

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Учреждение образования**

**«Гомельский государственный технический университет**

**имени П.О. Сухого»**

Кафедра: «Сельскохозяйственные машины»

## **КУРСОВАЯ РАБОТА**

по курсу

«Механика материалов и конструкций»

на тему: **«Расчет конструкций на прочность и жесткость»**

Выполнил: студент гр. ТТ-21

Галицкий И.П.

(Ф.И.О.)

(Подпись)

Проверил: преподаватель

Кирилук С.И.

(Ф.И.О.)

(Оценка, подпись)

Проверил: преподаватель

(Ф.И.О.)

(Оценка, подпись)

Гомель 2022 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

стр.

АННОТАЦИЯ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. Методы решения задач	
1.1 Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина .....	8
1.2 Растяжение и сжатие .....	9
1.3 Внутренние силовые факторы. Метод сечений .....	10
1.4 Метод сил .....	11
1.5 Расчет на жесткость при кручении .....	12
1.6 Метод Мора .....	13
1.7 Расчет на прочность .....	15
2. Задача 1. Построение эпюр внутренних усилий для стержня с пространственной ломаной осью .....	20
3. Задача 2. Расчет статически неопределимой рамы .....	22
4. Задача 3. Расчет винтовых пружин с малым шагом .....	26
5. Задача 4. Расчет толстостенных цилиндров .....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	32
ЛИТЕРАТУРА .....	33

					<i>КР ММuK 01.08.001</i>		
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата			
Разраб.		Галицкий И.П.			<i>СОДЕРЖАНИЕ</i>		
Провер.		Кирилюк С.И.					
Реценз.							
Н. Контр.							
Утверд.							
						Лит.	Лист
						2	33
					<i>ГГТУ зр. ТТ-21</i>		

## АННОТАЦИЯ

В ходе выполнения курсовой работы мы решали задачи: Построение эпюр внутренних усилий для стержня с пространственной ломаной осью, расчет статически неопределимой рамы, расчет винтовых пружин с малым шагом, расчет толстостенных цилиндров.

Построение эпюр внутренних усилий для стержня с пространственной ломаной осью

Вычерчиваем расчётную схему. Для каждого участка направляем координаты. Вычисляем значения внутренних усилий в характерных сечениях. При этом придерживаемся правила знаков вычисляем значения продольных сил в заданных сечениях. По вычисленным значениям строим эпюру продольных сил. Вычисляем значения поперечных сил в заданных сечениях на осях. По вычисленным значениям строим эпюру поперечных сил. Эпюры  $O_x$  и  $O_y$  строим на одной базе. Вычисляем значения изгибающих моментов в заданных сечениях на осях. По вычисленным значениям строим эпюры на одной базе. И строим эпюру крутящих моментов.

Расчет статически неопределимой рамы

Для заданной статически неопределимой рамы строим эпюры продольных, поперечных, изгибающих моментов, подбираем двутавровое сечение и определяем точки К. определяем степень статически неопределимой системы. Заданная система дважды статически неопределима. Выбираем основную систему методом сил освобождением в заданной системе двух связей, накладываемых опорным сечением в узле.

Загрузив систему заданной нагрузкой и неизвестными реакциями., получаем эквивалентную систему.

Заданные условия можно представить в виде канонических уравнений метода сил.

Так как стержни, образующие раму, прямолинейны их значения в сечениях, принадлежащих узлам рамы, откладывая значения моментов.

Проводим деформационную проверку. Она основана на том, что в заданной системе её эквивалентной системе вертикальное перемещение должно быть равно 0.

Расчет винтовых пружин с малым шагом

					КР МММК 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		3

Для заданной статически неопределимой системы нагружения определяем перемещение точки К, наиболее напряженной пружину и величину наибольших напряжений в ней.

Составляем уравнение равновесия статики и определяем степени статически неопределимой системы. Для этого система отсоединяется от эпюры и действия их на систему заменяются реакциями. Составляем уравнения. Получаются эти уравнения из анализа геометрии системы в предполагаемом деформационном состоянии. Определяем наибольшее напряжение в пружинах. Используем формулу, учитывающую влияние поперечной силы и кривизны витка. Определяем усилия в пружинах.

#### Расчет толстостенных цилиндров

Для данной задачи мы записываем выражения радиального, окружного и продольного напряжений в опасной точке внутреннего цилиндра. Определяем радиальное и окружное напряжение суммированием напряжений возникающих от действия внутреннего давления в цилиндре с внутренним радиусом и нагруженным напряжений, возникающих во внутреннем цилиндре с радиусами от давления натяга.

Используя заданную гипотезу предельного состояния записываем эквивалентное напряжение в опасной точке внутреннего цилиндра.

Записываем выражения радиального, окружного и продольного напряжений в опасной точке нагруженного цилиндра. Эти напряжения определяются суммированием напряжений.

Согласно условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров приравниваем эквивалентные напряжения в опасных точках цилиндров.

для определения оптимальной величины давления натяга используем условие прочности внутреннего или наружного цилиндра.

Вычисляем оптимальное значение натяга по формуле Гадолина.

Определяем допускаемую величину внутреннего давления в однослойном цилиндре с внутренним радиусом и нагруженным. Используя заданную гипотезу предельного состояния и заданную величину допускаемого напряжения . сравниваем эту величину с допускаемой величиной внутреннего давления в двухслойном цилиндре.

Для построения эпюр напряжений в составном и однослойном цилиндрах вычисляем значения напряжений в точках.

					КР ММuК 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		4

## ВВЕДЕНИЕ

МЕХАНИКА – это наука, изучающая движение и равновесие материальных тел, а также возникающие взаимодействия между ними. В результате таких взаимодействий с материальными телами может происходить ряд явлений, например, изменение характера их движения, нарушение равновесия, возникновение деформаций и изменение внутреннего состояния материала, а также разрушение. В зависимости от поставленной задачи и цели исследования тела могут рассматриваться либо как недеформируемые, то есть не изменяющие под внешним воздействием свои размеры и форму, либо как деформируемые, для которых эти изменения важны и являются главным объектом изучения. В соответствии с принятой моделью для исследуемого объекта МЕХАНИКА делится на два основных раздела – «Механика недеформируемых сред» и «Механика деформируемых сред» («Механика сплошной среды»), каждый из которых изучает свою сторону поведения тел под нагрузкой. «Механика сплошной среды» включает в область своих интересов материалы различной реологии – жидкости, газы, твердые и сыпучие материалы, поэтому в свою очередь также подразделяется на ряд самостоятельных наук, изучаемых в соответствующих отраслях. В машиностроительной практике в качестве конструкционных используются твердые материалы, поэтому при изучении данного курса объектом исследования будут только твердые тела. Рассмотрим, прежде всего, вопрос, касающийся понятий «деформируемое» и «недеформируемое» тело, и определим их смысловое значение.

Следует сразу заметить, что недеформируемых сред в природе не существует. Если к среде с любой реологией приложить внешнюю силу, произойдет смещение частиц внутри материала и нарушение меж частичных расстояний. Для твердого тела такое перемещение частиц приведет к изменению размеров и формы тела, а это и есть деформация. В зависимости от жесткости материала деформации могут быть большими или ничтожно малыми, упругими (исчезающими после снятия нагрузки) или остаточными, но они будут возникать обязательно. Величина и характер деформации будут зависеть от способа приложения внешних сил, их величины, от геометрии тела и свойств материала. Возрастание нагрузки всегда будет сопровождаться возрастанием деформаций и изменением их характера. При малых нагрузках деформации, как правило, обратимы, при больших – они становятся необратимыми и дальнейшее их нарастание заканчивается разрушением тела. Таким образом, любое воздействие нагрузки всегда приводит к возникновению деформаций.

Недеформируемых тел в природе не существует. Однако многие науки, относящиеся к МЕХАНИКЕ, эти деформации не учитывают, так как ту сторону

					КР ММдК 01.08.001	Лист
						5
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

исследования, которую данные науки изучают. Например, теоретическая механика.

Теоретическая механика изучает общие законы движения, равновесия и механического взаимодействия тел под действием внешних сил. Ни размеры тела, ни его форма, ни тем более возникающие деформации на законы движения и равновесия не влияют, поэтому здесь они во внимание не принимаются. Простейшим объектом теоретической механики является материальная точка массой  $m$ , то есть обладающее массой тело, размерами, формой и внутренней структурой которого в условиях исследуемой задачи можно пренебречь. Вторым опорным объектом является абсолютно твердое тело, обозначающее совокупность материальных точек, расстояния между которыми и распределение масс при любых внешних воздействиях остаются неизменными, а значит, такое тело под действием сил не будет деформировано. Таким образом, теоретическая механика, абстрагируясь от способности реального физического тела изменять свою форму под нагрузкой, то есть деформироваться, использует модель абсолютно твердого тела и по этой причине она относится к разделу «Механика недеформируемых сред». Так же, как и аналитическая механика, изучающая равновесие и движение механических тел математическими методами, основанными на дифференциальных и интегральных принципах механики. Однако поведение тел под нагрузкой не ограничивается изучением их движения и равновесия. Под действием сил тела могут разрушаться или необратимо изменять свои размеры и форму, что приводит к нарушению работоспособности узлов и механизмов. Это другая сторона исследования поведения тел под нагрузкой, в которой деформации играют главную роль и напрямую связаны с прочностью и жесткостью конструкций. Учет деформаций здесь имеет основное значение и требует принятия другой модели для исследуемого объекта – модели деформируемого тела. Изучением этих вопросов занимается наука «Механика материалов», в основе которой лежит учение о сопротивлении материалов. Здесь изучение деформаций и связанной с ними прочности элементов является главным аспектом исследования, поэтому «Механика материалов» соответственно относится к разделу «Механика твердых деформируемых сред».

