

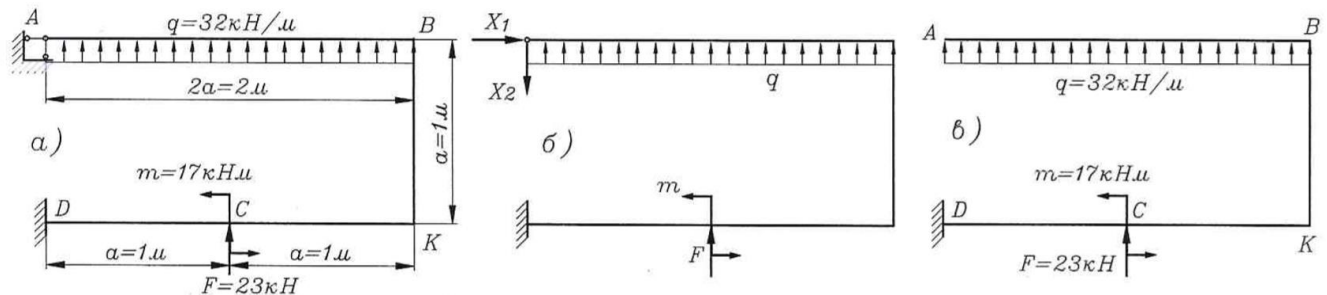
Задача №2

Расчет статически неопределимой рамы

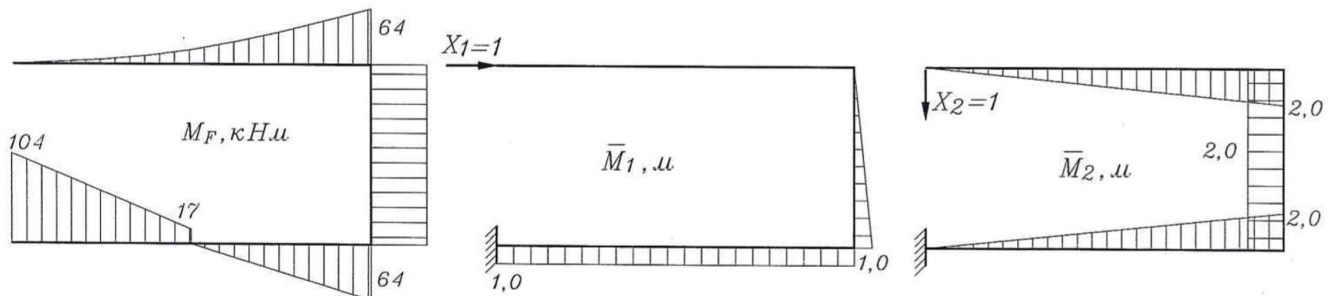
Для заданной рамы построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое сечение и определить вертикальное перемещение точки К.

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$; $q = 32 \text{ кН/м}$; $F = 23 \text{ кН}$; $m = 17 \text{ кНм}$; $y_K = ?$

Опора D (заделка) накладывает на раму 3 связи и еще 2 связи накладывает шарнирная опора А.. Так как всего наложено 5 связей, то рама 2 раза внешне статически неопределима. Отбросим опору А и приложим заменяющие её



действие неизвестные реакции X_1 и X_2 . Получили эквивалентную систему (рис. б). На рис. в) приведена основная система. Вычисляем изгибающие моменты в основной системе от действия заданной нагрузки: $M_{FA} = 0$, $M_{FB}^{БЕРХ} = 0,5 \cdot 32 \cdot 2^2 = 64 \text{ кНм}$, $M_{FB}^{НИЗ} = -64 \text{ кНм}$, $M_{FK}^{БЕРХ} = M_{FK}^{НИЗ} = -64 \text{ кНм}$, $M_{FC}^{СПРАВА} = 32 \cdot 2 \cdot 0 = 0$, $M_{FC}^{СЛЕВА} = 17 \text{ кНм}$, $M_{FD} = 32 \cdot 2 \cdot 1 + 17 + 23 \cdot 1 = 104 \text{ кНм}$. Строим эпюру M_F . Среднее значение на участке АВ: $M_{FB}^{СРЕД} = 0,5 \cdot 32 \cdot 1^2 = 16 \text{ кНм}$.



