КОМПЛЕКСНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ.

1.1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Проецирование (лат. Projicio – бросаю вперёд) – процесс получения изображения предмета (пространственного объекта) на какой-либо поверхности с помощью световых или зрительных лучей (лучей, условно соединяющих глаз наблюдателя с какой-либо точкой пространственного объекта), которые называются проецирующими.

Известны два метода проецирования: **центральное** и **параллельное**.

Центральное проецирование заключается в проведении через каждую точку (*A*, *B*, *C*,…) изображаемого объекта и определённым образом выбранный **центр проецирования** (*S*) прямой линии (*SA*, *SB*, >… — **проецирующего луча**).

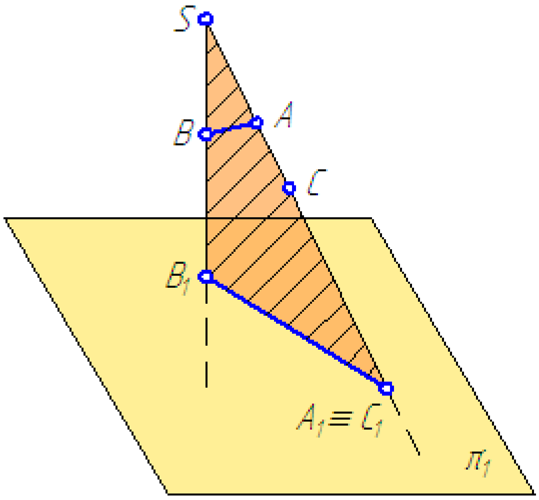


Рисунок 1.1 – Центральное проецирование

Введём следующие обозначения (Рисунок 1.1):

S – центр проецирования (глаз наблюдателя);

π_1 – плоскость проекций;

A, B, C – объекты проецирования – точки;

SA, SB – проецирующие прямые (проецирующие лучи).

Центральной проекцией точки называется точка пересечения проецирующей прямой, проходящей через центр проецирования и объект проецирования (точку), с плоскостью проекций.

Свойство 1. Каждой точке пространства соответствует единственная проекция, но каждой точке плоскости проекций соответствует множество точек пространства, лежащих на проецирующей прямой.

Докажем это утверждение.

На рисунке 1.1: точка A_1 – центральная проекция точки А на плоскости проекций π_1. Но эту же проекцию могут иметь все точки, лежащие на проецирующей прямой. Возьмём на проецирующей прямой SA точку C. Центральная проекция точки C (C_1) на плоскости проекций π_1 совпадает с проекцией точки A (A_1):

1. $C \in SA$;
2. $SC \cap \pi_1 = C_1 \rightarrow C_1 \equiv A_1$.

Следует вывод, что по проекции точки нельзя судить однозначно о её положении в пространстве.

Чтобы устранить эту неопределенность, т.е. сделать чертеж **обратимым**, введём еще одну плоскость проекций (π_2) и ещё один центр проецирования (S_2) (Рисунок 1.2).

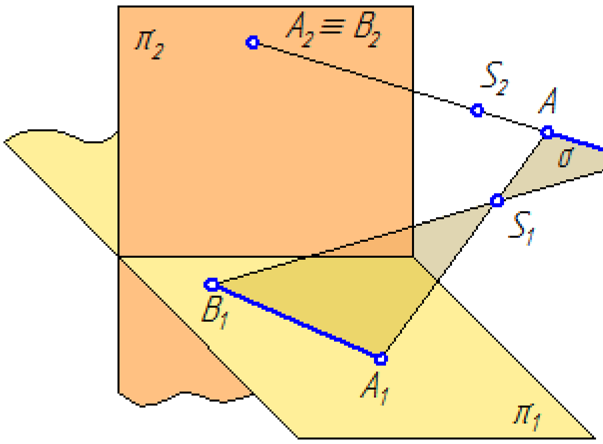


Рисунок 1.2 – Иллюстрация 1-го и 2-го свойств

Построим проекции точки A на плоскости проекций π_2. Из всех точек пространства только точка A имеет своими проекциями A_1 на плоскость π_1 и A_2 на π_2 одновременно. Все другие точки лежащие на проецирующих лучах будут иметь хотя бы одну отличную проекцию от проекций точки A (например, точка B).

<u>Свойство 2</u>. Проекция прямой есть прямая.

Докажем данное свойство.