Изучением вопросов механики твердых деформируемых тел занимается также ряд смежных дисциплин – механика стержневых систем, строительная механика машин и сооружений, механика тонкостенных конструкций, теория упругости, теория пластичности и ползучести, механика разрушения и т. д., между которыми не существует строгой границы. Однако ведущую роль при решении задач прочности конструкций играют сопротивление материалов и механика материалов.

					КР ММ $\mu$ К 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		6

Являясь, по сути, прикладной теорией упругости, механика материалов способна решать как инженерные задачи с использованием приближенных методов расчета, так и задачи высоконаучного характера с привлечением более сложного математического аппарата. В механике материалов одинаково важную роль играют и теоретическая часть, и экспериментальная.

Экспериментальные исследования обеспечивают проверку теории и применяемых расчетных формул, но главной задачей является определение механических свойств материалов и в этом отношении механика материалов целиком базируется на материаловедении. В теоретической части механика материалов широко применяет физику, математику и во многих вопросах опирается на теоретическую механику, хотя некоторые правила и методы теоретической механики требуют здесь дополнения и принципиального уточнения.

					<i>КР ММ<sub>и</sub>К 01.08.001</i>	Лист
						7
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

# 1. Методы решения задач

## 1.1. Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина.

В тех случаях, когда эпюра внутренних усилий от внешней нагрузки имеет произвольное очертание, например  $M_p$ ,  $M_i$ , а эпюра от единичной силы (момента) – линейное очертание, вычисления интеграла вместо непосредственного интегрирования можно произвести графоаналитическим способом (способом перемножения эпюр), предложенным Верещагиным А.К.

Таким образом, эпюры по Верещагину перемножаются по следующей формуле:

$$V = M_F \cdot \bar{M} = \omega_C \cdot \bar{M}_C$$

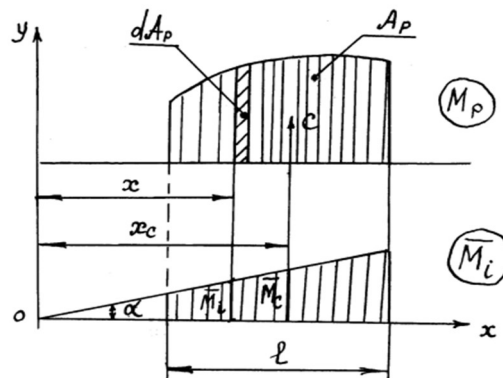
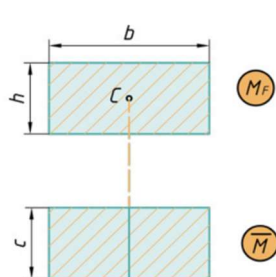


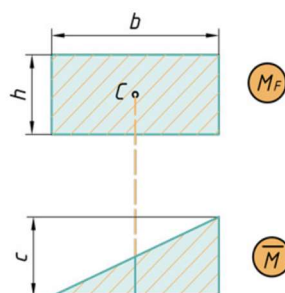
Рисунок. Способ верещагина.

Любой самый сложный участок эпюры можно расслоить на три простейшие фигуры: прямоугольник, прямоугольный треугольник и параболический сегмент. Поэтому именно с этими фигурами будем дальше работать

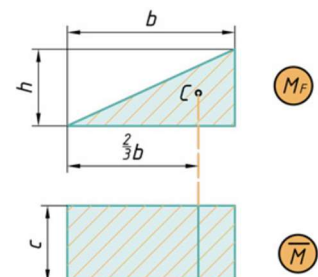
Перемножение простейших эпюр по Верещагину



$$V = M_F \cdot \bar{M} = b \cdot h \cdot c$$



$$V = M_F \cdot \bar{M} = b \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot c$$



$$V = M_F \cdot \bar{M} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot c$$



## 1.2. Растяжение и сжатие

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы  $N$ , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается, когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня. Продольной осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 1.

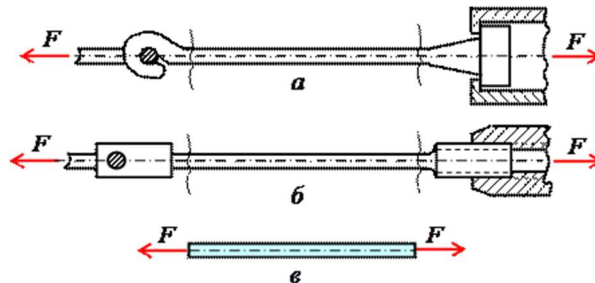


Рис. 1. Растяжение стержня

Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую  $F$ , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 1, а, б) оказывается единой (рис. 1, в) согласно принципу Сен – Венана.

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы  $N_z$ . При растяжении нормальная сила  $N_z$  направлена от сечения, а при сжатии – к сечению.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными (рис. 3, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 2, б).

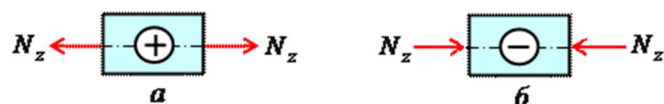


Рис. 2. Знак продольной силы  $N$

При расчете стержней, испытывающий деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от  $N_z$ ), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольные силы ( $N_z$ ), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется эпюрой продольных сил (эп.  $N_z$ ). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

### 1.3. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Внутренние силы определяют нагруженность элемента конструкции (детали), поэтому их необходимо уметь определять. Для этого используют метод сечений, который заключается в следующем.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $F_1, F_2 \dots F_n$  (см. рис. 4.1, а). Мысленно разрежем тело плоскостью на две части. Поскольку все тело находится в состоянии равновесия, то в равновесии будет находиться и каждая отсеченная часть. Рассмотрим, например, левую часть (рис. 4.1, б).

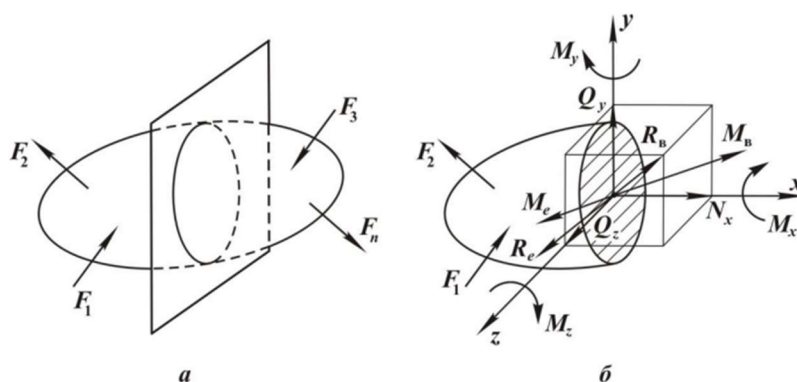


Рис. 3.1 Тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $F_1, F_2 \dots F_n$ .

Внешние силы, действующие на отсеченную часть, будут уравниваться внутренними, определяющими ее взаимодействие с отброшенной правой частью тела. (Внутренние силы между отсеченными частями также друг друга уравнивают).

По сечению внутренние силы распределены сложным образом, поэтому их приводят в центре тяжести сечения (точка  $O$ ) к главному вектору сил  $R_e$  и к главному моменту  $M_e$  (рис. 4.1, б).

Внешние силы, действующие на рассматриваемую часть, тоже можно привести в той же точке  $O$  к главному вектору сил  $R_e$  и к главному моменту  $M_e$ . Так как мысленно отсеченная часть тела находится в равновесии, то  $R_b = R_e$ ,  $M_b = M_e$ . Также должны быть равны и их проекции на оси системы координат  $Q_{xyz}$ , помещенной своим началом в точке  $O$  и ориентированной таким образом, что оси  $y$  и  $z$  лежат в плоскости сечения, а ось  $x$  направлена по нормали и сечению. Разложим в выбранной системе координат  $Q_{xyz}$  главный вектор внутренних сил на проекции:  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ , а главный момент внутренних сил – на  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M$  (рис. 4.1, б).

#### 1.4. Метод сил

Суть этого метода заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины, в дальнейшем, подбираются так, чтобы перемещения системы соответствовали тем бы ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название основной системы. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. б), в), однако их должно объединять следующее условие-основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

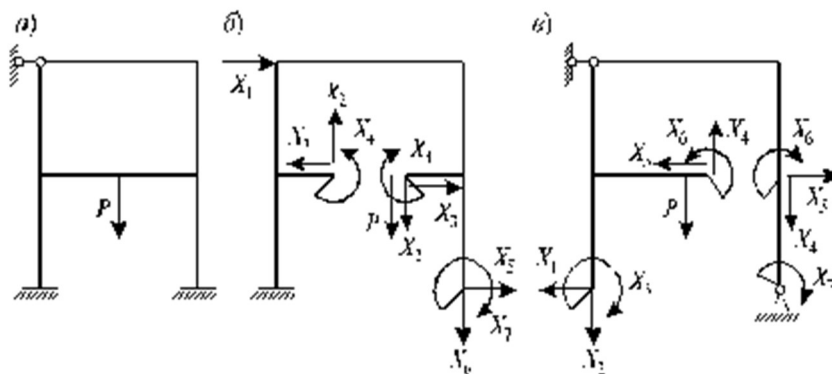


Рисунок. Система статически неопределимой заданной системы.

Уравнения называются уравнениями совместности деформаций и при их выполнении фактически устанавливается условие эквивалентности между заданной и основной системой при действии внешней силы  $P$  и неизвестных усилий  $X_1$  и  $X_2$ . На основании принципа независимости действия сил можно представить в следующем виде:

$$y_A(P) + y_A(X_1) + y_A(X_2) = 0;$$

$$y_B(P) + y_B(X_1) + y_B(X_2) = 0,$$

где  $y_A(P)$ ,  $y_B(P)$ ,  $y_A(X_1)$ ,  $y_B(X_1)$ ,  $y_A(X_2)$ ,  $y_B(X_2)$  - вертикальные перемещения точек  $A$  и  $B$  основной системы соответственно от действия сил  $P$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ .

