> *#Лабораторная работа 1*
 # Операции с математическими выражениями и функциями в Maple
#Жгутов Е.Д., гр. 253504, вариант 7

#Задание 1. Упростите алгебраическое выражение.

> $$expr1 := \frac{\dfrac{(x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8)}{(x^2 + 3 \cdot x - 4)}}{\dfrac{(9 \cdot x^5 + 36 \cdot x^4 - 9 \cdot x^3 - 90 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 72)}{(x^4 + x^3 - 9 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4)}}$$

$$expr1 := \frac{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4)}{(x^2 + 3x - 4)(9x^5 + 36x^4 - 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72)} \quad (1)$$

> *#Команда упрощения выражений simplify*
simplify(*expr1*)

$$\frac{(x-1)^2 (x+2)^3}{9x^5 + 36x^4 - 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72} \quad (2)$$

>

> *#Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида*

> $expr2 := (7 \cdot x - 6) \cdot (3 \cdot x^2 + 4) \cdot (5 \cdot x + 3)$

$$expr2 := (7x - 6)(3x^2 + 4)(5x + 3) \quad (3)$$

> *#Раскрытие скобок с помощью команды expand*
expand(*expr2*)

$$105x^4 - 27x^3 + 86x^2 - 36x - 72 \quad (4)$$

>

> *#Задание 3. Разложите многочлен на множители*

> $expr3 := x^4 + 7 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 108$

$$expr3 := x^4 + 7x^3 + 21x^2 + 63x + 108 \quad (5)$$

> *#Разложение выражения(многочлена) на множители, используя команду factor*
factor(*expr3*)

$$(x+4)(x+3)(x^2+9) \quad (6)$$

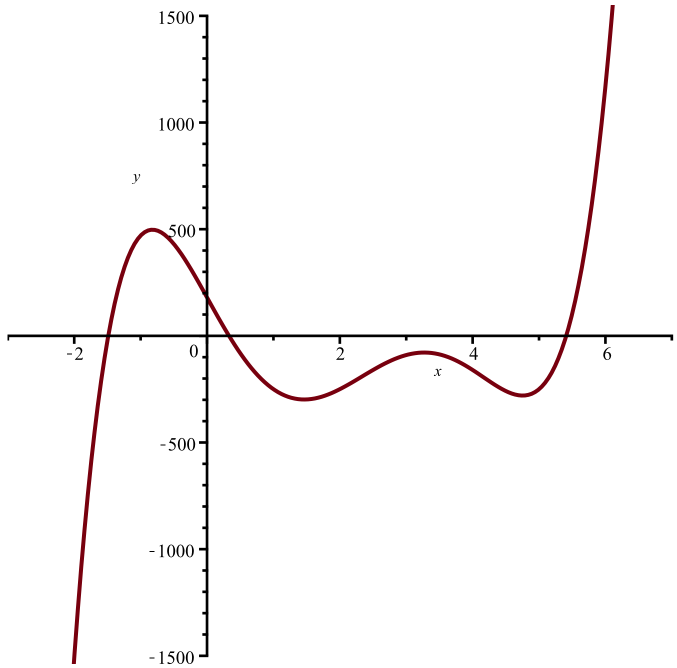
>

> *#Задание 4. Постройте график многочлена P5(x) и найдите все его корни.*

> $P5x := 6 \cdot x^5 - 65 \cdot x^4 + 195 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 - 561 \cdot x + 180$

$$P5x := 6x^5 - 65x^4 + 195x^3 - 5x^2 - 561x + 180 \quad (7)$$

> *#Команда plot для построения графика действительной функции y=f(x), зависящей от одной переменной*
plot(*P5x*, *x* =−3 ..7 , *y* =−1500 ..1500)



> $fsolve(P5x)$

$$-1.48732,\ 0.331150,\ 5.40946 \qquad \textbf{(8)}$$

>

> *#Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.*

> $expr5 := \dfrac{(2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 + 3\cdot x - 1)}{(x^2+1)\cdot(x-2)^2\cdot(x^2-9)}$

$$expr5 := \frac{2\,x^4 + 5\,x^3 + 3\,x - 1}{\left(x^2+1\right)\,(x-2)^2\,\left(x^2-9\right)} \qquad \textbf{(9)}$$

