Основы матричных вычислений, Экзамен (Теория)

Версия от 27.06.2021 12:36

Содержание

Связь прямой и обратной ошибок через число обусловленности.

Критерий сходимости ряда Неймана.

Существование и единственность LU и LDL. разложений.

Теорема о сходимости градиентного спуска для линейной системы с симметричной положительно определенной матрицей.

Оценка сходимости метода сопряженных градиентов для линейной системы с произвольной симметричной положительно определенной матрицей. Случай $\lambda_1 >> \lambda_2$.

Предложение. Для $A = A^\top > 0$ и любого многочлена $h(\lambda) : h(0) = 1$ степени k верно:

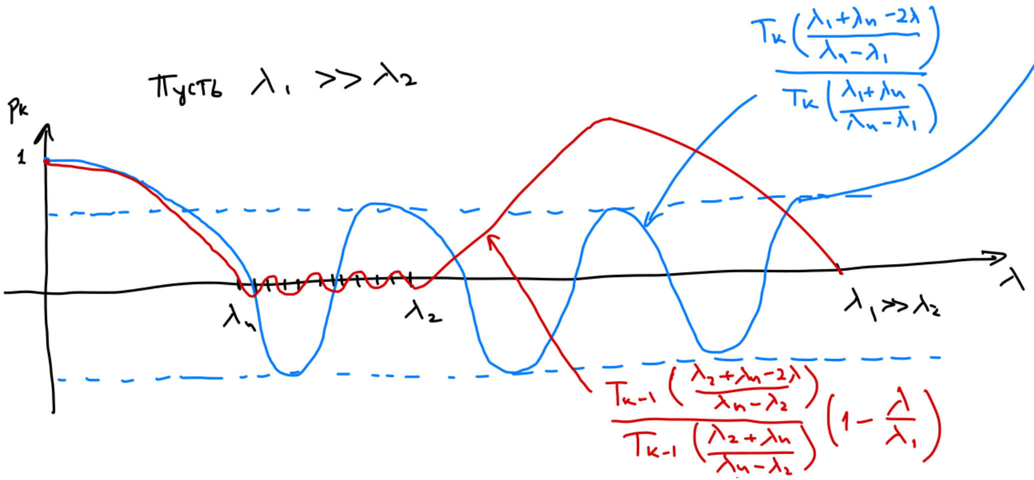
$$\|e_k\|_A \leq \max_i |h(\lambda_i)| \|e_0\|_A$$

В общем случае мы использовали многочлен вида:

$$t_k(\lambda) = \frac{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n-2\lambda}{\lambda_1-\lambda_n}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}\right)}$$

Где T_k - многочлен Чебышева. Такой t_k меньше всего отклоняется от 0 на отрезке $[\lambda_n, \lambda_1]$, однако чем больше отрезок тем больше мы отклоняемся. Вообще говоря нас интересует отклонение только в точках $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Давайте рассмотрим другой многочлен:

$$p_k(\lambda) = \frac{T_{k-1}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_n-2\lambda}{\lambda_2-\lambda_n}\right)}{T_{k-1}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_n}{\lambda_2-\lambda_n}\right)}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$



(Заметка: на лекции путаница с знаком знаменателя аргумента T_i)

Тоесть мы уменьшили отрезок, а также пожертвовав степенью многочлена Чебышева, мы добавили множитель который обращается в 0 при $\lambda = \lambda_1$

Нам нужно оценить $\max_i |p_k(\lambda_i)|$, заметим, что:

$$\max_i |p_k(\lambda_i)| \leq \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_2] \cup \{\lambda_1\}} |p_k(\lambda)| = \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_2]} |p_k(\lambda)|$$

Предложение. С лекции 14 нам известно:

$$\frac{T_k\left(\frac{a+b-2\lambda}{a-b}\right)}{T_k\left(\frac{a+b}{a-b}\right)} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}-1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+1}\right)^k$$

Теперь оценим p_k на множестве $[\lambda_n, \lambda_2]$:

$$p_k(\lambda) = \frac{T_{k-1}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_n-2\lambda}{\lambda_2-\lambda_n}\right)}{T_{k-1}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_n}{\lambda_2-\lambda_n}\right)}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \leq 2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1} \leq 2\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1}$$

Осталось заметить, что $1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq 1$, тогда:

$$p_k(\lambda) \leq 2\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1}$$

Используя первое предложение можно сделать вывод:

$$\|e_k\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1}\|e_0\|_A$$

Сходимость степенного метода для диагонализуемых матриц.

