

# Контрольная работа

## Задание №1

$$f(z) = \log \left( \frac{z-1}{z+1} \right)$$

На бесконечности:  $\log \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \rightarrow \log 1 \rightarrow 0$  — однозначная г. (при одном обороте)

$$\begin{aligned} f(z) &= \log(z-1) - \log(z+1) = \left| \log \frac{z-1}{z_0-1} \right| + i \arg \varphi_1(z) - \left| \log \frac{z+1}{z_0+1} \right| - i \arg \varphi_2(z) = \\ &= \left| \ln \frac{z-1}{z_0-1} \right| - \left| \ln \frac{z+1}{z_0+1} \right| + f(z_0) + i(\arg \varphi_1(z) - \arg \varphi_2(z)) \end{aligned}$$

точки  $z = \pm 1$  — точки ветвления

## Задание №2

$$f(z) = \sqrt{\log(z+1)} = \sqrt{w(z)}$$

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{w(z)}{w(z_0)}} \sqrt{w(z_0)} e^{i \arg w(z)} = \sqrt{\frac{\log(z+1)}{\log(z_0+1)}} e^{i \arg \log(z+1)}$$

$$z=0, \quad f(z) = \sqrt{\ln 1} = \sqrt{\ln e^{2\pi i n}} = \sqrt{2\pi i n} = \sqrt{2\pi i} \cdot n^{1/2}$$

$n \in \mathbb{Z}$ , например:  $[n=0, f(z)=0], [n=1, f(z)=\sqrt{2\pi i}]$  и т.д.

## Задание №3

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{(z+1)^2}$$

Особые точки:

$z=0$ : оборот на  $2\pi$  вокруг данной точки

$$\arg \varphi(z) = e^{-\frac{2\pi i}{2}} e^{-0 \cdot 2} = e^{-\pi i} = -1 \text{ — точка ветвления (arg: } -\pi) \quad z=0, -1$$

Точка ветвления:

$z=1$ : оборот на  $2\pi$  вокруг данной точки

$$\arg \varphi(z) = e^{-\frac{0}{2}} e^{-(2\pi i)2} = e^{-4\pi i} = 1 \text{ — точка одностороннего характера (arg: } -4\pi)$$

$z=\infty$  — вокруг данной точки

$$f(z) \rightarrow \frac{1}{z^{1/2}} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^{5/2}} \text{ : оборот на } 2\pi$$

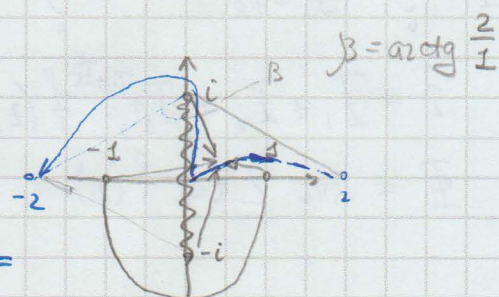
$$\arg \varphi(z) = e^{-2\pi i \cdot \frac{5}{2}} = e^{-5\pi i} = -1 \text{ — точка ветвления (arg: } -5\pi)$$

## Задание №4

$$f(z) = \sqrt[4]{(z+i)(z-i)(z-1)(z+1)}, \quad f(10) = 1$$

$$f(z) = \left| \frac{w(z)}{w(z_0)} \right| e^{i \arg w(z)} = \left| \frac{w(z)}{w(z_0)} \right| e^{i \arg w(z)}$$

$$f(z) = \left| \frac{\sqrt{(2+i)(2-i)(2-1)(2+1)}}{1} \right| e^{\frac{-\arg(2+i) + \arg(2-i) - \arg(2-1) + \arg(2+1)}{4}} = 1$$





$$= \sqrt{15} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{15} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

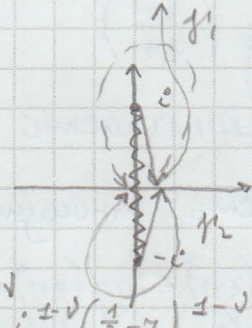
$$f(-2) = \left| \frac{(-2-i)(-2+i)(-2+1)(-2-1)}{1} \right| \cdot e^{\frac{\arg(-2-i) + 2\pi + \arg(-2+i) + \arg(-2+1) + \arg(-2-1)}{4} i} = \sqrt{15} e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

Задача №6

$$f(z) = \frac{(1+iz)^{\nu} (1-iz)^{1-\nu}}{1}, \quad f(0)=1$$

$$y_1: f(-0) = \left| \frac{(1-i0)^{\nu} (1+i0)^{1-\nu}}{1} \right| \cdot e^{i(0 \cdot \nu + 2\pi(1-\nu))} = e^{i2\pi\nu}$$

$$y_2: f(-0) = \left| \frac{(1-i0)^{\nu} (1+i0)^{1-\nu}}{1} \right| \cdot e^{i(0 \cdot \nu - 2\pi(1-\nu))} = e^{-i2\pi(1-\nu)} = e^{i2\pi\nu}$$