Соединим точки A и B между собой (Рисунок 1.2). Получим отрезок AB, задающий прямую. Треугольник ΔSAB задает плоскость, обозначенную через σ. Известно, что две плоскости пересекаются по прямой: $\sigma \cap \pi_1 = A_1B_1$, где A_1B_1 – центральная проекция прямой, заданной отрезком AB.

Метод центрального проецирования – это модель восприятия изображения глазом, применяется главным образом при выполнении перспективных изображений строительных объектов, интерьеров, а также в кинотехнике и оптике. Метод центрального проецирования не решает основной задачи, стоящей перед инженером – точно отразить форму, размеры предмета, соотношение размеров различных элементов.

1.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим метод параллельного проецирования. Наложим три ограничения, которые позволят нам, пусть и в ущерб наглядности изображения, получить чертёж более удобным для использования его на практике:

1. Удалим оба центра проекции в бесконечность. Таким образом, добьемся того, что проецирующие лучи из каждого центра станут параллельными, а, следовательно, соотношение истинной длины любого отрезка прямой и длины его проекции будут зависеть только от угла наклона этого отрезка к плоскостям проекций и не зависят от положения центра проекций;
2. Зафиксируем направление проецирования относительно плоскостей проекций;
3. Расположим плоскости проекций перпендикулярно друг другу, что позволит легко переходить от изображения на плоскостях проекций к реальному объекту в пространстве.

Таким образом, наложив эти ограничения на метод центрального проецирования, мы пришли к его частному случаю – **методу параллельного проецирования** (Рисунок 1.3).Проецирование, при котором проецирующие лучи, проходящие через каждую точку объекта, параллельно выбранному направлению проецирования *P*, называется **параллельным.**

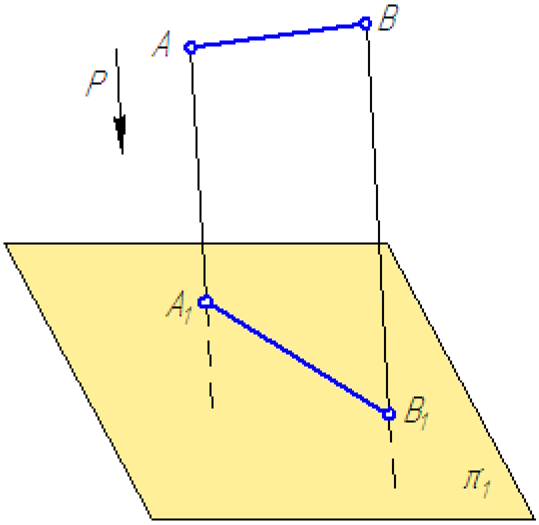


Рисунок 1.3 – Метод параллельного проецирования

Введём обозначения:

Введём обозначения:

P – направление проецирования;

$\pi 1$ – горизонтальная плоскость проекций;

A, *B* – объекты проецирования – точки;

A_1 и B_1 – проекции точек *A* и *B* на плоскость проекций π_1.

Параллельной проекцией точки называется точка пересечения проецирующей прямой, параллельной заданному направлению проецирования *P*, с плоскостью проекций π_1.

Проведём через точки *A* и *B* проецирующие лучи, параллельные заданному направлению проецирования *P*. Проецирующий луч проведённый через точку *A* пересечёт плоскость проекций π_1 в точке A_1. Аналогично проецирующий луч, проведённый через точку *B* пересечет плоскость проекций в точке B_1. Соединив точки A_1 и B_1, получим отрезок $A_1 B_1$– проекция отрезка АВ на плоскость π_1.

1.3. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ. МЕТОД МОНЖА

Если направление проецирования *P* перпендикулярно плоскости проекций p$_1$, то проецирование называется **прямоугольным** (Рисунок 1.4), или **ортогональным** (греч. *ortos* – прямой, *gonia* – угол), если *P* не перпендикулярно π_1, то проецирование называется **косоугольным**.

Четырехугольник AA_1B_1B задаёт плоскость γ, которая называется проецирующей, поскольку она перпендикулярна к плоскости π_1 ($\gamma \perp \pi_1$). В дальнейшем будем использовать только прямоугольное проецирование.

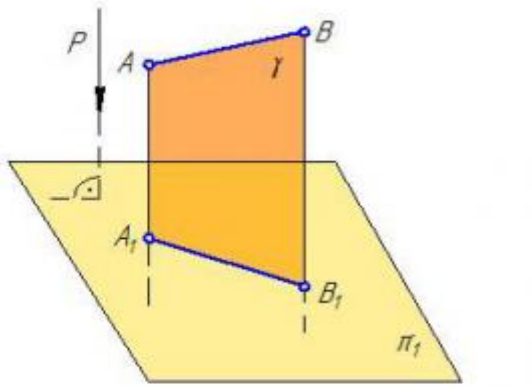


Рисунок 1.4 – Ортогональное проецирование

Рисунок 1.5- Монж, Гаспар (1746-1818)

Основоположником ортогонального проецирования считается французский учёный Гаспар Монж (Рисунок 1.5).

