Неопределенный интеграл

Методы интегрирования

таблица

Подведение под знак дифференциала

По частям
(за *u* всегда берем многочлен, кроме тех случаев, когда есть логарифмы и arc…)

Замена переменной *t*=…, выразить *x*=…, найти *dx*=…

Выражения вида $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$

1) пишем в числитель производную знаменателя;
2) домножаем на коэффициент, чтобы уравнять *x*, прибавляем слагаемое, чтобы уравнять свободные члены;
3) разбиваем на 2 интеграла, один из которых берем подведением под знак дифференциала, а второй – выделением квадрата.

Дробно-рациональные функции $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$

Если дробь неправильная, то делим числитель на знаменатель «в столбик» – получаем неполное частное (многочлен) и правильную дробь.
Если дробь правильная, раскладываем ее в сумму простейших с неопределенными коэффициентами A, B, C…

Техника интегрирования

Иррациональные функции – замена

1) если есть только один корень $\sqrt[n]{ax+b}$, то замена $t=\sqrt[n]{ax+b}$, выражаем *x* и *dx*.

2) если несколько корней степени $n_1, n_2, ..., n_k$, то замена $ax+b=t^s$, где $s=HOK(n_1, n_2, ..., n_k)$

3) дифференциальный бином $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

а) *p*-целое, $x=t^k$, *k* –общий знаменатель *m* и *n;*

б) *p*-нецелое, $\frac{m+1}{n}$ – целое, $a+bx^n$, где *k* – знаменатель дроби *p;*

в) *p*-нецелое, $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, $ax^{-n}+b=t^k$, *k* – знаменатель дроби *p*

4) интегралы, содержащие $x^m, \sqrt{(x^2+a^2)^n}$
замена
$x=a\,tg\,t,$
$dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$

5) интегралы, содержащие $x^m, \sqrt{(x^2-a^2)^n}$
замена
$x=\frac{a}{\cos t}$
$dx=\frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}$

6) интегралы, содержащие $x^m, \sqrt{(a^2-x^2)^n}$
замена
$x=a\sin t,$
$dx=a\cos t dt$

Тригонометрия

$\int \sin^m x\cos^n x dx$

Если *m* (или *n*) нечетно, то представляем $\sin^m x$ (или $\cos^n x$) в виде произведения одинокого синуса и синуса в четной степени. Далее применяем формулу $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Если *m* и *n* четные, то применяем формулу $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ и формулы понижения
$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$
$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Если $m+n=-2k$, то применяем формулу
$1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
и ли
$1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$

Интегралы вида $\int \sin ax\cos bx dx$

Используем формулы
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$\int R(\cos x, \sin x)dx$
замена $t=tg\frac{x}{2},$
$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$
$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx$
замена $t=tgx,$
$dx=\frac{dt}{1+t^2}$
$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$
$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$
$\sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}$