$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$$

$$f(z) = \left| \frac{(1+iz)^{\nu} (1-iz)^{1-\nu}}{1} \right| \cdot e^{i(\pi \cdot \nu + 0(1-\nu))} = \left| (1-y)^{\nu} (1+y)^{1-\nu} \right| e^{i\pi\nu} =$$

$$= (y-1)^{\nu} (y+1)^{1-\nu} e^{i\pi\nu} = y^{\nu} y^{1-\nu} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\nu} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{1-\nu} e^{i\pi\nu} = y \left(1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\nu} + \frac{1}{y^2} \frac{\nu(\nu-1)}{2} \dots\right) \left(1 + (1-\nu) \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \frac{(1-\nu)(1-\nu-1)}{2} \dots\right) =$$

$$= \left(y - \nu + \frac{1}{y} \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \dots\right) \left(1 + (1-\nu) \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \frac{(1-\nu)\nu}{2} + \dots\right) e^{i\pi\nu} =$$

$$= \dots - \frac{1}{y} \frac{(1-\nu)\nu}{2} - \nu(1-\nu) \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \dots = -\frac{1}{y} \left(\frac{(1-\nu)\nu}{2} + \nu(1-\nu) + \frac{\nu(1-\nu)}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{y} (2\nu(1-\nu)) e^{i\pi\nu}$$

$$C_{-1} = -2\nu(1-\nu) = 2\nu(\nu-1) e^{i\pi\nu}$$

$$y = \frac{z}{i}, \quad z=iy \rightarrow C_{-1} = 2i\nu(\nu-1) e^{i\pi\nu}$$

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = -2i\nu(\nu-1) e^{i\pi\nu}$$

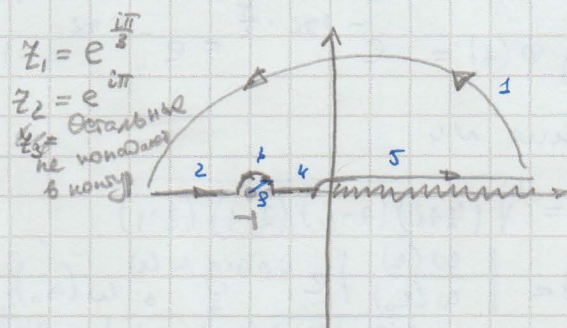
Задача №7

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3+1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3+1} dx$$

$$\Phi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad f(z) = \frac{\ln z}{z^3+1}$$

$$\Phi = 2\pi i \sum \text{res } f(z) =$$

$$z^3+1=0, \quad z^3=-1, \quad z = e^{i \frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$





$$I_1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$I_5 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} I$$

Сделаем параметризацию:

$$z = ze^{i\pi}, dz = -dz \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln z}{z^3+1} dz = \int_0^{\infty} \frac{\ln z + i\pi}{z^3+1} dz$$

Задача №7

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3+1} \quad (\text{Рассмотрим } I_{\text{всн}} = \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^3+1})$$

$$\Phi = I_1 + I_2 + I_{\text{гс}} + I_{\text{ср}}, \quad x \rightarrow z$$

$$I_1 = \int_0^R \frac{\ln^2 z}{z^3+1} dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\rho \rightarrow 0} I_{\text{всн}}$$

$$I_2 = \int_R^{\rho} \frac{\ln^2 z + 4\pi i \ln z - 4\pi^2}{e^{3i\pi} z^3+1} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 z + 4\pi i \ln z - 4\pi^2}{z^3+1} dz = - \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 z}{z^3+1} dz -$$

$$- 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln z}{z^3+1} dz + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3+1} = -I_{\text{всн}} - 4\pi i I + 4\pi^2 I_0$$

$$I_{\text{гс}} \rightarrow 0 \quad (\text{параметризацию брала } z = \rho e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi], \rho \rightarrow 0)$$

$$I_{\text{ср}} \rightarrow 0 \quad (\text{параметризацию брала } z = R e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi], |\int_0^1 f(z) dz| \leq \int_0^1 |f(z)| |dz|)$$

$$\Phi = I_1 + I_2 = I_{\text{всн}} - I_{\text{всн}} - 4\pi i I + 4\pi^2 I_0 = -4\pi i I + 4\pi^2 I_0$$

$$\Phi = 2\pi i \sum \text{res } f(z)$$

$$z^3+1=0, \quad z^3=-1=e^{i(\pi+2\pi n)}, \quad z=e^{i\frac{\pi+2\pi n}{3}}$$

$$z_1=e^{i\pi/3}, \quad z_2=e^{i\pi}, \quad z_3=e^{i5\pi/3} \quad (\text{браве } z=e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\pi/3} \text{ - не берем})$$