Вводя обозначения  $d_{11}$ ,  $d_{12}$ ,  $D_{1P}$  - вертикальные перемещения точки  $A$  основной системы, соответственно, от последовательного действия сил  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ , от внешней силы  $P$ ;  $d_{21}$ ,  $d_{22}$ ,  $D_{2P}$  - вертикальные перемещения точки  $B$  основной системы, соответственно, от последовательного действия сил  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ , от внешней силы  $P$ , и учитывая существование линейности связи между силой и перемещением, систему уравнений можно преобразовать в канонической форме:

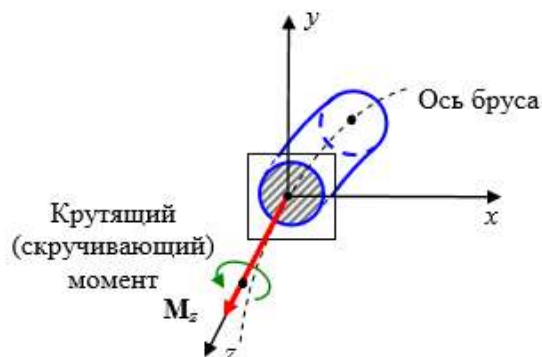
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Последние уравнения носят названия канонических уравнений метода сил.

### 1.5. Расчёт на жёсткость при кручении

Кручением называется вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только один крутящий момент.



Продольная (нормальная) сила  $N_z = 0$ ,  
поперечные силы  $Q_x = Q_y = 0$ ,  
изгибающие моменты  $M_x = M_y = 0$ .

Жесткостью сечения при кручении круглого бруса называется величина  $[GI_p] = H \cdot m^2$

Опасным сечением при кручении называется поперечное сечение бруса, в котором возникает максимальное касательное напряжение.

Угол закручивания бруса длиной  $l$  при постоянном крутящем моменте равен:

$$\varphi(l) = \frac{M_k l}{GI_p}.$$

Расчеты на жесткость.

1. Условие жесткости при кручении имеет вид:

$$\max \theta = \max \left( \frac{M_k}{GI_p} \right) \leq [\theta]$$

2. Подбор поперечного сечения бруса осуществляется из условия:

$$I_p \geq \frac{\max M_k}{G[\theta]}$$

#### 1.6. Метод Мора

Это универсальный метод, который заключается в использовании известной теоремы Мора о равенстве возможной работы внешних и внутренних сил и используется для определения линейных перемещений и углов поворота в любой стержневой системе от произвольной нагрузки. Метод широко применяется и при расчете статически неопределимых систем.

Пусть 1-е (грузовое) состояние представляет собой нагруженную стержневую систему заданной нагрузкой, а 2-е (единичное) состояние вызвано единичной нагрузкой  $P = 1$ , действующей в направлении искомого перемещения. Тогда в соответствии с указанной выше теоремой получаем выражение, которое называют интегралом Мора.

$$1 \cdot \Delta = \sum \int_0^l \frac{M_P M_1}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx + \sum \mu \int_0^l \frac{Q_P Q_1}{GA} dx,$$

где:  $D$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> искомое перемещение;  $M_p, Q_p, N_p$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> внутренние усилия в стержневой системе, вызванные заданной внешней нагрузкой;  $M_1, Q_1, N_1$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> внутренние усилия в стержневой системе, вызванные единичной нагрузкой, приложенной по направлению искомого перемещения в той точке (сечении), где определяется перемещение (при нахождении линейного перемещения прикладывается единичная сила  $P = 1$ , при вычислении угла поворота прикладывается единичный момент  $m = 1$ );  $EI, EA, GA$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> жесткости при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно;  $m$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> поправочный коэффициент, учитывающий распределение касательных напряжений в поперечном сечении;  $l$  <sup>3</sup>/<sub>4</sub> длина участка.

Суммирование производится по всем участкам стержневой конструкции.

При расчете балок средней и большой длины и рамных конструкций влиянием продольной и поперечной сил (вторым и третьим членами формулы) можно пренебречь в силу их малого влияния на деформации изгиба. В этом случае интеграл Мора примет вид:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx.$$

При расчете стержней, работающих только на растяжение (сжатие), останется только второй интеграл.

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_p N_1}{EA} dx.$$

В конструкциях, испытывающих значительные поперечные силы (например, в коротких балках), необходимо учитывать влияние поперечных сил.

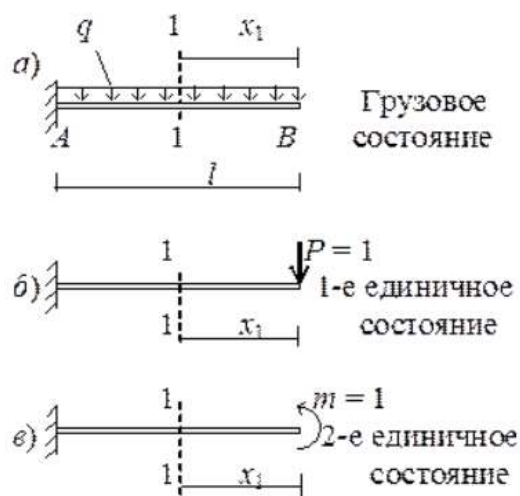


Рис. 4.9

## 1.7. Расчет на прочность

Сечения элементов конструкции должны быть такими, чтобы в течение всего срока эксплуатации была исключена возможность разрушения и возникновения недопустимо больших деформаций конструкции при одновременном требовании экономии материала. Необходимые размеры сечений элементов конструкции определяются из расчетов на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчет на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементе конструкции (нормальные, касательные либо определенная комбинация этих напряжений) не превосходили некоторой допустимой для данного материала величины.

Существуют три метода расчета на прочность:

- 1) метод допускаемых напряжений;
- 2) метод предельных состояний;
- 3) метод разрушающих нагрузок.

1. Метод допускаемых напряжений. Этот метод применяется при расчете машиностроительных конструкций. *Допускаемым* называется наибольшее напряжение, при котором элемент конструкции будет работать длительное время без опасности его разрушения. Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  определяется делением опасного напряжения  $\sigma_0$  на коэффициент запаса прочности  $n > 1$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}.$$

Для элементов конструкций, изготовленных из материалов, обладающих свойствами пластичности, за опасное напряжение принимается предел текучести при растяжении или сжатии  $\sigma^*$ , так как при достижении этих напряжений могут возникнуть недопустимо большие остаточные деформации.

Для элементов конструкций, изготовленных из хрупких материалов, за опасные напряжения принимаются временное сопротивление (предел прочности) при растяжении или сжатии так как при достижении этих напряжений происходит разрушение. Таким образом, для пластичных материалов допускаемые напряжения при растяжении и сжатии определяются по формулам:

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_T^P}{n_T}; \quad [\sigma_C] = \frac{\sigma_T^C}{n_T},$$

					КР ММuК 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		155

где  $n_m$  — коэффициент запаса по пределу текучести.

Для материалов с выраженными пластическими свойствами  $\sigma_T^P = \sigma_T^C = \sigma_T$   
и

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

Для хрупких материалов

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_B^P}{n_B}; \quad [\sigma_C] = \frac{\sigma_B^C}{n_B},$$

где  $n_\epsilon$  — коэффициент запаса по временному сопротивлению.

Необходимость введения коэффициента запаса обусловлена рядом обстоятельств: невозможностью точно определить величины и характер действующих нагрузок; разбросом свойств материалов (особенно неоднородных) и недостаточной точностью их определения; невозможностью учета всех неблагоприятных условий эксплуатации сооружения; неточностью изготовления и монтажа конструкции; неточностью методов расчета; назначением и степенью ответственности конструкции.

Условие прочности при расчете по методу допускаемых напряжений сводится к требованию, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие по абсолютной величине сжимающие  $\sigma_C^{нб}$  напряжения в элементе конструкции не превышали допускаемых напряжений:

$$\sigma_P^{нб} \leq [\sigma_P]; \quad \sigma_C^{нб} \leq [\sigma_C].$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению:

$$\sigma_{нб} \leq [\sigma].$$

В некоторых случаях, например для деталей машин, работающих на кручение, для элементов соединений, работающих на сдвиг (заклепки, сварные швы, деревянные шпонки и т.п.), решающее значение для прочности имеют касательные напряжения. Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде:

$$\tau_{нб} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение. Для пластичных материалов принимается  $[\tau] = 0,6$ .

Сечение стержня, в котором действует наибольшее напряжение, называется опасным сечением.

					КР ММuК 01.08.001	Лист
						166
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		



При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности, которые с учетом формул (3.36) и (3.37) можно представить в виде:

$$\sigma_P = \frac{N_P}{F} \leq [\sigma_P]; \quad \sigma_C = \frac{N_C}{F} \leq [\sigma_C];$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

В этих формулах продольные силы принимаются по абсолютной величине.

2. Метод предельных состояний. Этот метод применяется при расчете строительных конструкций.

Предельным называется такое состояние конструкции, при котором становится невозможной ее дальнейшая нормальная эксплуатация.

В строительных нормах и правилах (СНиП) установлены три группы предельных состояний.

Первая группа предельных состояний определяется потерей несущей способности — прочности или устойчивости.

Вторая группа предельных состояний определяется возникновением чрезмерно больших деформаций или колебаний сооружения.

Третья группа предельных состояний определяется образованием и развитием трещин и других повреждений.

