Министерство образование и науки Российской Федерации

Сибирский государственный аэрокосмический университет

Имени академика М.Ф. Решетнева

О.В. Гомонова, С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина

**ЭКОНОМЕТРИКА**

*Утверждено редакционно-издательским советом*

*университета в качестве учебного пособия*

Красноярск, 2011

УДК 330.43:519.2

ББК

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

**Гомонова О.В.**

**Эконометрика** : учеб. пособие / О.В. Гомонова, С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2011. – 106 с.

ISBN

В данном учебно-методическом пособии кратко излагаются теоретические и практические основы эконометрики, которые могут быть использованы при федеральном тестировании в экономических вузах по этой дисциплине.

Книга состоит из введения и 5 глав, каждая из которых содержит теоретический материал и задания для самостоятельной работы студентов и контрольные вопросы. Может быть использовано при изучении лекционного материала, проведения лабораторных занятий и самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов экономических специальностей, также оно может быть рекомендовано для студентов других специальностей, изучающих эконометрику.

**УДК 330.43:519.2**

**ББК**

© Сибирский государственный аэрокосмический

университет имени академика М.Ф. Решетнева, 2011

© Гомонова О.В., Сенашов С.И., Филюшина Е.В., 2011

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_Toc293576241)

[ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 7](#_Toc293576242)

[1.1. Некоторые числовые характеристики вариационного ряда. 9](#_Toc293576243)

[1.2. Нормальное распределение. 11](#_Toc293576244)

[1.3. Моделирование нормальных случайных величин 11](#_Toc293576245)

[1.4. Распределение . 12](#_Toc293576246)



[1.5. Распределение Стьюдента ( t-распределение) 13](#_Toc293576247)

[1.6. Распределение Фишера (F – распределение) 14](#_Toc293576248)

[1.7. Описательная статистика 14](#_Toc293576249)

[Задание №1. Первичная обработка исходных данных 15](#_Toc293576250)

[ГЛАВА 2. ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ 17](#_Toc293576251)

[2.1 Теоретические основы 17](#_Toc293576252)

[2.2 Вопросы по главе 23](#_Toc293576253)

[Задание №2. Построение и анализ линейной линии тренда 23](#_Toc293576254)

[ГЛАВА 3. МНОЖЕСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ 26](#_Toc293576255)

[3.1. Теоретические основы 26](#_Toc293576256)

[3.2 Вопросы по главе 35](#_Toc293576257)

[Задание №3. Модель множественной линейной регрессии. 36](#_Toc293576258)

[ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ 54](#_Toc293576259)

[4.1 Теоретические основы 54](#_Toc293576260)

[4.2. Решение типовых задач 62](#_Toc293576261)

[4.3. Вопросы по главе 69](#_Toc293576262)

[Задание №4. Анализ остатков. 70](#_Toc293576263)

[Задание №5. Регрессия, автокорреляция и гетероскедастичность. 72](#_Toc293576264)

[Задание №6. Построение сезонной составляющей (скользящей средней) или уравнения авторегрессии. 72](#_Toc293576265)

[ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 74](#_Toc293576266)

[5.1. Теоретические основы 74](#_Toc293576267)

[5.2. Решение типовых задач 77](#_Toc293576268)

[5.3. Вопросы по главе 86](#_Toc293576269)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 87](#_Toc293576270)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 90](#_Toc293576271)

[ПРИЛОЖЕНИЯ 91](#_Toc293576272)

# ВВЕДЕНИЕ

В данном учебно-методическом пособии кратко излагаются теоретические и практические основы эконометрики, которые могут быть использованы при федеральном тестировании в экономических вузах по этой дисциплине.

Эконометрика — наука, изучающая количественные и качественные экономические взаимосвязи с помощью математических и статистических методов и моделей (http://ru.wikipedia.org/). Современное определение предмета эконометрики было выработано в уставе Эконометрического общества, которое главными целями назвало использование статистики и математики для развития экономической теории. Теоретическая эконометрика рассматривает статистические свойства оценок и испытаний, в то время как прикладная эконометрика занимается применением эконометрических методов для оценки экономических теорий. Эконометрика дает инструментарий для экономических измерений, а также методологию оценки параметров моделей микро- и макроэкономики. Кроме того, эконометрика активно используется для прогнозирования экономических процессов как в масштабах экономики в целом, так и на уровне отдельных предприятий. При этом эконометрика является частью экономической теории, наряду с макро- и микроэкономикой.

Термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо» — от «экономика» и «метрика» — от «измерение». Эконометрика входит в обширное семейство дисциплин, посвященных измерениям и применению статистических методов в различных областях науки и практики. К этому семейству относятся, в частности, биометрия, технометрия, наукометрия, психометрия и др. (http://ru.wikipedia.org/). Особняком стоит социометрия — этот термин закрепился за статистическими методами анализа взаимоотношений в малых группах, то есть за небольшой частью такой дисциплины, как статистический анализ в социологии

Этапы эконометрического исследования:

* Постановка проблемы
* Получение данных, анализ их качества
* Спецификация модели
* Оценка параметров
* Верификация модели и интерпретация результатов

В основу теоретического материала данного курса легли опубликованные работы ведущих специалистов в данной области Елисеевой И.И. и ее соавторов (2002, 2004, 2007 гг.) и другие книги.

В практической части авторами пособия предлагаются лабораторные работы, выполнение которых должно помочь в закреплении теоретических знаний по дисциплине эконометрика. Кроме этого приводятся типовые примеры решения задач по темам и вопросы к зачету (экзамену), отвечающие ГОСу по данной дисциплине для экономических специальностей и направлений.

Учебно-методическое пособие состоит из 4 глав:

1. Парные корреляции и регрессии;
2. Множественные корреляции и регрессии;
3. Анализ временных рядов;
4. Системы эконометрических уравнений

В качестве приложения в пособие включены основные статистические таблицы распределений случайных величин, необходимые для проверки статистической значимости получаемых оценок параметров различных эконометрических уравнений. Кроме этого, приводятся статистические данные для выполнения лабораторных работ, а также контрольная работа для студентов заочной формы обучения.

# ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В самых разнообразных областях практической и научной деятельности встречаются случаи, когда некоторые эксперименты могут быть проведены большое количество раз при одинаковых условиях.

Например:

1. Бросание игральной кости;
2. Измерение длины и веса некоторых предметов;
3. Наблюдение за ценами на различные товары.

Наших знания недостаточно, чтобы предсказать результаты отдельных наблюдений, поэтому в примерах 1-3 можно говорить о случайных экспериментах.

Рассмотрим случайные эксперименты по бросанию монеты. Если мы подбросим монету n раз и m раз выпадет герб, то частота выпадения герба будет равна m/n. При неограниченном продолжении эксперимента частота выпадений герба становится близкой к ½ - значению, которое мы принимаем за вероятность выпадения герба.

Пусть результаты случайного эксперимента. Для изучения этого ряда часто удобно результаты эксперимента ранжировать, т.е. упорядочит, например по возрастанию. В результате получим новый ряд



, где ,



Поскольку в новом ряду некоторые значения повторяются, то их группируют и в результате каждому ставят в соответствие , которое равно частоте появления данного числа. Имеем



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *…* |  |
|  |  | *…* |  |

Где Полученный ряд называется сгруппированным. Кроме дискретных рядов часто используются интервальные вариационные ряды. Они строятся в том случае, когда .



При определении количества групп необходимо стремиться к тому, чтобы были учтены особенности изучаемого явления. Поэтому количество групп должно быть оптимальным, в каждую группу должно входить достаточно большое число единиц совокупности, что отвечает требованию закона больших чисел. Однако, в отдельных случаях представляют интерес и малочисленные группы: новое, передовое, пока не оно станет массовым, проявляется в незначительном числе фактов; поэтому задача статистики - выделить эти факты, изучить их.

Таким образом, при решении вопроса о численности единиц в группах нужно руководствоваться не формальными признаками, а знанием сущности изучаемого явления.

На количество выделяемых групп существенное влияние оказывает степень колеблемости группировочного признака: чем она больше, тем больше следует образовывать групп.

Ориентировочно определить оптимальное количество групп с равными интервалами можно по формуле Стерджесса:

k=1+3,322 lgn,

где n - число единиц совокупности.

Замечание. Герберт Стерджесс (Herbert Sturges) предложил свою эмпирическую формулу для определения количества столбиков в гистограмме в 1926 году. С тех пор эта формула попала во множество учебников по статистике, и многие статистические пакеты используют эту формулу по умолчанию. Тем не менее, подход Стерджесса не имеет статистического обоснования, и существуют более обоснованные альтернативы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Количество элементов исходного ряда, попавших в каждую группу можно определить с помощью функции ЧАСТОТА.

Замечание.

Результаты измерения, как правило, регистрируют сначала в произвольном, хаотичном порядке, или в алфавитном порядке, или в том порядке, в каком поступают результаты измерения (например, ежедневный биржевой курс доллара к рублю). В такой форме полученные данные неудобны для анализа и выявления закономерностей. Первичная обработка статистических данных состоит в упорядочении данных (по возрастанию или убыванию), подсчете некоторых показателей, характеризующих эти значения, в группировании данных.

Упорядочение данных и подсчет их частот можно выполнять с помощью редактора электронных таблиц Microsoft Excel. Для этого используются команды или и статистическая функция (ЧАСТОТА).



Относительная частота значения является краткой и содержательной характеристикой рассматриваемой информации.

Для большого количества данных на следующем этапе обработки статистических данных целесообразно их обобщение. Тем самым приходим к необходимости **группирования** статистических данных. Имеются различные способы группирования. Рассмотрим некоторые из них.

Один из них реализуется в следующей последовательности действий.

**1. Определение количества групп *k***, на которые подразделяются все данные. Четкого правила выбора количества групп не существует. Они определяются содержанием рассматриваемой задачи. Обычно количество групп выбирают не меньше 12, но не больше 15. Малое количество групп (<12) может исказить результаты, а большое количество (>15) затрудняет работу с таблицей.

**2. Вычисление размаха данных *ω*** - разности между наибольшим *x*max и наименьшим *x*min значениями, увеличенной на погрешность измерения величины.

В общем случае к разности *x*max - *x*min добавляется число, равное погрешности величины.

# 1.1. Некоторые числовые характеристики вариационного ряда.

**Характеристики расположения.** Существует достаточно много значений характеризующих среднее значение например: с[реднее Колмогорова](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0)

[среднее арифметическое](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5), [среднее гармоническое](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5), среднее степенное, [среднее геометрическое](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5). Здесь мы будем использовать только три: среднее арифметическое, моду и медиану.

Среднее арифметическое вариационного ряда равно



**Медиана** — возможное значение признака, которое делит ранжированную совокупность [вариационного ряд](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4&action=edit&redlink=1)а на две равные части: 50 % «нижних» единиц ряда данных будут иметь значение признака не больше, чем медиана, а «верхние» 50 % — значения признака не меньше, чем медиана.

Медиана является важной характеристикой распределения случайной величины и так же, как [математическое ожидание](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5), может быть использовано для центрирования распределения. Однако, медиана более [робастна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D0%B1%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%B2_%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5) и поэтому может быть более предпочтительной для распределений с т.н. *тяжёлыми хвостами*.

**Мода** — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Иногда в совокупности встречается более чем одна мода *(например: 2, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10; мода = 6 и 9)*. В этом случае можно сказать, что совокупность мультимодальна. Из структурных средних величин только мода обладает таким уникальным свойством. Как правило мультимодальность указывает на то, что набор данных не подчиняется [нормальному распределению](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

Мода, как [средняя величина](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D1%8B), употребляется чаще для данных, имеющих нечисловую природу. Среди перечисленных цветов автомобилей — *белый, черный, синий металлик, белый, синий металлик, белый* — мода будет равна *белому* цвету. При экспертной оценке с её помощью определяют наиболее популярные типы продукта, что учитывается при прогнозе продаж или планировании их производства.

**Характеристики рассеяния.** В качестве меры рассеяния вариационного ряда используются статистические . показатели, характеризующие степень вариации, разброса значений признака относительно среднего значения.

В качестве меры рассеяния выбирают выборочную дисперсию



А также стандартное отклонение



Для однородности вариационного ряда используется коэффициент вариации



Если коэффициент вариации меньше 33%, то считают, что вариационный ряд является однородным и не нуждается в разбиении на части.

Важными характеристиками вариационного ряда являются также эксцесс и асимметрия:

**Характеристики асимметрии и эксцесса**. В симметричном распределении каждый момент нечетного порядка равен нулю. Любой момент неравный нулю можно считать характеристикой асимметрии данного распределения. Определение. Пусть μ3 обозначает третий центральный момент: .Тогда коэффициент асимметрии задаётся формулой:



Неформально говоря, коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае. Если распределение симметрично относительно среднего, то его коэффициент асимметрии равен нулю

Для нормального распределения коэффициент асимметрии равен нулю.

Определение. Пусть μ4 обозначает четвёртый центральный момент: .Тогда коэффициент эксцесса задаётся формулой:



-3



Эксцесс положителен, если пик распределения около среднего значения острый, и отрицателен, если пик гладкий. Для нормального распределения эксцесс равен нулю.

Замечание. Все характеристики расположения, рассеяния и других аналогичных свойств в большой степени произвольны. Это вполне естественно, так как свойства, описываемые такими параметрами, определены слишком расплывчато, чтобы каждое из них могло быть охарактеризовано одним числом. Каждая характеристика имеем свои достоинства и недостатки, и характеристика вполне пригодная в одном случае, может быть более или менее бесполезной в другом [крамер].

# 1.2. Нормальное распределение.

**Нормальное распределение**, также называемое **гауссовским распределением** или **распределением Гаусса**— распределение вероятностей, которое задается функцией плотности распределения:



где параметр *a*— среднее значение случайной величины и указывает координату максимума кривой плотности распределения, а *σ*² — дисперсия.

Нормальное распределение играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина, подверженная влиянию значительного числа случайных помех, часто подчиняется нормальному распределению, поэтому из всех распределений в природе чаще всего встречается нормальное (отсюда и произошло одно из его названий).

Нормальное распределение зависит от двух параметров — *смещения* и *масштаба*, то есть является с математической точки зрения не одним распределением, а целым их семейством. Значения параметров соответствуют значениям среднего и разброса (стандартного отклонения).

**Стандартным нормальным распределением** называется нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1.

**Свойства**

Если случайные величины *X*1 и *X*2 независимы и имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями μ1 и μ2 и дисперсиями и соответственно, то *X*1 + *X*2 также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ1 + μ2 и дисперсией .



# 1.3. Моделирование нормальных случайных величин

Простейшие, но неточные методы моделирования основываются на центральной предельной теореме. Именно, если сложить много независимых одинаково распределённых величин с конечной дисперсией, то сумма будет распределена *примерно* нормально. Например, если сложить 12 независимых базовых случайных величин, получится грубое приближение стандартного нормального распределения. Тем не менее, с увеличением слагаемых распределение суммы стремится к нормальному.

.Центральная предельная теорема

Нормальное распределение часто встречается в природе, нормально распределёнными являются следующие случайные величины:

* отклонение при стрельбе
* ошибки при измерениях
* рост человека

Такое широкое распространение закона связано с тем, что он является предельным законом, к которому приближаются многие другие (например, биномиальный).

Доказано, что сумма очень большого числа случайных величин, влияние каждой из которых близко к 0, имеет распределение, близкое к нормальному. Этот факт является содержанием центральной предельной теоремы.

[Центра́льные преде́льные теоре́мы (Ц.П.Т.) — класс теорем в теории вероятностей, утверждающих, что сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин, имеющих примерно одинаковые масштабы (ни одно из слагаемых не доминирует, не вносит в сумму определяющего вклада), имеет распределение, близкое к нормальному.

# 1.4. Распределение .



**Распределение χ2 (хи-квадрат) с *k* степенями свободы** — это распределение суммы квадратов *k* независимых стандартных нормальных случайных величин.

**Определение**

Пусть — совместно независимые стандартные нормальные случайные величины, то есть: . Тогда случайная величина



имеет распределение хи-квадрат с *k* степенями свободы, обозначаемое .



**Замечание.** Распределение хи-квадрат является частным случаем Гамма распределения:

.



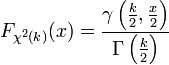
Следовательно, плотность распределения хи-квадрат имеет вид

,



а его функция распределения

,



где и обозначают соответственно полную и неполную гамма-функции.



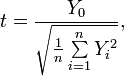
**История**

Критерий Пирсона χ² был предложен Карлом Пирсоном (Pearson) в 1900 году. Его работа рассматривается как фундамент современной математической статистики. Предшественники Пирсона просто строили графики экспериментальных результатов и утверждали, что они правильны. В своей статье Пирсон привёл несколько интересных примеров злоупотреблений статистикой. Он также доказал, что некоторые результаты наблюдений за рулеткой (на которой он проводил эксперименты в течение двух недель в Монте-Карло в 1892 году) были так далеки от ожидаемых частот, что шансы получить их снова при предположении, что рулетка устроена добросовестно, равны одному из 1029!

# 1.5. Распределение Стьюдента ( t-распределение)

**Определение**

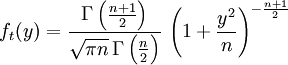
Пусть — независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что . Тогда распределение случайной величины , где



называется распределением Стьюдента с степенями свободы. Пишут . Её распределение абсолютно непрерывно и имеет плотность



,



где — гамма-функция Эйлера.



**Свойства распределения Стьюдента**

* Распределение Стьюдента симметрично. В частности если , то .



**Применение распределения Стьюдента**

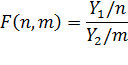
Распределение Стьюдента используется в статистике для точечного оценивания, построения доверительных интервалов и тестирования гипотез, касающихся неизвестного среднего статистической выборки из нормального распределения. В частности, пусть независимые случайные величины, такие что . Обозначим выборочное среднее этой выборки, а *S*2 её выборочную дисперсию. Тогда



# 1.6. Распределение Фишера (F – распределение)

**Определение**

Пусть — две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат:, :, где. Тогда распределение случайной величины



называется распределением Фишера со степенями свободы n и m. Пишут



# 1.7. Описательная статистика

О назначении описательной статистики можно судить по ее названию: она имеет дело с числами, характеризующими ту или иную интересующую нас ситуацию.

Ценность описательной статистики заключается прежде всего в том, что она дает сжатую и концентрированную характеристику изучаемого явления. Рассмотрим следующий пример. Пусть на некотором предприятии работает 1500 человек. Бухгалтерская ведомость на зарплату довольно большая. Информация о том, что средняя месячная зарплата работников этого предприятия составляет 8200 рублей, дает определенное, хотя и неполное представление об уровне заработной платы на этом предприятии.

Предмет исследований во многих сферах отличается исключительной сложностью, изменчивостью, индивидуальным многообразием явлений и процессов. Эти процессы происходят неоднозначно. Поэтому применение одинаковых подходов, средств, технологий дает в каждом конкретном случае различные результаты в зависимости от субъективных факторов, от обстоятельств, которые нельзя контролировать и которые влияют на протекание процесса. Неоднозначность протекания процесса порождается наличием присущего ему случайного. Но это не означает отсутствие общих закономерностей в изучаемых процессах и явлениях. Например, невысокая скорость чтения у отдельного учащегося является случайным событием, но у ученика, любящего читать, она встречается существенно реже, чем у того, кто редко берет книгу в руки. Эта устойчивость появления тех или других случайных событий уже является закономерностью.

# Задание №1. Первичная обработка исходных данных

1. Собрать 60 (61) данных за 2 календарных месяца любого года по акциям ведущих компаний России. В следующем виде:

Например:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № дня или t | дата | Цена открытия |
| 1 | 1 мая | 32, 745 |
| 2 | 2 мая | 32, 795 |
| .......... | ............ | ............................................ |
| 61 | 30 июня | 31, 195 |

1. По цене открытия построить гистограмму.
2. Провести первичную статистическую обработку данных. Использовать опции Данные →Анализ данных→Описательная статистика
3. Исследовать данные на однородность. Использовать коэффициент вариации

Vy = (σy/) 100%.

При этом следует ответить на вопрос: нужно ли разные порции данных обрабатывать разными способами?

1. Результаты обработки описать.

Сгруппировать описание по категориям:

А) Мода, медиана, среднее значение, асимметрия

Б) Эксцесс, дисперсия, среднеквадратичное отклонение .

1. Отсортировать данные и сгруппировать их в k = 3,22\* ln(n) + 1 групп.

С помощью функции ЧАСТОТА определить количество данных попавших в каждую группу. Построить график частот. На этом графике показать моду, медиану, среднее значение, асимметрию, эксцесс.

1. По гистограмме построить 5 типов линий тренда. Выбрать из них наилучшую по R2. И по экономическим соображениям.

Написать краткую характеристику компании. Текст пишется в редакторе WORD шрифтом 12 не менее 0,5 страницы. Например:

ОЙЛ - ведущая вертикально-интегрированная нефтяная компания России, история которой начинается с Постановления Совета Министров от 25 ноября 1999 года об образовании Государственного нефтяного концерна "Нефть", преобразованного Постановлением Правительства уже РФ № 229 от 17 апреля 2000 года во всемирно известное сегодня акционерное общество.

Предприятие активно развивает разведку и добычу нефти и газа, производство и реализацию нефтепродуктов. ОЙЛ является крупнейшей в мире частной нефтяной компанией по доказанным запасам сырой нефти. Интересы компании широко представлены в странах СНГ, Восточной Европе и на Ближнем Востоке. При этом она играет ключевую роль в топливно-энергетическом секторе нашей экономики. Холдинг добывает седьмую часть всей российской нефти.

Ценные бумаги общества котируются на ведущих биржах мира. Компания выпустила в свободное обращение более 60% уставного капитала. Акции «ОЙЛа» занимают одно из ведущих мест по ликвидности на российском и международном рынке.

Официальный веб-сайт - www.oil.ru.

Для сдачи Задания №1 должны быть выполнены все пункты 1-6. Студент должен ответить на следующие вопросы:

1. Что такое среднее значение, мода, медиана, дисперсия? Их формулы и экономический смысл.
2. Что такое асимметрия, эксцесс, стандартная ошибка? Их формулы и экономический смысл.
3. Экономический смысл коэффициента вариации.

# ГЛАВА 2. ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ

# 2.1 Теоретические основы

*Парная регрессия* - уравнение связи двух переменных *у* и *х:*



где *у* - зависимая переменная (результативный признак);

*х* - независимая, объясняющая переменная (признак-фактор).

Различают *линейные* и *нелинейные* регрессии.

