigma_r \sigma_t} = \\ &= \sqrt{(2,28 p_1 - 4,9 p_c)^2 + (0,38 p_1 - 1,47 p_c)^2 + (-p_1)^2 - (2,28 p_1 - 4,9 p_c)(0,38 p_1 - 1,47 p_c) - (0,38 p_1 - 1,47 p_c)(-p_1) - (-p_1)(2,28 p_1 - 4,9 p_c)} = \\ &= \sqrt{8,13 p_1^2 - 24,62 p_1 p_c + 18,97 p_c^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Вычисляем напряжения в опасной точке наружного цилиндра (при $r=r_c$).

$$\begin{aligned} \sigma_t' &= \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{65^2 * (80^2 - 50^2)} = 1,61 p_1; \quad \sigma_t'' = \frac{p_c * 65^2}{80^2 - 65^2} + \frac{65^2 * 80^2 * p_c}{65^2 * (80^2 - 65^2)} = 4,67 p_c; \quad \sigma_t = 1,61 p_1 + 4,67 p_c = \sigma_1; \\ \sigma_r' &= \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{65^2 * (80^2 - 50^2)} = -0,33 p_1; \quad \sigma_r'' = \frac{p_c * 65^2}{80^2 - 65^2} - \frac{65^2 * 80^2 * p_c}{65^2 * (80^2 - 65^2)} = -p_c; \quad \sigma_r = -0,33 p_1 - p_c = \sigma_3; \\ \sigma_z &= 0,3 * (-0,33 p_1 - p_c + 1,61 p_1 + 4,67 p_c) = 0,38 p_1 + 1,10 p_c = \sigma_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке наружного цилиндра по IV-й гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{II\text{экв}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r - \sigma_r \sigma_t} = \\ &= \sqrt{(1,61 p_1 + 4,67 p_c)^2 + (0,38 p_1 + 1,10 p_c)^2 + (-0,33 p_1 - p_c)^2 - (1,61 p_1 + 4,67 p_c)(0,38 p_1 + 1,10 p_c) - (0,38 p_1 + 1,10 p_c)(-0,33 p_1 - p_c) - (-0,33 p_1 - p_c)(1,61 p_1 + 4,67 p_c)} = \\ &= \sqrt{2,89 p_1^2 + 16,89 p_1 p_c + 24,65 p_c^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

					КР_ММиК_2022_06		
Изм	Лист	№ докум	Подпись	Дата	<div style="text-align: center;"> <p>Расчет толстостенных цилиндров</p> <p>ГГТУ им.П.О.Сухого, зр.К-21</p> </div>		
Разраб	Каплан Л.В.						
Пров	Кириллюк С.И.						
Н. Контр.							
Утв							

3. Согласно условию равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров приравняем выражения (6) и (8):

$$\sigma_{\text{вн}} = \sigma_{\text{вн}}; \sqrt{8,13 p_1^2 - 24,62 p_1 p_C + 18,97 p_C^2} = \sqrt{2,89 p_1^2 + 16,89 p_1 p_C + 24,65 p_C^2},$$

$$5,24 p_1^2 - 41,51 p_1 p_C - 5,68 p_C^2 = 0, \quad p_1^2 - 7,92 p_1 p_C - 1,08 p_C^2 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$p_1 = 3,96 p_C + \sqrt{(3,96 p_C)^2 + 1,08 p_C^2} = 8,05 p_C. \quad (9)$$

4. Оптимальную величину давления натяга находим из условия $\sigma_{\text{вн}} = [\sigma]$, подставив $p_1 = 8,05 p_C$ в $\sigma_{\text{вн}}$:

$$\sqrt{8,13 p_1^2 - 24,62 p_1 p_C + 18,97 p_C^2} = [\sigma], \quad \sqrt{8,13 * (8,05 p_C)^2 - 24,62 * 8,05 p_C p_C + 18,97 p_C^2} = [\sigma], \quad 18,6 p_C = 300, \quad \text{откуда}$$

$$p_C = 16 \text{ МПа. При этом допускаемое внутреннее давление будет равно } [p_1] = 8,05 * 16 = 129 \text{ МПа.}$$