В этом параграфе рассматривается расчет на прочность по первой группе предельных состояний.

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям вводится один общий коэффициент запаса. Расчет на прочность по первой группе предельных состояний отличается более гибким подходом к назначению необходимого запаса прочности.

При этом вместо одного коэффициента запаса вводятся несколько коэффициентов.

Коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f$ . С помощью этого коэффициента учитывается возможное увеличение нагрузки по сравнению с ее нормативным значением  $P_H$ , приведенным в СНиП. Расчет на прочность производится на действия расчетных нагрузок  $P_P$ , значения которых определяются по формуле

$$P_P = P_H \gamma_f.$$

Коэффициент надежности по материалу  $\gamma_m$ . С помощью этого коэффициента учитывается возможное уменьшение нормативного сопротивления  $R_H$  материала конструкции по сравнению с данными испытаний на образцах. Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимается предел текучести  $R_H = \sigma_m$ , для хрупких — временное сопротивление  $R_H = \sigma_b$ . Для стальных конструкций величина  $\gamma_m$  принимается в пределах 1,025 + 1,15.

$$R = \frac{R_H}{\gamma_m}; \quad R = \frac{\sigma_T}{\gamma_m}.$$

Называется расчетным сопротивлением по пределу текучести.

Условия прочности при расчете по первой группе предельных состояний сводятся к требованию, чтобы наибольшие растягивающие напряжения и наибольшие по абсолютной величине сжимающие напряжения  $\sigma_C^{нб}$  от действия расчетных нагрузок не превышали величин расчетных сопротивлений при растяжении  $R_p$  и сжатии  $R_c$ , умноженных на коэффициент:

$$\sigma_p^{нб} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c^{нб} \leq \gamma_c R_c.$$

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{F} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c = \frac{N_c}{F} \leq \gamma_c R_c;$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R.$$

3. Метод разрушающих нагрузок. Для конструкции, изготовленной из материала с достаточно протяженной площадкой текучести, за разрушающую принимается нагрузка, при которой в ее элементах возникают значительные пластические деформации. При этом конструкция становится неспособной воспринимать дальнейшее увеличение нагрузки.

Для конструкции, изготовленной из хрупкого материала, за разрушающую принимается нагрузка, при которой хотя бы в одном из ее элементов возникают напряжения, равные пределу прочности  $\sigma_B$ .

Для стержня ступенчато-постоянного сечения (рис. 3.31) за разрушающую нагрузку в случае пластичного материала следует принять  $P_{разр} = \sigma_T F_p$ , а в случае хрупкого материала —  $P_{разр} = \sigma_B F_V$ .

Для статически определимой стержневой системы (рис. 3.32) усилия в стержнях определяются из уравнений равновесия узла  $C$ :  $N_1 = N_2 = \sqrt{2} F \cos \alpha$ . Разрушающей будет нагрузка, при которой напряжения в стержне  $AC$ , имеющем меньшую площадь сечения  $F_1$ , равны  $\sigma_T$  в случае пластичного материала и  $\sigma_B$  — в случае хрупкого материала. В первом случае  $P_{разр} = 2\sigma_T F_1 \cos \alpha$ , во втором —  $P_{разр} = 2\sigma_B F_1 \cos \alpha$ .

В статически неопределимой стержневой системе возникновение напряжений, равных пределу текучести в наиболее напряженном стержне, еще не означает, что система непригодна для дальнейшей работы. Возможно дальнейшее увеличение нагрузки за счет того, что не все стержни одновременно переходят в пластическое состояние. Так, если стержневую систему (см. рис. 3.9), изготовленную из материала, следующего диаграмме идеальной пластичности Прандтля (см. рис. 3.17), нагружать постепенно возрастающей силой  $P$ , то сначала напряжения, равные  $\sigma_T$ , возникнут только в наиболее нагруженном среднем стержне.

Возникновение пластических деформаций в среднем стержне не означает его разрушение. Согласно диаграмме Прандтля напряжения, а следовательно, и усилия в этом стержне остаются постоянными ( $N_2 = N_{2T} = \sigma_T F$ ) и стержень воспринимает часть нагрузки. Дальнейший рост нагрузки будет восприниматься системой до тех пор, пока напряжения в крайних стержнях не достигнут предела текучести  $\sigma_T$ .

Разрушение наступит тогда, когда и в этих стержнях возникнут напряжения, равные  $\sigma_T$ . В этом состоянии усилия во всех стержнях равны.

$N_{2T} = N_{3T} = \sigma_T F$  и разрушающая нагрузка определяется из уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0, \quad 2N_{1T} \cos \alpha + N_{2T} - P_{\text{разр}} = 0,$$

$$P_{\text{разр}} = \sigma_T F (1 + \cos \alpha).$$

Если та же система изготовлена из хрупкого материала, то разрушающей нагрузке соответствует возникновение напряжений, равных пределу прочности  $\sigma_B$  в среднем стержне.

Определив величину разрушающей нагрузки, можно установить грузоподъемность стержня или стержневой системы по формуле:

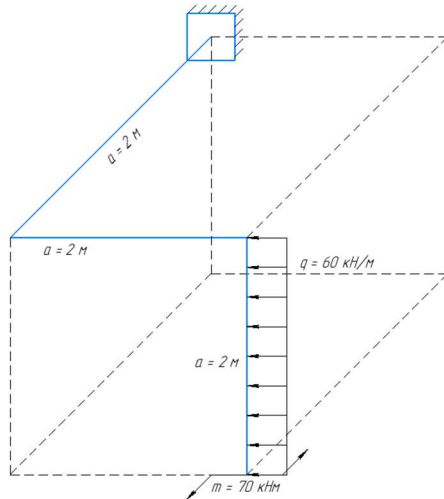
$$[P] \leq \frac{P_{\text{разр}}}{n},$$

где  $[P]$  — допускаемая нагрузка и  $n$  — коэффициент запаса прочности, принимаемый на основе тех же соображений, что и в методе допускаемых напряжений.

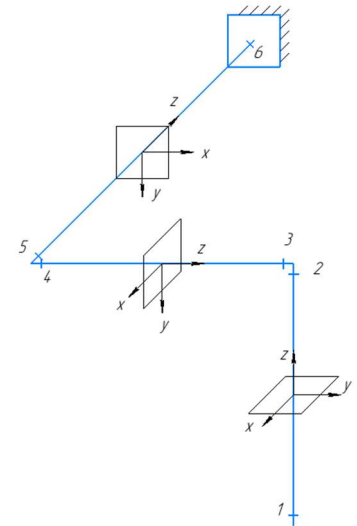
Задача 1. Построение эпюр внутренних усилий для стержня с пространственной ломаной осью.

Для стержня построить эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов.

$$q = 60 \text{ кН/м}; F = 0 \text{ кН}; m = 70 \text{ кНм}; a = 2 \text{ м};$$



Обозначим цифрами 1,2,3,4,5 и 6 - начальные и конечные точки участков. Для каждого участка задаем местную систему координат  $X, Y, Z$ , располагая ось  $Z$  вдоль стержня. Ось  $Y$  - вниз на горизонтальном участке и вправо - на вертикальном участке. Ось  $X$  должна образовывать правую систему координат, вычисляем действующую на участках внутренние силовые факторы, продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты.



Участок 1-2.  $N_1 = N_2 = 0$ ;  $Q_{X1} = Q_{X2} = 0$ ;  $Q_{Y1-2} = q \cdot z_1$ ;  $0 < z_1 < a$ .

$$Q_{Y1} = 0 \text{ кН}; Q_{Y2} = q \cdot a = 60 \cdot 2 = 120 \text{ кН}; M_{X1-2} = -q \cdot a \cdot \frac{z_1}{2};$$

$$M_{X1} = 0; M_{X2} = -120 \text{ кНм}; M_{Y1} = M_{Y2} = m = 70 \text{ кНм}; M_{K1} = M_{K2} = m = 70 \text{ кНм}.$$

Участок 3-4.  $N_1 = N_2 = q \cdot a = 120 \text{ кН}$ ;  $Q_{X3} = Q_{X4} = 0$ ;  $Q_{Y3} = Q_{Y4} = 0$ ;

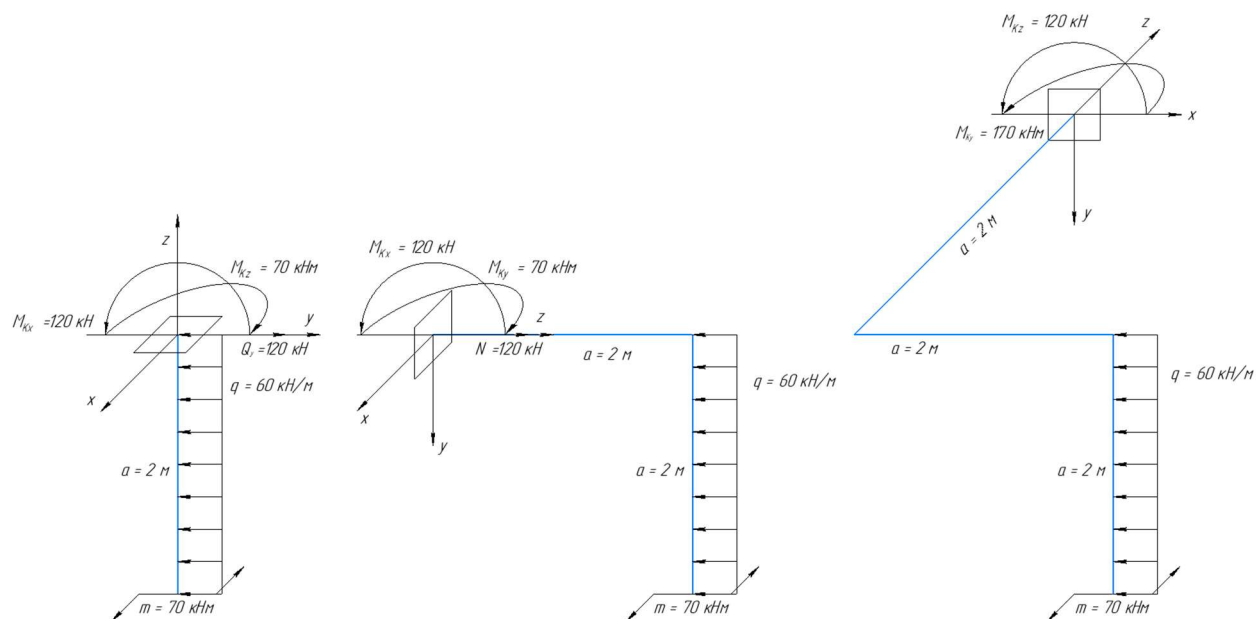
$$M_{X3} = M_{X4} = q \cdot a^2 / 2 = 120 \text{ кНм}; M_{Y3} = M_{Y4} = 0 \text{ кНм}; M_{K1} = M_{K2} = 0 \text{ кНм}.$$