До Монжа строители, художники и учёные обладали довольно значительными сведениями о проекционных способах, и, всё же, только Гаспар Монж является творцом начертательной геометрии как науки.

Гаспар Монж родился 9 мая 1746 года в небольшом городке Боне (Бургундия) на востоке Франции в семье местного торговца. Он был старшим из пяти детей, которым отец, несмотря на низкое происхождение и относительную бедность семьи, постарался обеспечить самое лучшее образование из доступного в то время для выходцев из незнатного сословия. Его второй сын, Луи, стал профессором математики и астрономии, младший — Жан также профессором математики, гидрографии и навигации. Гаспар Монж получил первоначальное образование в городской школе ордена ораторианцев. Окончив её в 1762 году лучшим учеником, он поступил в колледж г. Лиона, также принадлежавший ораторианцам. Вскоре Гаспару доверяют там преподавание физики. Летом 1764 года Монж составил замечательный по точности план родного города Бона. Необходимые при этом способы и приборы для измерения углов и вычерчивания линий были изобретены самим составителем.

Во время обучения в Лионе получил предложение вступить в орден и остаться преподавателем колледжа, однако, вместо этого, проявив большие способности к математике, черчению и рисованию, сумел поступить в Мезьерскую школу военных инженеров, но (из-за происхождения) только на вспомогательное унтер-офицерское отделение и без денежного содержания. Тем не менее, успехи в точных науках и оригинальное решение одной из важных задач фортификации (о размещении укреплений в зависимости от расположения артиллерии противника) позволили ему в 1769 году стать ассистентом (помощником преподавателя) математики, а затем и физики, причём уже с приличным жалованием в 1800 ливров в год.

В 1770 году в возрасте 24-х лет Монж занимает должность профессора одновременно по двум кафедрам — математики и физики, и, кроме того, ведёт занятия по резанию камней. Начав с задачи точной резки камней по заданным эскизам применительно к архитектуре и фортификации, Монж пришёл к созданию методов, обобщённых им впоследствии в новой науке – начертательной геометрии, творцом которой он по праву считается. Учитывая возможность применения методов начертательной геометрии в военных целях при строительстве укреплений, руководство Мезьерской школы не допускало открытой публикации вплоть до 1799 года, книга вышла под названием *Начертательная геометрия* (*Géométrie descriptive*) (стенографическая запись этих лекций была сделана в 1795 году). Изложенный в ней подход к чтению лекций по этой науке и выполнению упражнений сохранился до наших дней. Еще один значительный труд Монжа – *Приложение анализа к геометрии* (*L'application de l'analyse à la géometrie*, 1795) – представляет собой учебник аналитической геометрии, в котором особый акцент делается на дифференциальных соотношениях.

В 1780 был избран членом Парижской академии наук, в 1794 стал директором Политехнической школы. В течение восьми месяцев занимал пост морского министра в правительстве Наполеона, заведовал пороховыми и пушечными заводами республики, сопровождал Наполеона в его экспедиции в Египет (1798–1801). Наполеон пожаловал ему титул графа, удостоил многих других отличий.

Метод изображения объектов по Монжу заключается в двух основных моментах:

1. Положение геометрического объекта в пространстве, в данном примере точки *A*, рассматривается относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2 (Рисунок 1.6).

Они условно разделяют пространство на четыре квадранта. Точка *A* расположена в первом квадранте. Декартова система координат послужила основой для проекций Монжа. Монж заменил понятие координатных осей проекций на линию пересечения плоскостей проекций (ось проекций) и предложил совместить координатные плоскости в одну путем поворота их вокруг координатных осей.