*Линейная регрессии: *

*Нелинейные регрессии* делятся на два класса (Рис. 1.1): регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, *нелинейные по объясняющим переменным:*

• полиномы разных степеней: 

• равносторонняя гипербола *у* = *а +*

Регрессии, *нелинейные по оцениваемым параметрам:*

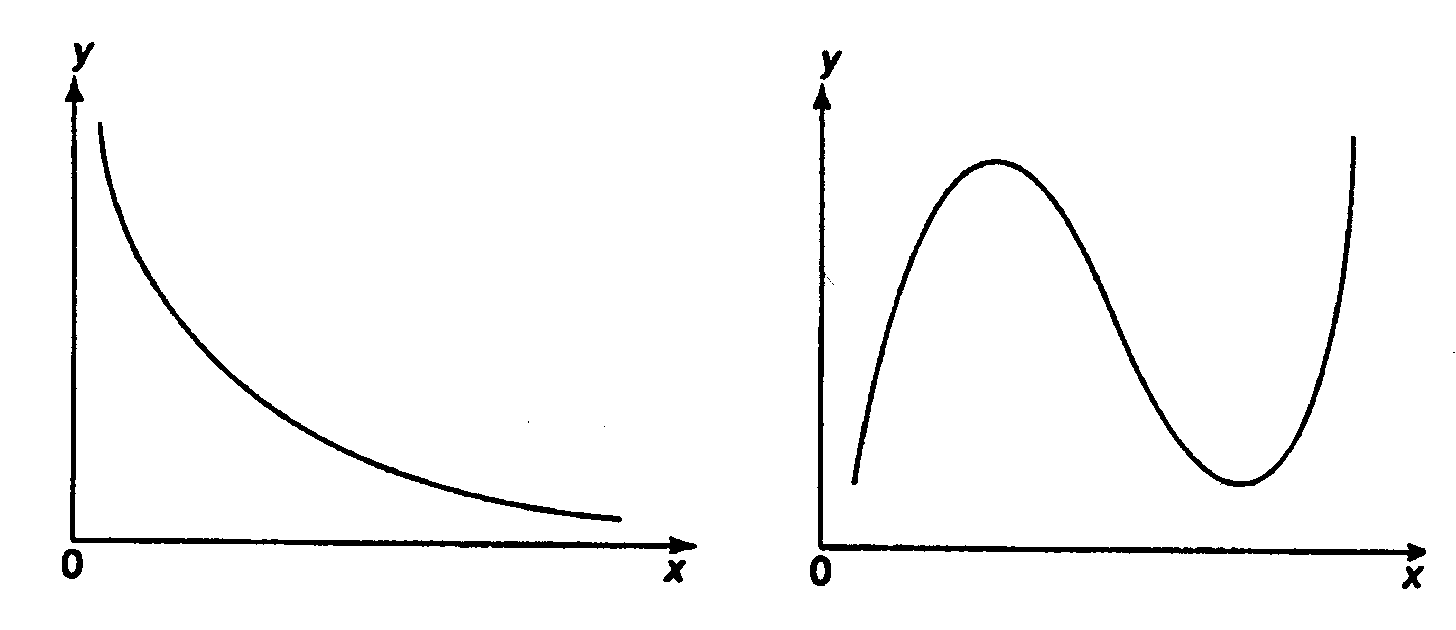
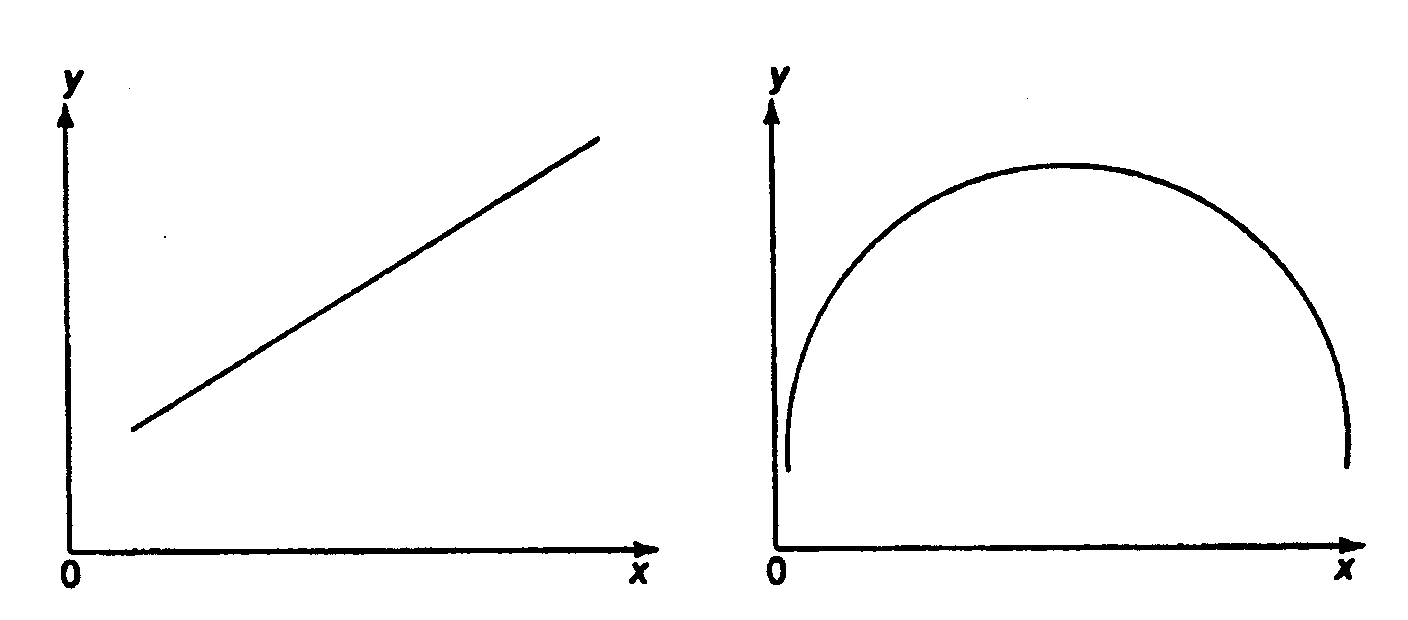
• степенная ;

• показательная *y = ;*

• экспоненциальная *у = *

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют *метод наименьших квадратов (МНК).* МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака *у* от теоретических  минимальна, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |



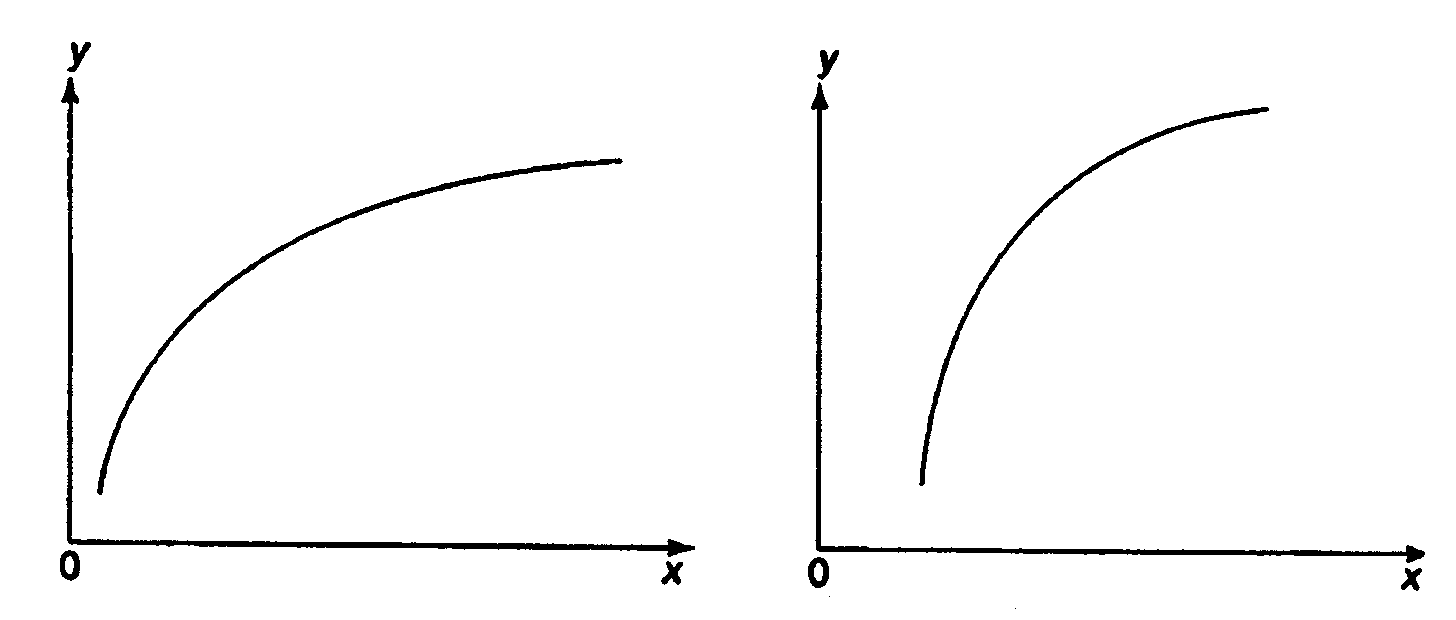
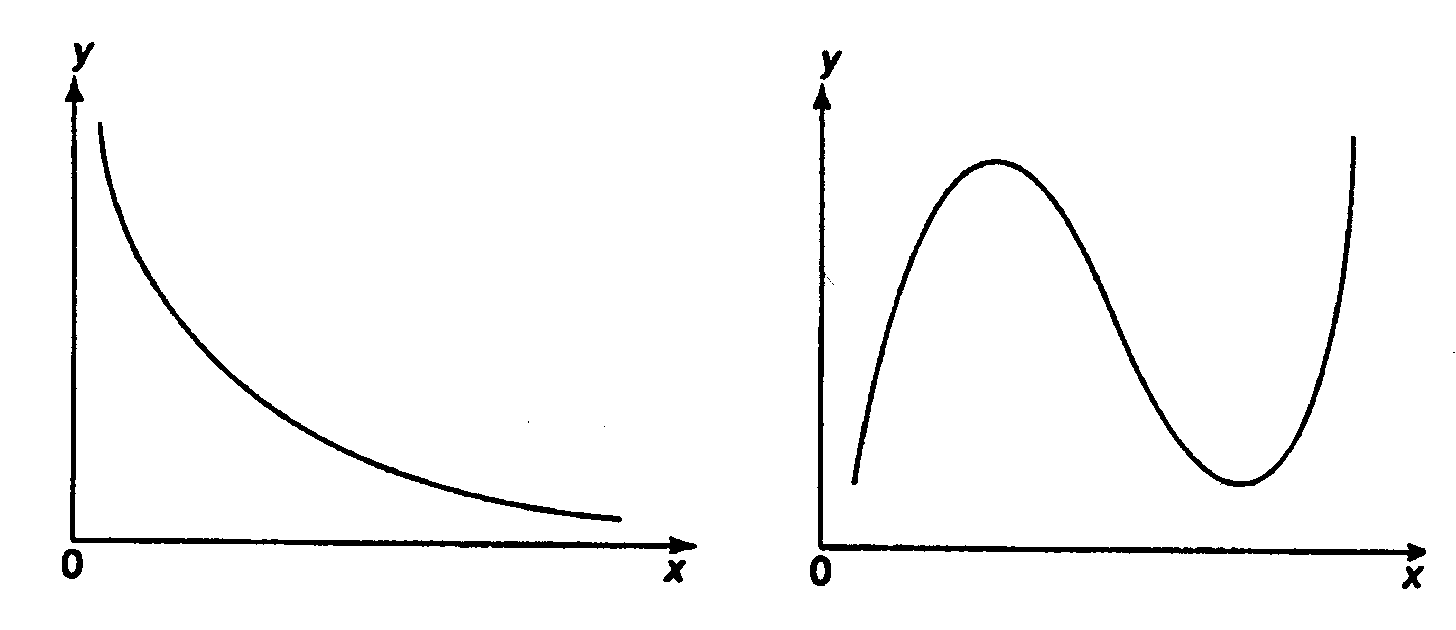


Рис. 1.1. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными.

Последний график неверен!

Основное свойство МНК: из всего множества линий линия регрессии на графике выбирается так, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали между точками и этой линией была бы минимальной (рис. 1.2):

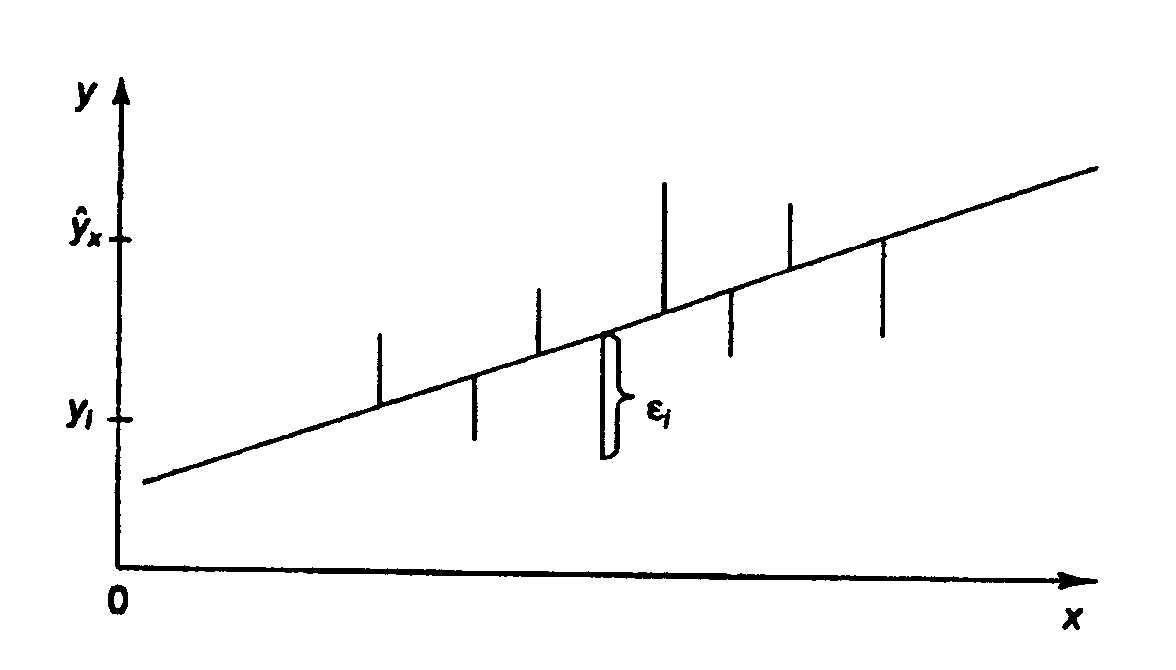


Рис. 1.2. Линия регрессии с минимальной дисперсией остатков.

Для линейных уравнений регрессии вида  из условия (1) получается следующая система нормальных уравнений относительно *а* и *b:*



Можно воспользоваться готовыми формулами, которые вытекают из этой системы:

 .

Тесноту связи изучаемых явлений оценивает *линейный коэффициент парной корреляции rху* для линейной регрессии (-1 ≤ *rху* ≤ 1):

*rху* =

и *индекс корреляции -* для нелинейной регрессии (0 *≤ рху ≤* 1):

*=.*

Оценку качества построенной модели даст коэффициент (индекс) детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

*Средняя ошибка аппроксимации* - среднее отклонение расчетных значений от фактических:



Допустимый предел значений ** - не более 8 - 10%.

*Коэффициент эластичности* показывает, на сколько процентов измениться в среднем результат, если фактор изменится на 1%. Формула для расчета коэффициента эластичности имеет вид:

.

*Средний коэффициент эластичности *показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат *у* от своей средней величины при изменении фактора на 1% от своего среднего значения:

*=f '(х)*

Так как для остальных функций коэффициент эластичности не является постоянной величиной, а зависит от соответствующего значения фактора , то обычно рассчитывается средний коэффициент эластичности

Приведем формулы для расчета средних коэффициентов эластичности для наиболее часто используемых типов уравнений регрессии:

*Таблица 1.*

**Формулы расчета средних коэффициентов для наиболее часто встречающихся уравнений регрессий**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид функции, | Первая производная, | Средний коэффициент эластичности, | Линеаризация |
| **1** | **2** | **3** | **4** |
|  |  |  | - |
|  |  |  | *Х*1=*х*, *Х*2=*х*2 |
|  |  |  | *Х*=1/*х*,*Y*=*y* |
|  |  |  | *Х*=ln*х*,*Y*=ln*y* |
|  |  |  | *Х*=*х*,*Y*=ln*y* |
|  |  |  | *Х*=ln*х*,*Y*=*y* |
|  |  |  | *Х*=*х*,*Y*=ln*y* |
|  |  |  |  |
|  |  |  | *Х*=*х*,*Y*=1/*y* |

Задача *дисперсионного анализа* состоит в анализе дисперсии зависимой переменной:

,

где - общая сумма квадратов отклонений;

- сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией («объясненная» или «факторная»);

- остаточная сумма квадратов отклонений.

Долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака *у* характеризует *коэффициент (индекс) детерминации *



Коэффициент детерминации - квадрат коэффициента или индекса корреляции.

*F-mecm* - оценивание качества уравнения регрессии - состоит в проверке гипотезы Н0 о *статистической незначимости уравнения регрессии* и *показателя тесноты связи.* Для этого выполняется сравнение фактического и критического (табличного) значений *F-критерия Фишера. *определяется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы:

,

где *п* - число единиц совокупности;

*т* - число параметров при переменных *х.*

- это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости *а.* Уровень значимости *а* - вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно *а* принимается равной 0,05 или 0,01.

Если *Fтабл* < Fфакт, то Н0 - гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. Если *Fтабл* > Fфакт, то гипотеза Н0 не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

Для оценки *статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции* рассчитываются *t-критерий Стьюдента* и *доверительные интервалы* каждого из показателей. Выдвигается гипотеза *Но* о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля. Оценка значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной случайной ошибки:

**

*Случайные ошибки* параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции определяются по формулам:







Сравнивая фактическое и критическое (табличное) значения t-статистики - *t*та6л и *t*факт - принимаем или отвергаем гипотезу Н0.

Связь между F-критерием Фишера и t-статистикой Стьюдента выражается равенством:



Если *t*та6л < *t*факт то H0 отклоняется, т.е. *а, b* и *rху* не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора *х.* Если tта6л > tфакт*,* то гипотеза H0 не отклоняется и признается случайная природа формирования *a, b* или *rху.*

Для расчета доверительного интервала определяем *предельную ошибку *для каждого показателя:

****

Формулы для расчета *доверительных интервалов* имеют следующий вид:



Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения.

*Прогнозное значение ур* определяется путем подстановки в уравнение регрессии соответствующего (прогнозного) значения *хр.* Вычисляется *средняя стандартная ошибка прогноза *

*=,*

где 

и строится *доверительный интервал прогноза:*



где 

## 2.2 Вопросы по главе

1. Что понимается под парной регрессией?
2. Какие задачи решаются при построении уравнения регрессии?
3. Какие методы применяются для выбора вида модели регрессии?
4. Какие функции чаще всего используются для построения уравнения парной регрессии?
5. Какой вид имеет система нормальных уравнений метода наименьших квадратов в случае линейной регрессии?
6. По какой формуле вычисляется линейный коэффициент парной корреляции?
7. Как строится доверительный интервал для линейного коэффициента парной корреляции?
8. Как вычисляется индекс корреляции?
9. Как вычисляется и что показывает коэффициент детерминации?
10. Как проверяется значимость уравнения регрессии и отдельных коэффициентов?
11. Для чего необходим критерий Фишера (F-критерий) в случаи парной регрессии?
12. Как строится доверительный интервал прогноза в случае линейной регрессии?
13. Как вычисляются и что показывают коэффициент эластичности, средний коэффициент эластичности?

## Задание №2. Построение и анализ линейной линии тренда

Построить линейное уравнение парной регрессии (линии тренда), заполнить все приведенные ниже таблицы и построить графики.

Ваше уравнение регрессии имеет вид: **Y = a + b\*t**

1. Коэффициенты a, b определить с помощью Данные→Поиск решения из условия

∑(Yt - a – b\*t )2 → min

2. Заполнить все приведенные ниже 4 таблицы и построить 2 графика.

*Таблица 1*

|  |  |
| --- | --- |
| **Регрессионная статистика** | |
| Множественный R | коэффициент корреляции r |
| R-квадрат | SS1/( SS1 + SS2) |
| Нормированный R-квадрат | R2-k(1- R2)/ *(n-k-1)* |
| Стандартная ошибка | *(SS2/(n-k-1))^0.5* |
| Наблюдения | N=n |

*Таблица 2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *df* | *SS* | *MS* | *F* | Значимость F |
| Регрессия | k | *SS1* | *SS1/k* | *Fвыч* | α |
| Остаток | n-k-1 | *SS2* | *SS2/(n-k-1)* |  |  |
| Итого | n-1 | *SS1 + SS2* |  |  |  |

*Таблица 3*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Коэффициенты* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* | *P значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* |
| Y-пересечение | a | c.o.(a) | a / c.o.(a) |  | a – tтаб \* c.o.(a) | a + tтаб\*c.o.(b) |
| Переменная X 1 | b | c.o.(b) | b / c.o.(b) |  | b – tтаб \* c.o.(b) | b + tтаб\*c.o.(a) |
| ВЫВОД ОСТАТКА |  |  |  |  |  |  |

*Таблица 4*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Наблюдение* | *Предсказанное Y* | *Остатки* |
| 1 | a + b\*1 | Y1 - a –b\*1 |
| 2 | a + b\*2 | Y2 - a – b\*2 |
| 3 | a + b\*3 | Y3 - a – b\*3 |
| … | … | … |
| n | a + b\*n | Yn – a - b\*n |

Замечание 1. c.o.(a)= (S2u/n(1+2 / σ2t))0,5, c.o.(b)= (S2u/(nσ2t))0,5,

Где S2u=n σ2e/(n-2).

Замечание 2. Величина α в таблице 2 вычисляется с помощью функции FРАСП.

Замечание 3. Величины ,  в таблице 3 вычисляется с помощью функции СТЬЮДРАСП.

Замечание 4. Величина tтаб в таблице 3 вычисляется с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР.

3. На основе таблиц 2,3 сделать обоснование адекватности уравнения опытным данным.

4. Построить графики подбора и остатков.

5. По опытным данным с помощью «Данные» ⇒ «Анализ данных»⇒ «Регрессия» построить уравнение регрессии. Сравнить данные полученные в таблице с компьютерной выдачей.

Для сдачи Задания №2 должны быть выполнены все пункты задания. Студент должен ответить на следующие вопросы:

1. Что такое коэффициент корреляции?
2. Что такое метод наименьших квадратов?
3. Уметь объяснять смысл каждого числа из таблиц.
4. Понимать что такое (F –распределение) и (t – распределение).
5. По графику остатков делать предположение о наличии гетероскедастичности и автокорреляции.
6. Уметь объяснять смысл слов гетероскедастичность и автокорреляция.

# ГЛАВА 3. МНОЖЕСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ

## 3.1. Теоретические основы

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Если же этим влиянием пренебречь нельзя, то в этом случае следует попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель, т.е. построить уравнение множественной регрессии

*Множественная регрессия* - уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

*y = f(x1, x2,...,xp),*

где *у* - зависимая переменная (результативный признак);

*x1, x2,...,xp* - независимые переменные (факторы).

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

• линейная - *у = a + b1∙x1+b2∙x2+…+bp∙xp+ε;*

• степенная - *у= а ∙*

• экспонента *- у = a∙*

• гипербола - *у =*

Можно использовать и другие функции, приводимые к линейному виду.

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Он включает в себя два круга вопросов: отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии.

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано прежде всего с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.
2. Факторы не должны быть интеркоррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа. Однако теоретический анализ часто не позволяет однозначно ответить на вопрос о количественной взаимосвязи рассматриваемых признаков и целесообразности включения фактора в модель. Поэтому отбор факторов обычно осуществляется в две стадии: на первой подбираются факторы исходя из сущности проблемы; на второй – на основе матрицы показателей корреляции определяют статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (т.е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменные явно *коллинеарны*, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если . Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии мультиколлинеарности факторов, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью, т.е. имеет место совокупное воздействие факторов друг на друга.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов (см. соответствующий критерий ниже).

Существует ряд подходов преодоления сильной межфакторной корреляции. Самый простой путь устранения мультиколлинеарности состоит в исключении из модели одного или нескольких факторов. Другой подход связан с преобразованием факторов, при котором уменьшается корреляция между ними.

При отборе факторов также рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов обычно в 6–7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия. Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной дисперсии очень мало. Это приводит к тому, что параметры уравнения регрессии оказываются статистически незначимыми, а -критерий меньше табличного значения.

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют *метод наименьших квадратов* (МНК). Для линейных уравнений и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, строится следующая система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:



Для ее решения может быть применён метод определителей:

,

где  определитель матрицы

*Δa1, Δb1… ,Δbp* - частные определители; которые получаются путем замены соответствующего столбца матрицы определителя системы данными левой части системы.

Другой вид уравнения множественной регрессии - *уравнение регрессии в стандартизованном масштабе:*

*ty=β1tx1 + β2tx2 +…+βptxp ,*

где стандартизованные переменные;

βl - стандартизованные коэффициенты регрессии.

К уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе применим МНК. Стандартизованные коэффициенты регрессии (β-коэффициенты) определяются из следующей системы уравнений:



Связь коэффициентов множественной регрессии *b,* со стандартизованными коэффициентами β, описывается соотношением



Параметр *а* определяется как *а =*

*Средние коэффициенты эластичности* для линейной регрессии рассчитываются по формуле



*Частные уравнения* регрессии - это уравнения регрессии, которые связывают результативный признак с соответствующим фактором  при закреплении остальных факторов на среднем уровне. В развернутом виде систему можно переписать в виде:



При подстановке в эти уравнения средних значений соответствующих факторов они принимают вид парных уравнений линейной регрессии, т.е. имеем



где



В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии. Это позволяет на основе частных уравнений регрессии определять *частные коэффициенты эластичности*:

,

где  – коэффициент регрессии для фактора  в уравнении множественной регрессии,

 – частное уравнение регрессии.

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает *индекс множественной корреляции:*



Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

**

*Индекс множественной корреляции* для *уравнения в стандартизованном масштабе* можно записать в виде



При линейной зависимости *коэффициент множественной корреляции* можно определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:



где



определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

 -

определитель матрицы межфакторной корреляции.

*Частные коэффициенты (или индексы) корреляции,* измеряющие влияние на *у* фактора *xi п*ри неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле



или по рекуррентной формуле:



Частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от -1 до 1.

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент (индекс) детерминации *Коэффициент множественной детерминации* рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции:

**

*Скорректированный индекс множественной детерминации* содержит поправку на число степеней свободы и рассчитывается по формуле



где *п -* число наблюдений,

*т-* чисто факторов

Значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью *F*-критерия Фишера:

**

*Частный F-критерий* оценивает статистическую значимость присутствия каждого из факторов в уравнении. В общем виде для фактора *хi,* частный F-критерий определится как



Оценка значимости коэффициентов чистой регрессии с помощью *t*-критерия Стьюдента сводится к вычислению значения



где  *-* среднеквадратическая ошибка коэффициента регрессии *b1,* она может быть определена по следующей формуле



При построении уравнения множественной регрессии может возникнуть проблема *мулътиколлинеарности* факторов, их тесной линейной связанности.

Считается, что две переменные явно *коллинеарны,* т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если 

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии *мулътиколлинеарности* факторов. Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надежна оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться *определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.*

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы  *(xi ≠xj)* были бы равны нулю. Так, для включающего три объясняющих переменных уравнения

*y = a + b1x1 + b2x2 + b3x3 + ε*

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель, равный 1:



так как =

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны 1, то определитель такой матрицы равен 0:

*Det*

Чем ближе к 0 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И наоборот, чем ближе к 1 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Проверка мультиколлинеарности факторов может быть проведена методом испытания гипотезы о независимости переменных H0: Det|R| = 1.

Доказано, что величина  имеет приближенное распределение *х2* с  степенями свободы. Если фактическое значение *х2* превосходит табличное (критическое) *Х2факт > Х2табл(df,a),* то гипотеза H0 отклоняется. Это означает, что Det|R| ≠ 1, недиагональные ненулевые коэффициенты корреляции указывают на коллинеарность факторов. Мультиколлинеарность считается доказанной.

Для применения МНК требуется, чтобы дисперсия остатков была *гомоскедастичной.* Это значит, что для каждого значения фактора *xj* остатки εi,- имеют одинаковую дисперсию. Если это условие не соблюдается, то имеет место *гетероскедастичность.*

При нарушении гомоскедастичности мы имеем неравенства



При малом объеме выборки для оценки гетероскедастичности может использоваться метод Гольдфельда - Квандта. Основная идея теста Гольдфельда - Квандта состоит в следующем:

1) упорядочение *п* наблюдений по мере возрастания переменной *х;*

2) исключение из рассмотрения *С* центральных наблюдений; при этом *(n - С): 2 >* *р,* где *р* - число оцениваемых параметров;

3) разделение совокупности из *(п* - *С)* наблюдений на две группы (соответственно с малыми и с большими значениями фактора *х)* и определение по каждой из групп уравнений регрессии;

4) определение остаточной суммы квадратов для первой *(S1)* и второй *(S2)* групп и нахождение их отношения: *R = S1 : S2..*

При выполнении нулевой гипотезы о гомоскедастичности отношение *R* будет удовлетворять *F*-критерию со степенями свободы *((п - С - 2р)* : 2) для каждой остаточной суммы квадратов. Чем больше величина *R* превышает табличное значение *F*-критерия, тем более нарушена предпосылка о равенстве дисперсий остаточных величин.

Уравнения множественной регрессии могут включать в качестве независимых переменных качественные признаки (например, профессия, пол, образование, климатические условия, отдельные регионы и т.д.). Чтобы ввести такие переменные в регрессионную модель, их необходимо упорядочить и присвоить им те или иные значения, т.е. качественные переменные преобразовать в количественные.

Такого вида сконструированные переменные принято в эконометрике называть *фиктивными переменными.* Например, включать в модель фактор «пол» в виде фиктивной переменной можно в следующем виде:



Коэффициент регрессии при фиктивной переменной интерпретируется как среднее изменение зависимой переменной при переходе от одной категории (женский пол) к другой (мужской пол) при неизменных значениях остальных параметров. На основе *t*-критерия Стьюдента делается вывод о значимости влияния фиктивной переменной, существенности расхождения между категориями.

## 3.2 Вопросы по главе

1. Что понимается под множественной регрессией?
2. Какие задачи решаются при построении уравнения регрессии?
3. Какие задачи решаются при спецификации модели?
4. Какие требования предъявляются к факторам, включаемым в уравнение регрессии?
5. Что понимается под коллинеарностью и мультиколлинеарностью факторов?
6. Как проверяется наличие коллинеарности и мультиколлинеарности?
7. Какие подходы применяются для преодоления межфакторной корреляции?
8. Какой вид имеет система нормальных уравнений метода наименьших квадратов в случае линейной регрессии?
9. По какой формуле вычисляется индекс множественной корреляции?
10. Как вычисляются индекс множественной детерминации и скорректированный индекс множественной детерминации?
11. Что означает низкое значение коэффициента (индекса) множественной корреляции?
12. Как проверяется значимость уравнения регрессии и отдельных коэффициентов?
13. Как строятся частные уравнения регрессии?
14. Как вычисляются средние частные коэффициенты эластичности?
15. Что такое стандартизированные переменные?
16. Какой вид имеет уравнение линейной регрессии в стандартизированном масштабе?
17. Как оценивается информативность (значимость) факторов?
18. Как вычисляются частные коэффициенты корреляции?
19. Опишите процедуру метода исключения переменных с использованием частных коэффициентов корреляции.
20. Что понимается под гомоскедастичностью?
21. Как проверяется гипотеза о гомоскедастичности ряда остатков?
22. В чем суть метода Гольдфельда – Квандта и для чего он применяется?

## Задание №3. Модель множественной линейной регрессии.

Имеются данные по 20 квартирам (таб. 1).

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Кол-во  комнат | Район | План. | Материал стен | Этаж | Этаж-ность | Sоб | Sжил | Sкух | Тел. | Санузел | Балкон/  лоджия | Плита | Цена |
| 1 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 1,00 | 9,00 | 82,00 | 51,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 3500,00 |
| 2 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 2,00 | 6,00 | 9,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 1,00 | 3400,00 |
| 3 | 4,00 | 11,00 | 5,00 | 1,00 | 8,00 | 10,00 | 83,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 4000,00 |
| 4 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 5,00 | 5,00 | 61,00 | 45,00 | 6,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 2500,00 |
| 5 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 2,00 | 3,00 | 5,00 | 120,00 | 80,00 | 12,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 3,00 | 5800,00 |
| 6 | 3,00 | 10,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 5,00 | 63,00 | 40,00 | 8,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 2000,00 |
| 7 | 5,00 | 42,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 9,00 | 98,00 | 65,00 | 9,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 3000,00 |
| 8 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 1,00 | 9,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 3200,00 |
| 9 | 4,00 | 15,00 | 3,00 | 1,00 | 4,00 | 5,00 | 64,00 | 43,00 | 7,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 | 2600,00 |
| 10 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 42,00 | 18,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 1650,00 |
| 11 | 4,00 | 15,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 62,00 | 48,00 | 6,00 | 1,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 2300,00 |
| 12 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 3,00 | 5,00 | 48,00 | 26,00 | 7,00 | 2,00 | 3,00 | 2,00 | 2,00 | 2500,00 |
| 13 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 2,00 | 2,00 | 5,00 | 63,00 | 48,00 | 6,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 2100,00 |
| 14 | 3,00 | 9,00 | 2,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 63,00 | 40,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 1600,00 |
| 15 | 3,00 | 9,00 | 5,00 | 1,00 | 6,00 | 10,00 | 68,00 | 40,00 | 12,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 | 1650,00 |
| 16 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 9,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 3,00 | 3000,00 |
| 17 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 9,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 4,00 | 3,00 | 2800,00 |
| 18 | 4,00 | 11,00 | 5,00 | 1,00 | 10,00 | 10,00 | 81,00 | 50,00 | 12,00 | 1,00 | 1,00 | 4,00 | 1,00 | 3600,00 |
| 19 | 5,00 | 51,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 9,00 | 99,00 | 65,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 4,00 | 3,00 | 2500,00 |
| 20 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 5,00 | 62,00 | 45,00 | 7,00 | 1,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2800,00 |
|  | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | *y* |

Задания:

1. Рассчитайте параметры линейного уравнения множественной регрессии с полным перечнем факторов двумя способами.

2. Оцените качество уравнения регрессии при помощи коэффициентов детерминации. Проверьте нулевую гипотезу о значимости уравнения и показателей тесноты связи с помощью F-критерия Фишера.

3. Дайте сравнительную оценку силы влияния факторов с результатом с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии.

4. Рассчитайте матрицы парных коэффициентов корреляции. Прокомментируйте полученные результаты.

5. На основе полученных показателей отберите существенные факторы в модель. Постройте модель только с существенными переменными и оцените ее параметры. Оцените статистическую значимость параметров «укороченного» уравнения регрессии, а также оцените его качество в целом. Сравните ее с предыдущей регрессионной моделью.

6. Для построения модели используйте метод всех регрессий.

Решение

1. Линейная модель множественной регрессии имеет вид:

, (1)



где для имеющихся данных

– вектор объясняемых переменных,



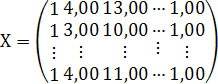
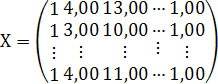
– вектор ошибок,



– вектор коэффициентов,



– матрица объясняющих переменных.



Для получения уравнения регрессии используем Метод Наименьших Квадратов.

Найдем вектор – вектор, оценивающий коэффициенты , чтобы определить – вектор расчетных значений объясняемых переменных при заданных коэффициентах.



В Excel это можно организовать с помощью функции Поиск Решений

(для подключения этого инструмента в программном продукте MS Office Exсel 2007 необходимо выполнить следующее:

1. Щелкните значок Кнопка Настройка панели быстрого доступа , а затем щелкните Другие команды.



1. Выберите команду Надстройки, а затем в окне Управление выберите пункт Надстройки Excel.
2. Нажмите кнопку Перейти.
3. В окне Доступные надстройки установите флажок Поиск решения и нажмите кнопку ОК.

Совет Если Поиск решения отсутствует в списке поля Доступные надстройки, чтобы найти надстройку, нажмите кнопку Обзор.

В случае появления сообщения о том, что надстройка для поиска решения не установлена на компьютере, нажмите кнопку Да, чтобы установить ее.

1. После загрузки надстройки для поиска решения в группе Анализ на вкладки Данные становится доступна команда Поиск решения.)

Создадим таблицу коэффициентов (Таблица 2), придав им случайные значения (количество коэффициентов равно количеству переменных Х плюс коэффициент b0 – свободный член):

*Таблица 2.*

**Коэффициенты b.**

|  |  |
| --- | --- |
| коэффициент | значение |
| b0 | 1 |
| b1 | 2 |
| b2 | 3 |
| b3 | 4 |
| b4 | 5 |
| b5 | 6 |
| b6 | 7 |
| b7 | 8 |
| b8 | 9 |
| b9 | 10 |
| b10 | 11 |
| b11 | 12 |
| b12 | 13 |
| b13 | 14 |

Чтобы определить целевую ячейку в Поиске решений необходимо рассчитать значение

(2)



(считаем для каждой строки и затем общую сумму. Для нашего примера она равна 477240,52), которое необходимо устремить к минимуму, в качестве изменяемых ячеек выбрать значения таблицы случайных коэффициентов.



Через Поиск решений определим оценку коэффициентов b (Рисунок 1).

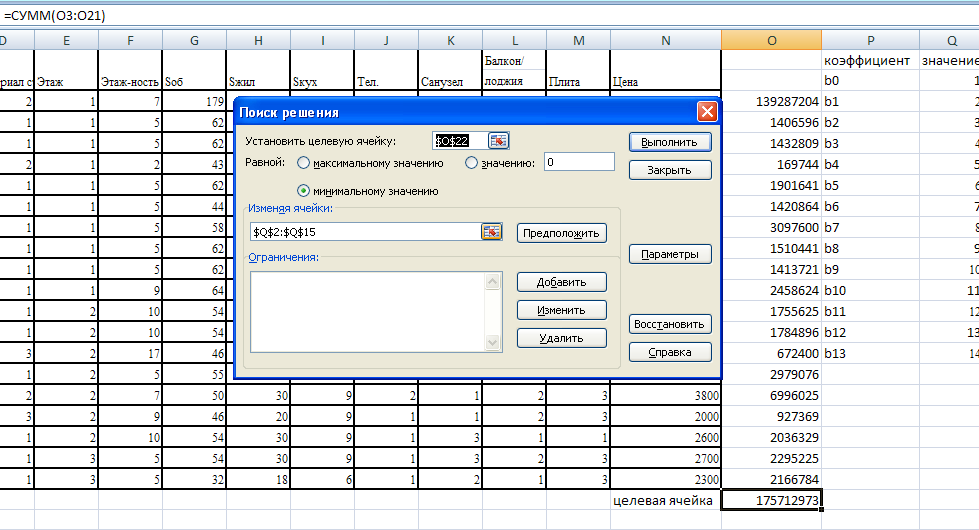


Рисунок 1. Использование инструмента Поиск решений в Excel.

После нажатия кнопки «Выполнить» сохраняем найденные значения. (Таблица 3).

*Таблица 3.*

**Таблица оценки коэффициентов**.

|  |  |
| --- | --- |
| коэффициент | значение |
| b0 | 3377,3548 |
| b1 | -494,4666 |
| b2 | -35,004883 |
| b3 | 75,664845 |
| b4 | -15,759265 |
| b5 | 80,108568 |
| b6 | 59,849235 |
| b7 | 127,95878 |
| b8 | -78,07852 |
| b9 | -437,50055 |
| b10 | 451,40619 |
| b11 | -299,82903 |
| b12 | -14,943753 |
| b13 | -369,63506 |

Вектор b определяется из уравнения

(3).



Рассчитаем для нашего примера.



*Таблица 4.*

**Сравнение**



|  |  |
| --- | --- |
| Цена |  |
| 3500,00 | 3666,191976 |
| 3400,00 | 3176,175043 |
| 4000,00 | 3808,634368 |
| 2500,00 | 2605,015219 |
| 5800,00 | 5753,23927 |
| 2000,00 | 1975,380204 |
| 3000,00 | 3211,538541 |
| 3200,00 | 2990,056613 |
| 2600,00 | 2502,540506 |
| 1650,00 | 1661,610515 |
| 2300,00 | 2123,211232 |
| 2500,00 | 2648,366582 |
| 2100,00 | 2370,61224 |
| 1600,00 | 1492,775968 |
| 1650,00 | 1761,795504 |
| 3000,00 | 2898,408877 |
| 2800,00 | 3040,277674 |
| 3600,00 | 3709,472985 |
| 2500,00 | 2379,964051 |
| 2800,00 | 2724,611835 |

Из (3), умножив обе части на XT, можно получить равенство вида

(4)



Или

(5).



Для расчета (5) на отдельном листе поместим матрицы .



Следует учесть, что для получения свободного члена в матрицу Х необходимо добавить дополнительный единичный столбец (Таблица 5).

*Таблица 5.*

**Матрица Х с дополнительным единичным столбцом.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Кол-во  комнат | Район | План. | Материал  стен | Этаж | Этажность | Sоб | Sжил | Sкух | Тел. | Санузел | Балкон/  лоджия | Плита |
| 1 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 1,00 | 9,00 | 82,00 | 51,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 |
| 1 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 2,00 | 6,00 | 9,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 1,00 |
| 1 | 4,00 | 11,00 | 5,00 | 1,00 | 8,00 | 10,00 | 83,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 5,00 | 5,00 | 61,00 | 45,00 | 6,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 2,00 | 3,00 | 5,00 | 120,00 | 80,00 | 12,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 10,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 5,00 | 63,00 | 40,00 | 8,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 |
| 1 | 5,00 | 42,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 9,00 | 98,00 | 65,00 | 9,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 |
| 1 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 1,00 | 9,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 4,00 | 15,00 | 3,00 | 1,00 | 4,00 | 5,00 | 64,00 | 43,00 | 7,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 3,00 |
| 1 | 1,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 42,00 | 18,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 4,00 | 15,00 | 3,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 62,00 | 48,00 | 6,00 | 1,00 | 2,00 | 1,00 | 2,00 |
| 1 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 3,00 | 5,00 | 48,00 | 26,00 | 7,00 | 2,00 | 3,00 | 2,00 | 2,00 |
| 1 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 2,00 | 2,00 | 5,00 | 63,00 | 48,00 | 6,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 9,00 | 2,00 | 1,00 | 1,00 | 5,00 | 63,00 | 40,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 9,00 | 5,00 | 1,00 | 6,00 | 10,00 | 68,00 | 40,00 | 12,00 | 1,00 | 3,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 10,00 | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 9,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 3,00 |
| 1 | 4,00 | 13,00 | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 9,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 4,00 | 3,00 |
| 1 | 4,00 | 11,00 | 5,00 | 1,00 | 10,00 | 10,00 | 81,00 | 50,00 | 12,00 | 1,00 | 1,00 | 4,00 | 1,00 |
| 1 | 5,00 | 51,00 | 5,00 | 1,00 | 4,00 | 9,00 | 99,00 | 65,00 | 9,00 | 1,00 | 3,00 | 4,00 | 3,00 |
| 1 | 3,00 | 8,00 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | 5,00 | 62,00 | 45,00 | 7,00 | 1,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 |

Чтобы получить матрицу ХТ, строим матрицу X, копируем ее и затем, нажав правую кнопку мыши ->Специальная вставка->Транспонирование получаем матрицу XT. (Рисунок 2).

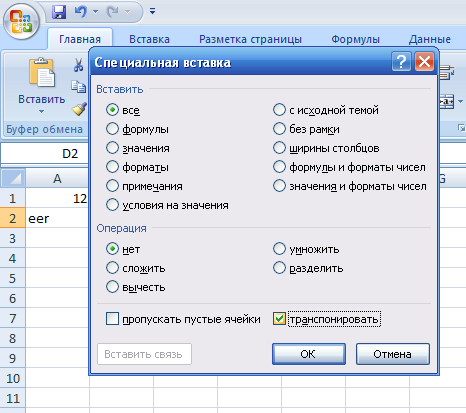


Рисунок 2. Использование инструмента Специальная вставка в Excel.

Используя функцию МУМНОЖ находим произведение матриц.

Как правильно использовать функцию МУМНОЖ в Excel?

Замечания

* Количество столбцов первой матрицы должно совпадать с количеством строк аргумента второй; при этом обе матрицы должны содержать только числа.
* Функция МУМНОЖ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ! в следующих случаях:
  + Если какая-либо ячейка пуста или содержит текст.
  + Если число столбцов в аргументе «массив1» отличается от числа строк в аргументе «массив2».

Выполните следующие действия

1. Выделите диапазон ячеек, так, чтобы количество строк было равно количеству строк матрицы XT, количество столбцов равно количеству столбцов матрицы X.
2. В строке формул ввести знак «=», затем выбрать функцию МУМНОЖ с помощью мастера формул. (Рисунок 3).

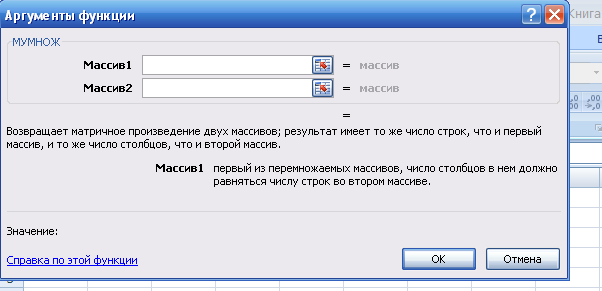


Рисунок 3. Использование функции МУМНОЖ в Excel.

1. В массив1 введите диапазон матрицы X, в массив2 – диапазон матрицы XT при этом не выделяйте заголовок строки или столбца.
2. Нажмите сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ВВОД. Если формула не будет введена как формула массива, в ячейке, куда вводилась формула, будет единственное значение.

Обращаем матрицу XTX с помощью функции МОБР (аналогично используем сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ВВОД для получения результата).

С помощью функции МУМНОЖ находим произведение , затем произведение , т.е вектор .



Таким образом, получаем коэффициенты регрессии (Таблица 6).

*Таблица 6.*

**Коэффициенты регрессии.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Параметры | Условное обозначение | Коэффициенты | |
| Свободный член |  | 3378,409982 |
| Количество комнат |  | -494,5901574 |
| Район |  | -35,00366057 |
| Планировка |  | 75,7406312 |
| Материал стен |  | -15,80521891 |
| Этаж |  | 80,10442546 |
| Этажность |  | 59,83505707 |
| Sоб |  | 127,975324 |
| Sжил |  | -78,09928757 |
| Sкух |  | -437,5724046 |
| Телефон |  | 451,2625396 |
| Санузел |  | -299,9117913 |
| Балкон/лоджия |  | -14,93231822 |
| Плита |  | -369,6484116 |

Замечание: Эти коэффициенты должны совпасть с коэффициентами из таблицы 3.

Расчет стандартной ошибки.

Для получения оценки стандартной ошибки сформируем вектор, состоящий из диагональных элементов уже имеющейся у нас матрицы (Таблица 7).



*Таблица 7.*

**Матрица**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 21,39 | -2,80 | 0,07 | 2,78 | -2,53 | 0,00 | -1,06 | 0,15 | -0,22 | -0,82 | -3,56 | -1,07 | 0,39 | -0,35 |
| -2,80 | 0,65 | -0,01 | -0,23 | 0,47 | -0,01 | 0,02 | -0,01 | 0,00 | 0,15 | 0,28 | 0,10 | -0,05 | 0,07 |
| 0,07 | -0,01 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | 0,00 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 2,78 | -0,23 | 0,02 | 0,97 | -0,38 | 0,00 | -0,48 | 0,01 | -0,05 | 0,03 | -0,90 | -0,05 | 0,06 | 0,08 |
| -2,53 | 0,47 | -0,01 | -0,38 | 1,04 | -0,02 | 0,16 | 0,00 | -0,01 | 0,05 | 0,26 | -0,03 | -0,04 | 0,09 |
| 0,00 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | -0,02 | 0,02 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | -0,01 | 0,00 |
| -1,06 | 0,02 | -0,01 | -0,48 | 0,16 | -0,01 | 0,29 | -0,01 | 0,03 | -0,06 | 0,45 | -0,02 | -0,01 | -0,03 |
| 0,15 | -0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | -0,01 | 0,01 | -0,01 | -0,02 | -0,03 | -0,01 | 0,00 | 0,00 |
| -0,22 | 0,00 | 0,00 | -0,05 | -0,01 | 0,00 | 0,03 | -0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,02 | 0,00 | 0,00 |
| -0,82 | 0,15 | 0,00 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,06 | -0,02 | 0,01 | 0,12 | 0,00 | 0,07 | -0,03 | 0,02 |
| -3,56 | 0,28 | -0,01 | -0,90 | 0,26 | 0,01 | 0,45 | -0,03 | 0,07 | 0,00 | 1,38 | 0,14 | -0,06 | -0,08 |
| -1,07 | 0,10 | 0,00 | -0,05 | -0,03 | 0,02 | -0,02 | -0,01 | 0,02 | 0,07 | 0,14 | 0,21 | -0,06 | -0,03 |
| 0,39 | -0,05 | 0,00 | 0,06 | -0,04 | -0,01 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | -0,03 | -0,06 | -0,06 | 0,09 | 0,01 |
| -0,35 | 0,07 | 0,00 | 0,08 | 0,09 | 0,00 | -0,03 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | -0,08 | -0,03 | 0,01 | 0,14 |

Обозначим полученный вектор как .