$$\text{res}_{z=e^{i\pi/3}} f(z) = \frac{\ln z}{(z-e^{i\pi})(z-e^{i5\pi/3})} \Big|_{z=e^{i\pi/3}} = \frac{i\pi/3}{(e^{i\pi/3}-e^{i\pi})(e^{i\pi/3}-e^{i5\pi/3})}$$

$$\text{res}_{z=e^{i\pi}} f(z) = \frac{\ln z}{(z-e^{i\pi/3})(z-e^{i5\pi/3})} \Big|_{z=e^{i\pi}} = \frac{i\pi}{(e^{i\pi}-e^{i\pi/3})(e^{i\pi}-e^{i5\pi/3})}$$

$$\text{res}_{z=e^{i5\pi/3}} f(z) = \frac{\ln z}{(z-e^{i\pi/3})(z-e^{i\pi})} \Big|_{z=e^{i5\pi/3}} = \frac{i\frac{5\pi}{3}}{(e^{i5\pi/3}-e^{i\pi/3})(e^{i5\pi/3}-e^{i\pi})}$$

$$e^{i\pi/3}-e^{i\pi} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{i\pi/3}-e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$e^{i\pi}-e^{i5\pi/3} = 1 - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{i\pi})(e^{\frac{i\pi}{3}})$$

(Остается посчитать вычеты и приравнять мнимые и действительные части)

Задача ~5

$$\int \frac{\bar{z} dz}{(1z+2)^2} = \left| \begin{array}{l} z = re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \bar{z} = re^{-i\varphi}, dz = ire^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{re^{-i\varphi} ire^{i\varphi} d\varphi}{(r^2+2)^2} = \frac{ir^2}{(r^2+2)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi i r^2}{(r^2+2)^2} = \frac{2\pi i \cdot 16}{(4+2)^2} = \frac{2\pi i \cdot 16}{36 \cdot 9} = \frac{8}{9} \pi i$$

Задача ~9

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^{1/8}(x+1)}$$

$$\Phi = I_1 + I_2 + I_{\gamma_3} + I_{C_R}, \quad x \rightarrow z$$

$$I_{C_R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$I_{\gamma_3} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{\ln z dz}{z^{1/8}(z+1)} \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\ln z dz}{z^{1/8}(z+1)}$$

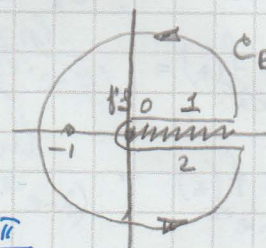
$$I_2 = \int_R^\rho \frac{(\ln z + 2\pi i)}{z^{1/8} e^{\frac{2\pi i}{8}}(z+1)} dz \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \int_\infty^0 \frac{\ln z dz}{e^{\frac{i\pi}{4}} z^{1/8}(z+1)} + 2\pi i \int_\infty^0 \frac{dz}{e^{\frac{i\pi}{4}} z^{1/8}(z+1)} =$$

$$= -e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty \frac{\ln z dz}{z^{1/8}(z+1)} - 2\pi i e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1/8}(z+1)}$$

$$\Phi = I - e^{\frac{i\pi}{4}} I - 2\pi i e^{\frac{i\pi}{4}} I_0$$

$$\Phi = 2\pi i \operatorname{res}[f(z), z=-1] = 2\pi i \frac{\ln(-1)}{(-1)^{1/8}} = 2\pi i \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{e^{\frac{i\pi}{8}}} =$$

$$= -\frac{2\pi^2}{e^{\frac{i\pi}{4}}}$$



$$-\frac{2\pi^2}{e^{\frac{i\pi}{4}}} = I - e^{\frac{i\pi}{4}} I - 2\pi i e^{\frac{i\pi}{4}} I_0 - e^{\frac{i\pi}{4}} 2\pi^2 = I(1 - e^{\frac{i\pi}{4}}) - 2\pi i e^{\frac{i\pi}{4}} I_0$$

$$-2\pi^2 = I(e^{\frac{i\pi}{8}} - e^{-\frac{i\pi}{8}}) - 2\pi i e^{-\frac{i\pi}{4}} I_0$$

Приравниваем мнимые и действительные части

$$0 = 2 \sin \frac{\pi}{8} I - 2\pi \cos \frac{\pi}{8} I_0$$



$$-2\pi^2 = -2\pi \sin \frac{\pi}{8} I_0, \quad \pi = \sin \frac{\pi}{8} I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} I = \pi \cos \frac{\pi}{8} I_0 = \pi \cos \frac{\pi}{8} \frac{\pi}{\sin \pi/8}$$

$$I = \pi^2 \frac{\cos \pi/8}{\sin^2 \pi/8}$$