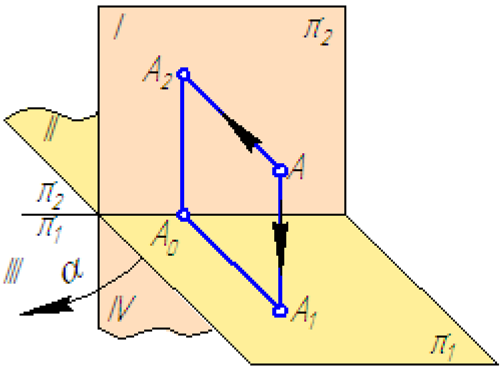


Рисунок 1.6 – Модель построения проекций точки

π_1 – горизонтальная (первая) плоскость проекций

π_2 – фронтальная (вторая) плоскость проекций

$\pi_1 \cap \pi_2$ — ось проекций (обозначим π_2/π_1)

Рассмотрим пример проецирования точки *A* на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций π_1 и π_2.

Опустим из точки *A* перпендикуляры (проецирующие лучи) на плоскости π_1 и π_2 и отметим их основания, то есть точки пересечения этих перпендикуляров (проецирующих лучей) с плоскостями проекций. A_1 – горизонтальная (первая) проекция точки A; A_2 – фронтальная (вторая) проекция точки A; AA_1 и AA_2 – проецирующие прямые. Стрелки показывают направление проецирования на плоскости проекций π_1 и π_2. Такая система позволяет однозначно определить положение точки относительно плоскостей проекций π_1 и π_2:

$AA_1 \perp \pi_1$

$A_2A_0 \perp \pi_2/\pi_1$ $AA_1 = A_2A_0$ — расстояние от точки A до плоскости π_1

$AA_2 \perp \pi_2$

$A_1A_0 \perp \pi_2/\pi_1$ $AA_2 = A_1A_0$ — расстояние от точки A до плоскости π_2

2. Совместим поворотом вокруг оси проекций π_2/π_1 плоскости проекций в одну плоскость (**π_1 с π_2**), но так, чтобы изображения не накладывались друг на друга, (в направлении α, Рисунок 1.6), получим изображение, называемое прямоугольным (ортогональным) чертежом (Рисунок 1.7):

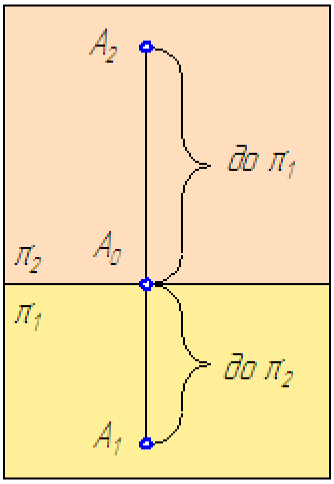


Рисунок 1.7 – Ортогональный чертеж

Прямоугольный или ортогональный носит название **эпюр Монжа**.

Прямая A_2A_1 называется **линией проекционной связи**, которая соединяет разноимённые проекции точки (A_2 — фронтальную и A_1 — горизонтальную) всегда перпендикулярна оси проекций (оси координат) $A_2A_1 \perp \pi_2/\pi_1$. На эпюре отрезки, обозначенные фигурными скобками, представляют собой:

- A_0A_1 – расстояние от точки A до плоскости π_2, соответствующее координате y_A;
- A_0A_2 – расстояние от точки A до плоскости π_1, соответствующее координате z_A.

1.4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧЕРТЕЖА

1. Две прямоугольные проекции точки лежат на одной линии проекционной связи, перпендикулярной к оси проекций.

2. Две прямоугольные проекции точки однозначно определяют её положение в пространстве относительно плоскостей проекций.

Убедимся в справедливости последнего утверждения, для чего повернём плоскость π_1 в исходное положение (когда $\pi_1 \perp \pi_2$). Для того, чтобы построить точку *A* необходимо из точек A_1 и A_2 восстановить проецирующие лучи, а фактически – перпендикуляры к плоскостям π_1 и π_2, соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров фиксирует в пространстве искомую точку *A*. Рассмотрим ортогональный чертеж точки *A* (Рисунок 1.8).