Рассчитаем выборочную остаточную дисперсию (несмещенную оценку параметра ):



, (6),



где – остатки, (7)



n – количество наблюдений,

p – число степеней свободы (количество независимых переменных в уравнении (1)).

Таким образом, .



Теперь рассчитаем стандартные ошибки коэффициентов регрессии (Таблица 8):

, (8)



*Таблица 8.*

**Стандартные ошибки коэффициентов.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Стандартная ошибка |
| Свободный член | 1304,48 |
| Количество комнат | 226,77 |
| Район | 10,31 |
| Планировка | 277,57 |
| Материал стен | 287,54 |
| Этаж | 35,31 |
| Этажность | 150,93 |
| Sоб | 22,35 |
| Sжил | 31,19 |
| Sкух | 97,68 |
| Телефон | 331,79 |
| Санузел | 127,84 |
| Балкон/лоджия | 86,06 |
| Плита | 105,08 |

Уравнение регрессии имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | =3378,41 | -494,59X1 | -35,00X2 | +75,74X3 | -15,81X4 | +80,10X5 | +59,84X6 + |
|  | (1304,48) | (226,77) | (10,31) | (277,57) | (287,54) | (35,31) | (150,93) |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| +127,98X7 | -78,10X8 | -437,57X9 | +451,26X10 | -299,91X11 | -14,93X12 | -369,65X13 | (9) |
| (22,35) | (31,19) | (97,68) | (331,79) | (127,84) | 86,06 | (105,08) |  |

**2. Оценка качества уравнения регрессии при помощи коэффициентов детерминации. Проверка нулевой гипотезы о значимости уравнения и показателей тесноты связи с помощью F-критерия Фишера.**

Для заполнения таблицы «Регрессионная статистика» (Таблица 9) находим:

* + 1. *Множественный R* – r-коэффициент корреляции между у и ŷ.

Для этого следует воспользоваться функцией КОРРЕЛ, введя массивы у и ŷ.

Полученное в результате число 0,99 близко к 1, что показывает очень сильную связь между опытными данными и расчетными.

* + 1. Для расчета *R-квадрат* находим:

*Объясняемая ошибка* 17455259,48,



.



*Необъясняемая ошибка* .



Следовательно, R-квадрат равен .



Соответственно 97% опытных данных объяснимы полученным уравнением регрессии.

* + 1. *Нормированный R-квадрат* находим по формуле

.



Этот показатель служит для сравнения разных моделей регрессии при изменении состава объясняющих переменных.

* + 1. *Стандартная ошибка* – квадратный корень из выборочной остаточной дисперсии:

.



В результате получаем следующую таблицу.

*Таблица 9.*

**Регрессионная статистика.**

|  |  |
| --- | --- |
| Множественный R | 0,99 |
| R-квадрат | 0,97 |
| Нормированный R-квадрат | 0,92 |
| Стандартная ошибка | 282,03 |
| Наблюдения | 20,00 |

Заполнение таблицы «Дисперсионный анализ»

Большая часть данных уже получена выше. (Объясняемая и необъясняемая ошибка).

Рассчитаем .



Оценку статистической значимости уравнения регрессии в целом проведем с помощью *F* -критерия Фишера. Уравнение множественной регрессии значимо (иначе – гипотеза H0 о равенстве нулю параметров регрессионной модели, т.е. отвергается), если



, (10)



где - табличное значение F-критерия Фишера.



Фактическое значение *F* - критерия по формуле составит:



Для расчета табличного значения критерия Фишера используется функция FРАСПОБР (Рисунок 4).

Степень свободы 1: p=13

Степень свободы 2: n-p-1 = 20-13-1=6

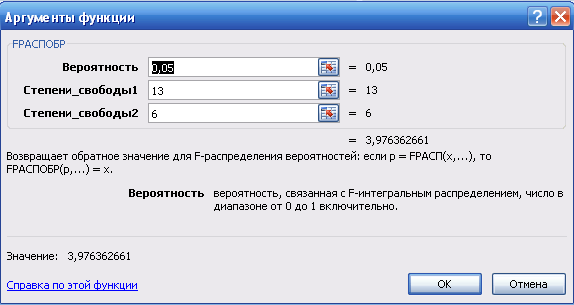


Рисунок 4. Использование функции FРАСПОБР в Excel.

Fтабл = 3,976 < 16,88, следовательно, модель адекватна опытным данным.

*Значимость F* рассчитывается с помощью функции FРАСП. Эта функция возвращает F-распределение вероятности (распределение Фишера) и позволяет определить, имеют ли два множества данных различные степени разброса результатов.

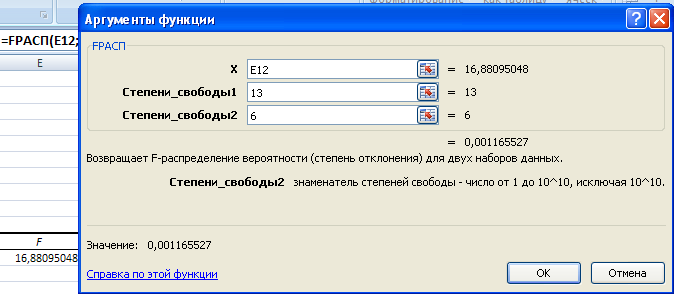


Рисунок 5. Использование функции FРАСП в Excel.

Значимость F = 0,001.

*Таблица 10.*

**Дисперсионный анализ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | df | SS | MS | F | Значимость F |
| Регрессия | 13 | 17455259,48 | 1342712,27 | 16,88 | 0,001 |
| Остаток | 6 | 477240,52 | 79540,07 |  |  |
| Итого | 19 | 17932500 |  |  |  |

Поскольку 0,001 <0,05, то уравнение регрессии адекватно опытным данным.

**3. Оценка силы влияния факторов с результатом с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии.**

Заполнение таблицы

Расчет коэффициентов регрессии и стандартных ошибок представлен выше (Таблица 6, 8).

*t-статистика* рассчитывается для каждого коэффициента по формуле

. (11).



где: коэффициенты регрессии (таблица 6)



стандартные ошибки коэффициентов ( таблица 8)



Для оценки значимости коэффициентов регрессии полученное значение сравнивается с *табличным значением распределения Стьюдента* при уровне надежности 0,95 (вероятности 0,05) и числе степеней свободы n-p-1=6. Данное значение можно получить, используя функцию СТЬЮДРАСПОБР (Рисунок 6).

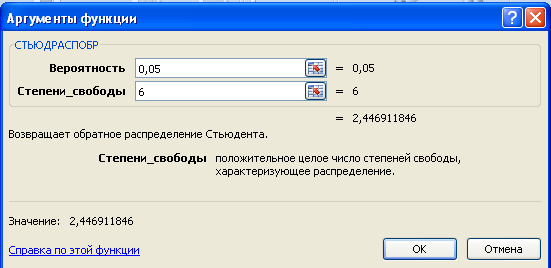


Рисунок 6. Использование функции СТЬЮДРАСПОБР в Excel.

Таким образом tтабл = 2,45.

Коэффициент является значимым если . (Таблица 11).



*Таблица 11.*

**Сравнение .**



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | tтабл |
| Свободный член | 3378,41 | 1304,48 | 2,59 | 2,45 |
| Количество комнат | -494,59 | 226,77 | -2,18 | 2,45 |
| Район | -35,00 | 10,31 | -3,39 | 2,45 |
| Планировка | 75,74 | 277,57 | 0,27 | 2,45 |
| Материал стен | -15,81 | 287,54 | -0,05 | 2,45 |
| Этаж | 80,10 | 35,31 | 2,27 | 2,45 |
| Этажность | 59,84 | 150,93 | 0,40 | 2,45 |
| Sоб | 127,98 | 22,35 | 5,73 | 2,45 |
| Sжил | -78,10 | 31,19 | -2,50 | 2,45 |
| Sкух | -437,57 | 97,68 | -4,48 | 2,45 |
| Телефон | 451,26 | 331,79 | 1,36 | 2,45 |
| Санузел | -299,91 | 127,84 | -2,35 | 2,45 |
| Балкон/лоджия | -14,93 | 86,06 | -0,17 | 2,45 |
| Плита | -369,65 | 105,08 | -3,52 | 2,45 |

Исходя из таблицы 11, коэффициенты при переменной Район, Общая площадь, Жилая площадь, Площадь кухни, Плита являются значимым на 5%-ном уровне.

Это утверждение подтверждается и при расчете *р-значения* – вероятности для t-распределения Стьюдента.

Расчет р-значения возможен с помощью функции СТЬЮДРАСП (Рисунок 7).

Синтаксис функции: СТЬЮДРАСП(x;степени\_свободы;хвосты)

x   — числовое значение, для которого требуется вычислить распределение. (модуль t-значения)

Степени\_свободы  — целое, указывающее число степеней свободы (n-p-1).

Хвосты  — число возвращаемых хвостов распределения. Если хвосты = 1, функция СТЬЮДРАСП возвращает одностороннее распределение. Если хвосты = 2, функция СТЬЮДРАСП возвращает двустороннее распределение (в практической работе распределение двустороннее).

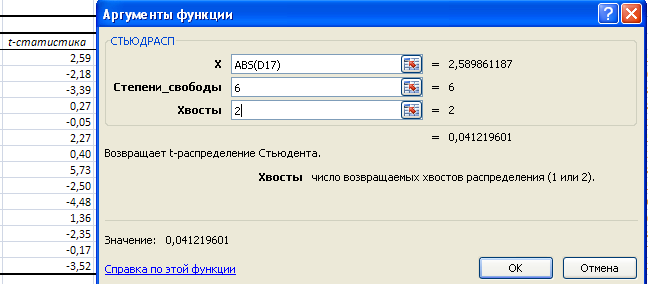


Рисунок 7. Использование функции СТЬЮДРАСП в Excel.

Рассчитаем р-значение для каждого фактора.

Если полученное значение меньше 0,05 коэффициент регрессии является значимым.

Нижние 95% и верхние 95% рассчитываются для построения доверительного интервала коэффициента. Следует заметить, что вообще доверительный интервал имеет смысл строить только для значимых коэффициентов регрессии.

Для расчета нижних 95% используется формула

(12).



Для расчета верхних 95% используется формула

(13).



*Таблица 12.*

**Коэффициенты регрессии и их оценка.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
| Свободный член | 3378,41 | 1304,48 | 2,59 | 0,04 | 186,47 | 6570,35 |
| Количество комнат | -494,59 | 226,77 | -2,18 | 0,07 | -1049,47 | 60,29 |
| Район | -35,00 | 10,31 | -3,39 | 0,01 | -60,24 | -9,77 |
| Планировка | 75,74 | 277,57 | 0,27 | 0,79 | -603,46 | 754,94 |
| Материал стен | -15,81 | 287,54 | -0,05 | 0,96 | -719,38 | 687,77 |
| Этаж | 80,10 | 35,31 | 2,27 | 0,06 | -6,30 | 166,51 |
| Этажность | 59,84 | 150,93 | 0,40 | 0,71 | -309,48 | 429,15 |
| Sоб | 127,98 | 22,35 | 5,73 | 0,00 | 73,30 | 182,65 |
| Sжил | -78,10 | 31,19 | -2,50 | 0,05 | -154,41 | -1,79 |
| Sкух | -437,57 | 97,68 | -4,48 | 0,00 | -676,58 | -198,56 |
| Телефон | 451,26 | 331,79 | 1,36 | 0,22 | -360,61 | 1263,13 |
| Санузел | -299,91 | 127,84 | -2,35 | 0,06 | -612,71 | 12,89 |
| Балкон/лоджия | -14,93 | 86,06 | -0,17 | 0,87 | -225,51 | 195,65 |
| Плита | -369,65 | 105,08 | -3,52 | 0,01 | -626,76 | -112,54 |

**4. Матрица парных коэффициентов корреляции.**

Рассчитаем *матрицу парных коэффициентов корреляции* для оценки взаимовлияния факторов, включенных в модель.

Для этого используем операцию Данные->Анализ данных->Корреляция и в исходном диапазоне указываем исходную таблицу включая значения и X и Y. В результате получается таблица13.

*Таблица 13.*

**Матрица парных коэффициентов корреляции.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Кол-во комнат | Район | План. | Материал стен | Этаж | Этаж-ность | Sоб | Sжил | Sкух | Тел. | Санузел | Балкон/ лоджия | Плита | Цена |
| Количество комнат | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Район | 0,75 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Планировка | 0,62 | 0,38 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Материал стен | -0,22 | -0,17 | 0,14 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Этаж | 0,24 | 0,08 | 0,44 | 0,05 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Этажность | 0,50 | 0,34 | 0,84 | -0,16 | 0,50 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Sоб | 0,62 | 0,55 | 0,71 | 0,23 | 0,21 | 0,42 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |  |
| Sжил | 0,65 | 0,56 | 0,61 | 0,30 | 0,15 | 0,24 | 0,95 | 1,00 |  |  |  |  |  |  |
| Sкух | 0,04 | 0,05 | 0,54 | 0,08 | 0,42 | 0,58 | 0,54 | 0,31 | 1,00 |  |  |  |  |  |
| Телефон | -0,22 | -0,17 | 0,14 | 0,22 | -0,13 | -0,16 | 0,11 | 0,06 | 0,16 | 1,00 |  |  |  |  |
| Санузел | -0,29 | -0,20 | -0,20 | -0,06 | -0,24 | 0,05 | -0,40 | -0,46 | -0,24 | -0,23 | 1,00 |  |  |  |
| Балкон/ лоджия | 0,05 | 0,12 | 0,14 | 0,04 | 0,30 | 0,27 | 0,13 | 0,04 | 0,35 | -0,11 | 0,25 | 1,00 |  |  |
| Плита | -0,07 | 0,15 | -0,20 | -0,12 | -0,26 | -0,21 | 0,10 | 0,10 | -0,08 | 0,07 | 0,09 | -0,05 | 1,00 |  |
| Цена | 0,26 | 0,03 | 0,62 | 0,42 | 0,29 | 0,25 | 0,72 | 0,67 | 0,42 | 0,42 | -0,46 | -0,04 | -0,23 | 1,00 |

Исходя из таблицы 13, можно сделать следующие выводы:

1. На цену квартиры наиболее сильное влияние оказывают такие факторы как Sоб(0,71), Sжил(0,95).
2. Следующие факторы сильно коррелируют между собой, что нужно учитывать при моделировании уравнения регрессии:

Количество комнат и район (0,75)

Планировка и этажность (0,84),

Планировка и общая площадь (0,71),

Площадь общая и жилая (0,95).

Взаимозависимость общей и жилой площади можно объяснить тем, что первое включает в себя второе.

**5. Отбор существенных факторов в модель. Анализ результатов.**

Учитывая полученные результаты, перестроим модель регрессии, включив только значимые коэффициенты (Таблица 14).

*Таблица 14.*

**Таблица существенных факторов.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Район | Площадь общая | Площадь жилая | Площадь кухни | Плита | Цена |
| 13,00 | 82,00 | 51,00 | 9,00 | 1,00 | 3500,00 |
| 10,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 1,00 | 3400,00 |
| 11,00 | 83,00 | 50,00 | 9,00 | 3,00 | 4000,00 |
| 8,00 | 61,00 | 45,00 | 6,00 | 3,00 | 2500,00 |
| 10,00 | 120,00 | 80,00 | 12,00 | 3,00 | 5800,00 |
| 10,00 | 63,00 | 40,00 | 8,00 | 3,00 | 2000,00 |
| 42,00 | 98,00 | 65,00 | 9,00 | 3,00 | 3000,00 |
| 13,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 3,00 | 3200,00 |
| 15,00 | 64,00 | 43,00 | 7,00 | 3,00 | 2600,00 |
| 3,00 | 42,00 | 18,00 | 9,00 | 3,00 | 1650,00 |
| 15,00 | 62,00 | 48,00 | 6,00 | 2,00 | 2300,00 |
| 8,00 | 48,00 | 26,00 | 7,00 | 2,00 | 2500,00 |
| 8,00 | 63,00 | 48,00 | 6,00 | 3,00 | 2100,00 |
| 9,00 | 63,00 | 40,00 | 9,00 | 3,00 | 1600,00 |
| 9,00 | 68,00 | 40,00 | 12,00 | 3,00 | 1650,00 |
| 10,00 | 64,00 | 40,00 | 9,00 | 3,00 | 3000,00 |
| 13,00 | 82,00 | 50,00 | 9,00 | 3,00 | 2800,00 |
| 11,00 | 81,00 | 50,00 | 12,00 | 1,00 | 3600,00 |
| 51,00 | 99,00 | 65,00 | 9,00 | 3,00 | 2500,00 |
| 8,00 | 62,00 | 45,00 | 7,00 | 2,00 | 2800,00 |

В результате регрессионного анализа (Данные->Анализ данных->Регрессия) получаем:

*Таблица 15.*

**Регрессионная статистика**

|  |  |
| --- | --- |
| Множественный R | 0,911945 |
| R-квадрат | 0,831643 |
| Нормированный R-квадрат | 0,771516 |
| Стандартная ошибка | 464,3778 |
| Наблюдения | 20 |

*Таблица 16.*

**Дисперсионный анализ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | df | SS | MS | F | Значимость F |
| Регрессия | 5 | 14913445,36 | 2982689,072 | 13,83137 | 5,38E-05 |
| Остаток | 14 | 3019054,64 | 215646,76 |  |  |
| Итого | 19 | 17932500 |  |  |  |

*Таблица 17.*

**Анализ коэффициентов регрессии**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
| Свободный член | 1212,182 | 719,320451 | 1,685176572 | 0,114105 | -330,6069 | 2754,971 |
| Район | -50,1878 | 11,99329336 | -4,18465694 | 0,000918 | -75,91087 | -24,4648 |
| Площадь общая | 105,2748 | 31,24134607 | 3,36972834 | 0,004581 | 38,26882 | 172,2809 |
| Площадь жилая | -53,5961 | 36,62382081 | -1,463423062 | 0,16544 | -132,1464 | 24,95414 |
| Площадь кухни | -215,002 | 107,012903 | -2,009121556 | 0,064211 | -444,5217 | 14,51792 |
| Плита | -379,241 | 144,529665 | -2,623966044 | 0,020021 | -689,2262 | -69,2556 |

Определяем значимые коэффициенты, сравнивая р-значения и вероятность 0,05.

Такими коэффициентами являются Район, Площадь общая, Плита.

Результаты регрессионного анализа со значимыми коэффициентами:

*Таблица 18.*

**Регрессионная статистика**

|  |  |
| --- | --- |
| Множественный R | 0,88493 |
| R-квадрат | 0,783101 |
| Нормированный R-квадрат | 0,742433 |
| Стандартная ошибка | 493,0476 |
| Наблюдения | 20 |

*Таблица 19.*

**Дисперсионный анализ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | df | SS | MS | F | Значимость F |
| Регрессия | 3 | 14042964,46 | 4680988 | 19,25572082 | 1,47E-05 |
| Остаток | 16 | 3889535,539 | 243096 |  |  |
| Итого | 19 | 17932500 |  |  |  |

*Таблица 20.*

**Анализ коэффициентов регрессии**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
| Свободный член | 313,2769 | 595,0961036 | 0,526431 | 0,6058103 | -948,27 | 1574,824 |
| Район | -41,5022 | 11,7953358 | -3,51853 | 0,0028498 | -66,5072 | -16,4972 |
| Площадь общая | 53,98813 | 7,371629674 | 7,323771 | 1,71019E-06 | 38,36097 | 69,61528 |
| Плита | -325,612 | 150,8125168 | -2,15905 | 0,0463766 | -645,32 | -5,90347 |

Все коэффициенты являются значимыми (р-значение меньше 0,05), составим уравнение регрессии:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | =313,28 | -41,50X2 | +53,99X7 | -325,61X13 | (14), |
|  | (595,10) | (11,80) | (7,37) | (150,81) |  |

где

X2 – коэффициент района,

X7  – коэффициент общей площади,

X13  – коэффициент наличия и типа кухонной плиты.

*Результаты анализа* данной модели показывают:

* Взаимозависимость опытных и расчетных данных сильная, составляет 0,88.
* 78% опытных данных можно объяснить полученной моделью.
* Сравнивая скорректированные коэффициенты детерминации, видим, что он уменьшился с уменьшением количества объясняющих переменных (с 0,92 до 0,74).

Следует отметить, что в отличие от R2 нормированный R2 может уменьшаться при введении в модель новых объясняющих переменных, не оказывающих существенного влияния на зависимую переменную Однако даже увеличение скорректированного коэффициента детерминации при введении в модель новой объясняющей переменной не всегда обозначает, что ее коэффициент регрессии значим.

* Модель адекватна опытным данным, т.к. .



Все коэффициенты являются значимыми.

# ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

## 4.1 Теоретические основы

При построении эконометрической модели используются два типа данных:

1. данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент времени;
2. данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются *пространственными моделями*. Модели, построенные на основе второго типа данных, называются *моделями временных рядов*.

Модели, построенные по данным, характеризующим один объект за ряд последовательных моментов (периодов), называются *моделями временных рядов.*

*Временной ряд* - это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов.

Каждый уровень временного ряда формируется из *трендовой (Т), циклической (S)* и *случайной (Е)* компонент.

В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, называется *аддитивной моделью* временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется *мультипликативной моделью* временного ряда.

Таким образом:

* *Аддитивная модель* имеет вид: *Y = Т + S + Е;*
* *мультипликативная модель - Y = T⋅S⋅Е.*

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений *Т, S и Е* для каждого уровня ряда.

*Основная задача эконометрического исследования* отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

В общем случае, построение моделивключает следующие шаги:

1) выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;

2) расчет значений сезонной компоненты *S;*

3) устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных в аддитивной *(T* + *Е)* или в мультипликативной *(Т ∙ Е)* модели;

4) аналитическое выравнивание уровней *(Т + Е)* или *(T* *∙* *Е)* и расчет значений Г с использованием полученного уравнения тренда;

5) расчет полученных по модели значений *(Т + S)* или *(T ∙ S);*

6) расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют *автокорреляцией уровней ряда*.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени.

*Автокорреляция уровней ряда -* это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда:



где - коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка;



где  - коэффициент автокорреляции уровней ряда второго порядка.

Формулы для расчета коэффициентов автокорреляции старших порядков легко получить из формулы линейного коэффициента корреляции.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т.д. порядков называют *автокорреляционнои функцией временного ряда,* а график зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) - *коррелограммой.*

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка , то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в  моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

Свойства коэффициента автокорреляции.

1. Он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции.
2. По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом могут иметь убывающую тенденцию.

Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют *лагом*.

Построение аналитической функции для моделирования тенденции (тренда) временного ряда называют *аналитическим выравниванием временного ряда.* Для этого чаще всего применяются следующие функции:

* линейная * = a + b ∙ t;*
* гипербола * = a + b / t;*
* экспонента *= еa+bt*;
* степенная функция * = a ∙ tb ;*
* парабола второго и более высоких порядков *= a + bl ∙ t + b2 ∙ t2+... + bk ∙ tk.*

Параметры трендов определяются обычным МНК, в качестве независимой переменной выступает время *t* = 1,2, ..., *n*, а в качестве зависимой переменной - фактические уровни временного ряда *уt.* Критерием отбора наилучшей формы тренда является наибольшее значение скорректированного коэффициента детерминации *.*

Простейший подход к моделированию сезонных колебаний – это расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда.

