Задача №1

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} + \frac{2z}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}$$

1) $z=\pi$

Пусть $z = \pi+\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$

$$\sin z = \sin(\pi+\varepsilon) = \sin\pi \cancel{\cos\varepsilon}^{0} + \cos\pi \sin\varepsilon = -\sin\varepsilon \approx -\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6}\right)} = -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varepsilon^2}{6}} \approx -\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{6}\right) = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\varepsilon = z-\pi \Rightarrow \frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{z-\pi} - \frac{z-\pi}{6}$$

$$f(z)_{\pi} = \cancel{-\frac{1}{z-\pi}} - \frac{z-\pi}{6} + \cancel{\frac{1}{z-\pi}} + \frac{1}{z+\pi} = \frac{1}{z+\pi} - \frac{z-\pi}{6}$$

2) $z=-\pi$

Пусть $z = -\pi+\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$

$$\sin z = \sin(-\pi+\varepsilon) = \sin(-\pi)\cos\varepsilon + \cos(-\pi)\sin\varepsilon = \cos\pi \sin\varepsilon$$

Аналогично, как и для первого случая: $\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{z+\pi} - \frac{z+\pi}{6}$

$$f(z)_{-\pi} = \cancel{-\frac{1}{z+\pi}} - \frac{z+\pi}{6} + \frac{1}{z-\pi} + \cancel{\frac{1}{z+\pi}} = -\frac{z+\pi}{6} + \frac{1}{z-\pi}$$

Получаем точку устранимого разрыва.

Задача №2

1) $f(z) = \frac{\sin z}{1-\tan z}$

$1 = \tan z \Rightarrow z_0 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Точка z_0 – изолированная особая точка

Т.к $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то особая точка является полюсом.

2) $f(z) = \frac{e^{\frac{c}{z-a}}}{e^{z/a}-1}$

- $z=a$

$$e^{\frac{c}{z-a}} = 1 + \frac{c}{z-a} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{(z-a)^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!(z-a)^n}$$

Ряд содержит бесконечно много членов (из главная часть) $\Rightarrow$

$\Rightarrow z=a$ – изолированная существенно особая точка

- $e^{\frac{z}{a}} = 1$, $z_0' = 2\pi i a n$

$e^{\frac{z}{a}} = 1+\frac{z}{a}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!a^n}$

Получили ряд, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

Задача №3

$f(z) = ze^{1/z}e^{-1/z^2}$, $z=0$

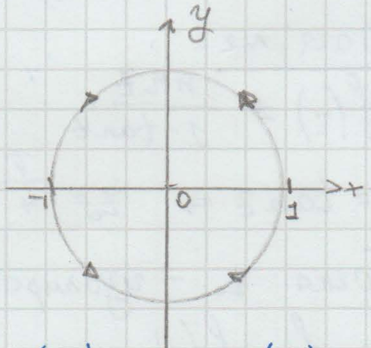
$e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\ldots$

$e^{-\frac{1}{z^2}} = 1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^4}-\frac{1}{6z^6}+\ldots$

$ze^{1/z}e^{-\frac{1}{z^2}} = z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^4}-\frac{1}{6z^6}+\ldots\right) =$

$\Rightarrow$ главная часть ряда содержит бесконечное число членов разложения $\Rightarrow$ получили существенно особую изолированную точку.

Задача №4



1) $\int_C \frac{ze^z}{\tan z^2}dz = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\sum_i \operatorname{res} f(z_i)$

$z^2=0$

$z^2=\frac{\pi}{2}+\pi n$ – в контур не попадает

Если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то
$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

(Но т.к. $\varphi(z_0)=ze^z\big|_{z_0}=0$, то данное условие не подходит)

$\tan z^2 \approx z^2-\frac{z^6}{3}$, $\frac{ze^z}{z^2-\frac{z^6}{3}} = \frac{1}{z}\frac{e^z}{1-\frac{z^4}{3}} = \frac{1}{z}e^z\left(1+\frac{z^4}{3}\right) = \left(\frac{1}{z}+\frac{z^3}{3}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots\right)$