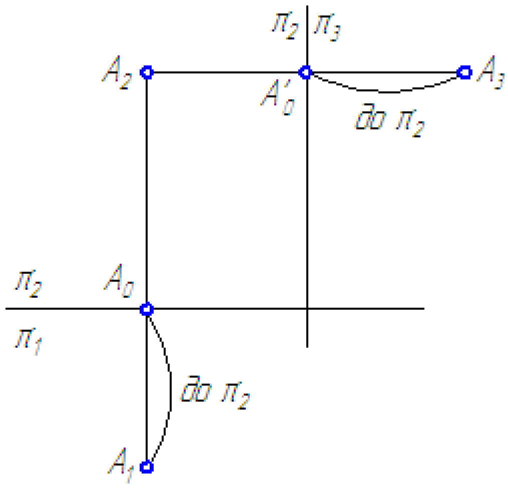
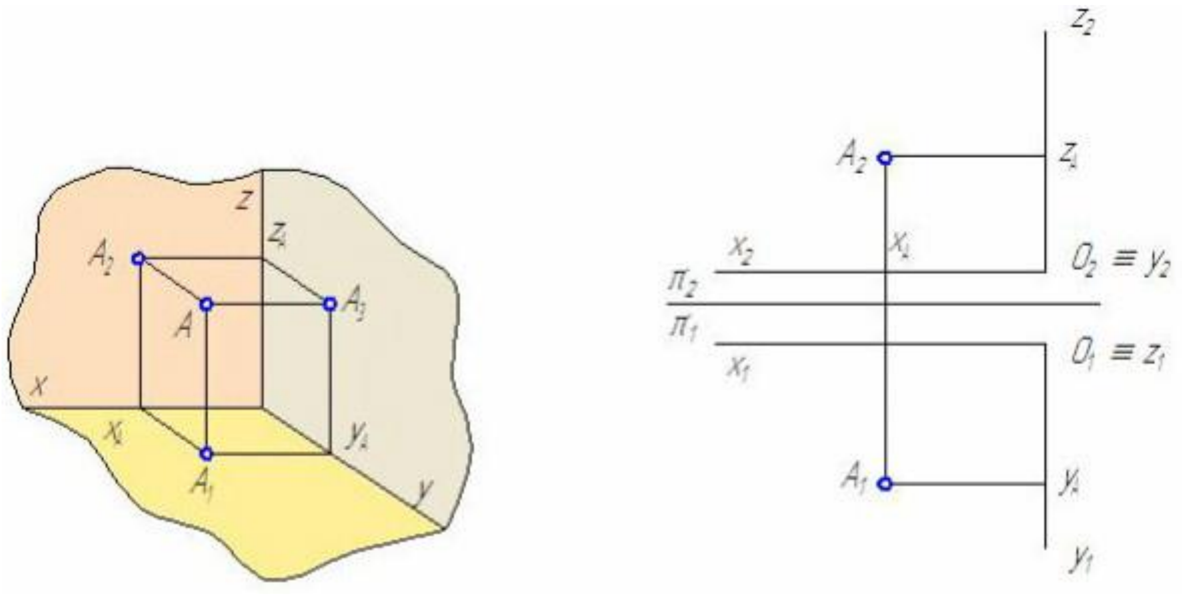


Рисунок 1.8 – Построение эпюра точки

Введём третью (профильную) плоскость проекций π_3 перпендикулярную π_1 и π_2 (задана осью проекций π_2/π_3).

Расстояние от профильной проекции точки до вертикальной оси проекций A'_0A_3 позволяет определить расстояние от точки *A* до фронтальной плоскости проекций π_2. Известно, что положение точки в пространстве можно зафиксировать относительно декартовой системы координат с помощью трёх чисел (координат) $A(X_A; Y_A; Z_A)$ или относительно плоскостей проекций с помощью её двух ортогональных проекций ($A_1=(X_A; Y_A)$; $A_2=(X_A; Z_A)$). На ортогональном чертеже по двум проекциям точки можно определить три её координаты и, наоборот, по трём координатам точки, построить её проекции (Рисунок 1.9, а и б).



а б

Рисунок 1.9 – Построение эпюра точки по её координатам

По расположению на эпюре проекций точки можно судить о её расположении в пространстве:

- если на эпюре горизонтальная проекция точки A — A_1 лежит под осью координат X , а фронтальная — A_2 – над осью X, то можно говорить, что точка A принадлежит 1-му квадранту;
- если на эпюре горизонтальная проекция точки A — A_1 лежит над осью координат X, а фронтальная — A_2 – под осью X, то точка A принадлежит 3-му квадранту;
- если на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции точки A — A_1 и A_2 лежат над осью X, то точка A принадлежит 2-му квадранту;
- если на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции точки A — A_1 и A_2 лежат под осью X, то точка A принадлежит 4-му квадранту;
- если на эпюре проекция точки совпадает с самой точкой, то значит – точка принадлежит плоскости проекций;
- точка, принадлежащая плоскости проекций или оси проекций (оси координат), называется **точкой частного положения**.

Для определения в каком квадранте пространства расположена точка, достаточно определить знак координат точки.

Зависимости квадранта положения точки и знаков координат

	X	**Y**	**Z**
I	+	+	+
II	+	—	+
III	+	—	—
IV	+	+	—