1.3. Обратная матрица. Элементарные преобразования матриц.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями. С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

<u>Свойства обратных матриц.</u>

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка *n присоединенной* называется матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдем для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

присоединенную. Имеем

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8;\ A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6;\ A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7;$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-8 & 6 & 9\\ -4 & -2 & -3\\ -4 & -2 & 7\end{pmatrix}.$$

Теорема (об обратной матрице). *Для любой невырожденной матрицы A обратная матрица единственна и имеет вид*

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Пример. Найдем обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенной матрицы найдем сначала все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Следовательно (напомним, что алгебраические дополнения для элементов строк в присоединенной матрице надо расположить в соответствующем столбце),

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}8 & -5 & -17\\ 3 & -3 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A| = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = -9$, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$