2.1. Правило Крамера.

Из теоремы об обратной матрице следует, что равенство (4.3) может быть записано в виде

$$x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b.$$

Следовательно,

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1 A_{1j} + \ldots + b_n A_{nj}),\ j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Обозначим через Δ_j определитель матрицы, которая получается из A заменой j-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n.j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по j-му столбцу, будем иметь:

$$\Delta_j = b_1 A_{1j} + \ldots + b_n A_{nj}.$$

Тем самым равенства (4) могут быть записаны в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|},$$
$$\ldots$$
$$x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}. \tag{5}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1 (правило Крамера). *Решение системы*

$$Ax = b$$

с невырожденной квадратной матрицей A единственно и имеет вид (5).

Пример 2.

Найти решение системы

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

с помощью правила Крамера.

Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1.$$

Упражнение 2.

Найти решение системы

$$\begin{aligned} &x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ &x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{aligned}$$

с помощью правила Крамера.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ |A| = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 5 = 31 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна и определена. Воспользуемся правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 31,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 1 \cdot (-7) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 = 31.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{31}{31} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{0}{31} = 0,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{31}{31} = 1.$$

2.2. Метод обратной матрицы.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде (2) с невырожденной квадратной матрицей *A*. В силу теоремы об обратной матрице (теорема 3.3) у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножив равенство (4.2) слева на A^{-1}, будем иметь

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Отсюда получаем

$$\boxed{x = A^{-1}b. \qquad (3)}$$

Легко убедиться, что это действительно решение системы (2).

Пример 1.

Найти решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

с помощью обратной матрицы.

Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенную матрицу $\tilde{A}$. Имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следовательно,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A с помощью разложения по первой строке:

$$|A| = 1\cdot(-3) + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 3 = -12.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x=A^{-1}b=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3 & -5 & 1\\ -3 & 3 & -3\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тем самым $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Упражнение 1.

Найти решение системы

$$\begin{gathered}x_1-3x_2+4x_3=6,\\ x_1-x_2+7x_3=7,\\ x_1-2x_2+x_3=2\end{gathered}$$

с помощью обратной матрицы.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 7\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}6\\ 7\\ 2\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A|$ и алгебраические дополнения к элементам матрицы A и найдем обратную матрицу:

$$|A|=1\cdot 13+1\cdot(-5)+1\cdot(-17)=-9;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 7\\ -2 & 1\end{vmatrix}=13,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=6,\ A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 7\end{vmatrix}=-17,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}13 & -5 & -17\\ 6 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (3):

$$x=A^{-1}b=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}13 & -5 & -17\\ 6 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 7\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9\\ 9\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

2.3. Метод Гаусса.

При практическом решении систем линейных алгебраических уравнений удобно пользоваться *методом Гаусса*, который состоит в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду.

Пример. Найдем решение системы

$$x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5=1,$$
$$2x_1+5x_2-5x_3+x_4=4,$$
$$x_1+3x_2-2x_3+x_5=3,$$
$$3x_1+7x_2-8x_3+2x_4-x_5=5,$$
$$x_1+x_2-4x_3+2x_4-3x_5=-1$$

методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из строк с номерами 2,3,4 и 5 первую строку, умноженную на числа 2,1,2 и 2 соответственно. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей и четвертой строк вторую и прибавляя к пятой строке вторую, придем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система приведена к виду

$$x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5=1,$$
$$x_2+x_3-x_4+2x_5=2.$$

Выбрав x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных, с помощью обратного хода метода Гаусса находим выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_1=5x_3-3x_4+5x_5-3,$$
$$x_2=-x_3+x_4-2x_5+2.$$

Придавая свободным переменным x_3, x_4, x_5 произвольные числовые значения C_1, C_2, C_3, общее решение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 0,$$
$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3$$

методом Гаусса.

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого вычтем из 3-ей строки 1-ую, а из 2-ой – удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к 3-ей строке 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система приведена к виду

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$-x_3 + x_4 = -2.$$

Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_3 и выразим их через свободные неизвестные x_2 и x_4:

$$x_1 = 3x_2 - 3x_4 - 9,$$
$$x_3 = x_4 + 2.$$

Если $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, то общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$