

Лабораторная работа №3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель работы: изучить и определить вероятность появления случайной величины.

Опытная вероятность появления случайного события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{N}, \quad (3.1)$$

где $P(A)$ – опытная вероятность появления случайного события A ;
 m – опытное число благоприятных случаев появления случайного события A ;

N – общее количество опытов или повторностей информации или число наблюдаемых машин.

Закон сложения вероятностей независимых событий

В том случае, если интересующее событие A объединяет группу или сумму событий A_1, A_2, A_3 и т.д., то вероятность появления этого события A или вероятность суммы событий $A_1 + A_2 + A_3$ и т.д. равно сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3). \quad (3.2)$$

Закон умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного проявления двух и более независимых событий A, B и т.д. в полной группе событий равно произведению вероятностей этих событий

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.3)$$

Закон умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух и более зависимых событий A, B и т.д. в полной группе событий равна произведению вероятности появления первого события на условную вероятность второго события:

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (3.4)$$

Задание 1

Были проведены испытания N тракторов. При этом установлено, что у m_1 тракторов эксплуатационные отказы появились в интервале наработок

					Лабораторная работа №3				
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата					
Разраб.					ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ	Лит.	Лист	Листов	
Провер.							1	5	
						ГГТУ им.П.О.Сухого гр.С-41			

$A_1 = 100 \dots 200$ моточасов, у m_2 – в интервале $A_2 = 200 \dots 300$ моточасов, у m_3 – в интервале $A_3 = 300 \dots 400$ моточасов, у m_4 – в интервале $A_4 = 400 \dots 500$ моточасов и, наконец, у m_5 – в интервале $A_5 = 500 \dots 600$ моточасов.

Требуется определить, чему равна опытная вероятность появления эксплуатационного отказа в каждом интервале наработки трактора.

Исходные данные:

$N = 21$ шт; $m_1 = 2$ шт; $m_2 = 3$ шт; $m_3 = 5$ шт; $m_4 = 10$ шт; $m_5 = 1$ шт.

Решение

Пользуясь формулой (3.1) определим вероятность появления эксплуатационного отказа в каждом интервале наработок тракторов:

$$P(A_1) = \frac{2}{21} = 0,09 \text{ или } 9\%; \quad P(A_2) = \frac{3}{21} = 0,14 \text{ или } 14\%;$$

$$P(A_3) = \frac{5}{21} = 0,24 \text{ или } 24\%; \quad P(A_4) = \frac{10}{21} = 0,48 \text{ или } 48\%;$$

$$P(A_5) = \frac{1}{21} = 0,05 \text{ или } 5\%.$$

Задание 2

Требуется определить, какой процент тракторов в условиях предыдущего задания будет иметь отказы в интервале их средней наработки от 200 до 500 моточасов.

Решение

Событие A – количество отказов тракторов в интервале наработок от 200 до 500 моточасов определяет три события:

A_2 – количество отказов в интервале от 200 до 300 моточасов;

A_3 – количество отказов в интервале от 300 до 400 моточасов;

A_4 – количество отказов в интервале от 400 до 500 моточасов.

Следовательно, ожидаемое количество отказов в интервале параметров от 200 до 500 моточасов определим по закону сложения вероятностей независимых событий (3.2)

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{3}{21} + \frac{5}{21} + \frac{10}{21} = 0,86.$$

Т.е. 86% тракторов будут иметь отказы в интервале их наработки от 200 до 500 моточасов.

Задание 3

В двух колхозах работают по N тракторов одной марки, эксплуатационные отказы которых распределены по закону, приведенному в задании 1. Необходимо определить вероятности совместного проявления отказа у трак-

					Лабораторная работа №3	Лист
						2
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

тора А из первого колхоза и у трактора Б из второго колхоза в интервале их наработок $A_3 = 300...400$ моточасов.

Решение

Эти два события не связаны между собой, т.к. вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или не произошло второе событие. Поэтому применяется уравнение (3.3)

$$P(A(A_3); B(A_3)) = P(A(A_3)) \cdot P(B(A_3)) = \frac{5}{21} \cdot \frac{5}{21} = 0,0576$$

Задание 4

По исходным данным определить вероятность совместного появления отказов у тракторов А и Б, работающих в одном колхозе, при их средней наработке $A_3 = 300...400$ моточасов.

Решение

Эти два события связаны между собой, т.к. вероятность появления одного из них зависит от того, произошло или нет второе событие (появление отказа у трактора Б). Поэтому вероятность появления одного из них зависит от того, произошло или нет второе событие (появление отказа у трактора Б). Поэтому вероятность совместного появления отказов у тракторов А и Б определяется по закону умножения вероятностей зависимых событий (3.4)

$$P(A(A_3); B(A_3)) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{20} = 0,048.$$

Задание 5

Из исходных данных определить полную группу событий всех возможных вариантов совместного появления отказов у тракторов А и Б, работающих в разных колхозах и при их разных наработках.

