

Вариант 1

Решить дифференциальные уравнения:

$$1. \quad xy' - (2x + y) = 0, \quad y(1) = 1; \quad 2. \quad \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) y' + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0;$$

$$3. \quad y'' + 4y' + 4y = 6xe^{-2x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением указанной линии вокруг оси Oy :

$$y^2 - x^2 = -4, \quad y = \pm 2.$$

Вариант 2

Решить дифференциальные уравнения.

$$1. \quad y' + 2xy = 4xe^{-x^2}, \quad y(0) = 3; \quad 2. \quad 2\cos(x + y) \cdot y' = \sin 2x - 2\cos(x + y);$$

$$3. \quad y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = -5x + 5y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^3} dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t, \quad y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Вариант 3

Решить дифференциальные уравнения.

$$1. \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) y' = \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x};$$

$$2. y' - y \operatorname{ctg} x = 3 \sin x, \quad y(\pi/2) = 3\pi/2;$$

$$3. y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-3x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки (0; 0):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$$

Вариант 4

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

$$1. xy' - y - x = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$2. \left(x + \frac{4y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \right) y' + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} + y = 0;$$

$$3. y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки (0; 0):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - x, \\ \dot{y} = 0,25x - 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_3^{\infty} \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x}.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси Ox :

$$y = x^2, \quad y = x.$$

Вариант 5

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $\frac{1-xy}{xy^2} y' + \frac{1+xy}{x^2 y} = 0;$

2. $xy' - y = x^2 \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$

3. $y'' + 2y' + 10y = \frac{e^{-x}}{\cos 3x}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_{-\infty}^0 x e^{3x} dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Вариант 6

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $xy' = 2(x+y), \quad y(1) = -1;$

2. $\frac{x+y^2}{y^2} y' = \frac{1}{y} + \cos x;$

3. $y'' + 7y' + 10y = 2xe^{-2x}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x+1} \ln(x+1) dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Вариант 7

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; y(0) = 7;$

2. $\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)y' + \sin x - \frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} = 0;$

3. $y'' + 9y = 2\sin 3x.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} \frac{4x+3}{x^2+7} dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 7, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Вариант 8

Решить дифференциальные уравнения.

1. $y' + 5y + x = 0; , \quad y(0) = 1;$

2. $(2y + xe^{-y}) \cdot y' = e^{-y} + \frac{1}{x+8};$

3. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{8x}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - 2x, \\ \dot{y} = 4y - 3x. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 2\ln x, \quad y = \ln(x+2), \quad x = 4.$$

Вариант 9

Решить дифференциальные уравнения.

$$1. (ye^{y^2} + 3y^2 - 2xy)y' + 3x^2 - 9 - 2x - y^2 = 0; \quad 2. y' + 2xy = x^3 e^{-x^2}; \quad y(0) = 9;$$

$$3. y'' - 8y' + 16y = 9e^{4x} \sin x.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[5]{1+5x}}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{24}.$$

Вариант 10

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

$$1. y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2; \quad y(1) = 10; \quad 2. \left(11y^{10} - x^2 y - \frac{x^2}{y^2} \right) y' + 2x^3 - xy^2 + \frac{2x}{y} = 0;$$

$$3. y'' + 4y = 10 \operatorname{ctg} 2x.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси Ox :

$$y = \sqrt{x}e^x, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

Вариант 11

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $(x^2 - y^{11} + x \cos(xy))y' + 2xy + y \cos(xy) = 0;$

2. $y' - \frac{2y}{2x+1} = 4x^2 - 1; y(2) = 11;$

3. $y'' - 12y' + 32y = \frac{16e^{4x}}{1+e^{-4x}}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$r = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Вариант 12

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x-2}{x}; y(1) = 12;$

2. $\frac{2x+12}{y^2} y' = \frac{2+2xy}{y};$

3. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+2x} dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Вариант 13

Решить дифференциальные уравнения:

1. $xy' + y = e^{3x}$, $y(\frac{1}{3}) = 13e$; 2. $2y \cos^2 x \cdot y' = 13x + y^2 \sin 2x$;

3. $y'' + y = \sin^2 x$.

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 3y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 1)^3} dx.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$y = \arctg x$ и прямая, проходящая через $(0; 0)$ и через точку с абсциссой $x = 1$ на заданной линии.

Вариант 14

Решить дифференциальные уравнения.

1. $2xy' + y = 2x^3$, $y(1) = 1$; 2. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$;

3. $y'' + 2y' = 4x + 14$.