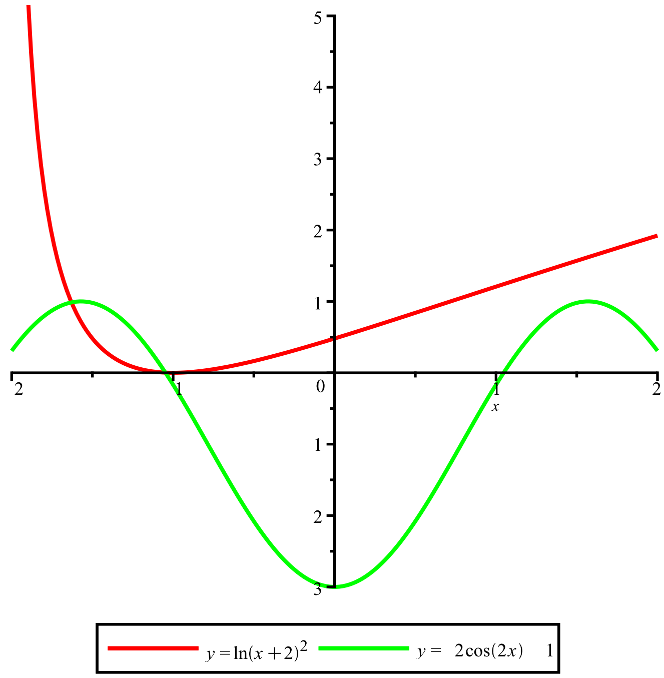
> *#Для разложения алгебраической дроби на сумму простейших дробей требуется использовать ф-цию convert и указать параметр parfrac*
$convert(expr5, parfrac, x)$

$$-\frac{127}{25\,(x-2)} - \frac{17}{1500\,(x+3)} + \frac{61}{12\,(x-3)} + \frac{2\,x-11}{250\,\left(x^2+1\right)} - \frac{77}{25\,(x-2)^2} \qquad \textbf{(10)}$$

>

> *#Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни*

> $eq := (\ln(x+2))^2 = -2\cdot\cos(2\cdot x) - 1 :$
$plot\left(\left[(\ln(x+2))^2, -2\cdot\cos(2\cdot x) - 1\right], x = -2..2, color = [red, green], legend = ['y = (\ln(x+2))^2', 'y = -2\cdot\cos(2\cdot x) - 1']\right);$



> $Digits := 6 :$
$fsolve(eq, x = \;\; 2 \,..\;\; 1.25);$
$fsolve(eq, x = \;\; 1.25 \,..0);$

$$-1.62956$$
$$-1.04789 \qquad \textbf{(11)}$$

>

> *#Задание 7.*

> $f7 := \dfrac{7 \cdot n + 3}{3 \cdot n + 5} :$

$e := \dfrac{1}{10} :$

$solve\left(\dfrac{7}{3} \quad e < f7 < \dfrac{7}{3} + e, n\right)$

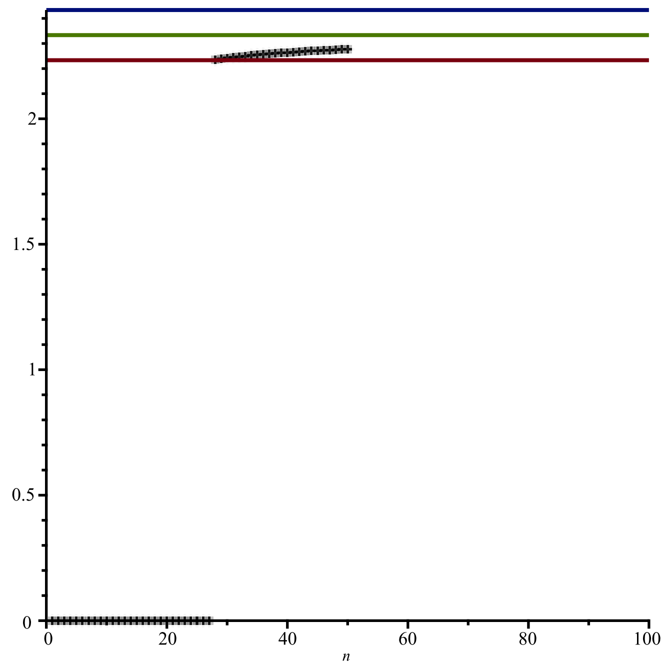
$$\left(\quad \infty, \quad \frac{275}{9}\right), \left(\frac{245}{9}, \infty\right) \qquad \textbf{(12)}$$