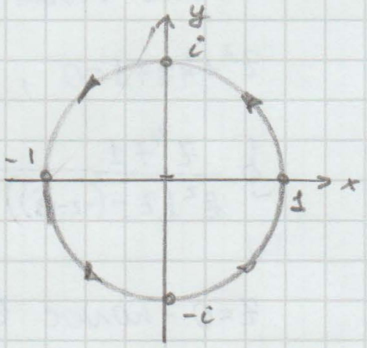
Получаем полюс первого порядка

$\operatorname{res} f(z_i) = \frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right] = \lim\limits_{z\to 0}\frac{ze^z}{\tan z^2}z = \lim\limits_{z\to 0}\cancelto{1}{\frac{z^2}{\tan z^2}}e^z = 1$

$\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i$

2) $\int\limits_C e^{-1/z}\sin\frac{1}{z}\,dz = \oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_i \operatorname{res} f(z_i)$

• $z=0$ – существенно особая точка (у экспоненты пределы с $+0$ и с -0 разные, если раскладывать в ряд синус по степеням z, то в главной части получится бесконечно много членов)



Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z^5}\right)\ldots$$

$$e^{-1/z}\sin\frac{1}{z} = \left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{z^3}+\ldots\right) = \frac{1}{z}+\ldots$$

$$\operatorname{res} f(0) = C_{-1} = 1$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i$$

3) $\int\limits_C \frac{e^z}{z^n}\,dz = \oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_i \operatorname{res} f(z_i)$

$z_0=0$ – особая точка.

$$\frac{1}{1+(z^n-1)} \approx 1-(z^n-1)+(z^n-1)^2\ldots$$

Получаем, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \Rightarrow$ полюс n-го порядка

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z_0} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^z = \frac{1}{(n-1)!}$$

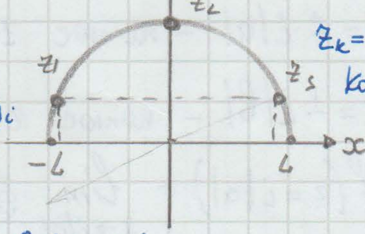
$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{(n-1)!}$$

Задача №5

$z^6=-1=e^{i\pi}$

$z^n e^{in\varphi} = 1\cdot e^{i\pi}$

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{(\varphi+2\pi k)i}{n}}$



$z_k = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)i}$

Корни: $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_3=\frac{5\pi}{6}$

1) $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x^4}{1+x^6}\,dx = \frac{2\pi}{3}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x^4}{1+x^6} = \lim_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^{L}\frac{x^4\,dx}{1+x^6} = \lim_{L\to\infty}\left(\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,dx+\int\limits_C f(z)\,dz\right)$$

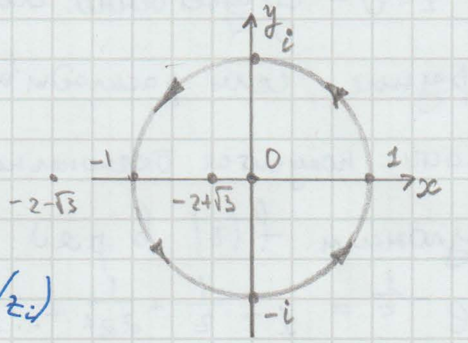
$\lim\limits_{L\to\infty}\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, т.к. $\frac{z^4}{1+z^6}\to 0$ при $z\to\infty$

$$\frac{x^4}{1+x^6}\approx\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)}{g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{x_i^4}{6x_i^5} = \frac{1}{6x_i}$$ – вычет в любом нуле.

$$I = \frac{2\pi i}{6}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right] = \frac{2\pi i}{6}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{6}}}+\frac{1}{e^{i\pi/2}}+\frac{1}{e^{\frac{i5\pi}{6}}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{2\pi i}{6e^{i\pi/6}}+\frac{2\pi i}{6e^{\frac{i5\pi}{6}}}+\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

2) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \left| \begin{array}{ll} e^{i\theta}=z, & \cos\theta = \frac12\left(z+\frac1z\right) \\ d\theta = \frac{dz}{iz}, & \cos 2\theta = \frac12\left(e^{i2\theta}+\frac{1}{e^{i2\theta}}\right) = \frac12\left(z^2+\frac1{z^2}\right)\end{array}\right| = \int_{|z|=1} \frac12\left(z^2+\frac1{z^2}\right) \frac{1}{2+\frac12\left(z+\frac1z\right)}\frac{dz}{iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\cancel{2}}\, \frac{z^4+1}{z^2}\, \frac{\cancel{2}}{4+z+\frac1z}\, \frac{dz}{iz} = \frac1i\oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2(4z+z^2+1)}\,dz$$



Особые точки: $z=0$

$z^2+4z+1=0$, $z=-2\pm\sqrt3$

$$\oint_{|z|} \frac{z^4+1}{z^2\left(z-(-2-\sqrt3)\right)\left(z-(-2+\sqrt3)\right)}\,dz = 2\pi i\sum_i \operatorname{res} f(z_i)$$

$z=0$ - полюс второго порядка: $\left(\lim_{z\to0} f(z)=\infty\right)$

$$\operatorname{res} f(z=0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right] = \frac11\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{z^2+4z+1}\right] =$$

$$= \lim_{z\to0}\frac{2\left(\cancel{z^5}+\cancel{6z^4}+\cancel{2z^3}-\cancel{z}-2\right)}{\left(\cancel{z^2}+\cancel{4z}+1\right)^2} = -4$$

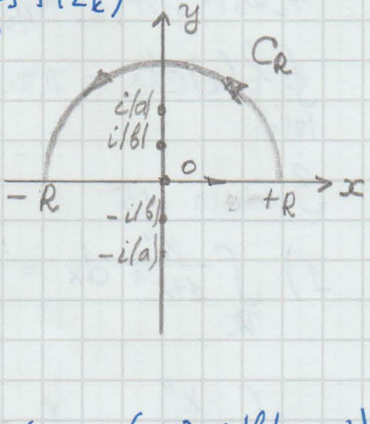
$z=-2+\sqrt3$ - полюс первого порядка.

$$\operatorname{res} f(z=-2+\sqrt3) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right] = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{(z^4+1)\cancel{\left(z-(-2+\sqrt3)\right)}}{z^2\left(z-(-2-\sqrt3)\right)\cancel{\left(z-(-2+\sqrt3)\right)}}\right) =$$

$$= \frac{98-56\sqrt3}{(7-4\sqrt3)\,2\sqrt3} = \frac{7\sqrt3}{3}$$

$$J = \frac{1}{\cancel{i}}\cdot 2\pi\cancel{i}\left(-4+\frac{7\sqrt3}{3}\right) = +2\pi\left(-4+\frac{7\sqrt3}{3}\right) = -8\pi+\frac{14\pi\sqrt3}{3}$$

3) $$\int_{\mathbb R}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{res} f(z_k)$$



Особые точки:

$x=\pm i|a|$ - полюс $1^{го}$ порядка

$x=\pm i|b|$ - полюс $2^{го}$ порядка

$$\operatorname{res} f(z=i|a|) = \lim_{z\to i|a|}\frac{1}{(\cancel{z}+i|a|)(\cancel{z^2}+b^2)^2} = \frac{1}{2i|a|}\,\frac{1}{(b^2-a^2)^2}$$

$$\operatorname{res} f(z=i|b|) = \lim_{z\to i|b|}\frac{d}{dz}\,\frac{1}{(\cancel{z^2}+a^2)(z+i|b|)^2} = \lim_{z\to i|b|}\left(-\frac{2(2z^2+i|b|z+a^2)}{(z+i|b|)^3(z^2+a^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4i|b|^3}\,\frac{(a^2-3b^2)}{(a^2-b^2)^2}$$

$$J = 2\pi i\left(\frac{1}{2i|a|}\,\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{4i|b|^3}\,\frac{a^2-3b^2}{(a^2-b^2)^2}\right) = \frac{\pi}{|a|}\,\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{\pi}{2|b|^3}\,\frac{a^2-3b^2}{(a^2-b^2)^2} =$$

