В. Ю. Златина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ФУНЦИИ ГРИНА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Введение. Известно, что большинство физических задач сводятся к дифференциальным уравнениям [1,2], решение которых проводят специализированными методами. К одним из таких задач можно отнести задачу о колебательном движении.

В работе авторы проводят решение задачи о гармоническом осцилляторе методом функции Грина. В разделе **1** приводится процедура решения дифференциальных уравнений указанным методом. В разделе **2** кратко обсуждается представления $\delta-$функции Дирака, которая используется в изучаемом подходе. В разделе **3** проведена процедура определения функции Грина для исследуемого случая.

1. Метод функции Грина. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$\hat{Q}\, f(x) = f_0(x), \tag{1}$$

где $\hat{Q}$ – линейный дифференциальный оператор, $f(x)$ – искомая функция, а $f_0(x)$ – некоторая заданная функция. Искомую функцию можно определить из соотношения

$$f(x) = \hat{L}\, f_0(x), \tag{2}$$

в котором $\hat{L}$ есть некоторый оператор, определяемый видом оператора $\hat{Q}$. Для решения поставленной задачи введем вспомогательную функцию $G(x-x')$, являющуюся решением уравнения

$$\hat{Q}\, G(x-x') = \delta(x-x'), \tag{3}$$

где $\delta(x-x')$ – дельта-функция Дирака. Функцию $G(x-x')$ называют функцией Грина [1], соответствующей задаче (2). С помощью $G(x-x')$ решение уравнения может быть представлено в виде

$$f(x) = \int G(x-x')\, f_0(x')\, dx'. \tag{4}$$

Действительно, подействуем на соотношение (4) оператором $\hat{Q}$. Учитывая (3) получаем, что

$$\hat{Q}\, f(x) = \int \hat{Q} G(x,x')\, f_0(x')\, dx' = \int \delta(x-x')\, f_0(x')\, dx' = f_0(x). \tag{5}$$

2. Представления $\delta-$функции Дирака. Приведем используемые ниже представление $\delta-$функции Дирака. Исходя из выражения

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0,\end{cases} \tag{6}$$

под $\delta-$функцией далее будем понимать функцию со свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0),\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a). \tag{7}$$

Одним из важнейших представлений функции Дирака является интегральное представление

$$\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-a)}d\omega\,. \tag{8}$$

Выражение (8) устанавливается с использованием преобразований Фурье [2]. Действительно, используя выражение

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\,\omega\,x}dx, \tag{9}$$

определяющее Фурье-образ функции $f(x)$ и выражения для обратного преобразования

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-i\,\omega\,x}d\omega, \tag{10}$$

нетрудно показать, что

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-i\,\omega\,a}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\,\omega\,x}dx\right)e^{-i\,\omega\,a}d\omega \tag{11}$$

,

откуда с учетом (8) следует соотношение (7). Отметим, что в литературе также известны интегральные представления $\delta-$функции с использованием сферических функций Бесселя, функций Эйри и др.

3. Функция Грина гармонического осциллятора. Решим дифференциальное уравнение [2]

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}x(t)=f(t), \tag{12}$$

соответствующее задаче об определении положения гармонического осциллятора $x(t)$ частотой ω_0, движущегося под действием вынуждающей силы $f(t)$. Следуя методике, изложенной в разделе **1,** функцию Грина для оператора $\left\{d^2\big/dt^2+\omega_0^2\right\}$ определим из выражения

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}G(t-t')=\delta(t-t'). \tag{13}$$

Используя выражение (8) и Фурье-преобразование для функции Грина из (13) получаем

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-\omega^2+\omega_0^2)\tilde{G}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega, \tag{14}$$

откуда

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{15}$$

С учетом выражения (15) искомая функция Грина запишется как

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2}d\omega, \tag{16}$$

а решение дифференциального уравнения (12) соответственно

$$x(t)=x_0(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2}\, f(t')\; dt', \tag{17}$$

где $x_0(t)$ – решение уравнения (12) без правой части. Отметим, что дальнейшие вычисления (17) проводят с учетом явного вида вынуждающей силы $f(t)$ методами теории функции комплексной переменной [3].

Заключение. Работа посвящена применению функции Грина для решения задачи о гармоническом осцилляторе. В ходе работы были получены общие выражения изучаемого случая, которые могут быть использованы для различных выражений вынуждающей силы.

Литература

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1967. – 436 с.

2. Тахтаджян, Л. А. Квантовая механика для математиков / Л. А. Тахтаджян. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 496 с.

3. Шабунин, М. И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. – Москва: Лаборатория знаний, 2016. – 300 с.