> $f71 := piecewise\left(\quad infinity < n < \quad \dfrac{275}{9}, f7, \dfrac{245}{9} < n < infinity, f7\right)$

$$f71 := \begin{cases} \dfrac{7\,n+3}{3\,n+5} & \infty < n < \dfrac{275}{9} \\ \dfrac{7\,n+3}{3\,n+5} & \dfrac{245}{9} < n < \infty \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

> $\#\text{` `}plot\left(\left[f71, \dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3} + e\right], n = 0 \,..100 \,, discont = true\right)$
$y1 := plots[pointplot](\{seq([n, f71], n = 1 \,..50)\}) :$
$y2 := plot\left(\left[\dfrac{7}{3} \quad \dfrac{1}{10}, \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{10}, \dfrac{7}{3}\right], n = 0 \,..100\right) :$
$with(plots) :$

$display(\{y1, y2\})$



>

> #Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.

> $expr8\_1 := \sqrt{n^2 - 3 \cdot n + 2} - n;$
$limit1\_is := \lim_{n \to \infty} (expr8\_1);$

$$expr8\_1 := \sqrt{n^2 - 3\,n + 2} - n$$

$$limit1\_is := -\frac{3}{2} \quad (14)$$

> $expr8\_2 := \left(\frac{7 \cdot n^2 + 18 \cdot n - 15}{7 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 15}\right)^{n+2};$
$limit2\_is := \lim_{n \to \infty} (expr8\_2);$

$$expr8\_2 := \left(\frac{7\,n^2 + 18\,n - 15}{7\,n^2 + 11\,n + 15}\right)^{n+2}$$

$$limit2\_is := \mathrm{e} \quad (15)$$

>

> #Задание 9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:
#1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.
#2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

#3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.

#4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой-нибудь первообразной.

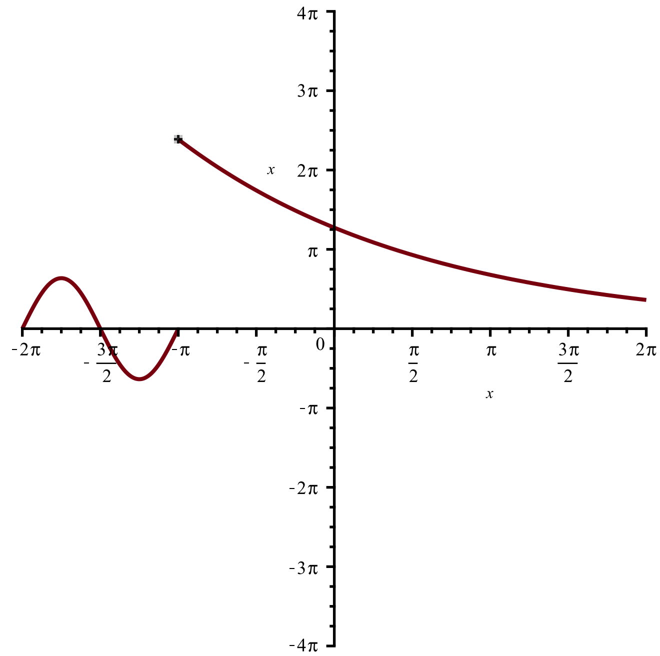
#5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x=1, x=5, y=0. Сделайте чертеж.