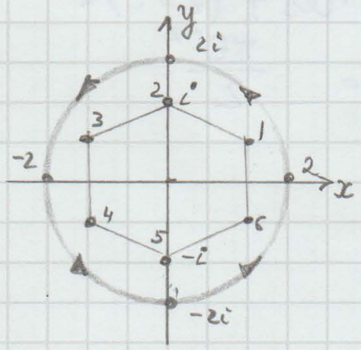
$$= \frac{\pi}{2|a||b|^3}\,\frac{1}{(a^2-b^2)^2}\left(2|b|^3+|a|(a^2-3b^2)\right)$$

Заметим, что $(|a|+2|b|)(|a|-|b|)^2=(|a|^3-3|a||b|^2+2|b|^3)$

Тогда получаем:

$$\mathcal{I}=\frac{\pi}{2|a||b|^3}\,\frac{1}{(|a|+|b|)^2}\cdot(|a|+2|b|)$$

Задача №6



$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^5dz}{1+z^6}=2\pi i\sum_k \operatorname{res} f(z_k)$$

Особые точки:

$z^6=-1=1\cdot e^{i(\pi+2\pi n)}$

$z=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)}$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_3=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_4=e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $z_5=e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_6=e^{\frac{11\pi}{6}}$

$$\oint\limits_{|z|}\frac{z^5dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}=\mathcal{I}$$

- Если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq0$, $\psi'(z_0)\neq0$, $\psi(z_0)=0\Rightarrow \operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

Условия выполняются. $\varphi(z_0)\neq0$, $\psi'(z_0)=6z^5\neq0$, $\psi(z_0)=0$

Получаем: $\mathcal{I}=2\pi i\sum_{k=1}^{6}\frac{\cancel{z_k^5}}{6\cancel{z_k^5}}=2\pi i$

Задача №7

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2x\,dx}{x^2(x^2+1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos2x}{2x^2(x^2+1)}dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2x^2(x^2+1)}}_{\mathcal{I}_1}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos2x\,dx}{2x^2(x^2+1)}}_{\mathcal{I}_2}$$

$$\mathcal{I}_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2x^2(x^2+1)}=\frac{2\pi i}{2}\sum_k\operatorname{res} f(z_k)$$

Особые точки:

- $x=0$ - полюс второго порядка
- $x=\pm i$ - полюсы первого порядка

$\operatorname{res} f(z=0)=\lim\limits_{z\to0}\frac{d}{dz}\frac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{z\to0}\left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)=0$

$\operatorname{res} f(z=i)=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(x+i)x^2}=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}$

$\operatorname{res} f(z=-i)=\lim\limits_{z\to -i}\frac{1}{(x-i)x^2}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$

$\sum_k\operatorname{res} f(z_k)=0$

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{x^2(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2x^2(x^2+1)}dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2z}}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\, \mathrm{Im}\left[\sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{res}\, f(z_k)\right]$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i}\,dx}{x\cdot(x^2+1)} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{res}\, f(z_k) = 2\pi i}$$

$$\mathrm{res}\, f(z=i) = -\frac{e^{-2}}{2i} \Rightarrow \mathrm{Im}\left[\mathrm{res}\, f(z_k)\right] = -\frac{e^{-2}}{2}$$

$$\mathcal{J} = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$

Задача №8

т.к. фу-и четная

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+k^2}\,dx}_{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_0$$

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x\,dx}{x^2+k^2} = 2\pi\, \mathrm{Re}\left[\sum_{z=z_k}^{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{res}\left(e^{i\alpha z} \frac{z}{z^2+k^2}\right)\right]$$