Общий вид аддитивной модели следующий:

.

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (), сезонной () и случайной () компонент.

Общий вид мультипликативной модели выглядит так:

.

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (), сезонной () и случайной () компонент.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений ,  и  для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений сезонной компоненты .
3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных () в аддитивной или () в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней () или () и расчет значений  с использованием полученного уравнения тренда.
5. Расчет полученных по модели значений () или ().
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок. Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок  для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимо-погашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю. В мультипликативной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле.

Скорректированные значения сезонной компоненты в аддитивной модели равны , где , в мультипликативной модели  получаются при умножении ее средней оценки  на корректирующий коэффициент , где .

*Прогнозное значение*  уровня временного ряда в аддитивной модели есть сумма трендовой и сезонной компонент, в мультипликативной модели есть произведение трендовой и сезонной компонент.

При построении моделей регрессии по временным рядам для устранения тенденции используются следующие методы.

*Метод отклонений от тренда* предполагает вычисление трендовых значений для каждого временного ряда модели, например **и ,и расчет отклонений от трендов: *yt — * и *xt* - *.* Для дальнейшего анализа используют не исходные данные, а отклонения от тренда.

*Метод последовательных разностей* заключается в следующем: если ряд содержит линейный тренд, тогда исходные данные заменяются первыми разностями:

*Δt = yt – yt-1 = b + (*ε1 – εt-1*);*

если параболический тренд - вторыми разностями:



В случае экспоненциального и степенного тренда метод последовательных разностей применяется к логарифмам исходных данных.

*Модель, включающая фактор времени,* имеет вид

*yt = a + b1 ∙ xt + b2 ∙ t +* ε*t.*

Параметры *а* и *b* этой модели определяются обычным МНК.

*Автокорреляция в остатках -* корреляционная зависимость между значениями остатков е, за текущий и предыдущие моменты времени.

Эта автокорреляция может быть вызвана несколькими причинами, имеющими различную природу.

1. Она может быть связана с исходными данными и вызвана наличием ошибок измерения в значениях результативного признака.
2. В ряде случаев автокорреляция может быть следствием неправильной спецификации модели. Модель может не включать фактор, который оказывает существенное воздействие на результат и влияние которого отражается в остатках, вследствие чего последние могут оказаться автокоррелированными. Очень часто этим фактором является фактор времени .

Для определения автокорреляции остатков используют *критерий Дарбина - Уотсона* и расчет величины:



Коэффициент автокорреляции остатков первого порядка определяется по формуле



Критерий Дарбина - Уотсона и коэффициент автокорреляции остатков первого порядка связаны соотношением

*d ≈ 2(1 - ).*



Таким образом, если в остатках существует полная положительная автокорреляция и , то . Если в остатках полная отрицательная автокорреляция, то  и, следовательно, . Если автокорреляция остатков отсутствует, то  и . Т.е. .

Алгоритм выявления автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина-Уотсона следующий. Выдвигается гипотеза  об отсутствии автокорреляции остатков. Альтернативные гипотезы  и  состоят, соответственно, в наличии положительной или отрицательной автокорреляции в остатках. Далее по специальным таблицам определяются критические значения критерия Дарбина-Уотсона  и  для заданного числа наблюдений , числа независимых переменных модели  и уровня значимости . По этим значениям числовой промежуток  разбивают на пять отрезков. Принятие или отклонение каждой из гипотез с вероятностью  осуществляется следующим образом:

 – есть положительная автокорреляция остатков,  отклоняется, с вероятностью  принимается ;

 – зона неопределенности;

 – нет оснований отклонять , т.е. автокорреляция остатков отсутствует;

 – зона неопределенности;

 – есть отрицательная автокорреляция остатков,  отклоняется, с вероятностью  принимается .

Если фактическое значение критерия Дарбина-Уотсона попадает в зону неопределенности, то на практике предполагают существование автокорреляции остатков и отклоняют гипотезу .

Эконометрические модели, содержащие не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных, называются *моделями с распределенным лагом.*

*Модель с распределенным лагом* в предположении, что максимальная величина лага конечна, имеет вид

*yt = a + b0  xt + b1 хt-1 +... + bр  xt-p +* ε*t.*

Коэффициент регрессии *b0* при переменной *хt* характеризует среднее абсолютное изменение *уt* при изменении *хt* на 1 ед. своего измерения в некоторый фиксированный момент времени *t,* без учета воздействия лаговых значений фактора *х.* Этот коэффициент называют *краткосрочным мультипликатором.*

В момент *(t +* 1) воздействие факторной переменной *хt* на результат *уt* составит *(b0 + b1)* условных единиц; в момент времени *(t* + 2) воздействие можно охарактеризовать суммой *(b0 + b1 + b2)* и т.д. Эти суммы называют *промежуточными мультипликаторами.* Для максимального лага *(t + l)* воздействие фактора на результат описывается суммой (*b0 + b1 + ... + b1 = b),* которая называется *долгосрочным мультипликатором.*

Величины



называются *относительными коэффициентами* модели с распределенным лагом. Если все коэффициенты *bj* имеют одинаковые знаки, то для любого *j*

0 < *βj* < 1 и  = 1.

Величина *среднего лага* модели множественной регрессии определяется по формуле средней арифметической взвешенной:



и представляет собой средний период, в течение которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения фактора в момент *t.*

*Медианный лаг -* это период, в течение которого с момента времени *t* будет реализована половина общего воздействия фактора на результат:



где *1Ме -* медианный лаг

Оценку параметров моделей с распределенными лагами можно проводить согласно одному из двух методов: методу Койка или методу Алмон.

В *распределении Койка* делается предположение, что коэффициенты при лаговых значениях объясняющей переменной убывают в геометрической прогрессии:

*b1 = b0 ∙λl, l = 0,1,2,...,* 0 < *λ* < 1.

Уравнение регрессии преобразуется к виду

*yt =a + b0 xt + b0 λ xt-1 + b0 λ 2 xt-2 +... + εt.*

После несложных преобразований получаем уравнение, оценки параметров которого приводят к оценкам параметров исходного уравнения.

В *методе Алмон* предполагается, что веса текущих и лаговых значений объясняющих переменных подчиняются полиномиальному распределению:

*bj = c0 + с*1 *j + c2j2 +...+ ckjk.*

Уравнение регрессии примет вид

*yt = a + c0 z0 + c1 ∙z1 +c2 ∙ z2 +... + ck ∙ zk + εt,*

где  *xt-j = jl, I = 1, k, j = 1, ,р*

Расчет параметров модели с распределенным лагом методом Алмон проводится по следующей схеме:

1. устанавливается максимальная величина лага *l*;
2. определяется степень полинома *k,* описывающего структуру лага;
3. рассчитываются значения переменных *zo,..., zk*;
4. определяются параметры уравнения линейной регрессии *уt* от *z1*;
5. рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

Модели, содержащие в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, называются *моделями авторегрессии,* например:

*yt = a + b0 ∙ xt + c1 ∙ yt-1 + εt.*

Как и в модели с распределенным лагом, *b0* в этой модели характеризует краткосрочное изменение *у,* под воздействием изменения *х,* на 1 ед. Долгосрочный мультипликатор в модели авторегрессии рассчитывается как сумма краткосрочного и промежуточных мультипликаторов:

*b = b0* + *b0 ∙ c1* + *b0 ∙ c1 2 + b0 ∙ c1 3 +...* = *b0 ∙ (1* + *c1* + *c1 2 + c1 3 + ...) = b0 /(1* - *c1*).

Отметим, что такая интерпретация коэффициентов модели авторегрессии и расчет долгосрочного мультипликатора основаны на предпосылке о наличии бесконечного лага в воздействии текущего значения зависимой переменной на ее будущие значения.

## 4.2. Решение типовых задач

***Пример 1***

По данным за 18 месяцев построено уравнение регрессии зависимости прибыли предприятия *у* (млн руб.) от цен на сырье *х1* (тыс. руб. на 1 т) и производительности труда *х2* (ед. продукции на 1 работника):

= 200 - l,*5 ∙ x1* + 4,*0 ∙ x2*.

При анализе остаточных величин были использованы значения, приведенные в табл. 3.1.

*Таблица 4.1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *y* | *x1* | *x2* |
| 1 | 210 | 800 | 300 |
| 2 | 720 | 1000 | 500 |
| 3 | 300 | 1500 | 600 |
|  |  |  |  |

*=* 10500, Σ(*εt* – *εt-1* )2 = 40 000.

Требуется:

* + - 1. По трем позициям рассчитать **, *εt*, *εt-1*, *εt*2, (*εt* – *εt-1*) .
      2. Рассчитать критерий Дарбина - Уотсона.
      3. Оценить полученный результат при 5%-ном уровне значимости.
      4. Указать, пригодно ли уравнение для прогноза.

Решение

* + - 1. *yt* определяется путем подстановки фактических значений *х1* и *х2*

в уравнение регрессии:

1= 200 - 1,5  *∙*  800 + 4,0  *∙*  300 = 200;

*2* = 200 - 1,5  *∙*  1000 + 4,0  *∙*  500 = 700;

*3* = 200 -1,5  *∙*  1500 + 4,0  *∙*  600 = 350.

Остатки *ε1* рассчитываются по формуле

*εt = yt - ,*

Следовательно,

*ε1* = 210 – 200 = 10, *ε*2 = 720 – 700 = 20, *ε*3 = 300 – 350 = - 50;

;

*εt-1* - те же значения, что и *εt,* но со сдвигом на один месяц.

Результаты вычислений оформим в виде табл. 3.2.

*Таблица 4.2*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  | *ε1* | *εt-1* | *(ε1 - εt-1)* | *(ε1 - εt-1)2* | *еt2* |
| 1 | 200 | 10 | - | - | - | 100 |
| 2 | 700 | 20 | 10 | 10 | 100 | 400 |
| 3 | 350 | -50 | 20 | -70 | 4900 | 2500 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| Σ |  |  |  |  | 40 000 | 10 500 |

1. Критерий Дарбина - Уотсона рассчитывается по формуле



1. Фактическое значение *d* сравниваем с табличными значениями при 5%-ном уровне значимости. При *п* = 18 месяцев и от = 2 (число факторов) нижнее значение *d’* равно 1,05, а верхнее - 1,53. Так как фактическое значение *d* близко к 4, можно считать, что автокорреляция в остатках характеризуется отрицательной величиной. Чтобы проверить значимость отрицательного коэффициента автокорреляции, найдем величину:

4 *- d =* 4 - 3,81 = 0,19,

что значительно меньше, чем *d'.* Это означает наличие в остатках автокорреляции.

1. Уравнение регрессии не может быть использовано для прогноза, так как в нем не устранена автокорреляция в остатках, которая может иметь разные причины. Автокорреляция в остатках может означать, что в уравнение не включен какой-либо существенный фактор. Возможно также, что форма связи неточна, а может быть, в рядах динамики имеется общая тенденция.

***Пример 2***

Имеются следующие данные о величине дохода на одного члена

семьи и расхода на товар *A* (табл. 3.3).

*Таблица 4.3*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Показатель | 1985 г. | 1986 г. | 1987 г. | 1988 г. | 1989 г. | 1990 г. |
| Расходы на товар *А,* руб. | 30 | 35 | 39 | 44 | 50 | 53 |
| Доход на одного члена семьи, % к 1985 г. | 100 | 103 | 105 | 109 | 115 | 118 |

Требуется:

* 1. Определить ежегодные абсолютные приросты доходов и расходов и сделать выводы о тенденции развития каждого ряда.
  2. Перечислить основные пути устранения тенденции для построения модели спроса на товар *А* в зависимости от дохода.
  3. Построить линейную модель спроса, используя первые разности уровней исходных динамических рядов.

1. Пояснить экономический смысл коэффициента регрессии.
2. Построить линейную модель спроса на товар *А,* включив в нее фактор времени. Интерпретировать полученные параметры.

Решение

1. Обозначим расходы на товар *А* через *у,* а доходы одного члена семьи - через *х.* Ежегодные абсолютные приросты определяются по формулам

*Δyt = yt – yt-1, Δxt = xt – xt-1.*

Расчеты можно оформить в виде таблицы (табл. 3.4).

*Таблица 4.4*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *yt* | *Δyt* | *хt* | *Δxt* |
| 30 | - | 100 | *-* |
| 35 | 5 | 103 | 3 |
| 39 | 4 | 105 | 2 |
| 44 | 5 | 109 | 4 |
| 50 | 6 | 115 | 6 |
| 53 | 3 | 118 | 3 |

Значения *Δy*имеют четко выраженной тенденции, они варьируют вокруг среднего уровня, что означает наличие в ряде динамики линейного тренда (линейной тенденции). Аналогичный вывод можно сделать и по ряду *х:* абсолютные приросты не имеют систематической направленности, они примерно стабильны, а следовательно, ряд характеризуется линейной тенденцией.

2. Так как ряды динамики имеют общую тенденцию к росту, то для построения регрессионной модели спроса на товар *А* в зависимости от дохода необходимо устранить тенденцию. С этой целью модель может строиться по первым разностям, т.е. *Δy* = *f(Δx),* если ряды динамики характеризуются линейной тенденцией.

Другой возможный путь учета тенденции при построении моделей - найти по каждому ряду уравнение тренда:

* = f(t)* и *= f(t)*

и отклонения от него:

*dy = yt - ; dx = xt -* *.*

Далее модель строится по отклонениям от тренда:

*dy=f(dx).*

При построении эконометрических моделей чаще используется другой путь учета тенденции - включение в модель фактора времени. Иными словами, модель строится по исходным данным, но в нее в качестве самостоятельного фактора включается время, т.е.

*= f(x,t)*

3. Модель имеет вид

*Δ*= *а + b ∙Δх.*

Для определения параметров *а* и *b* применяется МНК. Система нормальных уравнений следующая:



Применительно к нашим данным имеем



Решая эту систему, получим:

*а* = 2,565 и *b =* 0,565,

откуда модель имеет вид

*Δ*= 2,565 + 0,565*∙Δx*.

4. Коэффициент регрессии *b =* 0,565 руб. Он означает, что с ростом прироста душевого дохода на 1%-ный пункт расходы на товар *А* увеличиваются со средним ускорением, равным 0,565 руб.

5. Модель имеет вид

 *= a + b ∙ x + c ∙ t.*

Применяя МНК, получим систему нормальных уравнений:



Расчеты оформим в виде табл. 3.5.

*Таблица 4.5*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | *y* | *y* | *Yх* | *yt* | *xt* | *х2* | *t2* |
| 1 | 30 | 100 | 3000 | 30 | 100 | 10000 | 1 |
| 2 | 35 | 103 | 3605 | 70 | 206 | 10609 | 4 |
| 3 | 39 | 105 | 4095 | 117 | 315 | 11025 | 9 |
| 4 | 44 | 109 | 4796 | 176 | 436 | 11881 | 16 |
| 5 | 50 | 115 | 5750 | 250 | 575 | 13225 | 25 |
| 6 | 53 | 118 | 6254 | 318 | 708 | 13924 | 36 |
| 21 | 251 | 650 | 27500 | 961 | 2340 | 70664 | 91 |

Система уравнений примет вид



Решая ее, получим

*а* = -5,42; *b* = 0,322; *с* = 3,516.

Уравнение регрессии имеет вид

*у* = -5,42 + 0,322 • *х* + 3,516 • *t*.

Параметр *b* = 0,322 фиксирует силу связи *y* и *х*. Его величина означает, что с ростом дохода на одного члена семьи на 1 %-ный пункт при условии неизменной тенденции расходы на товар *А* возрастают в среднем на 0,322 руб. Параметр *с* = 3,516 характеризует среднегодовой абсолютный прирост расходов на товар *А* под воздействием прочих факторов при условии неизменного дохода.

***Пример 3***

По данным за 30 месяцев некоторого временного ряда *х1* были получены значения коэффициентов автокорреляции уровней:

*r1* = 0,63;

*r* 2 = 0,38;

*r* 3 = 0,72;

*r4* = 0,97;

*r* 5 = 0,55;

*r 6 =* 0,40;

*r* 7 = 0,65;

*rt* - коэффициенты автокорреляции *i*-го порядка.

Требуется:

1. Охарактеризовать структуру этого ряда, используя графическое изображение.

2. Для прогнозирования значений *xt* в будущие периоды предполагается построить уравнение авторегрессии. Выбрать наилучшее уравнение, обосновать выбор. Указать общий вид этого уравнения.

Решение

**1.** Так как значения всех коэффициентов автокорреляции достаточно высокие, ряд содержит тенденцию. Поскольку наибольшее абсолютное значение имеет коэффициент автокорреляции 4-го порядка *r* 4, ряд содержит периодические колебания, цикл этих колебаний равен 4.

График этого ряда можно представить на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Графики, характеризующие убывающую тенденцию при разных возможных периодических колебаниях

2. Наиболее целесообразно построение уравнения авторегрессии:

*уt = а + b ∙ уt-4 + иt ,*

так как значение *r* 4 = 0,97 свидетельствует о наличии очень тесной связи между уровнями ряда с лагом в 4 месяца.

Кроме того, возможно построение и множественного уравнения авторегрессии *уt* от *уt*-3 и *уt-4*  так как *r* 4 = 0,72:

*уt, = а + b1 ∙ уt-3 +b2 ∙ уt-4 + иt,*

Сравнить полученные уравнения и выбрать наилучшее решение можно с помощью скорректированного коэффициента детерминации.

***Пример 4***

На основе помесячных данных о числе браков (тыс.) в регионе за последние три года была построена аддитивная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за соответствующие месяцы приводятся в табл. 3.6.

*Таблица 4.6*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Скоректирован-ные значения сезонной компоненты | Месяц | Скорректированные значения сезонной компоненты |
| Январь | -1,0 | Июль | 3,0 |
| Февраль | 2,0 | Август | 1,0 |
| Март | -0,5 | Сентябрь | 2,5 |
| Апрель | 0,3 | Октябрь | 1,0 |
| Май | -2,0 | Ноябрь | -3,0 |
| Июнь | -1,1 | Декабрь | ? |

Уравнение тренда выглядит следующим образом:

t *=* 2,5 + 0,03 *t,*

при расчете параметров тренда использовались фактические моменты времени (*t* =).

Требуется:

1. Определить значение сезонной компоненты за декабрь.

2. На основе построенной модели дать прогноз общего числа браков, заключенных в течение первого квартала следующего года.

Решение

1. Сумма значений сезонной компоненты внутри одного цикла должна быть равна нулю (в соответствии с методикой построения аддитивной модели временного ряда). Следовательно, значение сезонной компоненты за декабрь составит:

S12 = 0 - (- 1 + 2 - 0,5 + 0,3 - 2 - 1,1 + 3 + 1 + 2,5 + 1 - 3) = - 2,2.

2. Прогнозное значение уровня временного ряда *Ft* в аддитивной модели есть сумма трендового значения *Tt* и соответствующего значения сезонной компоненты *St.*

Число браков, заключенных в первом квартале следующего года, есть сумма числа браков, заключенных в январе *F*37, в феврале *F*38 и в марте *F39.*

Для расчета трендовых значений воспользуемся уравнением тренда, указанным в условии задачи:

t= 2,5 + 0,03 *∙ t,*

*T*37 = 2,5 + 0,03 *∙* 37 = 3,61;

*T*38 = 2,5 + 0,03 *∙* 38 = 3,64;

*T*39 = 2,5 + 0,03 *∙* 39 = 3,67.

Соответствующие значения сезонных компонент составят:

*S1* =-1 – январь;

*S*2 = 2 – февраль;

*S3* = -0,5 – март.

Таким образом,

*F*37 = *T*37 + *S1*  = 3,61 – 1 = 2,61;

*F*38 = *T*38 + *S*2 = 3,64 + 2 = 5,64;

*F39 = Т39* + *S*3 = 3,67 – 0,5 = 3,17.

Количество браков, заключенных в первом квартале следующего года, составит: 2,61 + 5,64 + 3,17 = 11,42 тыс., или 11420.

## 4.3. Вопросы по главе

1. Что понимается под пространственными моделями в эконометрике?
2. Что является моделями временных рядов?
3. Что называется временным рядом?
4. Что подразумевается под аддитивной моделью временного ряда?
5. В чем отличия между аддитивной моделью и мультипликативной?
6. В чем состоит основная задача эконометрического исследования временного ряда?
7. Какие шаги включены при построении модели временного ряда?
8. В чем состоит специфика построения моделей регрессии по временным рядам данных?
9. В чем состоят основные этапы исключения тенденции? Сравните их преимущества и недостатки.
10. Что понимается под автокорреляцией во временных рядах?
11. В чем состоят основные свойства автокорреляции?
12. Что называется коррелограммой временного ряда?
13. Что понимается под аналитическим выравниванием временного ряда?
14. Что называется сезонными колебаниями?
15. В чем заключена суть метода отклонения от тренда?
16. В чем сущность метода последовательных разностей?
17. Какова интерпретация параметра при факторе времени в моделях регрессии с включением фактора времени?
18. Охарактеризуйте понятие автокорреляции в остатках? Дайте определение.
19. Какими причинами может быть вызвана автокорреляции в остатках?
20. Для чего применяется критерий Дарбина – Уотсона?
21. Изложите алгоритм применения критерия Дарбина-Уотсона для тестирования модели регрессии на автокорреляцию в остатках?
22. Приведите примеры экономических задач, эконометрическое моделирование которых требует применения моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.
23. Какова интерпретация параметров модели с распределенным лагом?
24. Какова интерпретация параметров модели авторегрессии?
25. Какова методика применения метода Койка для оценки параметров модели авторегрессии?
26. Какова методика применения метода Алмона для оценки параметров модели авторегрессии?

## Задание №4. Анализ остатков.

1. По линии тренда из задания №2 посчитать прогнозные значения для всех 60 (61) дней.
2. Вычислить погрешность (ошибку) прогноза на каждый день.
3. Проверить ошибки на нормальность, пользуясь критерием Пирсона, по следующей методике:

* Весь диапазон наблюдений разбить на не менее, чем k = 3,22\*ln (n) +1 равный интервал (число интервалов должно быть целое число!), n – число наблюдений.
* Определим крайние точки интервалов и их средины в порядке возрастания
* Подсчитаем, число попавших в каждый интервал точек, используя функцию ЧАСТОТА.
* Построим таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Границы интервала | Средины интервала | Практические частоты | Теоретические частоты |
|  |  |  |  |

Теоретические частоты ni\* вычисляются по следующей формуле

ni\* = nhφ(Si\*),

φ(Si\*) ={ exp [ - (Si\* - a)2/(2σ2)] }/(2πσ2)0,5

где a среднее значение всей выборки остатков, σ2  выборочная дисперсия всей выборки остатков, Si\*средина интервала i- го интервала, h длина интервала.

* Проверить полученную выборку на «нормальность» по критерию

Пирсона: χ2 =∑( ni\*- ni)2/ (ni\*)

Результат сравниваем с табличным значением , которое можно найти с помощью функции ХИ2ОБР с уровнем значимости 0,95.

* Построить на одном графике теоретические и практические частоты ( для их визуального сравнения).
* Вычислить асимметрию A и эксцесс E для массива ошибок из n данных и сделать по ним заключение о «нормальности» распределения.

Если распределение нормально, то должны выполняться одновременно неравенства:

│A│< 1,5 σA, │E + 6/(n+1)│< 1,5 σE, где

σ2A = 6(n-2)/((n+1)(n+3)), σ2E = 24n(n-2) (n-3),/((n+1)2(n+3)( n+5)).

1. Проверить остатки на стационарность по двухвыборчному F-тесту для дисперсии и двухвыборчному t-тесту для среднего.
2. Написать отчет по проведенной работе.

Для сдачи Задания №3 должны быть выполнены все пункты 1-4. Студент должен ответить на следующие вопросы:

1. Что такое линия тренда?
2. Что такое нормальное распределение? Формулы и экономический смысл.
3. Что такое распределение Хи - квадрат?
4. Что такое асимметрия и эксцесс? Экономический смысл.
5. Для чего надо анализировать остатки? См. [1] стр.193

.