Приложим силы $X_1=1$ и $X_2=1$ и строим единичные эпюры моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Система канонических уравнений:

Коэффициенты находим способом Верещагина, перемножая эпюры M_F , \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \right) = \frac{2,33}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 \right) = \frac{-3,0}{EI}; \quad \delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 1 \cdot 2 \right) = \frac{9,33}{EI};$$

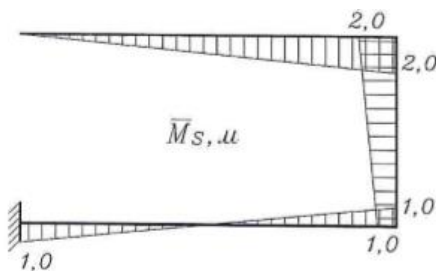
$$\Delta_{1F} = \int \frac{M_F \bar{M}_1 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left[64 \cdot 1 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 1 \cdot 1 - 0,5 \cdot (17 + 104) \cdot 1 \cdot 1 \right] = \frac{3,5}{EI}; \quad \Delta_{2F} = \int \frac{M_F \bar{M}_2 ds}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{2}{6} \cdot (-4 \cdot 16 \cdot 1 - 64 \cdot 2) - 64 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 64 \cdot 2 - 64 \cdot 1) + \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 17 \cdot 1 + 104 \cdot 1) \right] = \frac{-222,3}{EI}.$$

Выполним проверку.

КР_ММиК_2022_06

Изм	Лист	№ докум	Подпись	Дата	<p>Расчет статически неопределимой рамы</p>		
Разраб	Бадретдинов А.Э.						
Пров	Кирилюк С.И.						
Н. Контр.							
Утв							
					Литера	Лист	Листов
					у	21	
					ГГТУ им.П.О.Сухого, гр.К-21		



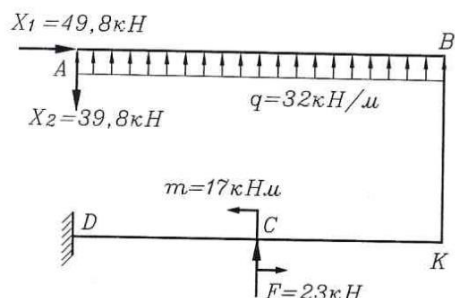
Строим суммарную единичную эпюру $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$. При перемножении эпюр M_F и \bar{M}_S должно выполняться: $\int \bar{M}_S^2 ds = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22}$ и

$$\int M_F \bar{M}_S ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} \quad \int \bar{M}_S^2 ds = \frac{1}{2} * 2^2 * \frac{2}{3} * 2 + \frac{1}{6} * (2 * 2^2 + 2 * 1^2 + 2 * 1 + 1 * 2) + 2 * \frac{1}{2} * 1^2 * \frac{2}{3} * 1 = 5,66; \quad \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = 2,33 - 2 * 3 + 9,33 = 5,66; \quad \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = 3,5 - 222,3 = -218,8;$$

$$\int M_F * \bar{M}_S * ds = \frac{2}{6} * (-4 * 16 * 1 - 64 * 2) + \frac{1}{6} * (-2 * 64 * 1) + \frac{1}{6} * (-2 * 104 * 1 - 17 * 1) = -218,8. \text{ Подставим в канонические}$$

$$\begin{cases} 2,33 * X_1 - 3 * X_2 + 3,5 = 0, \\ -3 * X_1 + 9,33 * X_2 - 222,3 = 0, \end{cases}$$

уравнения. Получим $X_1 = 49,8 \text{ кН}$; $X_2 = 39,8 \text{ кН}$. Вычисляем продольные и поперечные силы и изгибающие моменты: $N_{AB} = -49,8 \text{ кН}$, $N_{BK} = -39,8 + 32 * 2 = 24,2 \text{ кН}$, $N_{KD} = 49,8 \text{ кН}$; $Q_A = -39,8 \text{ кН}$, $Q_B = -39,8 + 32 * 2 = 24,2 \text{ кН}$, $Q_{BK} = 49,8 \text{ кН}$, $Q_{KC} = 39,8 - 32 * 2 = -24,2 \text{ кН}$, $Q_{CD} = -24,2 - 23 = -47,2 \text{ кН}$, координата сечения, в котором $Q = 0$:

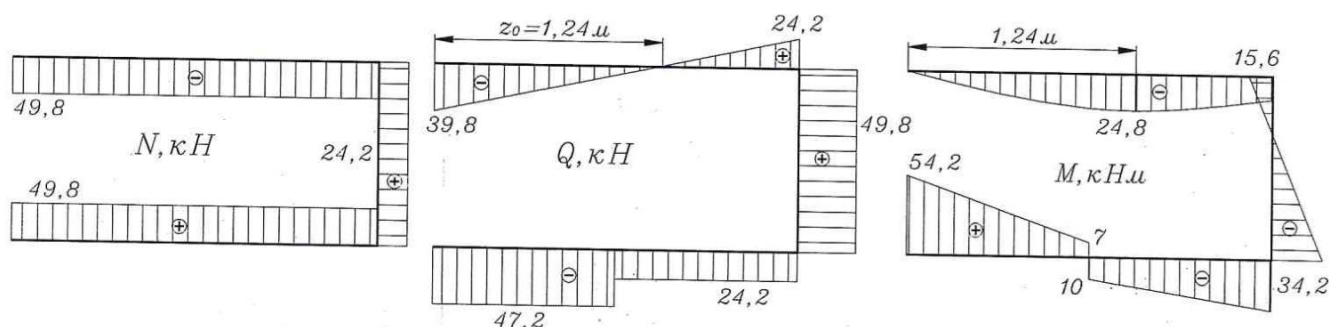


$$z_0 = 2 * \frac{39,8}{39,8 + 24,2} = 1,24 \text{ м}; \quad M_A = 0, \quad M_{\text{ЭКСТР.}} = -39,8 * 1,24 + 0,5 * 32 * 1,24^2 = -24,8 \text{ кНм}, \quad M_B^{\text{БЕРХ}} = 64 - 2 * 39,8 = -15,6 \text{ кНм}, \quad M_B^{\text{НИЗ}} = 15,6 \text{ кНм},$$

$$M_K^{\text{БЕРХ}} = M_K^{\text{НИЗ}} = -64 - 1 * 49,8 + 2 * 39,8 = -34,2 \text{ кНм}, \quad M_C^{\text{СПРАВА}} = 0 - 1 * 49,8 + 1 * 39,8 = -10 \text{ кНм}, \quad M_C^{\text{СЛЕВА}} = -10 + 17 = 7 \text{ кНм}, \quad M_D = 104 - 1 * 49,8 = 54,2 \text{ кНм}.$$

$$\text{Среднее значение на участке АВ: } M_{CP} = 0,5 * (-15,6) - \frac{32 * 2^2}{8} = -23,8 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры N, Q, M. Выполним деформационную проверку, умножая



суммарную эпюру M на единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Должно выполняться: $\int M \bar{M}_1 ds = 0$ и $\int M \bar{M}_2 ds = 0$.

$$\int M \bar{M}_1 ds = \frac{1}{6} * (2 * 34,2 * 1 - 15,6 * 1) + 0,5 * (34,2 + 10) * 1 * 1 - 0,5 * (7 + 54,2) * 1 * 1 = 0,3 \approx 0;$$

$$\int M \bar{M}_2 ds = \frac{2}{6} * (4 * 23,8 * 1 + 15,6 * 2) + \frac{1}{2} * (15,6 - 34,2) * 1 * 2 + \frac{1}{6} * (-2 * 34,2 * 2 - 2 * 10 * 1 - 34,2 * 1 - 10 * 2) + \frac{1}{6} * (2 * 7 * 1 + 54,2 * 1) = -0,2 \approx 0. \text{ Таким образом, эпюра M построена правильно. Максимальный момент:}$$

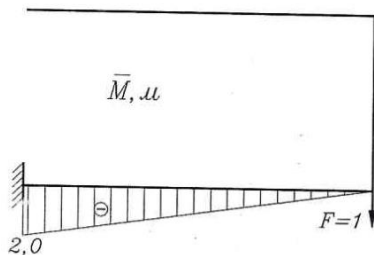
$M_{\text{MAX}} = 54,2 \text{ кНм}$. Продольная сила в опасном сечении: $N = 49,8 \text{ кН}$. Из условия прочности при изгибе $\sigma = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_X} \leq [\sigma]$

находим требуемый осевой момент сопротивления сечения: $W_X \geq \frac{M_{\text{MAX}}}{[\sigma]} = \frac{54,2 * 10^6}{160} = 339000 \text{ мм}^3$. Выбираем двутавр

№27 с $W_X = 371 \text{ см}^3 = 371000 \text{ мм}^3$, площадью сечения $A = 40,2 \text{ см}^2 = 4020 \text{ мм}^2$, моментом инерции

$I_X = 5010 \text{ см}^4 = 5,01 * 10^7 \text{ мм}^4$. Максимальные суммарные напряжения в раме от изгиба и сжатия:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_X} + \frac{N}{A} = \frac{54,2 * 10^6}{371000} + \frac{49800}{4020} = 159 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется.}$$



Находим вертикальное перемещение сечения К. Приложим в точке К силу $F=1$ и умножим суммарную эпюру M на единичную \bar{M} (учитывая при этом, что $1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{мм}^3$): $y_K = \frac{10^{12}}{EI} * [\frac{1}{6} * (2 * 10 * 1 + 34,2 * 1) + \frac{1}{6} * (-2 * 7 * 1 - 2 * 54,2 * 2 - 7 * 2 - 54,2 * 1)] = \frac{-40,8 * 10^{12}}{2 * 10^5 * 5,01 * 10^7} = -4,07 \text{ мм}$. Так как получили $y_K < 0$, то сечение К переместится против направления единичной силы, т.е. вверх.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

КР_ММиК_2022_06

Лист

23