5. Величину натяга находим из формулы Гадолина (при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$):

$$p_C = \frac{\Delta}{2r_C \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{r_C^2 + r_1^2}{r_C^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_2^2 + r_C^2}{r_2^2 - r_C^2} + \mu_2 \right) \right]},$$

$$\Delta = \frac{2 p_C r_C}{E} \left(\frac{r_C^2 + r_1^2}{r_C^2 - r_1^2} + \frac{r_2^2 + r_C^2}{r_2^2 - r_C^2} \right) = \frac{2 * 16 * 65}{2 * 10^5} \left(\frac{65^2 + 50^2}{65^2 - 50^2} + \frac{80^2 + 65^2}{80^2 - 65^2} \right) = 0,091 \text{ мм.}$$

6. Определяем допускаемую величину внутреннего давления в однослойном цилиндре с $r_1 = 50 \text{ мм}$ и $r_2 = 80 \text{ мм}$.

$$\text{Напряжения в опасной точке при } r = r_1 = 50 \text{ мм: } \sigma_r' = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = -p_1;$$

$$\sigma_t' = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = 2,28 p_1, \quad \sigma_z = \mu(\sigma_r' + \sigma_t') = 0,3 * (-1 + 2,28) p_1 = 0,38 p_1.$$

$$\text{Определяем } [p_1]: \sigma_{\text{вн}} = \sqrt{\sigma_t'^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r'^2 - \sigma_t' \sigma_z - \sigma_z \sigma_r' - \sigma_r' \sigma_t'} =$$

$$= \sqrt{(2,28 p_1)^2 + (0,38 p_1)^2 + (-p_1)^2 - (2,28 p_1)(0,38 p_1) - (0,38 p_1)(-p_1) - (-p_1)(2,28 p_1)} = 2,85 p_1; \quad \sigma_{\text{вн}} = [\sigma],$$

$$2,85 p_1 = 300; \quad [p_1] = 105 \text{ МПа.}$$

Величина допускаемого давления в сплошном цилиндре оказалась меньше, чем в составном в $n = \frac{129}{105} = 1,22$ раза.

7. Для построения эпюр напряжений вычисляем их значения для точек с $r = r_1$, $r = r_C$ и $r = r_2$ при $[p_1] = 129 \text{ МПа}$. Напряжения во внутреннем цилиндре при $r = r_1$ находим по выражениям (5).

$$\sigma_t = 2,28 * 129 - 4,9 * 16 = 217 \text{ МПа}; \quad \sigma_r = -p_1 = -129 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (-129 + 216) = 26 \text{ МПа.}$$

Напряжения во внутреннем цилиндре при $r = r_C$ равны

$$\sigma_r = \sigma_r' \left(\frac{r = r_C, p_B = p_1, p_H = 0}{r_B = r_1, r_H = r_2} \right) + \sigma_r'' \left(\frac{r = r_C, p_B = 0, p_H = p_C}{r_B = r_1, r_H = r_C} \right) = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{65^2 * (80^2 - 50^2)} + \frac{-p_C * 65^2}{65^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 65^2 * (-p_C)}{65^2 * (65^2 - 50^2)} =$$

$$= -0,33 p_1 - p_C = -0,33 * 129 - 16 = -58 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = \sigma_t' \left(\frac{r = r_C, p_B = p_1, p_H = 0}{r_B = r_1, r_H = r_2} \right) + \sigma_t'' \left(\frac{r = r_C, p_B = 0, p_H = p_C}{r_B = r_1, r_H = r_C} \right) = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{65^2 * (80^2 - 50^2)} + \frac{-p_C * 65^2}{65^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 65^2 * (-p_C)}{65^2 * (65^2 - 50^2)} =$$

$$= 1,61 p_1 - 3,90 p_C = 1,61 * 129 - 3,9 * 16 = 145 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (-59 + 145) = 26 \text{ МПа.}$$

Напряжения в наружном цилиндре при $r = r_C$ определяем по формулам (7):

$$\sigma_r = -0,33 p_1 - p_C = -0,33 * 129 - 16 = -58 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = 1,61 p_1 + 4,67 p_C = 1,61 * 129 + 4,67 * 16 = 282 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 0,3 * (-58 + 282) = 68 \text{ МПа.}$$