> *# 1)*

> $f := x \rightarrow piecewise\left(x < -\mathrm{Pi},\ 2\cdot\sin(2\cdot x),\ x \geq -\mathrm{Pi},\ 4\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{10}\cdot x}\right)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2\cdot\sin(2\cdot x) & x < -\pi \\ 4\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} & -\pi \leq x \end{cases} \qquad \textbf{(16)}$$

> $plot(f(x), x, discont = [showremovable], x = -4\cdot\mathrm{Pi}..4\cdot\mathrm{Pi});$



>

> *# 2)*

> $limit(2\cdot\sin(2\cdot x), x = -\mathrm{Pi});$
$limit\left(4\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{10}\cdot x}, x = -\mathrm{Pi}\right);$
$limit\left(4\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{10}\cdot x}, x = \infty\right);$
$limit(2\cdot\sin(2\cdot x), x = -\infty);$

$$0$$
$$4\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{5}}$$
$$0$$
$$-2..2 \qquad \textbf{(17)}$$

>

> *# 3)*

> *#Вычисление производной функции*
$derivative := diff(f(x), x);$

$$derivative := \begin{cases} 4\cos(2\,x) & x < -\pi \\ undefined & x = -\pi \\ -\dfrac{4\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}}{5} & -\pi < x \end{cases} \tag{18}$$

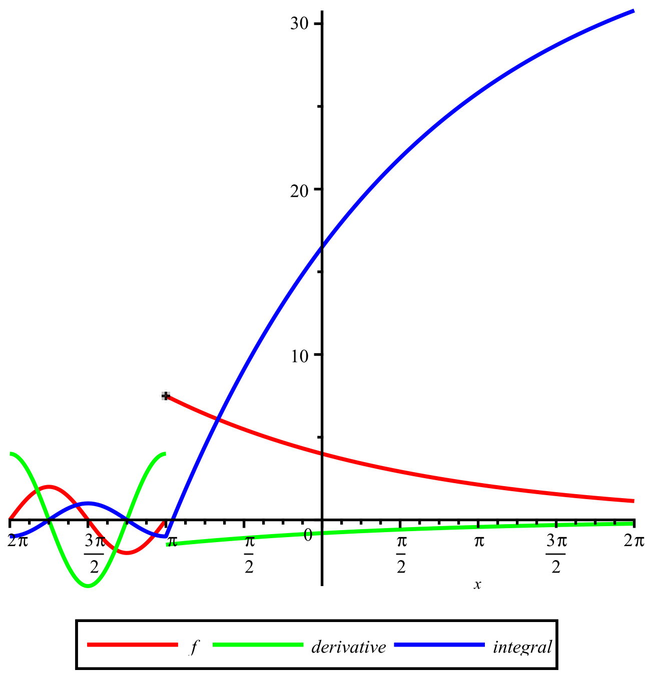
> *#Вычисление неопределенного интеграла функции*
> *integral* := *int*(*f* (*x*), *x*);

$$integral := \begin{cases} -\cos(2\,x) & x \le -\pi \\ -20\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} - 1 + 20\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{5}} & -\pi < x \end{cases} \tag{19}$$

>

> *# 4)*

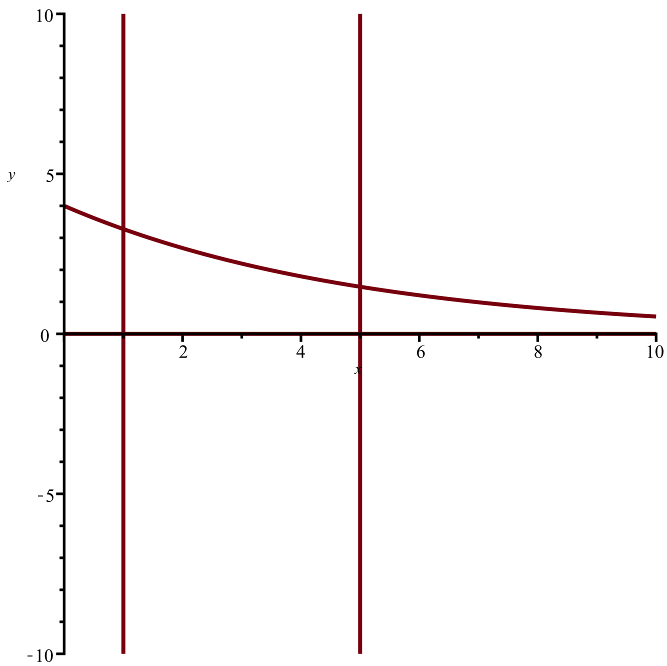
> *plot*([*f* (*x*), *derivative*, *integral*], *x*, *color* = [*red*, *green*, *blue*], *discont* = [*showremovable*], *legend* = [*f* , '*derivative*', '*integral*']);