Участок 5-6.  $N_5 = N_6 = 0$ ;  $Q_{X5} = Q_{X6} = q \cdot a = 60 \cdot 2 = 120 \text{ кН}$ ;

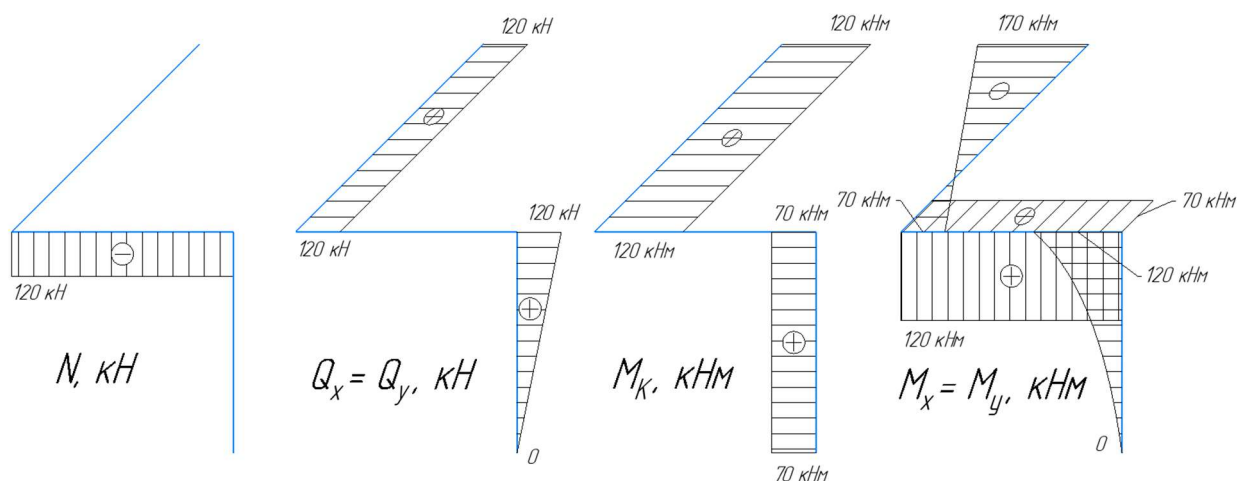
$$Q_{Y5} = Q_{Y6} = 0 \text{ кН}; M_{X5} = M_{X6} = 0 \text{ кНм}; M_{Y5} = m = 70 \text{ кНм};$$

$$M_{Y6} = m - q \cdot a \cdot a = 170 \text{ кНм}; M_{K5} = M_{K6} = q \cdot a^2 / 2 = 120 \text{ кНм}.$$

Для сечения 2,4 и 6 чертим схему определения внутренних силовых факторов.



Строим эпюры  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_k$ .



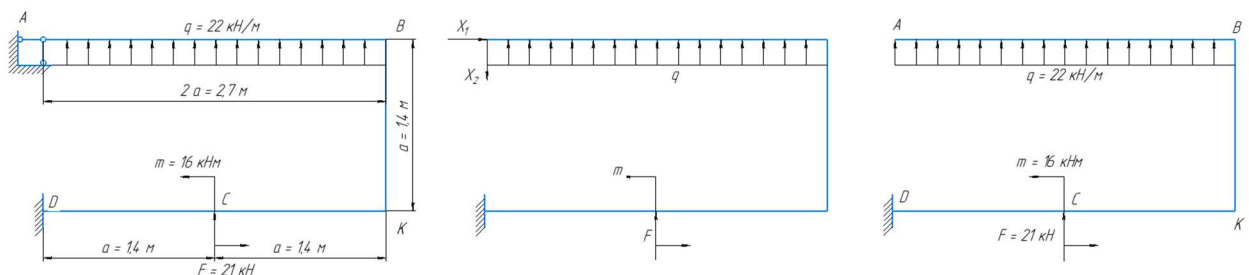
## Задача 2. Расчет статически неопределимой рамы

Для заданной рамы постройте эпюры продольных поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое сечение и определить угловое перемещение точки  $K$ .

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; a = 1,4 \text{ м}; q = 22 \text{ кН/м}; F = 21 \text{ кН};$$

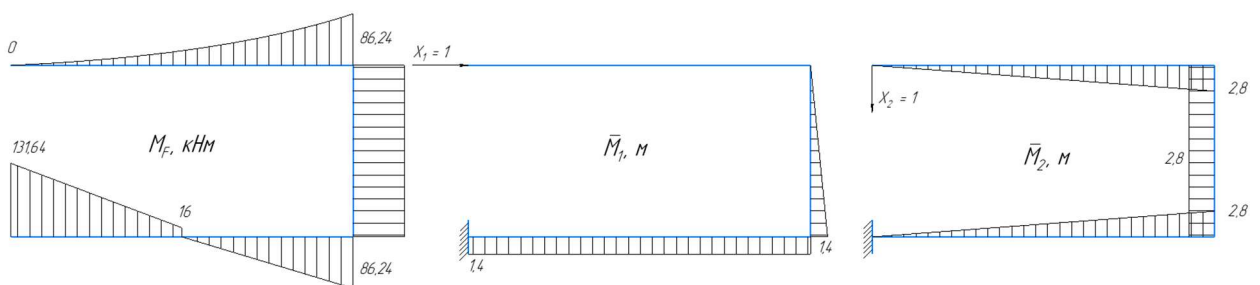
$$m = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \theta_K - ?$$

Опора  $D$  (заделка) накладывает на раму 3 связи и ещё 2 связи накладывает шарнирная опора  $A$ . Так как всего наложено 5 связей, то рама 2 раза внешне статически неопределима. Отбросим опору  $A$  и приложим заменяющие её действие неизвестные реакции  $X_1$  и  $X_2$ . Получили эквивалентную систему (рис. б). На рис. в) приведена основная система.



Вычисляем изгибающие моменты в основной системе от действия заданной нагрузки:

$$\begin{aligned} M_{FA} &= 0, M_{FB}^{\text{ВЕРХ}} = 0,5 \cdot 22 \cdot 2,8^2 = 86,24 \text{ кНм}, M_{FB}^{\text{НИЗ}} = -86,24 \text{ кНм}, \\ M_{FK}^{\text{ВЕРХ}} &= M_{FK}^{\text{НИЗ}} = 86,24 \text{ кНм}, M_{FC}^{\text{СПРАВА}} = 22 \cdot 0 \cdot 0 = 0, M_{FC}^{\text{СЛЕВА}} = 16 \text{ кНм}, \\ M_{FD} &= 22 \cdot 2,8 \cdot 1,4 + 16 + 21 \cdot 1,4 = 131,64 \text{ кНм}. \end{aligned}$$



Строим эпюру  $M_F$ . Среднее значение на участке  $AB$ :

$$M_{FB}^{\text{СРЕД}} = 0,5 \cdot 22 \cdot 1,4^2 = 21,56 \text{ кНм}.$$

Приложим силы  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$  и строим единичные эпюры моментов  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ . Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты находим способом Верещагина, перемножая эпюры  $M_F$ ,  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ :

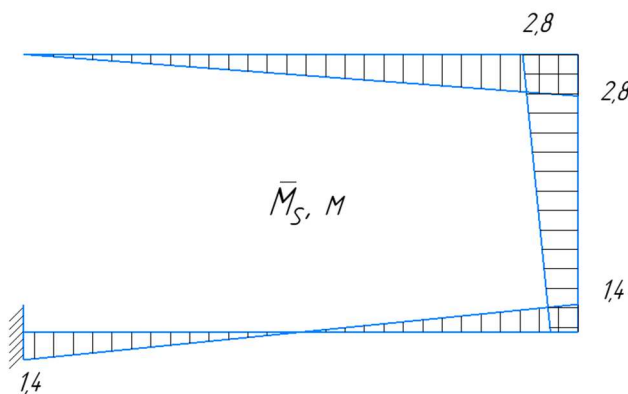
$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,4^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 + 1,4 \cdot 2,8 \cdot 1,4 \right) = \frac{6,403}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,4^2 \cdot 2,8 - 1,4 \cdot 2,8 \cdot 1,4 \right) = \frac{-8,232}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,8^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 + 2,8 \cdot 1,4 \cdot 2,8 \right) = \frac{18,293}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_1 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left( 86,24 \cdot 1,4 \cdot 0,75 + \frac{1}{2} \cdot 86,24 \cdot 1,4 \cdot 1,4 - 0,5 \cdot (16 + 131,64) \cdot 1,4 \cdot 1,4 \right) = \frac{30,38}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{M_F \bar{M}_2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{3} \cdot 86,24 \cdot 2,8 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,8 - 86,24 \cdot 1,4 \cdot 2,8 - \frac{1}{2} \cdot 86,24 \cdot 1,4 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2,8 + \frac{1,4}{6} \cdot (2 \cdot 16 \cdot 1,4 + 131,64 \cdot 1,4) \right) \\ &= \frac{-594,49}{EI}. \end{aligned}$$