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x + 5y, \\ \dot{y} = -5x - 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_2^{\infty} \frac{(3x + 1)dx}{x^2 - x}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = e^t(\sin t + \cos t), \quad y = e^t(\sin t - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Вариант 15

Решить дифференциальные уравнения.

1. $\frac{2x^3 + 15y}{y^3} y' = \frac{3x^2 + y^2}{y^2};$

2. $xy' + y = x^2 + 3x + 2; y(1) = 4;$

3. $y'' - 2y' + y = e^x(15x + 2).$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y, \\ \dot{y} = 17x + y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси Oy :

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{x^3}{8}.$$

Вариант 16

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $y' + 2y = e^{-x}; \quad y(0) = 3$

2. $\left(x + 2y + \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \right) y' + x + \frac{1}{\sqrt{2x+y}} + y = 0;$

3. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{4 + x^4}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$r = 3(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Вариант 17

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $\sqrt{x^2 - y} \cdot y' = 2x(17 + \sqrt{x^2 - y});$

2. $y' - \frac{1+2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = -1;$

3. $y'' - 3y' + 2y = xe^x.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = 6y - x. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант 18

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

1. $y' + y = 2x, \quad y(0) = 18;$

2. $\frac{2y}{x} y' = \frac{x+y^2}{x^2} + \frac{18}{\cos^2 x};$

3. $y'' - 6y' + 9y = (12x^2 + 18x)e^{3x}.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x} dx.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = e^{-x}, \quad y = e^{-2x} - 2, \quad x = 0.$$

Вариант 19

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y' - \frac{y}{x \ln x} = e^x \ln x, \quad y(19) = 0;$

2. $\left(x \sin(xy) - \frac{1}{x^2}\right) y' + y \sin(xy) + \frac{2y}{x^3} = 0;$

3. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x - y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln x)^2}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = 4 \cos^2 t, \quad y = 3 \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 20

Решить дифференциальные уравнения.

1. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 20;$

2. $(e^{-y^2} - 2x^3)y \cdot y' + (20 - 3xy^2)x = 0;$

3. $y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x).$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y, \\ \dot{y} = 8x + 3y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3 \sqrt{2 + \ln x}}.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси Ox :

$$y = 5 \cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 21

Решить дифференциальные уравнения.

$$1. (x - x^2 e^y - 21)y' + 4x^3 - 2xe^y + y = 0; \quad 2. y' - \frac{y}{x+1} = \ln(x+1), \quad y(0) = 21;$$

$$3. y'' + 10y' + 25y = \frac{5e^{-5x}}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = 7y - 13x. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} (3x - 1) dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Вариант 22

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

$$1. y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1; \quad 2. (22\sqrt{y} + \ln x)y' + \frac{y}{x} = 0;$$

$$3. y'' - 6y' + 10y = \frac{e^{3x}}{\cos x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - 2y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{7 + 2x^3}}.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = \arcsin e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант 23

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

$$1. x^y \ln x \cdot y' + yx^{y-1} + 23x^4 = 0; \quad 2. y' + \frac{y}{x} = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$3. y'' + y' - 2y = 18xe^{-2x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -9x - 5y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{4x-3}{x^2+4} dx.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \sqrt{x+4}, \quad y = 2 - \sqrt{x}, \quad y = 0.$$

Вариант 24

Решить дифференциальные уравнения. Указать вид уравнений.

$$1. y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 24; \quad 2. \left(xe^y - 24y + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)y' + e^y + \sqrt{\frac{y}{x}} = 0;$$

$$3. y'' - 4y' + 4y = 24e^{2x}\sqrt[3]{x}.$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_0^{\infty} e^{-3x} (5x+1) dx.$$

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:

$$x = 6at^5, \quad y = 5at(1-t^8), \quad \text{от точки } A(0;0) \text{ до точки } B(6a;0).$$

Вариант 25

Решить дифференциальные уравнения:

1. $xy' - \frac{y}{\ln x} = 2, \quad y(e) = 25;$

2. $\left(2xy + \frac{e^x}{x} \right) y' + x^2 + y^2 - \frac{ye^x}{x^2} = 0;$

3. $y'' - 4y' + 8y = 6e^{2x} \cos^2 2x.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений. Исследовать устойчивость решения вблизи точки $(0; 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$$

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла, вычислить, в случае сходимости:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{(2x^2 + 1)^3}}.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси Oy :

$$y = 1 - \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1.$$