>

> *# 5)*

> *with*(*plots*) :
> *implicitplot*([*y* = *f* (*x*), *x* = 1, *x* = 5, *y* = 0], *x* = 0 ..10, *y* =   10 ..10);



> $S := int(f(x), x = 1 ..5 , numeric = true);$

$$S := 9.01703 \tag{20}$$

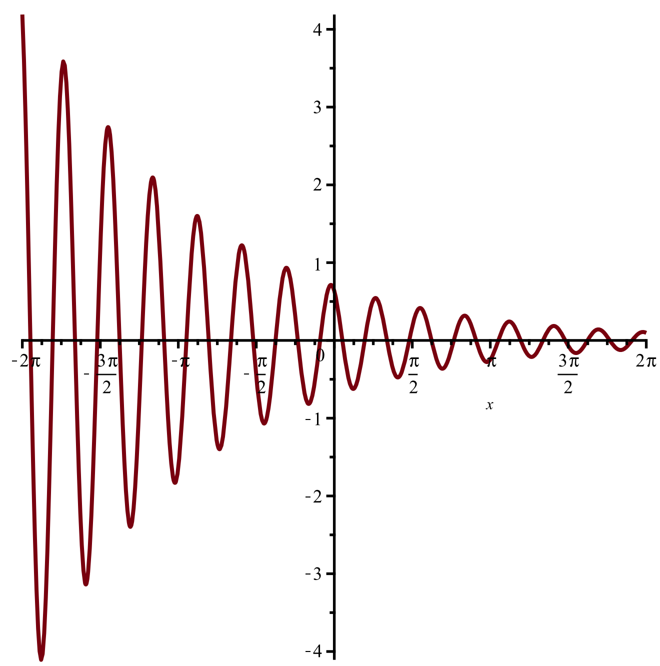
>

> #Задание 10.

>

> # 1)

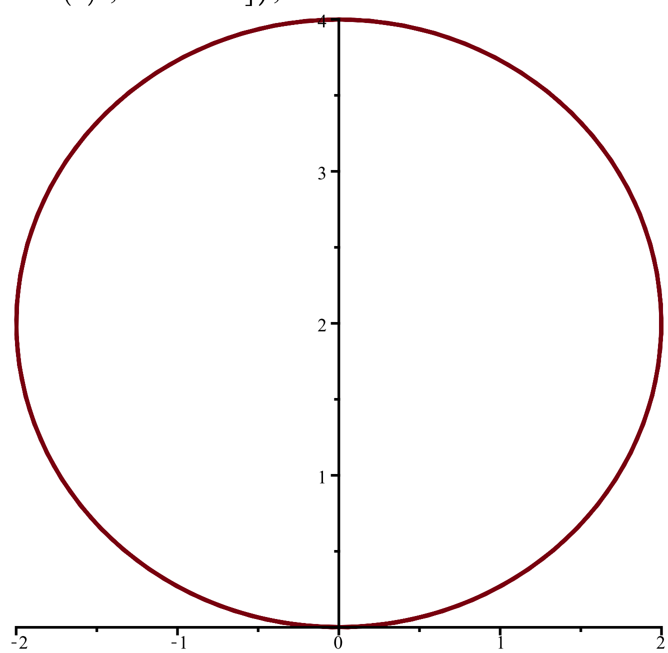
> $curve1 := \frac{7}{10} \cdot e^{-\frac{3}{10} \cdot x} \cdot \sin(7 \cdot x + 2) :$
$plot(curve1);$