Напряжения в наружном цилиндре при $r = r_2$: $\sigma_r(r = r_2) = 0$;

$$\sigma_t = \sigma_t' \left(\frac{r = r_2, p_B = p_1, p_H = 0}{r_B = r_1, r_H = r_2} \right) + \sigma_t'' \left(\frac{r = r_2, p_B = p_C, p_H = 0}{r_B = r_C, r_H = r_2} \right) = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{80^2 * (80^2 - 50^2)} + \frac{p_C * 65^2}{80^2 - 65^2} + \frac{65^2 * 80^2 * p_C}{80^2 * (80^2 - 65^2)} =$$

$$= 1,28 p_1 + 3,89 p_C = 1,28 * 129 + 3,89 * 19 = 227 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (0 + 227) = 68 \text{ МПа.}$$

Напряжения в наружном цилиндре при $r=r_2$: $\sigma_r(r=r_2) = 0$;

$$\sigma_t = \sigma_t' \left(r=r_2, p_B=p_1, p_H=0, \right) + \sigma_t'' \left(r=r_2, p_B=p_C, p_H=0, \right) = \frac{p_1 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * p_1}{80^2 * (80^2 - 50^2)} + \frac{p_C * 65^2}{80^2 - 65^2} + \frac{65^2 * 80^2 * p_C}{80^2 * (80^2 - 65^2)} =$$

$$= 1,28p_1 + 3,89p_C = 1,28 * 129 + 3,89 * 19 = 227 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3 * (0 + 227) = 68 \text{ МПа}.$$

Напряжения в сплошном цилиндре определяем по формулам (1) и (4) при $r_B=r_1$, $r_H=r_2$, $p_B=p_1$, $p_H=0$.

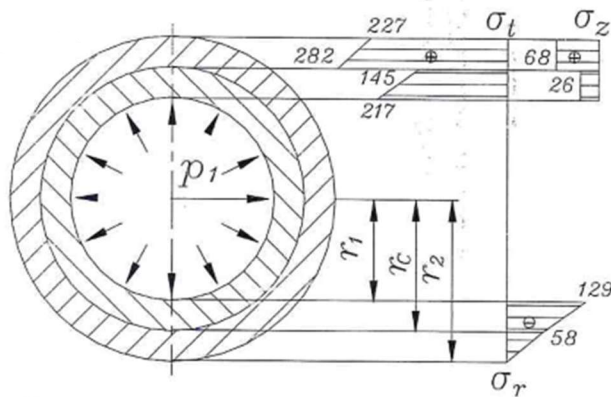
Для $r=r_1$: $\sigma_r = \frac{129 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * 129}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = -129 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = \frac{129 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * 129}{50^2 * (80^2 - 50^2)} = 294 \text{ МПа};$

$$\sigma_z = 0,3 * (-129 + 294) = 50 \text{ МПа}.$$

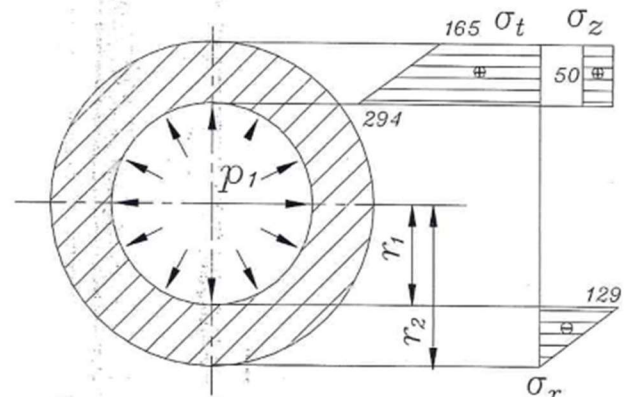
Для $r=r_2$: $\sigma_r = \frac{129 * 50^2}{80^2 - 50^2} - \frac{50^2 * 80^2 * 129}{80^2 * (80^2 - 50^2)} = 0; \quad \sigma_t = \frac{129 * 50^2}{80^2 - 50^2} + \frac{50^2 * 80^2 * 129}{80^2 * (80^2 - 50^2)} = 165 \text{ МПа};$

$$\sigma_z = 0,3 * (0 + 165) = 50 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры окружных, радиальных и продольных напряжений



Составной цилиндр



Сплошной цилиндр