Выполним проверку, строим суммарную единичную эпюру

$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ . При перемножении эпюр должно выполняться  $M_F$  и  $\bar{M}_S$  должно выполняться:

$$\sum \int \bar{M}_S^2 ds = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} \quad \text{и}$$

$$\sum \int M_F \bar{M}_S ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}.$$

$$\begin{aligned} \sum \int \bar{M}_S^2 ds &= \frac{1}{2} \cdot 2,8^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,8 + \frac{1,4}{6} \cdot (2 \cdot 2,8^2 + 2 \cdot 1,4^2 + 2,8 \cdot 1,4 + 1,4 \cdot 2,8) \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,4^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 = 15,55; \end{aligned}$$

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = 6,403 - 2 \cdot 8,232 + 18,293 = 8,232;$$

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = 30,38 - 594,49 = -564,11;$$

$$\begin{aligned} \sum \int M_F \bar{M}_S ds \\ = -\frac{1}{3} \cdot 86,24 \cdot 2,8 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,8 - 86,24 \cdot 1,4 \cdot 2,05 - \frac{1}{2} \cdot 86,24 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \\ \cdot 1,4 + \frac{1,4}{6} \cdot (-2 \cdot 131,64 \cdot 1,4 - 16 \cdot 1,4) = -564,11. \end{aligned}$$

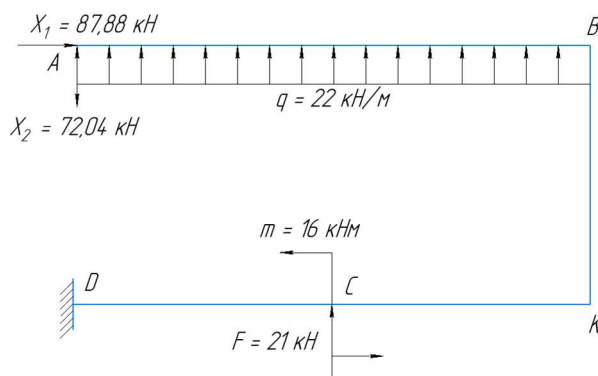
Подставим в канонические уравнения:

$$\begin{cases} 6,403 \cdot X_1 - 8,232 \cdot X_2 + 30,38 = 0, \\ -8,232 \cdot X_1 + 18,293 \cdot X_2 - 594,49 = 0, \end{cases}$$

откуда:  $X_1 = 87,88$  кН;  $X_2 = 72,04$  кН.

Вычисляем продольные поперечные силы и изгибающие моменты:

$$N_{AB} = -87,88 \text{ кН}, N_{BK} = -72,04 + 22 \cdot 2,8 = -10,44 \text{ кН}, N_{KD} = 87,88 \text{ кН};$$



$$Q_A = -72,04 \text{ кН},$$

$$Q_B = -72,04 + 22 \cdot 2,8 = -10,44 \text{ кН},$$

$$Q_{BK} = 87,88 \text{ кН},$$

$$Q_{KC} = 72,04 - 22 \cdot 2,8 = 10,44 \text{ кН},$$

$$Q_{CD} = 10,44 - 16 = -5,56 \text{ кН},$$

$$M_A = 0,$$

$$M_B^{\text{ВЕРХ}} = 86,24 - 2,8 \cdot 72,04 = -115,47 \text{ кНм},$$

$$M_B^{\text{НИЗ}} = 115,47 \text{ кНм},$$

$$M_{PK}^{\text{ВЕРХ}} = M_{PK}^{\text{НИЗ}} = -86,24 - 1,4 \cdot 87,88 + 2,8 \cdot 72,04 = -7,56 \text{ кНм},$$

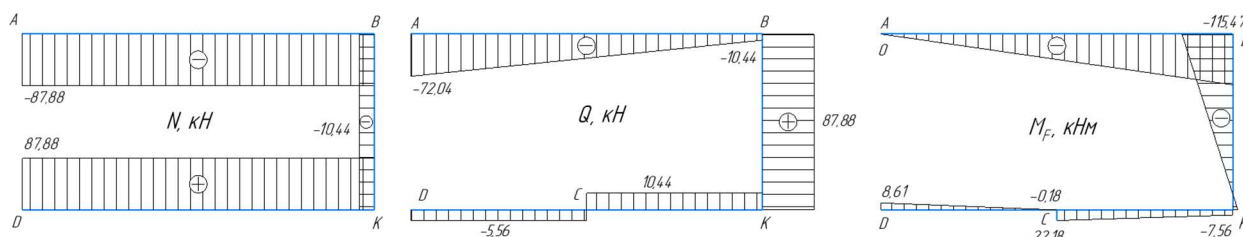
$$M_C^{\text{СПРАВА}} = 0 - 1,4 \cdot 87,88 + 1,4 \cdot 72,04 = -22,18 \text{ кНм},$$

$$M_C^{\text{СЛЕВА}} = -22,18 + 22 = -0,18 \text{ кНм}, M_D = 131,64 - 1,4 \cdot 87,88 = 8,61 \text{ кНм}.$$

Среднее значение на участке AB:

$$M_{CP} = 0,5 \cdot (-115,47) - \frac{22 \cdot 2,8^2}{8} = -79,29 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ .





Выполним деформационную проверку, умножая суммарную эпюру  $M$  на единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ . Должно выполняться:

$$\sum \int M \bar{M}_1 ds = 0 \quad \text{и} \quad \sum \int M \bar{M}_2 ds = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum \int M \bar{M}_1 ds &= \frac{1,4}{6} \cdot (2 \cdot (-115,47) \cdot 0 + 2 \cdot 7,56 \cdot 1,4 + (-115,56) \cdot 1,4 + 7,56 \cdot 0) \\ &+ \frac{1,4}{6} \cdot (2 \cdot (-8,61) \cdot 1,4 + 2 \cdot 6,18 \cdot 1,4 + (-8,61) \cdot 1,4 + 6,18 \cdot 1,4) \\ &+ \frac{1,4}{6} \cdot (2 \cdot 22,2 \cdot 1,4 + 2 \cdot 7,56 \cdot 1,4 + 22,2 \cdot 1,4 + 7,56 \cdot 1,4) \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \int M \bar{M}_2 ds &= \frac{2,8}{6} \cdot (4 \cdot 79,29 \cdot 1,4 + 115,47 \cdot 2,8) + \frac{2,8}{6} \cdot (115,47 - 7,56) \\ &\cdot 1,4 \cdot 2,8 + \frac{1,4}{6} \cdot (-2 \cdot 7,56 \cdot 2,8 - 2 \cdot 22,18 \cdot 1,4 - 7,56 \cdot 1,4 - 22,18 \cdot 2,8) + \frac{1,4}{6} \\ &\cdot (-2 \cdot 0,18 \cdot 1,4 + 8,61 \cdot 1,4) \approx 0; \end{aligned}$$

Таким образом, эпюра  $M$  построена правильно. Максимальный момент:

$$M_{MAX} = 115,47 \text{ кНм.}$$

Продольная сила в опасном сечении: из условия прочности при изгибе находим требуемый осевой момент сопротивления сечения:  $N = 87,88 \text{ кНм.}$

Из условий прочности при изгибе  $\sigma = \frac{M_{MAX}}{W_X} \leq [\sigma]$  находим требуемый осевой момент сопротивления сечения:

$$W_X \geq \frac{M_{MAX}}{[\sigma]} = \frac{115,47 \cdot 10^6}{160} = 721687,5 \text{ мм}^3.$$

Выбираем двутавр №40 с  $W_X = 953 \text{ см}^3 = 953000 \text{ мм}^3$ , площадью сечения  $A = 72,6 \text{ см}^2 = 7260 \text{ мм}^2$ , момент инерции  $I_X = 19062 \text{ см}^4 = 19,062 \cdot 10^7 \text{ мм}^4$ .

Максимальные суммарными напряжениями в раме от изгиба и сжатия:

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{W_X} + \frac{N}{A} = \frac{115,47 \cdot 10^6}{953000} + \frac{87880}{7260} = 133,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условия прочности выполняются.

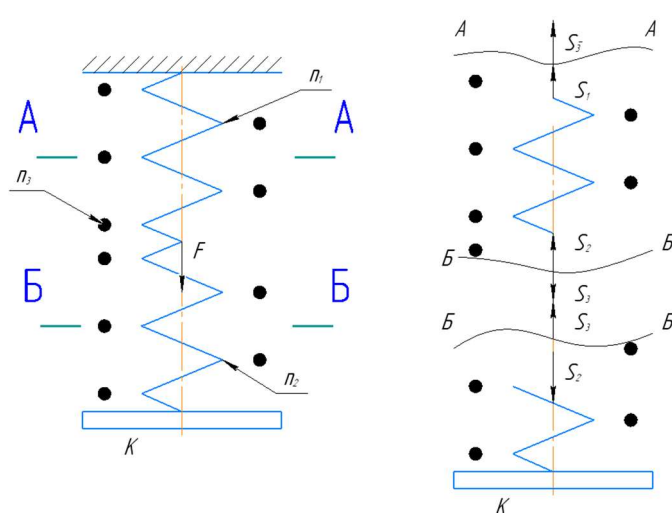
					КР ММuК 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		25

### Задача 3. Расчет винтовых пружин с малым шагом

Для заданной статически неопределимой системы пружин определить перемещение точки  $K$ , наиболее напряженную пружину и величину наибольших напряжений в ней.

