# Ранг матрицы.

*1. Рангом матрицы* $A$ (rang $A$ или $r(A)$) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

*2. Свойства ранга матрицы*:

*а*) если матрица $A$ имеет размеры $m \times n$, то rang $A \le \min(m;\ n)$;

*б*) rang $A = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $A$ равны 0;

*в*) если матрица $A$ – квадратная порядка $n$, то rang $A = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

*3. Элементарные преобразования*, не меняющие *ранга* матрицы:

*а*) отбрасывание нулевой строки (столбца);

*б*) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

*в*) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

*г*) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

*д*) транспонирование матрицы.

*4.* С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \dots, r;\ \ r \le k$.

Ранг ступенчатой матрицы равен $r$.

## Ранг матрицы.

### Миноры k-го порядка

- Внутри любой матрицы A размера m x n вычеркиванием некоторых строк и столбцов можно получить квадратные **подматрицы k-го порядка**, где k – не больше меньшего из чисел m и n.
- **Определители** таких подматриц называются **минорами k-го порядка** матрицы A.
- **Пример**.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & \cancel{1} & 1\\ 0 & \cancel{3} & 2\end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3$$

**Матрица 2 x 3**

**Минор 2-го порядка**

### Ранг матрицы

- **Рангом** матрицы A (matrix rank) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Обозначается r(A).

- **Свойства** ранга матрицы:
- 1. Не превосходит меньшего из размеров матрицы.
- 2. Равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая.
- 3. Для квадратной матрицы A n x n ранг r(A)=n тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. т.е. $|A| \neq 0$

## Пример 1

- Вычислим ранг матрицы, используя определение.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{4x4} \Rightarrow r(A) \le 4$$

Det A=0, т.к. определитель содержит строку нулей,

значит, ранг матрицы не больше 3-х

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(A)<4 \Rightarrow r(A) \le 3$$

:

- Поскольку существует минор 2 порядка, не равный 0, то ранг матрицы больше или равен 2.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=24+6=30 \ne 0 \Rightarrow r(A) \ge 2$$

- Вычислим все возможные миноры 3-его порядка которые можно получить из матрицы А.

- Если хотя бы один из них не равен нулю, то $r(A)=3$
- Если все равны нулю, то $r(A)=2$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 12 & -2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(A)=2$$

- В общем случае вычисление ранга таким способом трудоемко!

- Ранг матрицы в следующих примерах будем считать другим методом – с помощью ***элементарных преобразований.***

# Элементарные преобразования

- 1. Отбрасывание нулевой строки (столбца)
- 2. Умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю.
- 3. Изменение порядка строк (столбцов).
- 4. Прибавление к каждому элементу строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.
- 5. Транспонирование матрицы.

- **Теорема**.
- Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не изменяется.

# Ступенчатая матрица

- Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix} \qquad a_{ii} \neq 0$$

- Ранг ступенчатой матрицы равен *r*, так как имеется минор *r*-го порядка не равный нулю.

## Алгоритм вычисления ранга матрицы

- Ранг матрицы вычисляется путем приведения ее к ступенчатому виду с помощью **элементарных преобразований.**

$$A=\begin{pmatrix}2&5&6\\4&-1&5\\2&-6&-1\end{pmatrix}\underset{(3)-(1)}{\overset{(2)-(1)\cdot 2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&5&6\\4-4&-1-10&5-12\\2-2&-6-5&-1-6\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&5&6\\0&-11&-7\\0&-11&-7\end{pmatrix}\underset{(3)-(2)}{\sim}\begin{pmatrix}2&5&6\\0&-11&-7\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&5&6\\0&-11&-7\end{pmatrix}$$

**Ранг равен 2**

# Пример

- Расположить матрицы в порядке убывания их рангов

1. Расположить матрицы в порядке убывания их рангов:

$$1)\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&5&6&1\\5&7&9&2\end{pmatrix}\ 2)\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ 3)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\ 4)\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

*Решение.*

С помощью *элементарных преобразований*, не меняющих ранга матрицы, приведем ее к ступенчатому виду. **ранг «ступенчатой» матрицы равен числу ненулевых строк.**

$$1)A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&5&6&1\\5&7&9&2\end{pmatrix}\underset{\substack{\alpha_2-4\alpha_1\\ \alpha_3-5\alpha_1}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0-3&-6&-3\\0-3&-6&-3\end{pmatrix}\underset{\alpha_3-\alpha_2}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0-3&-6&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ R(A)=2$$

$$2)\ B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ R(B)=3$$

$$3)C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\underset{\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ R(C)=1$$

$$4)D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ - нулевая матрица, R(D)=0

*Ответ: 2, 1, 3, 4*

## Примеры решения задач.

***Пример 1***

Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица $A$ имеет размер 4 × 3, значит, $r(A)\le 3$. С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранг матрицы, приведем матрицу $A$ к ступенчатому виду.

*1)* Транспонируем матрицу $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

*2)* Умножим элементы 1-й строки на (–1), сложим ее со 2-й и 3-й строками матрицы. В новой матрице поменяем местами 2-ю и 3-ю строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \end{matrix}$$

*3)* Умножим элементы 2-й строки на 3 и сложим с элементами 3-й строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу размера 3 × 4, у которой 3 ненулевых элемента на главной диагонали, значит, $r(A)$ = 3. Эта матрица имеет ненулевой минор 3-го порядка, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

## Пример 2.

Определить ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение.*

Вычислим ранг матрицы А с помощью элементарных преобразований:

$R(A) = R(A^T)$

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{поменяем местами первый и последний столбцы}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \to$$

из 2ойстроки вычтем 1ую, из 3ей строки вычтем 1ую:

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

(из 3ей строки вычтем элементы 2ой, умноженной на 2)

*Ответ: 3*

## Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Р е ш е н и е.** С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранга матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;\; -2 \;\; -3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;\; -1 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Отбросив нулевую строку, найдем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой существует минор 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, значит, ранг матрицы равен 3