## Задание №5. Регрессия, автокорреляция и гетероскедастичность.

1. По тесту Дарбина –Уотсона выяснить имеет ли место автокорреляция остатков первого порядка с достоверностью 0,95.
   1. d = =∑( ei-1- ei)2/( ∑ (ei)2)
2. Проанализировать остатки на автокорреляцию второго, третьего и т.д. порядков
3. По тесту Голдфельда –Квандта провести проверку на гетероскедастичность.
4. Проанализировать остатки на наличие гетероскедастичности по тесту Уайта.
5. Объяснить причину возникновения автокорреляции с точки зрения экономики. Объяснить, как можно избавиться от автокорреляции с помощью сезонной составляющей или построением регрессии скользящего среднего.
6. Если имеет место гетероскедастичность, то объяснить, как от нее можно избавиться обобщенным методом наименьших квадратов.
7. Пишется отчет с эконометрическим обоснованием выбора линии тренда. Это делается на основе заданий №№1-4.

Для сдачи Задания №4 должны быть выполнены все пункты задания. Студент должен ответить на следующие вопросы:

* + - 1. Что такое гетероскедастичность и автокорреляция. Причины возникновения этих явлений. Как они влияют на статистические оценки.
      2. Уметь пользоваться таблицами Дарбина –Уотсона

## Задание №6. Построение сезонной составляющей (скользящей средней) или уравнения авторегрессии.

***Отчет***

(набирается в редакторе WORD и сдается на дискете при сдаче зачета. Отчет должен быть не менее двух стандартных страниц шрифт 14 New Roman, поля по 1,5 см с каждой стороны, интервал между строками 1,5 и состоять из следующих разделов:

* **Название** (например: Изучение курса акций РАО ЕС за октябрь-ноябрь 2003г. **ФИО выполнявших студентов полностью**
* **Исходные данные по акциям в виде таблицы**
* **Краткий анализ хозяйственной деятельности компании (берется из задания№1)**
* **Эконометрическое обоснование выбора уравнений** Делается на основе заданий 1-4 и включает все основные пункты обоснования:

1. выбор уравнения,
2. проверка его значимости,
3. остатки и их анализ с помощью теоремы Гаусса-Маркова
   * + 1. исследования остатков на нормальность

Для получения зачета нужно:

* выполнит задания №№1-5.
* В электронном виде сдать отчет.
* исправить все замеченные преподавателем неточности.
* Принести зачетную книжку.

# ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 5.1. Теоретические основы

Сложные экономические процессы описывают с помощью *системы взаимосвязанных (одновременных) уравнений.* Различают несколько видов систем уравнений:

* *Система независимых уравнений* - когда каждая зависимая переменная *у* рассматривается как функция одного и того же набора факторов *х:*



Для решения этой системы и нахождения ее параметров используется метод наименьших квадратов;

* *Система рекурсивных уравнений* - когда зависимая переменная *у* одного уравнения выступает в виде факторах в другом уравнении:



Для решения этой системы и нахождения ее параметров используется метод наименьших квадратов;

* *Система взаимосвязанных (совместных) уравнений* - когда одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других - в правую:



Такая система уравнений называется *структурной формой модели.*

*Эндогенные переменные* - взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы) *у.*

*Экзогенные переменные -* независимые переменные, которые определяются вне системы *х.*

*Предопределенные переменные* - экзогенные и лаговые (за предыдущие моменты времени) эндогенные переменные системы.

Коэффициенты *а* и *b* при переменных - *структурные коэффициенты модели.*

Система линейных функций эндогенных переменных от всех предопределенных переменных системы - *приведенная форма модели:*



где  - коэффициенты приведенной формы модели.

Идентификация – это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

1. идентифицируемые;
2. неидентифицируемые;
3. сверхидентифицируемые.

Модель *идентифицируема*, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели. В этом случае структурные коэффициенты модели оцениваются через параметры приведенной формы модели и модель идентифицируема.

Модель *неидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

Модель *сверхидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента. В этой модели число структурных коэффициентов меньше числа коэффициентов приведенной формы. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решаема, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Структурная модель всегда представляет собой систему совместных уравнений, каждое из которых требуется проверять на идентификацию. Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Выполнение условия идентифицируемости модели проверяется для каждого уравнения системы. Чтобы уравнение было идентифицируемо, необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в -м уравнении системы через , а число экзогенных (предопределенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, — через , то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде следующего счетного правила:

|  |  |
| --- | --- |
|  | уравнение идентифицируемо |
|  | уравнение неидентифицируемо |
|  | уравнение сверхидентифицируемо |

Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируема или сверхидентифицируема.

Если необходимое условие выполнено, то далее проверяется достаточное условие идентификации**.**

Достаточное условие идентификации. Уравнение идентифицируемо, если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, отсутствующих в исследуемом уравнении, не равен нулю, и ранг этой матрицы не менее числа эндогенных переменных системы без единицы.

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение в литературе получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

1. косвенный метод наименьших квадратов;
2. двухшаговый метод наименьших квадратов;
3. трехшаговый метод наименьших квадратов;
4. метод максимального правдоподобия с полной информацией;
5. метод максимального правдоподобия при ограниченной информации.

Рассмотрим вкратце сущность каждого из этих методов.

*Косвенный метод наименьших квадратов* (КМНК) применяется в случае точно идентифицируемой структурной модели. Процедура применения КМНК предполагает выполнение следующих этапов работы.

1. Структурная модель преобразовывается в приведенную форму модели.
2. Для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты .
3. Коэффициенты приведенной формы модели трансформируются в параметры структурной модели.

Если система сверхидентифицируема, то КМНК не используется, ибо он не дает однозначных оценок для параметров структурной модели. В этом случае могут использоваться разные методы оценивания, среди которых наиболее распространенным и простым является двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Основная идея ДМНК – на основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения.

Далее, подставив их вместо фактических значений, можно применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения. Метод получил название ДМНК, ибо дважды используется МНК: на первом шаге при определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок теоретических значений эндогенной переменной  и на втором шаге применительно к структурному сверхидентифицируемому уравнению при определении структурных коэффициентов модели по данным теоретических (расчетных) значений эндогенных переменных.

Сверхидентифицируемая структурная модель может быть двух типов:

1. все уравнения системы сверхидентифицируемы;
2. система содержит наряду со сверхидентифицируемыми точно идентифицируемые уравнения.

Если все уравнения системы сверхидентифицируемые, то для оценки структурных коэффициентов каждого уравнения используется ДМНК. Если в системе есть точно идентифицируемые уравнения, то структурные коэффициенты по ним находятся из системы приведенных уравнений

## 5.2. Решение типовых задач

*Пример 1*

**Требуется:**

1. Оценить следующую структурную модель на идентификацию:



2. Исходя из приведенной формы модели уравнений



найти структурные коэффициенты модели.

**Решение**

1. Модель имеет три эндогенные *(у1, у2, уз)* и три экзогенные *(х1, х2, х3)* переменные.

Проверим каждое уравнение системы на необходимое (Н) и достаточное (Д) условия идентификации.

Первое уравнение.

Н: эндогенных переменных - 2 (*у*1 *у3),*

отсутствующих экзогенных - 1 (*х2*).

Выполняется необходимое равенство: 2 =1 + 1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: в первом уравнении отсутствуют *у2* и *х2*- Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уравнение | Отсутствующие переменные | |
|  | *y2* | *х2* |
| Второе | -1 | *а22* |
| Третье | b32 | 0 |

Det А = -1 ∙ 0 – *b32 ∙a22 ≠* 0.

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2; следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и первое уравнение точно идентифицируемо.

Второе уравнение.

Н: эндогенных переменных - 3 *(у1, у2, уз),*

отсутствующих экзогенных - 2 (*х1,x3)*

Выполняется необходимое равенство: 3 = 2 + 1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: во втором уравнении отсутствуют *xi* и х3. Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уравнение | Отсутствующие переменные | |
| *x1* | *x*з |
| Первое | *а11* | *а13* |
| Третье | *а31* | *а33* |

Det *А = а11* ∙ *а33 - а31* ∙ *а13 ≠* 0.

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и второе уравнение точно идентифицируемо.

Третье уравнение.

Н: эндогенных переменных - 2 *(у2, у3),*

отсутствующих экзогенных - 1 (*х*2).

Выполняется необходимое равенство: 2=1 + 1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: в третьем уравнении отсутствуют *у1* и *х2.* Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уравнение | Отсутствующие переменные | |
| *у1* | *x2* |
| Первое | -1 | 0 |
| Второе | *b21* | *а22* |

DetA = -l *a22 - b2l* 0*≠* 0.

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и третье уравнение точно идентифицируемо.

Следовательно, исследуемая система точно идентифицируема и может быть решена косвенным методом наименьших квадратов.

2. Вычислим структурные коэффициенты модели:

1) из третьего уравнения приведенной формы выразим *х2* (так как его нет в первом уравнении структурной формы):



Данное выражение содержит переменные *уз*, *х1* и *х3*, которые нужны для первого уравнения структурной формы модели (СФМ). Подставим полученное выражение *х2* в первое уравнение приведенной формы модели (ПФМ):



2) во втором уравнении СФМ нет переменных *х1* и х3. Структурные параметры второго уравнения СФМ можно будет определить в два этапа:

*Первый этап:* выразим *х1* в данном случае из первого или третьего уравнения ПФМ. Например, из первого уравнения:



Подстановка данного выражения во второе уравнение ПФМ не решило бы задачу до конца, так как в выражении присутствует х3, которого нет в СФМ.

Выразим х3 из третьего уравнения ПФМ:



Подставим его в выражение *х1:*

**

*Второй этап:* аналогично, чтобы выразить х3 через искомые *у1, у3* и х2, заменим в выражении *хз* значение *х1* на полученное из первого уравнения ПФМ:



Следовательно,

*x3 =* 0,033 ∙ *у3 +* 0,083 ∙ *у1 – 0,6* ∙ *x2.*

Подставим полученные *х1* и *хз* во второе уравнение ПФМ:



Это уравнение можно получить из ПФМ иным путем. Суммируя все уравнения, получим



Далее из первого и второго уравнений ПФМ исключим *х1* домножив первое уравнение на 3, а второе - на (-2) и просуммировав их:



Затем аналогичным путем из полученных уравнений исключаем х3, а именно:



3) из второго уравнения ПФМ выразим *х2,* так как его нет в третьем уравнении СФМ:



Подставим полученное выражение в третье уравнение ПФМ:



Таким образом, СФМ примет вид

******

***Пример 2***

Изучается модель вида



где *у* - валовой национальный доход;

*y-1* - валовой национальный доход предшествующего года;

*С* - личное потребление;

*D* - конечный спрос (помимо личного потребления);

*ε1* и *ε2* - случайные составляющие.

Информация за девять лет о приростах всех показателей дана в табл. 3.1.

*Таблица 5.1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | *D* | *y-1* | *у* | *С* | Год | *D* | *y-1* | *у* | *С* |
| 1 | -6,8 | 46,1 | 3,1 | 7,4 | 6 | 44,7 | 17,8 | 37,2 | 8,6 |
| 2 | 22,4 | 3,1 | 22,8 | 30,4 | 7 | 23,1 | 37,2 | 35,7 | 30,0 |
| 3 | -17,3 | 22,8 | 7,8 | 1,3 | 8 | 51,2 | 35,7 | 46,6 | 31,4 |
| 4 | 12,0 | 7,8 | 21,4 | 8,7 | 9 | 32,3 | 46,6 | 56,0 | 39,1 |
| 5 | 5,9 | 21,4 | 17,8 | 25,8 | Σ | 167,5 | 239,1 | 248,4 | 182,7 |

Для данной модели была получена система приведенных уравнений:



**Требуется:**

1. Провести идентификацию модели.

2. Рассчитать параметры первого уравнения структурной модели.

**Решение:**

1. В данной модели две эндогенные переменные (*у* и *С*) и две экзогенные переменные (*D* и *y-1* *).* Второе уравнение точно идентифицировано, так как содержит две эндогенные переменные и не содержит одну экзогенную переменную из системы. Иными словами, для второго уравнения имеем по счетному правилу идентификации равенство: 2=1 + 1.

Первое уравнение сверхидентифицировано, так как в нем на параметры при *С* и *D* наложено ограничение: они должны быть равны. В этом уравнении содержится одна эндогенная переменная *у.* Переменная С в данном уравнении не рассматривается как эндогенная, так как она участвует в уравнении не самостоятельно, а вместе с переменной *D.* В данном уравнении отсутствует одна экзогенная переменная, имеющаяся в системе. По счетному правилу идентификации получаем: 1 + 1 = 2: *D* + 1 > *Н*. Это больше, чем число эндогенных переменных в данном уравнении, следовательно, система сверх-идентифицирована.

2. Для определения параметров сверхидентифицированной модели используется двухшаговый метод наименьших квадратов.

*Шаг 1.* На основе системы приведенных уравнений по точно идентифицированному второму уравнению определим теоретические значения эндогенной переменной *С*. Для этого в приведенное уравнение

*С =* 8,636 + 0,3384 ∙ *D +* 0,2020 ∙ *y-1*

подставим значения *D* и *y-1*, имеющиеся в условии задачи. Получим:

*1* = 15,8 ; *2 =* 16,8 ; **3 = 7,4 ; **4 = 14,3 ; **5 = 15,0; **6 = 27,4;

**7 = 24,0; **8 = 33,2; **9 = 29,0.

*Шаг 2. По* сверхидентифицированному уравнению структурной формы модели заменяем фактические значения *С* на теоретические ** и рассчитываем новую переменную *С + D* (табл. 3.2).

*Таблица 5.2*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | *D* |  | *+ D* | Год | *D* |  | *+ D* |
| 1 | -6,8 | 15,8 | 9,0 | 6 | 44,7 | 27,4 | 72,1 |
| 2 | 22,4 | 16,8 | 39,2 | 7 | 23,1 | 24,0 | 47,1 |
| 3 | -17,3 | 7,4 | -9,9 | 8 | 51,2 | 33,2 | 84,4 |
| 4 | 12,0 | 14,3 | 26,3 | 9 | 32,3 | 29,0 | 61,3 |
| 5 | 5,9 | 15,0 | 20,9 | Σ | 167,5 | 182,9 | 350,4 |

Далее к сверхидентифицированному уравнению применяется метод наименьших квадратов. Обозначим новую переменную

*+ D* через *Z*. Решаем уравнение

*y = a1 + b1 ∙ Z.*

Система нормальных уравнений составит:

**

*а1 =* 7,678; *b1* = 0,512.

Итак, первое уравнение структурной модели будет таким:

*У* = 7,678 + 0,512*∙* (*С* + *D*).

***Пример 3***

Имеются данные за 1990-1994 гг. (табл. 3.3).

*Таблица 5.3*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Годовое потребление свинины на душу населения, фунтов, *y1* | Оптовая цена за фунт, долл., *у2* | Доход на душу населения, **ДОЛЛ.,** *x1* | Расходы по обработке мяса, % к цене, *x2* |
| 1990 | 60 | 5,0 | 1300 | 60 |
| 1991 | 62 | 4,0 | 1300 | 56 |
| 1992 | 65 | 4,2 | 1500 | 56 |
| 1993 | 62 | 5,0 | 1600 | 63 |
| 1994 | 66 | 3,8 | 1800 | 50 |

**Требуется:**

Построить модель вида



рассчитав соответствующие структурные коэффициенты.

**Решение:**

Система одновременных уравнений с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными имеет вид



В каждом уравнении две эндогенные и одна отсутствующая экзогенная переменная из имеющихся в системе. Для каждого уравнения данной системы действует счетное правило 2 = 1 + 1. Это означает, что каждое уравнение и система в целом идентифицированы.

Для определения параметров такой системы применяется косвенный метод наименьших квадратов.

С этой целью структурная форма модели преобразуется в приведенную форму:



в которой коэффициенты при *х* определяются методом наименьших квадратов.

Для нахождения значений *δ11* и *δ12* запишем систему нормальных уравнений:



При ее решении предполагается, что *х* и *у* выражены через отклонения от средних уровней, т. е. матрица исходных данных составит:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *y1* | *y2* | *x1* | *x2* |
|  | -3 | 0,6 | -200 | 3 |
|  | -1 | -0,4 | -200 | -1 |
|  | 2 | -0,2 | 0 | -1 |
|  | -1 | 0,6 | 100 | 6 |
|  | 3 | -0,6 | 300 | -7 |
| Σ | 0 | 0,0 | 0 | 0 |

Применительно к ней необходимые суммы оказываются следующими:

*Σу1х1* = 1600 ; *Σу1х2* = -37 ; *Σx21* = 180 000 ;

*Σx1х2* = - 1900; *Σx22* = 96.

Система нормальных уравнений составит:



Решая ее, получим:

*δ11* = 0,00609 ; *δ12*= -0,26481 .

Итак, имеем *y1* =0,00609 • *x1* - 0,26481 • *х2.*

Аналогично строим систему нормальных уравнений для определения коэффициентов *δ21* и *δ22*:



Следовательно,

*δ21* =0,00029; *δ22* =0,11207,

тогда второе уравнение примет вид

*y2* *=* 0,00029 • *x1 +* 0,11207 • *х2.*

Приведенная форма модели имеет вид



Из приведенной формы модели определяем коэффициенты структурной модели:



Итак, структурная форма модели имеет вид

******

## 5.3. Вопросы по главе

1. Что понимается под системой независимых уравнений?

2. Что понимается под системой рекурсивных уравнений?

3. Что понимается под системой взаимосвязанных (совместных) уравнений?

4. Что называется эндогенными переменными?

5. Что называется экзогенными переменными?

6. Что называется предопределенными переменными?

7. Что понимается под приведенной формой модели?

8. Какими бывают структурные модели с точки зрения идентифицируемости?

9. Какая модель является идентифицируемой?

10. Какая модель является неидентифицируемой?

11. Какая модель является сверхидентифицируемой?

12. В чем заключается правило идентифицируемости модели?

13. Чем простой МНК отличается от косвенного МНК?

14. В чем состоит суть двухшагового метода наименьших квадратов?

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ[[1]](#footnote-2)

К 1930-м годам сложились все предпосылки для выделения эконометрики в отдельную науку. Стало ясно, что для более глубокого понимания экономических процессов стоит использовать в той или иной степени статистику и математику. Возникла необходимость появления новой науки со своим предметом и методом, объединяющая все исследования в этом направлении. 29 декабря 1930 г. по инициативе И. Фишера, Р. Фриша, Я. Тинбергена, Й. Шумпетера, О. Андерсона и других ученых было создано эконометрическое общество. В 1933 г. Р. Фриш основал журнал «Эконометрика», который и сейчас имеет большое значение для развития эконометрики. А уже в 1941 г. появляется первый учебник по новой научной дисциплине, написанный Я. Тинбергеном. В 1969 г. Фриш и Тинберген стали первыми исследователями получившими Нобелевскую премию по экономике. Как говорится в официальном сообщении нобелевского комитета: «за создание и применение динамических моделей к анализу экономических процессов».

До 1970-х годов эконометрика понималась как эмпирическая оценка моделей, созданных в рамках экономической теории. По мнению эконометристов того времени, статистические данные должны были защитить теорию от догматизма. При этом подавляющее большинство экономических моделей, построенных в этот период, были кейнсианскими. Но, начиная с 1970-х годов, формальные методы стали использоваться при выборе причинности теоретических концепций. При этом эконометрикой стали активно пользоваться и монетаристы.

В 1980 г. вторую эконометрическую Нобелевскую премию по экономике получил американский экономист Лоуренс Клейн за создание экономических моделей и их применение к анализу колебаний экономики и экономической политики. Совместно с А. Голдбергом создал одну из самых известных моделей американской экономики, известной как «модель Клейна–Голдберга». В основу структуры этой модели были положены его собственные разработки. Она состояла из взаимосвязанных одновременных и направленных рядов уравнений, решение которых давало картину производства в стране. Говоря об этой модели, Р.Дж. Болл отмечал: «Как эмпирическое представление об основах кейнсианской системы эта модель стала, возможно, самой знаменитой среди моделей крупных национальных хозяйств до появления других моделей в 60-е гг.»[9]. Клейн также организовал широко известный проект «Линк» для интеграции статистических моделей разных стран в единую общую систему с целью улучшения понимания международных экономических связей и прогнозирования в области мировой торговли. В это время активно развивалась не только макро-, но микроэконометрика. Пионерами этого направления выступили Д. Хэкман и Д. Макфадден. Они разработали теорию и методы, которые широко используются в статистическом анализе поведения индивидуумов и домохозяйств как в экономике, так и в других общественных науках. Так, Дж. Хекман решил проблему смещения выборки из-за селективности данных и самоотбора. Для ее решения он предложил использовать метод коррекции Хекмана, который благодаря своей эффективности и простоте в использовании стал широко использоваться в эмпирических исследованиях. Основной вклад Д. Макфаддена в науку заключается в развитии методов для анализа дискретного выбора. В 1974 г. он разработал условный логит-анализ, который сразу был признан фундаментальным достижением экономической науки. Также он создал эконометрические методы для оценки производственных технологий и исследования факторов, лежащих в основе спроса фирм на капитал и рабочую силу. Выдающиеся достижения этих ученых были отмечены Нобелевской премией по экономике в 1990 г.

Важным событием для развития эконометрики стало появление компьютеров. Благодаря им мощное развитие получил статистический анализ временных рядов. Г. Бокс и Г. Дженкинс создали ARIMA-модель в 1970 г., а К. Симс и некоторые другие ученые — VAR-модели в начале 1980-х гг. Стимулировало эконометрические исследования и бурное развитие финансовых рынков и производных инструментов. Это привело лауреата Нобелевской премии по экономике за 1981 год Дж. Тобина к разработке моделей с использованием цензурированных данных.

Большое влияние на современную эконометрику оказал и Хаавельмо. Хаавельмо показал, как можно использовать методы математической статистики для того, чтобы получать обоснованные заключения о сложных экономических взаимосвязях исходя из случайной выборки эмпирических наблюдений. Эти методы можно, кроме того, использовать для оценивания соотношений, полученных на основе экономических теорий, и для проверки этих теорий. В 1989 г. ему присудили Нобелевскую премию по экономике «за прояснение вероятностных основ эконометрики и анализ одновременных экономических структур».

Хаавельмо рассматривал экономические ряды как реализацию случайных процессов. Главными проблемами, возникающими при работе с такими данными являются нестационарность и сильная волатильность. Если переменные нестационарны, то есть риск установить связь там, где ее нет. Вариантом решения данной проблемы является переход от уровней ряда к их разностям. Недостатком данного метода является сложность экономической интерпретации полученных результатов. Для решения этой проблемы Клайв Грэнджер ввел концепцию коинтеграции как стационарной комбинации между нестационарными переменными. Им была предложена модель корректировки отклонений (ЕСМ), для которой он разработал методы оценивания ее параметров, обобщения и тестирования. Коинтеграция применяется в случае, если краткосрочная динамика отражает значительные дестабилизирующие факторы, а долгосрочная стремится к экономическому равновесию. Модели, созданные Грэнджером, в 1990 г. были обобщены С. Йохансеном для многомерного случая. В 2003 г. Гренджер совместно с Р. Инглом получили нобелевскую премию. Р. Ингл, в свою очередь, известен как создатель моделей с меняющейся во времени волатильностью (т. н. ARCH-модели). Эти модели получили широкое распространение на финансовых рынках.

Сегодня эконометрика занимает достойное место в ряду экономических наук. В мире выпускается ряд научных журналов, полностью посвященных эконометрике, в том числе: Journal of Econometrics (Швеция), Econometric Reviews (США), Econometrica (США), Sankhya. Indian Journal of Statistics. Ser.D. Quantitative Economics (Индия), Publications Econometriques (Франция). Эконометрику изучают в ведущих мировых университетах, пришло понимание, что без эконометрических методов невозможно проводить современный макро- и микроэкономический анализ.

На русском языке также существуют специализированные журналы. К ним относятся «Прикладная эконометрика» и «Квантиль». Отдельные публикации по эконометрике появляются в журналах «Экономика и математические методы», «Вопросы статистики», «Вопросы экономики» и некоторых других.