$f(z) = \dfrac{e^{i\alpha z} z}{z^2+k^2}$, $z_0 = \pm i|k|$ — полюса первого порядка

$$\mathrm{res}_{z=i|k|}\, f(z) = \lim_{z\to i|k|} \frac{e^{i\alpha i|k|}\,\cancel{i|k|}}{2\cancel{i|k|}} = \frac{e^{-\alpha|k|}}{2}$$

$$\mathcal{J} = \frac{2\pi e^{-\alpha|k|}}{2} = \pi e^{-\alpha|k|}$$

$$\mathcal{J}_0 = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha|k|}$$

Заметим, что $\dfrac{x \sin \alpha x}{x^2+(-k)^2} = \dfrac{x \sin \alpha x}{x^2+k^2}$ и $\dfrac{x \sin(-\alpha)x}{x^2+k^2} = -\dfrac{x \sin \alpha x}{x^2+k^2}$

Тогда, учтя эти данные, получим

$$\mathcal{J}_0' = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha||k|}\ \mathrm{sign}(a)$$

Задача №9

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}\cdot e^{-i/z}}{1+z^2}$$

Особые точки: $x = \pm i$ — полюса первого порядка

$x = 0$ — существенно особая точка, т.к. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ — не сущ-ст.

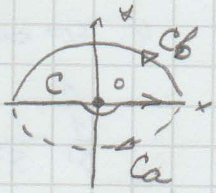
$$\operatorname{res} f(z=i) = \frac{e^{-1}\cdot e^{-1}}{2i} = \frac{e^{-2}}{2i}$$

Таким образом:

$$I = 2\pi i \operatorname{res} f(z_k) = \frac{2\pi i e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2}$$

Задача №10

т.к ф-я четная



$$1)\ I_0 = \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^3}dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^3}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = 0$$

$$C_2 = C + C_a \qquad C_1 = C + C_b$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{1}{z^3} = \frac{1}{2i}\left[\int_C \frac{e^{iz}}{z^3}dz - \int_C \frac{e^{-iz}}{z^3}dz\right]$$

$$\frac{1}{2i}\left[\underbrace{\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z^3}dz}_{=\,-\pi i} - \underbrace{\int_{C_2}\frac{e^{-iz}}{z^3}}_{=\,0}\right] = -\frac{\pi}{2}$$

0, т.к нет особых точек

$$I_0 = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$2)\ I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iz}dz}{z^2+9} = 2\pi i \sum_{k}^{\operatorname{Im} z_k<0}\operatorname{res} f(z_k)$$

Особые точки: $z = \pm i3$ – полюса первого порядка

$$\operatorname{res}_{z=i3} f(z) = \lim_{z\to -3i}\frac{e^{-iz}}{z-3i} = \frac{e^{-3}}{-2\cdot 3i}$$

$$I = -2\pi i\cdot\frac{e^{-3}}{-2\cdot 3i} = \frac{\pi e^{-3}}{3}$$

Задача №11

$f(z) = z^3\cos\frac{1}{z-2}$, существенно особая точка $z=2$

$$\frac{1}{z} = \xi \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{\xi^3}\cos\frac{\xi}{1-2\xi} \approx \frac{1}{\xi^3}\cos\underbrace{\xi\left(\xi(1+2\xi+4\xi^2+\ldots)\right)}_{\varphi} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\xi^3}\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\ldots\right) = \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi^3}\left(\frac{\xi^2}{2}+2\xi^3+\frac{143}{24}\xi^4+\ldots\right) = \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{2\xi} - 2 - \frac{143}{24}\xi$$

А. т.к. нам нужен член с $\frac{1}{z} = \xi$, то получим, что $C_{-1} = -\frac{143}{24}$

$$C_{-1} = -\underset{\infty}{\mathrm{res}}\, f(z) = \frac{143}{24}$$

Задача №12

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1+z} \quad \text{(полюса первого порядка)}$$