>

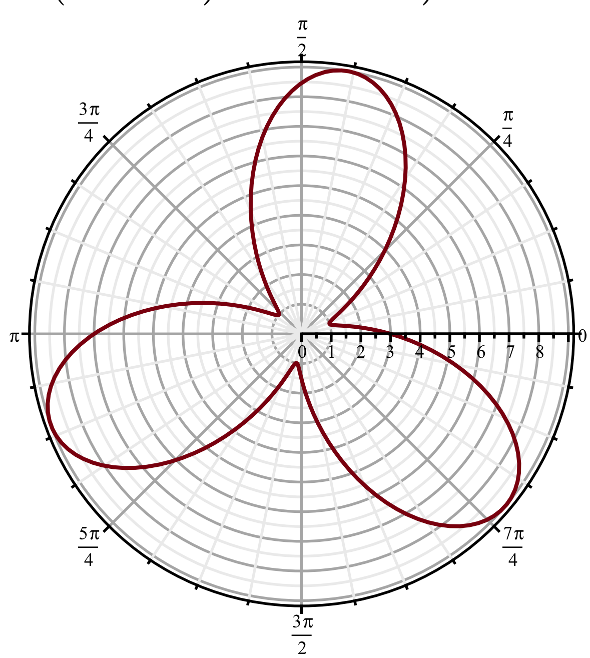
> *#3*

> $plot\left(\left[2\cdot\sin(2\cdot(t)), 4\cdot\cos(t)^2, t=-5..5\right]\right);$



> *# 4)*

> $plots[polarplot]\left(5-4\cdot\sin\left(3\cdot\varphi+\frac{\pi}{6}\right), coords=\text{polar}\right)$



> *#2*

> $fo10 := 4\cdot x^2-12\cdot x\cdot y+9\cdot y^2-20\cdot x+30\cdot y+16=0:$

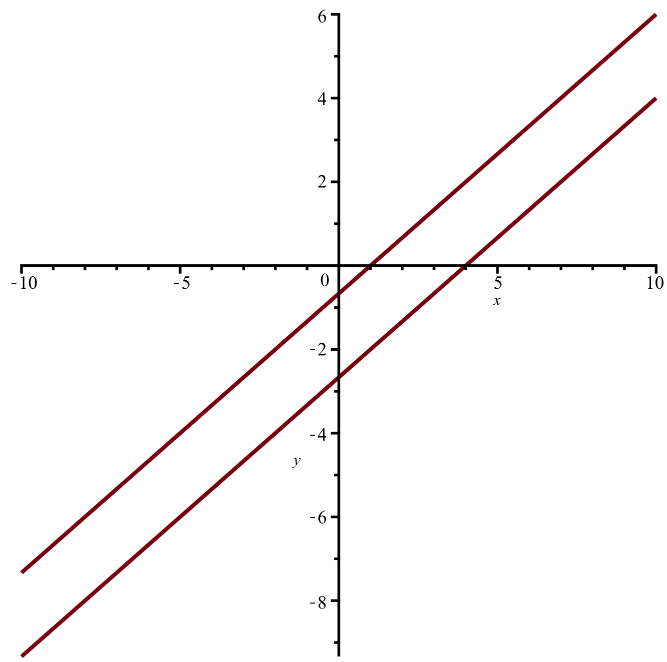
$M := Matrix([[4,-6],[-6,9]]);$

(21)

$$M := \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \tag{21}$$

> *with*(*plots*) : *with*(*LinearAlgebra*) :

> *plots*[*implicitplot*](*fo10*(*x*, *y*), *x* =- 10 ..10, *y* =- 10 ..10)
 # *Построение графика неявной функции*



(22)

> # *Находим собственные векторы матрицы M*
 v := *LinearAlgebra*[*Eigenvectors*](*M*);

$$v := \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

> *with*(*LinearAlgebra*) :
norm1 := *Normalize*(*Column*(*v*[2], [1]), *Euclidean*)

$$norm1 := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \tag{24}$$

> *with*(*LinearAlgebra*) :
norm2 := *Normalize*(*Column*(*v*[2], [2]), *Euclidean*)

$$norm2 := \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \tag{25}$$

> $normal\_matrix := Matrix([norm1, norm2])$

$$normal\_matrix := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \quad (26)$$

