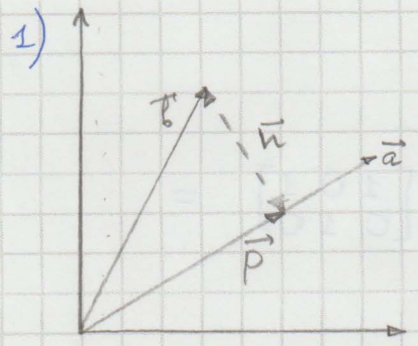
Домашнее задание №3

Задание №1.

1)



$\vec{n} = \vec{b} - \vec{p}$, $\vec{p}$ — проекция вектора $\vec{b}$.

$\vec{p} = k\vec{a}$, $\mathbb{P} = ka$

$\vec{n} = \vec{b} - k\vec{a}$ (*)

$\vec{n} \perp \vec{a} \Rightarrow a^T n = 0$

$a^T(b - ka) = 0$, $a^T b - a^T k a = 0$

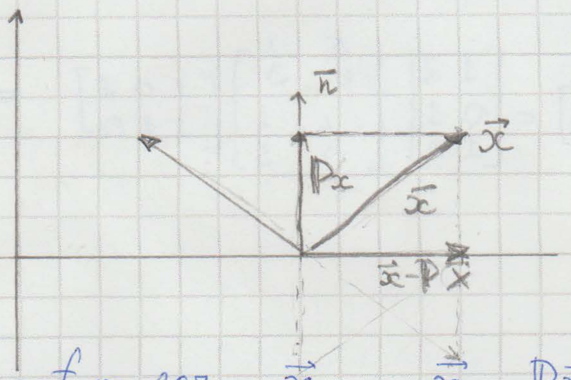
$$k = \frac{a^T b}{a^T a}$$

Таким образом: $\mathbb{P} = \frac{aa^T}{a^T a}$

$$\mathbb{P}(b) = \overbrace{a\,(a^T a)^{-1}\,a^T}^{\mathbb{P}}\, b$$

$$\mathbb{P}^T = a\,(a^T a)^{-1,T}\,a^T = \left\{(a^T a)^T = a^T a\right\} = a\,(a^T a)^{-1} a^T = \mathbb{P}$$

2) Геометрическая интерпретация:



$\mathbb{P} = n\,(n^T n)^{-1} n^T$

Пусть есть $\vec{x}$: $\vec{x} - \mathbb{P}\vec{x} - \mathbb{P}\vec{x} = (I - 2\mathbb{P})\vec{x}$

Рассмотрим соотношение: $\cancel{(*)}$

Как видим, получаем поворот отн. $\vec{n}$ на $180°$.

Матрица унитарна, если: $A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} = A^T$

Тогда $A \cdot A^T = E$ — для унитарных матриц.

$(I - 2\mathbb{P})(I - 2\mathbb{P})^T = (I - 2\mathbb{P})(I^T - 2\mathbb{P}^T) = II^T - 2I\mathbb{P}^T - 2\mathbb{P}I^T + 4\mathbb{P}\mathbb{P}^T =$ (доказали выше, что $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$) $= I - 2\mathbb{P} - 2\mathbb{P} + 4\mathbb{P}\cdot\mathbb{P} =$ | для $\mathbb{P}$: $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$ и $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ | $= I - 4\mathbb{P} + 4\mathbb{P} = I \Rightarrow$ матрица $I - 2\mathbb{P}$ — унитарна.

$(I - 2\mathbb{P})\vec{v} = -\mathbb{P}\vec{v} + (I - \mathbb{P})\vec{v}$ — отражение относительно ортог. к $\mathbb{P}_x$

Задание №2

Проектор: $\mathbb{P} = A(A^TA)^{-1}A^T$

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

2) $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}}_{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Задание №5

II з. Ньютона:

$f_i = ma_i = a_i$, т.к $m=1$.

$v_i = v_{i-1} + a_i t = v_{i-1} + a_i$

Для координаты:

$x_i = x_{i-1} + v_{i-1} t + \frac{a_i t^2}{2} = x_{i-1} + v_{i-1} + \frac{a_i}{2}$

$v_i = v_{i-1} + a_i = v_{i-2} + a_{i-1} + a_i = \ldots = \sum_{z=1}^{i} a_z$

$x_i = x_{i-1} + v_{i-1} + \frac{a_i}{2} = x_{i-2} + v_{i-2} + \frac{a_{i-1}}{2} + v_{i-1} + \frac{a_i}{2} =$

$= \sum_{z=1}^{i-1} v_z + \frac{1}{2} \sum_{z=1}^{i} a_i = \sum_{z=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{z} a_j + \frac{1}{2} \sum_{z=1}^{i} a_z$

Получаем:

$x_i = \sum_{z=1}^{i} \left(i - z + \frac{1}{2}\right) a_z$

$A_{1,j} = 1, \quad A_{2,j} = \frac{21}{2} - j$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{19}{2} & \frac{17}{2} & \frac{15}{2} & \frac{13}{2} & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Задание №2 (QR-разложение)

$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Орт-я Грамма-Шмидта:

$\vec{a_1^{(1)}} = \vec{a_1}$

$\vec{a_2^{(1)}} = \vec{a_2} - \frac{(\vec{a_2}, \vec{a_1}^{(1)})}{(\vec{a_1}^{(1)}, \vec{a_1}^{(1)})} \vec{a_1}^{(1)} = \vec{a_2}$

Базис. векторы

$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$Q = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$R = Q^{-1}A = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Орт-я Грамма-Шмидта:

$\vec{b}_1^{(1)} = \vec{b}_1$

$$\vec{b}_2^{(1)} = \vec{b}_2 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{b}_1^{(1)})}{(\vec{b}_1^{(1)}, \vec{b}_1^{(1)})} \vec{b}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Базис. векторы:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$Q = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^{-1}B = Q^T B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$