Ранее в России по ряду причин эконометрика не была сформирована как самостоятельное направление научной и практической деятельности. Хотя в настоящее время начинают развертываться эконометрические исследования. В связи с этим начинается широкое преподавание этой дисциплины.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**Основная литература**

1. Елисеева, И.И. Эконометрика: Учебник. 2-ое изд. / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и Статистика, 2007. – 576 с.
2. Елисеева, И.И., Практикум по Эконометрике / Под редакцией И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и Статистика, 2004. – 192 с.
3. Шанченко, Н.И. Эконометрика: лабораторный практикум/ Н.И. Шанченко. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 81с.
4. Шишов, В.В. Принятие оптимальных экономических решений: учебное пособие/ В.В. Шишов, Н.И. Кириченко – Красноярск: ГОУ ВПО КГТЭИ. 2008. – 80 с.

**Дополнительная литература**

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С. А. Айвазян, И.С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. - М.: Финансы и статистика, 1985. - 488 с.
2. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики./ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 1022 с.
3. Громыко, Г. А. Общая теория статистики: практикум / Г. А. Громыко. - М.: ИНФРА-М, 1999. - 139 с.
4. Ефимова, М. Р. Общая теория статистики : учебник / М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев.– М.: ИНФРА-М, 1998. - 416 с.
5. Ефремов, В. С. Стратегия бизнеса / В. С. Ефремов. – М.: Финпресс, 1998. – 260 с.
6. Елисеева, И.И. Общая теория статистики. / И.И. Елисеева, М.М. Юзбашев.- М.: Финансы и статистика, 1998. - 368 с.
7. Иванова, Ю.Н.Экономическая статистика: учебник / Ю.Н. Иванова. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 480с.
8. Магнус, Я. Р. Эконометрика. Начальный курс / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. - М.: Дело, 1997. - 248 с.
9. Орлов, А. И. Устойчивость в социально-экономических моделях / А. И. Орлов. - М.: Наука, 1979. - 296 с.

**Электронные учебные пособия**

1. Шишов В.В. Эконометрика: курс лекций [Электронный ресурс: http://e-distance.ru] / В. В. Шишов; Краснояр. гос. торг. – экон. ин-т. - Красноярск, 2008.- 46 с. (2,80 Мб)
2. Шишов В. В. Эконометрика: Лабораторные работы [Электронный ресурс: http://e-distance.ru]/ В. В. Шишов; Краснояр. гос. торг. – экон. ин-т. - Красноярск, 2008.- 20 с. (1000 Кб).
3. Шишов В.В. Теория принятия оптимальных решений в маркетинге: Электронные тестовые задания (http://e-distance.ru)/В.В. Шишов. – ГОУ ВПО КГТЭИ, 2008.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

***Таблица 1.***

**Спецификация вариантов к лабораторным работам № 1, 2, 3, 4**

Данные о деятельности предприятий, где:

|  |  |
| --- | --- |
| *х*1 | – суммарные активы, млн.руб. |
| *х*2 | – объем реализованной продукции, тыс.руб. |
| *х*3 | – численность работающих, чел. |
| *х*4 | – рентабельность, % |
| *х*5 | – автоматизация, % |
| *х*6 | – износ основных производственных фондов, % |
| *y* | – чистая прибыль, тыс.руб. |

Спецификация вариантов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  варианта | Предприятия | Номер  варианта | Предприятия | Номер  варианта | Предприятия |
| 1 | 1 ÷ 15 | 11 | 31 ÷ 45 | 21 | 61 ÷ 75 |
| 2 | 4 ÷ 18 | 12 | 34 ÷ 48 | 22 | 64 ÷ 78 |
| 3 | 7 ÷ 21 | 13 | 37 ÷ 51 | 23 | 67 ÷ 81 |
| 4 | 10 ÷ 24 | 14 | 40 ÷ 54 | 24 | 70 ÷ 84 |
| 5 | 13 ÷ 27 | 15 | 43 ÷ 57 | 25 | 73 ÷ 87 |
| 6 | 16 ÷ 30 | 16 | 46 ÷ 60 | 26 | 76 ÷ 90 |
| 7 | 19 ÷ 33 | 17 | 49 ÷ 63 | 27 | 80 ÷ 94 |
| 8 | 22 ÷ 36 | 18 | 52 ÷ 66 | 28 | 85 ÷ 99 |
| 9 | 25 ÷ 39 | 19 | 55 ÷ 69 | 29 | 90 ÷ 104 |
| 10 | 28 ÷ 42 | 20 | 58 ÷ 72 | 30 | 96 ÷ 110 |

***Таблица 2.***

**Данные к лабораторным работам № 1, 2, 3, 4**

| №  п/п | *х*1 | *х*2 | *х*3 | *х*4 | *х*5 | *х*6 | *y* |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3823 | 1006 | 490 | 20 | 22 | 49 | 197 |
| 2 | 2662 | 1154 | 510 | 22 | 17 | 38 | 254 |
| 3 | 2295 | 696 | 370 | 21 | 22 | 57 | 145 |
| 4 | 1615 | 715 | 400 | 25 | 24 | 44 | 176 |
| 5 | 1519 | 662 | 430 | 8 | 17 | 58 | 50 |
| 6 | 869 | 408 | 250 | 19 | 28 | 61 | 76 |
| 7 | 730 | 402 | 160 | 18 | 28 | 57 | 73 |
| 8 | 6341 | 1724 | 771 | 25 | 22 | 46 | 429 |
| 9 | 4946 | 1446 | 522 | 28 | 18 | 58 | 398 |
| 10 | 6125 | 1797 | 655 | 24 | 16 | 62 | 439 |
| 11 | 6129 | 2061 | 638 | 24 | 22 | 42 | 494 |
| 12 | 3597 | 1011 | 475 | 31 | 17 | 61 | 316 |
| 13 | 876 | 388 | 82 | 16 | 9 | 65 | 63 |
| 14 | 4980 | 1344 | 609 | 30 | 24 | 35 | 407 |
| 15 | 2248 | 784 | 240 | 25 | 16 | 64 | 193 |
| 16 | 6070 | 1730 | 650 | 24 | 17 | 54 | 417 |
| 17 | 1585 | 540 | 174 | 25 | 18 | 45 | 133 |
| 18 | 2041 | 642 | 221 | 24 | 18 | 68 | 153 |
| 19 | 4613 | 1154 | 537 | 30 | 19 | 57 | 345 |
| 20 | 5929 | 1973 | 767 | 25 | 16 | 39 | 502 |
| 21 | 1705 | 425 | 189 | 29 | 17 | 50 | 123 |
| 22 | 4591 | 1731 | 489 | 21 | 13 | 59 | 361 |
| 23 | 6321 | 1680 | 694 | 28 | 19 | 48 | 466 |
| 24 | 802 | 452 | 106 | 15 | 11 | 61 | 70 |
| 25 | 1778 | 634 | 145 | 21 | 11 | 69 | 132 |
| 26 | 773 | 409 | 240 | 20 | 39 | 38 | 81 |
| 27 | 2186 | 753 | 301 | 25 | 17 | 67 | 185 |
| 28 | 6768 | 1952 | 689 | 25 | 27 | 40 | 492 |
| 29 | 4362 | 1240 | 482 | 30 | 17 | 59 | 368 |
| 30 | 7129 | 1623 | 813 | 29 | 21 | 50 | 476 |
| 31 | 914 | 369 | 67 | 18 | 10 | 63 | 68 |
| 32 | 5227 | 1458 | 569 | 26 | 16 | 54 | 386 |
| 33 | 4355 | 1366 | 448 | 28 | 21 | 57 | 377 |
| 34 | 5790 | 1829 | 674 | 24 | 18 | 41 | 445 |
| 35 | 2929 | 1110 | 381 | 22 | 13 | 61 | 245 |
| 36 | 2536 | 831 | 284 | 23 | 18 | 68 | 194 |
| 37 | 6491 | 1829 | 606 | 25 | 18 | 46 | 456 |
| 38 | 1617 | 677 | 141 | 18 | 10 | 66 | 121 |
| 39 | 2522 | 888 | 218 | 22 | 17 | 61 | 195 |
| 40 | 3483 | 1045 | 355 | 24 | 19 | 65 | 251 |
| 41 | 6346 | 2301 | 832 | 24 | 25 | 39 | 546 |
| 42 | 2072 | 680 | 159 | 21 | 14 | 67 | 142 |
| 43 | 806 | 334 | 72 | 18 | 15 | 56 | 59 |
| 44 | 6414 | 1975 | 737 | 24 | 25 | 45 | 483 |
| 45 | 797 | 389 | 43 | 15 | 10 | 70 | 57 |
| 46 | 5603 | 1462 | 590 | 30 | 20 | 41 | 441 |
| 47 | 3525 | 1264 | 395 | 23 | 10 | 62 | 291 |
| 48 | 7389 | 2007 | 714 | 26 | 22 | 41 | 526 |
| 49 | 4459 | 1466 | 446 | 24 | 14 | 35 | 348 |
| 50 | 5414 | 1588 | 603 | 26 | 18 | 49 | 412 |
| 51 | 1328 | 393 | 167 | 23 | 16 | 69 | 92 |
| 52 | 6028 | 1513 | 631 | 28 | 17 | 27 | 419 |
| 53 | 4536 | 1334 | 555 | 29 | 16 | 36 | 382 |
| 54 | 1765 | 447 | 123 | 30 | 15 | 70 | 132 |
| 55 | 3620 | 1184 | 459 | 26 | 10 | 60 | 305 |
| 56 | 3217 | 867 | 302 | 26 | 18 | 62 | 229 |
| 57 | 3155 | 786 | 264 | 29 | 18 | 65 | 229 |
| 58 | 4090 | 1338 | 501 | 27 | 16 | 60 | 364 |
| 59 | 5109 | 1696 | 589 | 27 | 14 | 53 | 450 |
| 60 | 3665 | 1232 | 387 | 21 | 11 | 63 | 261 |
| 61 | 3421 | 730 | 346 | 34 | 13 | 58 | 251 |
| 62 | 5420 | 1640 | 587 | 23 | 13 | 56 | 381 |
| 63 | 4639 | 1265 | 468 | 27 | 12 | 60 | 338 |
| 64 | 2845 | 982 | 324 | 24 | 12 | 67 | 235 |
| 65 | 1058 | 129 | 106 | 64 | 16 | 66 | 82 |
| 66 | 1645 | 654 | 150 | 22 | 19 | 65 | 142 |
| 67 | 3036 | 902 | 310 | 27 | 12 | 69 | 241 |
| 68 | 1466 | 261 | 155 | 41 | 17 | 74 | 108 |
| 69 | 3312 | 1158 | 399 | 23 | 19 | 66 | 261 |
| 70 | 833 | 66 | 44 | 86 | 15 | 77 | 57 |
| 71 | 1211 | 517 | 103 | 22 | 17 | 61 | 113 |
| 72 | 3436 | 843 | 368 | 30 | 10 | 59 | 249 |
| 73 | 3576 | 1087 | 298 | 24 | 11 | 59 | 265 |
| 74 | 2633 | 656 | 227 | 29 | 18 | 69 | 189 |
| 75 | 6619 | 2088 | 744 | 25 | 23 | 44 | 519 |
| 76 | 751 | 343 | 160 | 12 | 15 | 55 | 40 |
| 77 | 6345 | 1681 | 654 | 26 | 19 | 44 | 432 |
| 78 | 1157 | 407 | 124 | 23 | 14 | 62 | 94 |
| 79 | 4366 | 1127 | 384 | 28 | 15 | 63 | 320 |
| 80 | 6791 | 2086 | 699 | 25 | 26 | 48 | 514 |
| 81 | 7814 | 1845 | 649 | 29 | 25 | 42 | 537 |
| 82 | 2958 | 1020 | 337 | 22 | 19 | 68 | 229 |
| 83 | 5371 | 1475 | 593 | 26 | 17 | 58 | 390 |
| 84 | 4977 | 1351 | 569 | 29 | 17 | 54 | 393 |
| 85 | 2328 | 1088 | 650 | 10 | 13 | 61 | 112 |
| 86 | 1211 | 313 | 125 | 33 | 18 | 68 | 103 |
| 87 | 6536 | 1923 | 773 | 28 | 23 | 48 | 545 |
| 88 | 870 | 388 | 78 | 17 | 13 | 70 | 65 |
| 89 | 7611 | 2232 | 705 | 24 | 18 | 42 | 531 |
| 90 | 1388 | 405 | 178 | 28 | 11 | 74 | 112 |
| 91 | 7201 | 1824 | 654 | 28 | 25 | 41 | 503 |
| 92 | 6592 | 1780 | 741 | 26 | 27 | 28 | 470 |
| 93 | 3045 | 955 | 376 | 28 | 15 | 58 | 268 |
| 94 | 2221 | 690 | 199 | 23 | 18 | 69 | 161 |
| 95 | 2499 | 873 | 289 | 24 | 10 | 68 | 212 |
| 96 | 845 | 455 | 260 | 10 | 15 | 53 | 44 |
| 97 | 4219 | 1350 | 503 | 24 | 13 | 56 | 330 |
| 98 | 6848 | 1853 | 750 | 29 | 18 | 40 | 532 |
| 99 | 5387 | 1550 | 581 | 26 | 16 | 58 | 404 |
| 100 | 1986 | 777 | 205 | 21 | 14 | 70 | 167 |
| 101 | 752 | 391 | 95 | 14 | 12 | 75 | 56 |
| 102 | 1974 | 688 | 169 | 23 | 19 | 68 | 157 |
| 103 | 5469 | 1355 | 511 | 29 | 20 | 68 | 397 |
| 104 | 3048 | 939 | 374 | 28 | 14 | 59 | 263 |
| 105 | 7351 | 1802 | 778 | 29 | 19 | 43 | 520 |
| 106 | 1380 | 398 | 116 | 27 | 19 | 64 | 107 |
| 107 | 2986 | 1017 | 325 | 25 | 10 | 61 | 253 |
| 108 | 4600 | 1600 | 566 | 25 | 21 | 32 | 397 |
| 109 | 761 | 407 | 98 | 14 | 12 | 68 | 56 |
| 110 | 7553 | 2206 | 739 | 25 | 23 | 45 | 544 |

***Таблица 3.***

**Данные к лабораторной работе № 5**

*Курсы валют (доллара и евро) за 2006 год*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | **USD** | **EUR** | **Дата** | **USD** | **EUR** | **Дата** | **USD** | **EUR** |
| 10.01.2006 | 28,78 | 34,19 | 21.02.2006 | 28,15 | 33,65 | 06.04.2006 | 27,56 | 33,82 |
| 11.01.2006 | 28,48 | 34,34 | 22.02.2006 | 28,19 | 33,58 | 07.04.2006 | 27,53 | 33,85 |
| 12.01.2006 | 28,48 | 34,35 | 26.02.2006 | 28,18 | 33,57 | 10.04.2006 | 27,61 | 33,68 |
| 13.01.2006 | 28,40 | 34,48 | 27.02.2006 | 28,16 | 33,44 | 11.04.2006 | 27,71 | 33,54 |
| 16.01.2006 | 28,47 | 34,35 | 28.02.2006 | 28,12 | 33,33 | 12.04.2006 | 27,68 | 33,58 |
| 17.01.2006 | 28,30 | 34,37 | 01.03.2006 | 28,12 | 33,33 | 13.04.2006 | 27,66 | 33,61 |
| 18.01.2006 | 28,27 | 34,29 | 02.03.2006 | 28,02 | 33,45 | 14.04.2006 | 27,70 | 33,56 |
| 19.01.2006 | 28,30 | 34,28 | 03.03.2006 | 28,03 | 33,44 | 17.04.2006 | 27,70 | 33,54 |
| 20.01.2006 | 28,29 | 34,20 | 06.03.2006 | 27,93 | 33,58 | 18.04.2006 | 27,63 | 33,66 |
| 23.01.2006 | 28,29 | 34,16 | 07.03.2006 | 27,88 | 33,66 | 19.04.2006 | 27,57 | 33,77 |
| 24.01.2006 | 28,05 | 34,35 | 09.03.2006 | 27,99 | 33,48 | 20.04.2006 | 27,47 | 33,93 |
| 25.01.2006 | 27,99 | 34,39 | 10.03.2006 | 28,00 | 33,43 | 21.04.2006 | 27,47 | 33,90 |
| 26.01.2006 | 27,98 | 34,33 | 13.03.2006 | 28,02 | 33,39 | 24.04.2006 | 27,52 | 33,81 |
| 27.01.2006 | 27,97 | 34,27 | 14.03.2006 | 28,01 | 33,49 | 25.04.2006 | 27,43 | 33,95 |
| 30.01.2006 | 28,02 | 34,19 | 15.03.2006 | 27,99 | 33,52 | 26.04.2006 | 27,42 | 33,96 |
| 31.01.2006 | 28,12 | 34,04 | 16.03.2006 | 27,84 | 33,48 | 27.04.2006 | 27,39 | 34,01 |
| 01.02.2006 | 28,13 | 34,05 | 17.03.2006 | 27,82 | 33,52 | 28.04.2006 | 27,36 | 34,06 |
| 02.02.2006 | 28,10 | 34,14 | 20.03.2006 | 27,70 | 33,68 | 02.05.2006 | 27,27 | 34,19 |
| 03.02.2006 | 28,19 | 33,99 | 21.03.2006 | 27,66 | 33,68 | 03.05.2006 | 27,24 | 34,25 |
| 06.02.2006 | 28,17 | 34,04 | 22.03.2006 | 27,70 | 33,62 | 04.05.2006 | 27,16 | 34,37 |
| 07.02.2006 | 28,23 | 33,90 | 23.03.2006 | 27,74 | 33,54 | 05.05.2006 | 27,21 | 34,29 |
| 08.02.2006 | 28,25 | 33,85 | 24.03.2006 | 27,77 | 33,50 | 06.05.2006 | 27,13 | 34,41 |
| 09.02.2006 | 28,26 | 33,84 | 27.03.2006 | 27,85 | 33,34 | 10.05.2006 | 27,08 | 34,47 |
| 10.02.2006 | 28,25 | 33,85 | 28.03.2006 | 27,77 | 33,44 | 11.05.2006 | 27,04 | 34,54 |
| 13.02.2006 | 28,24 | 33,82 | 29.03.2006 | 27,80 | 33,40 | 12.05.2006 | 27,08 | 34,48 |
| 14.02.2006 | 28,24 | 33,62 | 30.03.2006 | 27,80 | 33,39 | 15.05.2006 | 26,94 | 34,69 |
| 15.02.2006 | 28,18 | 33,57 | 31.03.2006 | 27,76 | 33,47 | 16.05.2006 | 26,92 | 34,74 |
| 16.02.2006 | 28,20 | 33,59 | 03.04.2006 | 27,70 | 33,63 | 17.05.2006 | 27,02 | 34,62 |
| 17.02.2006 | 28,22 | 33,54 | 04.04.2006 | 27,77 | 33,46 | 18.05.2006 | 26,96 | 34,70 |
| 20.02.2006 | 28,22 | 33,53 | 05.04.2006 | 27,69 | 33,61 | 19.05.2006 | 27,07 | 34,51 |
| 22.05.2006 | 27,00 | 34,60 | 04.07.2006 | 26,87 | 34,36 | 15.08.2006 | 26,82 | 34,19 |
| 23.05.2006 | 27,10 | 34,45 | 05.07.2006 | 26,84 | 34,40 | 16.08.2006 | 26,83 | 34,15 |
| 24.05.2006 | 26,99 | 34,68 | 06.07.2006 | 26,86 | 34,36 | 17.08.2006 | 26,78 | 34,25 |
| 25.05.2006 | 27,02 | 34,58 | 07.07.2006 | 26,91 | 34,28 | 18.08.2006 | 26,72 | 34,36 |
| 26.05.2006 | 27,04 | 34,54 | 10.07.2006 | 26,88 | 34,34 | 21.08.2006 | 26,74 | 34,32 |
| 29.05.2006 | 27,03 | 34,55 | 11.07.2006 | 26,86 | 34,36 | 22.08.2006 | 26,71 | 34,40 |
| 30.05.2006 | 27,07 | 34,50 | 12.07.2006 | 26,91 | 34,24 | 23.08.2006 | 26,70 | 34,38 |
| 31.05.2006 | 26,98 | 34,64 | 13.07.2006 | 26,87 | 34,30 | 24.08.2006 | 26,76 | 34,26 |
| 01.06.2006 | 26,94 | 34,71 | 14.07.2006 | 26,92 | 34,22 | 25.08.2006 | 26,79 | 34,22 |
| 02.06.2006 | 27,05 | 34,54 | 17.07.2006 | 26,96 | 34,15 | 28.08.2006 | 26,80 | 34,20 |
| 05.06.2006 | 26,89 | 34,44 | 18.07.2006 | 26,93 | 34,02 | 29.08.2006 | 26,77 | 34,25 |
| 06.06.2006 | 26,71 | 34,58 | 19.07.2006 | 27,02 | 33,87 | 30.08.2006 | 26,74 | 34,31 |
| 07.06.2006 | 26,73 | 34,54 | 20.07.2006 | 27,06 | 33,82 | 31.08.2006 | 26,74 | 34,31 |
| 08.06.2006 | 26,86 | 34,37 | 21.07.2006 | 26,97 | 33,98 | 01.09.2006 | 26,73 | 34,32 |
| 09.06.2006 | 26,88 | 34,34 | 24.07.2006 | 26,91 | 34,03 | 04.09.2006 | 26,75 | 34,27 |
| 13.06.2006 | 27,01 | 34,14 | 25.07.2006 | 26,92 | 34,01 | 05.09.2006 | 26,73 | 34,34 |
| 14.06.2006 | 27,08 | 34,06 | 26.07.2006 | 26,91 | 34,07 | 06.09.2006 | 26,64 | 34,19 |
| 15.06.2006 | 27,09 | 34,07 | 27.07.2006 | 26,99 | 33,93 | 07.09.2006 | 26,67 | 34,19 |
| 16.06.2006 | 27,04 | 34,12 | 28.07.2006 | 26,84 | 34,17 | 08.09.2006 | 26,67 | 34,19 |
| 19.06.2006 | 26,99 | 34,15 | 31.07.2006 | 26,87 | 34,11 | 11.09.2006 | 26,76 | 34,03 |
| 20.06.2006 | 27,04 | 34,06 | 01.08.2006 | 26,82 | 34,21 | 12.09.2006 | 26,80 | 33,99 |
| 21.06.2006 | 27,05 | 34,03 | 02.08.2006 | 26,84 | 34,17 | 13.09.2006 | 26,78 | 34,04 |
| 22.06.2006 | 27,02 | 34,09 | 03.08.2006 | 26,76 | 34,30 | 14.09.2006 | 26,80 | 34,01 |
| 23.06.2006 | 26,97 | 34,16 | 04.08.2006 | 26,80 | 34,21 | 15.09.2006 | 26,80 | 34,00 |
| 26.06.2006 | 27,05 | 34,03 | 07.08.2006 | 26,77 | 34,25 | 18.09.2006 | 26,77 | 34,04 |
| 27.06.2006 | 27,10 | 33,95 | 08.08.2006 | 26,70 | 34,36 | 19.09.2006 | 26,80 | 33,97 |
| 28.06.2006 | 27,03 | 34,05 | 09.08.2006 | 26,73 | 34,30 | 20.09.2006 | 26,77 | 34,01 |
| 29.06.2006 | 27,06 | 34,01 | 10.08.2006 | 26,74 | 34,30 | 21.09.2006 | 26,80 | 33,96 |
| 30.06.2006 | 27,08 | 33,98 | 11.08.2006 | 26,67 | 34,39 | 22.09.2006 | 26,77 | 34,02 |
| 03.07.2006 | 26,94 | 34,24 | 14.08.2006 | 26,79 | 34,20 | 25.09.2006 | 26,67 | 34,15 |
| 26.09.2006 | 26,667 | 34,147 | 08.11.2006 | 26,72 | 34,09 | 20.12.2006 | 26,4 | 34,6 |
| 27.09.2006 | 26,726 | 34,06 | 09.11.2006 | 26,7 | 34,1 | 21.12.2006 | 26,3 | 34,7 |
| 28.09.2006 | 26,794 | 33,973 | 10.11.2006 | 26,7 | 34,11 | 22.12.2006 | 26,3 | 34,7 |
| 29.09.2006 | 26,75 | 34,028 | 13.11.2006 | 26,62 | 34,24 | 25.12.2006 | 26,3 | 34,7 |
| 02.10.2006 | 26,78 | 33,978 | 14.11.2006 | 26,62 | 34,23 | 26.12.2006 | 26,4 | 34,6 |
| 03.10.2006 | 26,795 | 33,965 | 15.11.2006 | 26,65 | 34,18 | 27.12.2006 | 26,4 | 34,6 |
| 04.10.2006 | 26,734 | 34,101 | 16.11.2006 | 26,65 | 34,17 | 28.12.2006 | 26,3 | 34,7 |
| 05.10.2006 | 26,767 | 34,075 | 17.11.2006 | 26,66 | 34,17 | 29.12.2006 | 26,4 | 34,6 |
| 06.10.2006 | 26,78 | 34,046 | 20.11.2006 | 26,69 | 34,12 | 30.12.2006 | 26,3 | 34,7 |
| 09.10.2006 | 26,81 | 33,99 | 21.11.2006 | 26,64 | 34,19 |  |  |  |
| 10.10.2006 | 26,892 | 33,876 | 22.11.2006 | 26,65 | 34,17 |  |  |  |
| 11.10.2006 | 26,889 | 33,883 | 23.11.2006 | 26,61 | 34,25 |  |  |  |
| 12.10.2006 | 26,954 | 33,795 | 24.11.2006 | 26,56 | 34,36 |  |  |  |
| 13.10.2006 | 26,951 | 33,796 | 27.11.2006 | 26,52 | 34,39 |  |  |  |
| 16.10.2006 | 26,931 | 33,839 | 28.11.2006 | 26,37 | 34,6 |  |  |  |
| 17.10.2006 | 26,969 | 33,725 | 29.11.2006 | 26,35 | 34,63 |  |  |  |
| 18.10.2006 | 26,945 | 33,759 | 30.11.2006 | 26,31 | 34,68 |  |  |  |
| 19.10.2006 | 26,929 | 33,798 | 01.12.2006 | 26,31 | 34,69 |  |  |  |
| 20.10.2006 | 26,935 | 33,782 | 04.12.2006 | 26,25 | 34,82 |  |  |  |
| 23.10.2006 | 26,851 | 33,905 | 05.12.2006 | 26,21 | 34,87 |  |  |  |
| 24.10.2006 | 26,88 | 33,853 | 06.12.2006 | 26,18 | 34,88 |  |  |  |
| 25.10.2006 | 26,931 | 33,76 | 07.12.2006 | 26,19 | 34,87 |  |  |  |
| 26.10.2006 | 26,903 | 33,8 | 08.12.2006 | 26,19 | 34,88 |  |  |  |
| 27.10.2006 | 26,831 | 33,927 | 11.12.2006 | 26,24 | 34,84 |  |  |  |
| 30.10.2006 | 26,788 | 33,968 | 12.12.2006 | 26,3 | 34,71 |  |  |  |
| 31.10.2006 | 26,748 | 34,028 | 13.12.2006 | 26,26 | 34,76 |  |  |  |
| 01.11.2006 | 26,781 | 33,985 | 14.12.2006 | 26,23 | 34,81 |  |  |  |
| 02.11.2006 | 26,729 | 34,084 | 15.12.2006 | 26,26 | 34,76 |  |  |  |
| 03.11.2006 | 26,728 | 34,078 | 18.12.2006 | 26,33 | 34,65 |  |  |  |
| 07.11.2006 | 26,701 | 34,108 | 19.12.2006 | 26,39 | 34,57 |  |  |  |