> $expr := simplify(subs(x = norm1[1] \cdot x1 + norm2[1] \cdot y1,\ y = norm1[2] \cdot x1 + norm2[2] \cdot y1,\ fo10))$

$$expr := 13\, x1^2 + 10\, x1 \sqrt{13} + 16 = 0 \quad (27)$$

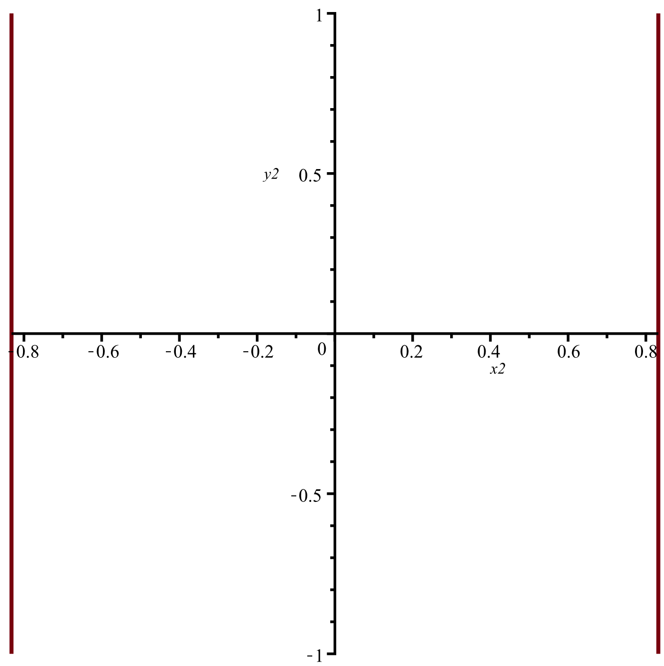
> # Полный квадрат
> $expression\_pseudocanon := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr)$

$$expression\_pseudocanon := 13 \left(x1 + \frac{5\sqrt{13}}{13} \right)^2 - 9 = 0 \quad (28)$$

> # Приводим выражение к каноническому виду, путем произведения замены
> $expression\_canon := subs\left(x1 = x2 - \frac{5}{13}\mathrm{sqrt}(13),\ expression\_pseudocanon\right)$

$$expression\_canon := 13\, x2^2 - 9 = 0 \quad (29)$$

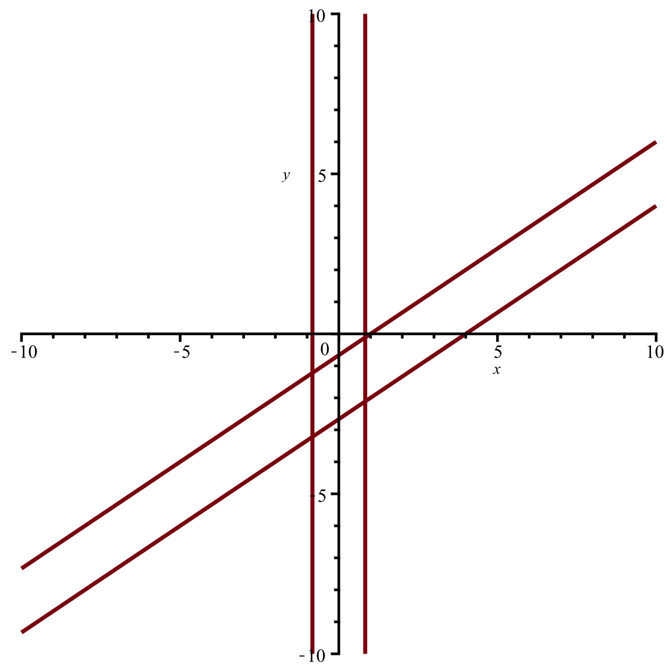
> #График XY
> $plots[implicitplot](expression\_canon, x2 = -1 ..1, y2 = -1 ..1)$



> $expression\_canon := subs(x2 = x, y1 = y, expression\_canon)$

$$expression\_canon := 13\, x^2 - 9 = 0 \quad (30)$$

> $plots[implicitplot]([\ expression\_canon(x, y), fo10(x, y)\ ], x = -10 .. 10, y = -10 .. 10)$
> # Построим в одной системе координат для сравнения


10
5
-5
-10
y
-10
-5
0
5
10
x

>

>