Число витков пружины  $n_1, n_2, n_3$ , средний диаметр пружины  $D$ , диаметр проволоки  $d$ .

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}; F = 1,1 \text{ кН}; n_1 = 30; n_2 = 20; n_3 = 40; D_6 = 150 \text{ мм};$$



$$D_m = 70 \text{ мм}; d_6 = 18 \text{ мм}; d_m = 10 \text{ мм}.$$

Разрежем пружины сечениями А-А и Б-Б и приложим неизвестные продольные силы  $S_1, S_2, S_3$  (рис. 2.1). Составим уравнения равновесия.

Для нижней опоры:

$$\sum Y_i = 0; -S_2 + S_3 = 0 \text{ или}$$

$$S_2 = S_3. (1)$$

Рис. 2.1

Для блока из пружин 1 и 2:

$$-F + S_1 + S_2 = 0. (2)$$

Так как два уравнения содержат 3 неизвестных, то система один раз статически неопределима. Составим дополнительно уравнение совместности деформаций. Из схемы видно, что перемещение точки  $K$  равно:

$$l_3 + \lambda_3 = l_1 + \lambda_1 + (l_2 - \lambda_2),$$

где  $l$  - длина не деформируемой пружины, а  $\lambda$  - деформация пружины (пружина 2 сжата). Так как  $l_3 = l_1 + l_2$ , то получим  $\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2$ .

Выразим перемещение  $\lambda$  через неизвестные силы  $S$ , используя формулу:

$$\lambda = \frac{8SD^3n}{Gd^4},$$

$$\frac{8S_3D_6^3n_3}{Gd_6^4} = \frac{8S_1D_m^3n_1}{Gd_m^4} - \frac{8S_2D_m^3n_2}{Gd_m^4},$$

$$\frac{S_3 \cdot 150^3 \cdot 40}{18^4} = \frac{S_1 \cdot 70^3 \cdot 30}{10^4} - \frac{S_2 \cdot 70^3 \cdot 20}{10^4},$$

$$1,87S_3 = 1,5S_1 - S_2. \quad (3)$$

Из уравнения 2 и 1:

$$S_2 = F - S_1; \quad S_3 = F - S_1$$

Поставим уравнения 3:

$$1,87(F - S_1) = 1,5S_1 - (F - S_1),$$

$$S_1 = \frac{287F}{437} = \frac{287 \cdot 1100}{437} = 722,43 \text{ Н.}$$

Тогда:

$$S_2 = S_3 = 1100 - 722,43 = 377,57 \text{ Н.}$$

Максимальное касательное напряжение в пружинах вычисляем по формуле:

$$\tau_{MAX} = \frac{8kSD}{\pi d^3},$$

где коэффициент

$$k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1};$$

для пружины 1, 2 и 3 равен:

$$k_1 = k_2 = \frac{\frac{70}{10} + 0,25}{\frac{70}{10} - 1} = 1,2; \quad k_3 = \frac{\frac{150}{18} + 0,25}{\frac{150}{18} - 1} = 1,17.$$

Тогда:

$$\tau_{1MAX} = \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 722,43 \cdot 70}{\pi \cdot 10^3} = 154,53 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{2MAX} = \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 377,57 \cdot 70}{\pi \cdot 10^3} = 80,76 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{3MAX} = \frac{8 \cdot 1,17 \cdot 377,57 \cdot 150}{\pi \cdot 18^3} = 28,93 \text{ МПа.}$$

Больше всего нагружена пружина 1.

Вычисляем перемещение точки К:

$$\delta_K = \lambda_3 = \frac{8S_3 D_6^3 n_3}{G d_6^4} = \frac{8 \cdot 377,57 \cdot 150^3 \cdot 40}{8 \cdot 10^4 \cdot 18^4} = 48,6 \text{ мм.}$$

					КР ММuК 01.08.001	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		27

#### Задача 4. Расчет толстостенных цилиндров

Составной цилиндр (рис. 4.1), образованный из двух длинных цилиндров посадкой с натягом  $\Delta$ , подвергается действию внутреннего давления  $p_1$ . Размеры цилиндров:

$r_1$  – радиус внутренней поверхности составного цилиндра;

$r_c$  – радиус поверхности сопряжения внутреннего и наружного цилиндров;

$r_2$  – радиус наружной поверхности составного цилиндра.

Допускаемое напряжение для материала цилиндров  $[\sigma] = 300$  МПа, модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент поперечной деформации  $\mu = 0,3$ .

Определить оптимальную величину натяга  $\Delta$  и допускаемую величину внутреннего давления  $[p_1]$ . Определить также допускаемую величину внутреннего давления  $[p_1]$  для сплошного (однослойного цилиндра с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным  $r_2$ ) и сравнить с допускаемым внутренним давлением для составного цилиндра. Построить эпюры радиального, окружного и продольного нормальных напряжений в составном и сплошном цилиндрах одинаковых габаритов при большем из допускаемых внутренних давлений  $[p_1]$ .

**Дано:**  $r_1 = 15$  мм;  $r_c = 30$  мм;  $r_2 = 45$  мм; гипотеза предельного состояния IV.

#### 4.1 Расчет радиального и окружного напряжений

Радиальное и окружное напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_B r_B^2 - p_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{r_B^2 r_H^2 (p_B - p_H)}{r^2 (r_H^2 - r_B^2)}, \quad (1)$$

где  $p_B$  и  $p_H$  – внутренне и наружное давления;  $r_B$  и  $r_H$  – внутренний и наружный радиусы;  $r$  – радиус-вектор точки, в которой определяются напряжения. Знак (-) соответствует напряжению  $\sigma_r$ , знак (+) соответствует напряжению  $\sigma_t$ .

Напряжения в составном цилиндре определяются суммированием напряжений ( $\sigma'_r, \sigma'_t$ ) в цилиндре с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  от действия внутреннего давления  $p_1$  и напряжений ( $\sigma''_r, \sigma''_t$ ) в цилиндре с радиусами  $r_1$  и  $r_c$  от действия натяга  $p_c$ :

$$\sigma_r = \sigma'_{r(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0)} + \sigma''_{r(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c)} \quad (2)$$

$$\sigma_t = \sigma'_{t(r=r_1, p_B=p_1, p_H=0)} + \sigma''_{t(r=r_1, p_B=0, p_H=p_c)} \quad (3)$$

$$\text{Продольное напряжение: } \sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_t), \quad (4)$$

Подставим значения в уравнения выше:

$$\sigma'_t = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 1,25 p_1; \quad \sigma''_t = \frac{-p_c \cdot 30^2}{30^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 30^2 \cdot (-p_c)}{15^2 \cdot (30^2 - 15^2)} = -2,67 p_c;$$

$$\sigma'_r = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = -p_1; \quad \sigma''_r = \frac{-p_c \cdot 30^2}{30^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 30^2 \cdot (-p_c)}{15^2 \cdot (30^2 - 15^2)} = 0;$$

$$\sigma_t = 1,25p_1 - 2,67p_c = \sigma_1; \quad \sigma_r = -p_1 = \sigma_3;$$

$$\sigma_z = 0,3(-p_1 + 1,25p_1 - 2,67p_c) = 0,075p_1 - 0,80p_c = \sigma_2; \quad (5)$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке внутреннего цилиндра по IV-ой гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\text{ЭКВ}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_z(\sigma_t + \sigma_r) - \sigma_r\sigma_t} = \\ &= \sqrt{(1,25p_1 - 2,67p_c)^2 + (0,075p_1 - 0,80p_c)^2 + (-p_1)^2 - (0,075p_1 - 0,80p_c)(1,25p_1 - 2,67p_c - p_1) - (-p_1)(1,25p_1 - 2,67p_c)} = \\ &= \sqrt{3,80p_1^2 - 9,07p_1p_c + 5,63p_c^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Вычисляем напряжения в опасной точке наружного цилиндра (при  $r = r_c$ ).

$$\sigma_t' = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{30^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 0,41p_1; \quad \sigma_t'' = \frac{p_c \cdot 30^2}{45^2 - 30^2} + \frac{30^2 \cdot 45^2 \cdot p_c}{30^2 \cdot (45^2 - 30^2)} = 2,60p_c;$$

$$\sigma_r' = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{30^2 \cdot (45^2 - 1^2)} = -p_1; \quad \sigma_r'' = \frac{p_c \cdot 30^2}{45^2 - 30^2} - \frac{30^2 \cdot 45^2 \cdot p_c}{30^2 \cdot (45^2 - 30^2)} = -p_c;$$

$$\sigma_t = 0,41p_1 + 2,60p_c = \sigma_1; \quad \sigma_r = -0,16p_1 = \sigma_3;$$

$$\sigma_z = 0,3(-0,16p_1 - p_c + 0,41p_1 + 2,60p_c) = 0,075p_1 + 0,48p_c = \sigma_2. \quad (7)$$

Эквивалентное напряжение в опасной точке наружного цилиндра по IV-ой гипотезе предельного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{11\text{ЭКВ}} &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2 - \sigma_z(\sigma_t + \sigma_r) - \sigma_r\sigma_t} = \\ &= \sqrt{(0,41p_1 + 2,60p_c)^2 + (0,075p_1 + 0,48p_c)^2 + (-0,16p_1)^2 - (0,075p_1 + 0,48p_c)(0,41p_1 + 2,60p_c - 0,16p_1) - (-0,16p_1)(0,41p_1 + 2,60p_c)} = \\ &= \sqrt{0,25p_1^2 + 3,11p_1p_c + 9,82p_c^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Согласно условию равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров приравняем выражения (6) и (8):

$$\sigma_{1\text{ЭКВ}} = \sigma_{11\text{ЭКВ}}, \quad \sqrt{3,80p_1^2 - 9,07p_1p_c + 5,63p_c^2} = \sqrt{0,25p_1^2 + 3,11p_1p_c + 9,82p_c^2},$$

$$3,55p_1^2 - 12,18p_1p_c - 4,19p_c^2 = 0, \quad p_1^2 - 3,43p_1p_c - 1,18p_c^2 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$p_1 = 1,715p_c + \sqrt{(1,715p_c)^2 + 1,18p_c^2} = 3,745p_c. \quad (9)$$

4. Оптимальную величину давления натяга находим из условия  $\sigma_{1\text{ЭКВ}} = [\sigma]$ , подставив  $p_1 = 3,745p_c$  в  $\sigma_{1\text{ЭКВ}} = \sqrt{3,80p_1^2 - 9,07p_1p_c + 5,63p_c^2} = [\sigma]$ ,

$\sqrt{3,80 \cdot (3,745p_c)^2 - 9,07 \cdot 3,745p_c^2 + 5,63p_c^2} = [\sigma]$ ,  $5p_c \approx 300$ , откуда  $p_c = 60$  МПа. При этом допускаемое внутреннее давление будет равно  $[p_1] = 3,745 \cdot 60 = 225$  МПа.