***Таблица 4***

**Таблица распределения значений *F*-критерия Фишера при уровне значимости α = 0,05**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k2  k1 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 8 | | 12 | | 24 | | ∞ | |
| 1 | | 161,45 | | 199,50 | | 215,72 | | 224,57 | | 230,17 | | 233,97 | | 238,89 | | 243,91 | | 249,04 | | 254,32 | |
| 2 | | 18,51 | | 19,00 | | 19,16 | | 19,25 | | 19,30 | | 19,33 | | 19,37 | | 19,41 | | 19,45 | | 19,50 | |
| 3 | | 10,13 | | 9,55 | | 9,28 | | 9,12 | | 9,01 | | 8,94 | | 8,84 | | 8,74 | | 8,64 | | 8,53 | |
| 4 | | 7,71 | | 6,94 | | 6,59 | | 6,39 | | 6,26 | | 6,16 | | 6,04 | | 5,91 | | 5,77 | | 5,63 | |
| 5 | | 6,61 | | 5,79 | | 5,41 | | 5,19 | | 5,05 | | 4,95 | | 4,82 | | 4,68 | | 4,53 | | 4,36 | |
| 6 | | 5,99 | | 5,14 | | 4,76 | | 4,53 | | 4,39 | | 4,28 | | 4,15 | | 4,00 | | 3,84 | | 3,67 | |
| 7 | | 5,59 | | 4,74 | | 4,35 | | 4,12 | | 3,97 | | 3,87 | | 3,73 | | 3,57 | | 3,41 | | 3,23 | |
| 8 | | 5,32 | | 4,46 | | 4,07 | | 3,84 | | 3,69 | | 3,58 | | 3,44 | | 3,28 | | 3,12 | | 2,93 | |
| 9 | | 5,12 | | 4,26 | | 3,86 | | 3,63 | | 3,48 | | 3,37 | | 3,23 | | 3,07 | | 2,90 | | 2,71 | |
| 10 | | 4,96 | | 4,10 | | 3,71 | | 3,48 | | 3,33 | | 3,22 | | 3,07 | | 2,91 | | 2,74 | | 2,54 | |
| 11 | | 4,84 | | 3,98 | | 3,59 | | 3,36 | | 3,20 | | 3,09 | | 2,95 | | 2,79 | | 2,61 | | 2,40 | |
| 12 | | 4,75 | | 3,88 | | 3,49 | | 3,26 | | 3,11 | | 3,00 | | 2,85 | | 2,69 | | 2,50 | | 2,30 | |
| 13 | | 4,67 | | 3,80 | | 3,41 | | 3,18 | | 3,02 | | 2,92 | | 2,77 | | 2,60 | | 2,42 | | 2,21 | |
| 14 | | 4,60 | | 3,74 | | 3,34 | | 3,11 | | 2,96 | | 2,85 | | 2,70 | | 2,53 | | 2,35 | | 2,13 | |
| 15 | | 4,54 | | 3,68 | | 3,29 | | 3,06 | | 2,90 | | 2,79 | | 2,64 | | 2,48 | | 2,29 | | 2,07 | |
| 16 | | 4,49 | | 3,63 | | 3,24 | | 3,01 | | 2,85 | | 2,74 | | 2,59 | | 2,42 | | 2,24 | | 2,01 | |
| 17 | | 4,45 | | 3,59 | | 3,20 | | 2,96 | | 2,81 | | 2,70 | | 2,55 | | 2,38 | | 2,19 | | 1,96 | |
| 18 | | 4,41 | | 3,55 | | 3,16 | | 2,93 | | 2,77 | | 2,66 | | 2,51 | | 2,34 | | 2,15 | | 1,92 | |
| 19 | | 4,38 | | 3,52 | | 3,13 | | 2,90 | | 2,74 | | 2,63 | | 2,48 | | 2,31 | | 2,11 | | 1,88 | |
| 20 | | 4,35 | | 3,49 | | 3,10 | | 2,87 | | 2,71 | | 2,60 | | 2,45 | | 2,28 | | 2,08 | | 1,84 | |
| 21 | | 4,32 | | 3,47 | | 3,07 | | 2,84 | | 2,68 | | 2,57 | | 2,42 | | 2,25 | | 2,05 | | 1,81 | |
| 22 | | 4,30 | | 3,44 | | 3,05 | | 2,82 | | 2,66 | | 2,55 | | 2,40 | | 2,23 | | 2,03 | | 1,78 | |
| 23 | | 4,28 | | 3,42 | | 3,03 | | 2,80 | | 2,64 | | 2,53 | | 2,38 | | 2,20 | | 2,00 | | 1,76 | |
| 24 | | 4,26 | | 3,40 | | 3,01 | | 2,78 | | 2,62 | | 2,51 | | 2,36 | | 2,18 | | 1,98 | | 1,73 | |
| 25 | | 4,24 | | 3,38 | | 2,99 | | 2,76 | | 2,60 | | 2,49 | | 2,34 | | 2,16 | | 1,96 | | 1,71 | |
| 26 | | 4,22 | | 3,37 | | 2,98 | | 2,74 | | 2,59 | | 2,47 | | 2,32 | | 2,15 | | 1,95 | | 1,69 | |
| 27 | | 4,21 | | 3,35 | | 2,96 | | 2,73 | | 2,57 | | 2,46 | | 2,30 | | 2,13 | | 1,93 | | 1,67 | |
| 28 | | 4,20 | | 3,34 | | 2,95 | | 2,71 | | 2,56 | | 2,44 | | 2,29 | | 2,12 | | 1,91 | | 1,65 | |
| 29 | | 4,18 | | 3,33 | | 2,93 | | 2,70 | | 2,54 | | 2,43 | | 2,28 | | 2,10 | | 1,90 | | 1,64 | |
| 30 | | 4,17 | | 3,32 | | 2,92 | | 2,69 | | 2,53 | | 2,42 | | 2,27 | | 2,09 | | 1,89 | | 1,62 | |
| 35 | | 4,12 | | 3,26 | | 2,87 | | 2,64 | | 2,48 | | 2,37 | | 2,22 | | 2,04 | | 1,83 | | 1,57 | |
| 40 | | 4,08 | | 3,23 | | 2,84 | | 2,61 | | 2,45 | | 2,34 | | 2,18 | | 2,00 | | 1,79 | | 1,51 | |
| 50 | | 4,03 | | 3,18 | | 2,79 | | 2,56 | | 2,40 | | 2,29 | | 2,13 | | 1,95 | | 1,74 | | 1,44 | |
| 60 | | 4,00 | | 3,15 | | 2,76 | | 2,52 | | 2,37 | | 2,25 | | 2,10 | | 1,92 | | 1,70 | | 1,39 | |
| 70 | | 3,98 | | 3,13 | | 2,74 | | 2,50 | | 2,35 | | 2,23 | | 2,07 | | 1,89 | | 1,67 | | 1,35 | |
| 80 | | 3,96 | | 3,11 | | 2,72 | | 2,49 | | 2,33 | | 2,21 | | 2,06 | | 1,88 | | 1,65 | | 1,31 | |
| 90 | | 3,95 | | 3,10 | | 2,71 | | 2,47 | | 2,32 | | 2,20 | | 2,04 | | 1,86 | | 1,64 | | 1,28 | |
| 100 | | 3,94 | | 3,09 | | 2,70 | | 2,46 | | 2,30 | | 2,19 | | 2,03 | | 1,85 | | 1,63 | | 1,26 | |
| 125 | | 3,92 | | 3,07 | | 2,68 | | 2,44 | | 2,29 | | 2,17 | | 2,01 | | 1,83 | | 1,60 | | 1,21 | |
| 150 | | 3,90 | | 3,06 | | 2,66 | | 2,43 | | 2,27 | | 2,16 | | 2,00 | | 1,82 | | 1,59 | | 1,18 | |
| 200 | | 3,89 | | 3,04 | | 2,65 | | 2,42 | | 2,26 | | 2,14 | | 1,98 | | 1,80 | | 1,57 | | 1,14 | |
| 300 | | 3,87 | | 3,03 | | 2,64 | | 2,41 | | 2,25 | | 2,13 | | 1,97 | | 1,79 | | 1,55 | | 1,10 | |
| 400 | | 3,86 | | 3,02 | | 2,63 | | 2,40 | | 2,24 | | 2,12 | | 1,96 | | 1,78 | | 1,54 | | 1,07 | |
| 500 | | 3,86 | | 3,01 | | 2,62 | | 2,39 | | 2,23 | | 2,11 | | 1,96 | | 1,77 | | 1,54 | | 1,06 | |
| 1000 | | 3,85 | | 3,00 | | 2,61 | | 2,38 | | 2,22 | | 2,10 | | 1,95 | | 1,76 | | 1,53 | | 1,03 | |
| оо | | 3,84 | | 2,99 | | 2,60 | | 2,37 | | 2,21 | | 2,09 | | 1,94 | | 1,75 | | 1,52 | | 1,00 | |

**Таблица 5**

Критические значения *t*-критерия Стьюдента при уровне

значимости 0,10, 0,05,0,01(двухсторонний)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы d.f. | α | | | Число степеней свободы d.f. | α | | | |
|  | | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,10 | 0,05 | 0,01 |
| 1 | | 6,3138 | 12,706 | 63,657 | 18 | 1,7341 | 2,1009 | 2,8784 |
| 2 | | 2,9200 | 4,3027 | 9,9248 | 19 | 1,7291 | 2,0930 | 2,8609 |
| 3 | | 2,3534 | 3,1825 | 5,8409 | 20 | 1,7247 | 2,0860 | 2,8453 |
| 4 | | 2,1318 | 2,7764 | 4,6041 | 21 | 1,7207 | 2,0796 | 2,8314 |
| 5 | | 2,0150 | 2,5706 | 4,0321 | 22 | 1,7171 | 2,0739 | 2,8188 |
| 6 | | 1,9432 | 2,4469 | 3,7074 | 23 | 1,7139 | 2,0687 | 2,8073 |
| 7 | | 1,8946 | 2,3646 | 3,4995 | 24 | 1,7109 | 2,0639 | 2,7969 |
| 8 | | 1,8595 | 2,3060 | 3,3554 | 25 | 1,7081 | 2,0595 | 2,7874 |
| 9 | | 1,8331 | 2,2622 | 3,2498 | 26 | 1,7056 | 2,0555 | 2,7787 |
| 10 | | 1,8125 | 2,2281 | 3,1693 | 27 | 1,7033 | 2,0518 | 2,7707 |
| 11 | | 1,7959 | 2,2010 | 3,1058 | 28 | 1,7011 | 2,0484 | 2,7633 |
| 12 | | 1,7823 | 2,1788 | 3,0545 | 29 | 1,6991 | 2,0452 | 2,7564 |
| 13 | | 1,7709 | 2,1604 | 3,0123 | 30 | 1,6973 | 2,0423 | 2,7500 |
| 14 | | 1,7613 | 2,1448 | 2,9768 | 40 | 1,6839 | 2,0211 | 2,7045 |
| 15 | | 1,7530 | 2,1315 | 2,9467 | 60 | 1,6707 | 2,0003 | 2,6603 |
| 16 | | 1,7459 | 2,1199 | 2,9208 | 120 | 1,6577 | 1,9799 | 2,6174 |
| 17 | | 1,7396 | 2,1098 | 2,8982 | ∞ | 1,6449 | 1,9600 | 2,5758 |

***Таблица 6***

**Критические значения корреляции для уровневой значимости**

**0,05 и 0,01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d.f. | α = 0,05 | α = 0,01 | d.f. | α = 0,05 | α = 0,01 |
| 1 | 0,996917 | 0,9998766 | 17 | 0,4555 | 0,5751 |
| 2 | 0,95000 | 0,99000 | 18 | 0,4438 | 0,5614 |
| 3 | 0,8783 | 0,95873 | 19 | 0,4329 | 0,5487 |
| 4 | 0,8114 | 0,91720 | 20 | 0,4227 | 0,5368 |
| 5 | 0,7545 | 0,8745 | 25 | 0,3809 | 0,4869 |
| 6 | 0,7067 | 0,8343 | 30 | 0,3494 | 0,4487 |
| 7 | 0,6664 | 0,7977 | 35 | 0,3246 | 0,4182 |
| 8 | 0,6319 | 0,7646 | 40 | 0,3044 | 0,3932 |
| 9 | 0,6021 | 0,7348 | 45 | 0,2875 | 0,3721 |
| 10 | 0,5760 | 0,7079 | 50 | 0,2732 | 0,3541 |
| 11 | 0,5529 | 0,6835 | 60 | 0,2500 | 0,3248 |
| 12 | 0,5324 | 0,6614 | 70 | 0,2319 | 0,3017 |
| 13 | 0,5139 | 0,6411 | 80 | 0,2172 | 0,2830 |
| 14 | 0,4973 | 0,6226 | 90 | 0,2050 | 0,2673 |
| 15 | 0,4821 | 0,6055 | 100 | 0,1946 | 0,2540 |
| 16 | 0,4683 | 0,5897 |  |  |  |

Для простой корреляции d.f. на 2 меньше, чем число пар вариантов; в случае частной корреляции необходимо также вычесть число исключаемых переменных.

***Таблица 7***

**Значения статистик Дарбина - Уотсона *dL du* при**

**5%-ном уровне значимости**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *п* | *K1=1* | *kl=2* | *K1=3* | *K1=4* | *kl=5* | |  | |  | |  | |  | |  |
| *dL* | *du* | *dL* | *du* | *dL* | | *du* | | *dL* | | *du* | | *dL* | | *du* | |
| 6 | 0,61 | 1,40 | - | - | - | - | |  | |  | |  | |  | |
| 7 | 0,70 | 1,36 | 0,47 | 1,90 | - | - | |  | |  | |  | |  | |
| 8 | 0,76 | 1,33 | 0,56 | 1,78 | 0,37 | 2,29 | |  | |  | |  | |  | |
| 9 | 0,82 | 1,32 | 0,63 | 1,70 | 0,46 | 2,13 | |  | |  | |  | |  | |
| 10 | 0,88 | 1,32 | 0,70 | 1,64 | 0,53 | 2,02 | |  | |  | |  | |  | |
| 11 | 0,93 | 1 32 | 0,66 | 1,60 | 0,60 | 1,93 | |  | |  | |  | |  | |
| 12 | 0,97 | 1,33 | 0,81 | 1,58 | 0,66 | 1,86 | |  | |  | |  | |  | |
| 13 | 1,01 | 1,34 | 0,86 | 1,56 | 0,72 | 1,82 | |  | |  | |  | |  | |
| 14 | 1,05 | 1,35 | 0,91 | 1,55 | 0,77 | 1,78 | |  | |  | |  | |  | |
| 16 | 1,10 | 1,37 | 0,98 | 1,54 | 0,86 | 1,73 | | 0,74 | | 1,93 | | 0,62 | | 2,15 | |
| 17 | 1,13 | 1,38 | 1,02 | 1,54 | 0,90 | 1,71 | | 0,78 | | 1,90 | | 0,67 | | 2,10 | |
| 18 | 1,16 | 1,39 | 1,05 | 1,53 | 0,93 | 1,69 | | 0,82 | | 1,87 | | 0,71 | | 2,06 | |
| 19 | 1,18 | 1,40 | 1,08 | 1,53 | 0,97 | 1,68 | | 0,86 | | 1,85 | | 0,75 | | 2,02 | |
| 20 | 1,20 | 1,41 | 1,10 | 1,54 | 1,00 | 1,68 | | 0,90 | | 1,83 | | 0,79 | | 1,99 | |
| 21 | 1,22 | 1,42 | 1,13 | 1,54 | 1,03 | 1,67 | | 0,93 | | 1,81 | | 0,83 | | 1,96 | |
| 22 | 1,24 | 1,43 | 1,15 | 1,54 | 1,05 | 1,66 | | 0,96 | | 1,80 | | 0,86 | | 1,94 | |
| 23 | 1,26 | 1,44 | 1,17 | 1,54 | 1,08 | 1,66 | | 0,99 | | 1,79 | | 0,90 | | 1,92 | |
| 24 | 1,27 | 1,45 | 1,19 | 1,55 | 1,10 | 1,66 | | 1,01 | | 1,78 | | 0,93 | | 1,90 | |
| 25 | 1,29 | 1,45 | 1,21 | 1,55 | 1,12 | 1,66 | | 1,04 | | 1,77 | | 0,95 | | 1,89 | |
| 26 | 1,30 | 1,46 | 1,22 | 1,55 | 1,14 | 1,65 | | 1,06 | | 1,76 | | 0,98 | | 1,88 | |
| 27 | 1,32 | 1,47 | 1,24 | 1,56 | 1,16 | 1,65 | | 1,08 | | 1,76 | | 1,01 | | 1,86 | |
| 28 | 1,33 | 1,48 | 1,26 | 1,56 | 1,18 | 1,65 | | 1,10 | | 1,75 | | 1,03 | | 1,85 | |
| 29 | 1,34 | 1,48 | 1,27 | 1,56 | 1,20 | 1,65 | | 1,12 | | 1,74 | | 1,05 | | 1,84 | |
| 30 | 1,35 | 1,49 | 1,28 | 1,57 | 1,21 | 1,65 | | 1,14 | | 1,74 | | 1,07 | | 1,83 | |

***Таблица 8***

**Краткий справочник по формулам**

|  |  |
| --- | --- |
| **Формула** | **Пояснение** |
|  | Остаточная дисперсия |
|  | Параметр *а* регрессии |
|  | Коэффициент регрессии |
|  | Ковариация |
|  | Вариация *х* |
|  | Вариация *у* |
|  | Среднеквадратическое отклонение *х* |
|  | Среднеквадратическое отклонение *у* |
|  | Коэффициент корреляции |
|  | Коэффициент детерминации |
|  | Средняя ошибка аппроксимации |
|  | Общая сумма квадратов отклонений равна сумме факторной и остаточной сумм квадратов отклонений |
|  | Общая сумма квадратов отклонений |
|  | Факторная сумма квадратов отклонений |
|  | Остаточная сумма квадратов отклонений |
|  | Общая дисперсия на одну степень свободы |
|  | Факторная дисперсия на одну степень свободы |
|  | Остаточная дисперсия на одну степень свободы |
|  | Расчетное значение критерия Фишера |
| ,  и . | Табличное значение критерия Фишера |
|  | Стандартная ошибка коэффициента регрессии |
|  | Остаточная дисперсия на одну степень свободы |
|  | *t*-статистика коэффициента регрессии |
|  | Доверительный интервал коэффициента регрессии |
|  | Стандартная ошибка параметра регрессии |
|  | *t*-статистика параметра регрессии |
|  | Стандартная ошибка коэффициента корреляции |
|  | *t*-статистика коэффициента корреляции |
|  | Связь между критерием Стьюдента и критерием Фишера |
|  | Доверительный интервал прогноза |
|  | Предельная ошибка прогноза |
|  | Стандартная ошибка прогноза |
|  | Коэффициент эластичности |
|  | Индекс корреляции |
|  | Индекс детерминации |
|  | Расчетное значение критерия Фишера для нелинейной регрессии |
|  | Стандартизованный вид множественной регрессии |
|  | Связь между коэффициентами «чистой» регрессии и стандартизованными |
|  | Частный коэффициент эластичности |
|  | Средний показатель эластичности |
|  | Множественный коэффициент корреляции |
|  | Множественный коэффициент детерминации |
|  | Определитель матрицы парных коэффициентов |
|  | Определитель матрицы межфакторной корреляции |
|  | Скорректированный индекс множественной детерминации |
|  | Частный коэффициент корреляции |
| , | Частный коэффициент корреляции |
|  | Частный коэффициент корреляции |
|  | Частный коэффициент корреляции |
|  | Множественный коэффициент корреляции |
|  | Множественный коэффициент корреляции |
|  | Расчетное значение критерия Фишера для множественной регрессии |
|  | Частный *F-*критерий |
| , | Частный *F-*критерий |
|  | *t*-статистика коэффициента множественной регрессии |
|  | Стандартная ошибка коэффициента множественной регрессии |

1. При подгтовки заключения использован материал, взятый с web-страницы "Эконометрика", размещенной в Википедии (http://ru.wikipedia.org/wiki/Эконометрика) [↑](#footnote-ref-2)