Вывод двух основных свойств QR алгоритма.

Теорема Леви-Деспланка и первая теорема Гершгорина.

Теорема Леви-Деспланка.

Определение. Матрица A обладает строгим строчным диагональным преобладанием, если $\forall i\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$.

Определение. Матрица A обладает строгим столбцовым диагональным преобладанием, если $\forall j\ |a_{jj}| > \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$.

Теорема (Леви-Деспланка)**.** Матрица, обладающая строгим строчным (столбцовым) диагональным преобладанием является невырожденной.

Доказательство.
Докажем для строгого строчного, для столбцового аналогично.

Представим A в следующем виде: $A = diag(A)(I + diag(A)^{-1})(A - diag(A))$, где матрица $diag(A)$ – это диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы A. Раскрыв скобки, можно проверить, что равенство действительно выполняется.

Вспомним немного из курса линала:

- Матрица A – обратима $\Leftrightarrow$ матрица A – невырожденна
- Если $A = BC$, то $det(A) = det(B) \cdot det(C)$

Таким образом, нам необходимо и достаточно доказать обратимость матриц $diag(A)$ и $(I + diag(A)^{-1})(A - diag(A))$.

Обратимость первой почти очевидна: если бы на диагонали могли стоять нулевые элементы, то матрица A не обладала бы строгим строчным диагональным пребладанием.

Теперь заметим, что $(I + diag(A)^{-1})(A - diag(A))$ обратима $\Leftrightarrow \exists \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-diag(A)^{-1})(A - diag(A))^k$ (вспоминаем про ряды Неймана).

Осталось доказать, что такой ряд Неймана сходится. Не будем использовать критерий, а используем признак: докажем, что $||diag(A)^{-1})(A - diag(A)|| < 1$ для некоторой нормы.

Рассмотрим бесконечную норму: $||diag(A)^{-1})(A - diag(A)||_{\infty} < 1$. Пусть это неравенство не выполняется, тогда: $max_i \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \geqslant 1$ (это я просто руками записала бесконечную норму для матрицы). Но тогда выходит, что A не обладает строгим строчным диагональным преобладанием – противоречие $\Rightarrow ||diag(A)^{-1})(A - diag(A)||_{\infty} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-diag(A)^{-1})(A - diag(A))^k$ – сходится $\Rightarrow (I + diag(A)^{-1})(A - diag(A))$ обратима.

Таким образом, A представляет собой произведение обратимых матриц $\Rightarrow$ A и сама обратима, то есть, невырожденна. ■

Теорема Гершгорина.

Теорема (1-я теорема Гершгорина)**.** Пусть $A \in \mathbb{C}$, тогда собственные значения матрицы A находятся внутри

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

где

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} : |a_{kk} - z| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_{ki}|\}$$

Доказательство.
Пусть $\lambda \notin D \Rightarrow A - I\lambda$ обладает строгим строчным диагональным преобладанием (просто посмотрите на то как мы определяем D_k, на то, что условие в D_k для данной λ не выполняются, и на строение матрицы A) $\Rightarrow$ (по предыдущей теореме) $A - \lambda I$ – невырожденна, но тогда λ не может являться собственным значением A (вспоминаем курс линала: характеристический многочлен и его корни). Получили противоречние. ■

Определение. Матрица D_k – круги Гершгорина.

Теорема (2-я теорема Гершгорина без доказательства)**.** Если есть m кругов Гершгорина, образующих область G, то в G находится ровно m собственных значений.