5. С помощью формулы Гадолина находим величину натяга (при  $E_1 = E_2 = E$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ):

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{\Delta}{2r_c \left[ \frac{1}{E_1} \left( \frac{r_c^2 + r_1^2}{r_c^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} + \mu_2 \right) \right]}, \\ \Delta &= \frac{2p_c r_c}{E} \left( \frac{r_c^2 + r_1^2}{r_c^2 - r_1^2} + \frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} \right) = \frac{2 \cdot 60 \cdot 30}{2 \cdot 10^5} \left( \frac{30^2 + 15^2}{30^2 - 15^2} + \frac{45^2 + 30^2}{45^2 - 30^2} \right) = 0,077 \text{ мм}. \end{aligned}$$

6. Определяем допускаемую величину внутреннего давления в однослойном цилиндре с  $r_1 = 15$  мм и  $r_2 = 45$  мм.

Напряжение в опасной точке при  $r = r_1 = 15$  мм:

$$\sigma_r' = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = -p_1; \quad \sigma_t' = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 1,25p_1;$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r' + \sigma_t') = 0,3(-1 + 1,25)p_1 = 0,075p_1.$$

$$\text{Определяем } [p_1]: \sigma_{1\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_t'^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r'^2 - \sigma_z\sigma_t' - \sigma_z\sigma_r' - \sigma_r\sigma_t'}$$

$$\sqrt{(1,25p_1)^2 + (0,075p_1)^2 + (-p_1)^2 - (1,25p_1)(0,075p_1) - (0,075p_1)(-p_1) - (-p_1)(1,25p_1)} = 1,95p_1;$$

$$\sigma_{1\text{ЭКВ}} = [\sigma], \quad 1,95p_1 = 300; \quad [p_1] = 154 \text{ МПа.}$$

Величина допускаемого давления в сплошном цилиндре оказалась меньше, чем в составном в  $n = \frac{225}{154} = 1,46$  раза.

7. Для построения эпюр напряжений вычисляем их значения для точек с  $r = r_1$ ,  $r = r_c$  и  $r = r_2$  при  $[p_1] = 255$  МПа.

Напряжения во внутреннем цилиндре при  $r = r_1$  находим по выражениям (5).

$$\sigma_t = 1,25 \cdot 225 - 2,67 \cdot 60 = 121 \text{ МПа}; \quad \sigma_r = -p_1 = -225 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3(121 - 225) = -31 \text{ МПа.}$$

Напряжения во внутреннем цилиндре при  $r = r_c$  равны:

$$\sigma_r = \sigma_r'_{(r_B=r_1, r_H=r_2, p_B=p_1, p_H=0)} + \sigma_r''_{(r_B=r_1, r_H=r_c, p_B=0, p_H=p_c)} = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{30^2 \cdot (45^2 - 15^2)} + \frac{-p_c \cdot 30^2}{30^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 30^2 \cdot (-p_c)}{30^2 \cdot (30^2 - 15^2)} = -0,16p_1 - p_c = -0,16 \cdot 225 - 60 = -96 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = \sigma_t'_{(r_B=r_1, r_H=r_2, p_B=p_1, p_H=0)} + \sigma_t''_{(r_B=r_1, r_H=r_c, p_B=0, p_H=p_c)} = \frac{p_1 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot p_1}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} + \frac{-p_c \cdot 30^2}{30^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 30^2 \cdot (-p_c)}{30^2 \cdot (30^2 - 15^2)} = 0,41p_1 - 1,67p_c = 0,41 \cdot 225 - 1,67 \cdot 60 = -8 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3(-96 - 8) = -31 \text{ МПа.}$$

Напряжение в наружном цилиндре при  $r = r_c$  определяем по формулам (7):

$$\sigma_r = -0,16p_1 - p_c = -0,16 \cdot 225 - 60 = -96 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = 0,41p_1 + 2,60p_c = 0,41 \cdot 225 + 2,6 \cdot 60 = 248 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 0,3(-96 + 248) = 46 \text{ МПа.}$$

Напряжение в сплошном цилиндре определяем по формулам (1) и (4) при  $r_B = r_1$ ,  $r_H = r_2$ ,  $p_B = p_1$ ,  $r_H = 0$ .

$$\text{Для } r = r_1: \sigma_r = \frac{225 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot 225}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = -225 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = \frac{225 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot 225}{15^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 281 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3(-225 + 281) = 17 \text{ МПа.}$$

$$\text{Для } r = r_2: \sigma_r = \frac{225 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} - \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot 225}{45^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 0;$$

					КР ММук 01.08.001	Лист
						30
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

$$\sigma_t = \frac{225 \cdot 15^2}{45^2 - 15^2} + \frac{15^2 \cdot 45^2 \cdot 225}{45^2 \cdot (45^2 - 15^2)} = 56 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 0,3(0 + 56) = 17 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры окружных, радиальных и продольных напряжений.

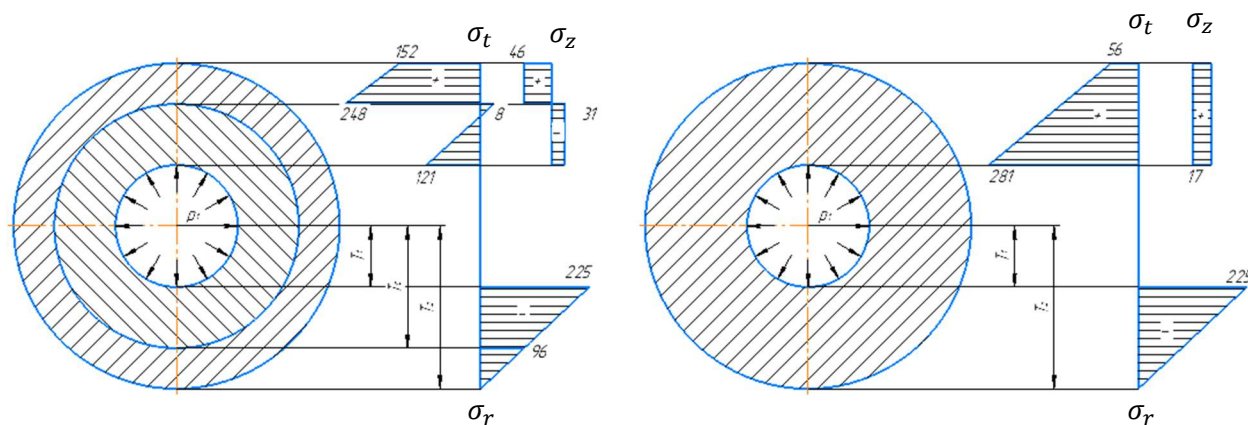


Рис. 4.1 Эпюры окружных, радиальных и продольных напряжений сплошного и составного цилиндров

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы были решены задачи по следующим темам:

1. Построение эпюр внутренних усилий для стержня с пространственной ломаной осью.
2. Раскрытие статической неопределимой рамы.
3. Расчет винтовой пружины с малым шагом.
4. Расчет толстостенных цилиндров. Для решения данных задач были использованы различные методические указания.

					<i>KP MMyK 01.08.001</i>	Лист
						32
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		



## ЛИТЕРАТУРА

1. Балакин В.А. механика материалов: Практич. Пособие к решению контрольных и расчётно-графических работ по одним. Курсу для студентов днев. и заоч. форм обучения спец. мех.-тех. И машиностроит. фак. /В.А. Балкин, И.Н, Литвиненко, А.А. Иванов. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2004. – 79.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: учеб. Для техн. Вузов – 5-е изд., перераб. И доп. – М.: Высш. Шк., 1989.—624.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов – 9-е изд., перераб.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит. 1986. – 512с.
4. Ицкович. Г.М. Сопротивление материалов. Руководство к решению задач. В 2 ч. Часть 1: учеб. Пособие для академического бакалавриата. /Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров; под ред. Л.С. Минина.—4-е изд. Испр. И доп. – М.: Издательство Юрат, 2019. – 324с.
5. Якубовский, Ч.А. Я 49 Механика материалов. Практикум; учебное пособие / Ч.А. Якубовский, А.Ч. Якубовский. - Мн.; БНТУ, 2006. - 168 с.
6. Афанасенко, Е. В. Механика материалов : пособие / Е. В. Афанасенко, М. В. Нестеров. – Горки : БГСХА, 2012. – 342 с.
7. Жернаков В.С. Ж Сопротивление материалов – механика материалов и конструкций: Учебник. – Уфа: УГАТУ, 2012. – 495 с