1.2. Определитель квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно сопоставить некоторое число, называемое **определителем** матрицы и обозначаемое через $|A|$. Прежде чем дать общее определение этого понятия, определим его для матриц 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - (-3)\cdot 2 = 1.$$

Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-4) - 2\cdot 11 - 1\cdot(-6) = -20.$$

При раскрытии определителей 2-го порядка выражение для определителя 3-го порядка может быть записано в общем случае в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для вычисления определителя по этой формуле существует следующая геометрическая схема, называемая «правилом треугольников». Первые три слагаемых находятся перемножением элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Остальные три слагаемых (с минусами) получаются по аналогичной схеме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пусть дана квадратная матрица A. **Минором** M_{ij} называется определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, то $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5,\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10.$

Общее понятие определителя дадим с помощью рекуррентной схемы, а именно, считая, что понятие определителя известно для матриц n–1-го порядка, дадим его для матриц n-го порядка (фактически так и вводилось понятие определителя для матриц 3-го порядка).

Определителем матрицы А = ||$\mathbf{a_{ij}}$|| порядка *n* называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}M_{1n}.$$

Используя знак суммы, это определение можно записать в виде:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Пример .

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-32) = 52.$$

Свойства определителей

1. *Для любой квадратной матрицы порядка n* $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$.

Треугольной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель треугольной матрицы, разлагая его по первому столбцу. В силу того, что в первом столбце только один элемент отличен от нуля, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Таким образом, ***определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.***

2. *Для любой квадратной матрицы A* $|A| = |A^T|$.

3. *Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, а модуль его значения не изменится.*

Следствие. *Если у квадратной матрицы A имеются две одинаковые строки (столбца), то* $|A| = 0$.

4. *Определитель матрицы может быть разложен по любой строке или столбцу.*

Следствие. *При умножении строки (столбца) квадратной матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Следствие. *Если в квадратной матрице A имеется строка (столбец) с нулевыми элементами, то* $|A| = 0$.

6. *Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.*