1. $z = 0$

$$\mathrm{res}\, f(z=0) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2(3z^2+1)}{(-z^2+1)^3} = 1$$

2. $z = 1$

$$\mathrm{res}\, f(z=1) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

3. $z = -1$

$$\mathrm{res}\, f(z=-1) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}$$

4. $z = \infty$, $\xi = \frac{1}{z} = 0$

$$\frac{1}{\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi^5}} = \frac{\xi^5}{\xi^2 - 1} = -\xi^5\frac{1}{1-\xi^2} = -\xi^5(1+\xi^2+\dots)$$ — получаем, что

$$C_{-1} = 0 \Rightarrow \underset{z=\infty}{\mathrm{res}}\, f(z) = 0$$

Задача №13

2) $$g(z) = e^{-e^{+\frac{1}{z}}} = e^{-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\dots\right)} = e^{-1}e^{-\frac{1}{z}}e^{+\frac{1}{2z^2}}e^{\dots} = e^{-1}\left(1-\frac{1}{z}\dots\right)\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)\dots$$

минусы

То есть, коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен $-e^{-1}$

1) $$f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z} = \sin\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{-2k-1}\sum z^n$$

Мы хотим получить коэффициент при z^{-1}

$$z^{-2k-1}\cdot z^n = z^{-1},\quad z^{-2k-1+n} = z^{-1},\quad 2k = n$$

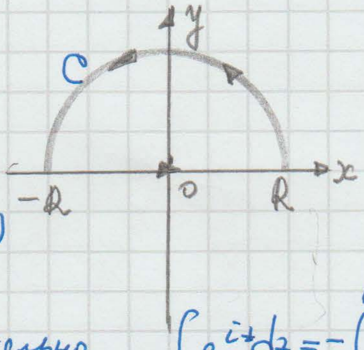
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{-2k-1}\cdot z^{2k} \Rightarrow C_{-1} = \sum\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sin(1)$$

Задача №14

1) По лемме Жордана: Пусть C_R — лежащая в верхней полуплоскости дуга окружности радиуса R с центром в некоторой фиксированной точке z_0, а функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = e^{itz}F(z)$, $t > 0$

Если функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек и $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$, то

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$$

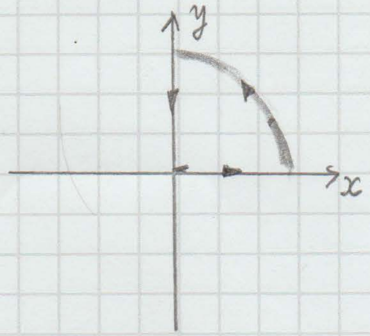


$$\int_{-R}^{R} e^{iz}dz = \frac{e^{iR}-e^{-iR}}{i} = 2\sin(R)$$

$$\oint e^{iz}dz = \int_{-R}^{R} e^{iz}dz + \int_C e^{iz}dz = 0 \text{ (т.к нет особ. точек)}$$

$\lim\limits_{R\to\infty} 2\sin(R)$ – не имеет предела, а, следовательно, $\int_C e^{iz}dz = -\int_{-R}^{R} e^{iz}dz$ – – тоже предела не имеет.

2) $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iz^2}dz$



$$\int_{C_R} e^{iz^2}dz = \left| \begin{matrix} m=z^2 \\ dm=2zdz \end{matrix} \right| = \int_{C_R'} e^{im}\frac{dm}{2\sqrt{m}} =$$

Функция $\frac{1}{2\sqrt{m}}$ аналитична на всей оси

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{m}}=0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iz^2}dz=0$$

Кон-р C_R:

$z=Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi/4]$

$$\left(M(R)=\max_{z\in C_R}|f(z)|,\ \max|f(z)|=\frac{1}{2\sqrt{z}},\ \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{z}}=0 \right)$$

Кон-р C_R':

$m=R^2e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Предел существует.