Исходные данные:

$$N = 21 \text{ шт}; m_1 = 2 \text{ шт}; m_2 = 3 \text{ шт}; m_3 = 5 \text{ шт}; m_4 = 10 \text{ шт}; m_5 = 1 \text{ шт}.$$

Решение

1. Определим количество событий в полной группе: трактор А отказал в интервале наработок $A_1 = 100...200$ моточасов, а трактор Б соответственно $A_1 = 100...200$, $A_2 = 200...300$, $A_3 = 300...400$, $A_4 = 400...500$ и $A_5 = 500...600$ моточасов, всего 5 событий. Аналогично по 5 событий произойдёт при отказе трактора А в интервале $A_2 = 200...300$, $A_3 = 300...400$, $A_4 = 400...500$ и $A_5 = 500...600$ моточасов. Таким образом, полная группа событий состоит из 25 отдельных событий;

					Лабораторная работа №3	Лист
						3
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

2. Определим вероятность всех событий в полной группе (события не-связанные):

$$\begin{aligned} \sum_1^{25} P(A, B) = & \frac{2}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{2}{21} \cdot \frac{3}{21} + \frac{2}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{2}{21} \cdot \frac{10}{21} + \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{3}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{3}{21} \times \\ & \times \frac{3}{21} + \frac{3}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{3}{21} \cdot \frac{10}{21} + \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{3}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{10}{21} + \\ & + \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{10}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{10}{21} \cdot \frac{3}{21} + \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{10}{21} \cdot \frac{10}{21} + \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{1}{21} \cdot \frac{2}{21} + \\ & + \frac{1}{21} \cdot \frac{3}{21} + \frac{1}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{1}{21} \cdot \frac{10}{21} + \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{21} = 1. \end{aligned}$$

Задание 6

Для условий задания 1 (N тракторов работают в одном хозяйстве) определить полную группу событий всех возможных вариантов совместного появления отказов у тракторов А и Б при всех возможных вариантах их наработок.

Исходные данные:

$N = 21$ шт; $m_1 = 2$ шт; $m_2 = 3$ шт; $m_3 = 5$ шт; $m_4 = 10$ шт; $m_5 = 1$ шт.

Решение

1. Определим количество событий в полной группе рассуждая так же, как в предыдущем задании, определяем, что число событий полной группы равно 25.

2. Определим вероятность всех событий в полной группе (события связанные):

$$\begin{aligned} \sum_1^{25} P(A, B) = & \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{20} + \frac{2}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{2}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{2}{21} \cdot \frac{10}{20} + \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{20} + \frac{3}{21} \cdot \frac{2}{20} + \frac{3}{21} \times \\ & \times \frac{2}{20} + \frac{3}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{3}{21} \cdot \frac{10}{20} + \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{10}{20} + \\ & + \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{2}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{9}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{21} \cdot \frac{2}{20} + \\ & + \frac{1}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{1}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{1}{21} \cdot \frac{10}{20} + \frac{1}{21} \cdot \frac{0}{20} = 1. \end{aligned}$$

Задание 7

На складе готовой продукции ремонтного предприятия имеется N двигателей, из которых m_1 отремонтированных и m_2 новых (из обменного фонда). Заказчик получает со склада 2 двигателя. В этом случае полную группу событий образуют следующие четыре события:

1. оба двигателя новые;
2. оба двигателя отремонтированные;
3. первый двигатель отремонтированный, второй - новый;

					Лабораторная работа №3	Лист
						4
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

4. первый двигатель новый, второй - отремонтированный.

Требуется определить:

а) Вероятность того, что оба двигателя окажутся новыми.

б) Вероятность того, что хотя бы один двигатель из двух окажется новым.

События связанные.

Исходные данные

$$N = 22; m_1 = 19; m_2 = 3$$

Решение

Для решения воспользуемся уравнением связанных событий

$$P(D_n, D_n) = P(D_n) \cdot P(D_n | D_n) = \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} = 0,0126.$$

Условиям задачи соответствует 1, 3 и 4-ое события. Вероятность появления каждого события определяется по закону умножения зависимых событий, а вероятность получения хотя бы одного нового двигателя по закону сложения вероятностей трёх этих событий

$$\begin{aligned} P(D_{n \text{ из } 2 D}) &= P(D_n, D_n) + P(D_p, D_n) + P(D_n, D_p) = P(D_n) \cdot P(D_n | D_n) + \\ &+ P(D_p) \cdot P(D_n | D_p) + P(D_n) \cdot P(D_p | D_n) = \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} + \frac{19}{22} \cdot \frac{3}{21} + \frac{3}{22} \cdot \frac{19}{21} = \\ &= \frac{120}{462} = 0,26. \end{aligned}$$

Решение этого задания может быть упрощено применением противоположных событий. В данном случае противоположным событием является получение двух отремонтированных двигателей. Вероятность такого события определяется по уравнению

$$P(D_p, D_p) = P(D_p) \cdot P(D_p | D_p) = \frac{19}{22} \cdot \frac{18}{21} = \frac{342}{462} \approx 0,74.$$

Вероятность получения хотя бы одного нового двигателя из двух определяется по уравнению

$$P(D_{n \text{ из } 2 D}) = 1 - P(D_p, D_p) = 1 - 0,74 = 0,26.$$

Правильность решения этого примера может быть проверена по сумме вероятностей полной группы событий, которая должна быть равна единице.

$$P = \frac{120}{462} + \frac{342}{462} = \frac{462}{462} = 1.$$

Вывод: изучил и определить вероятность появления случайной величины.