Виды экономических задач на ЕГЭ и способы их решения (профильный уровень)

Кулабухов Сергей Юрьевич

Спецификация КИМ ЕГЭ 2021 по математике (фрагмент)

17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	–	35

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике

6		**Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни**
	6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
	6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
	6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Спецификация КИМ ЕГЭ 2021 по математике (фрагмент)

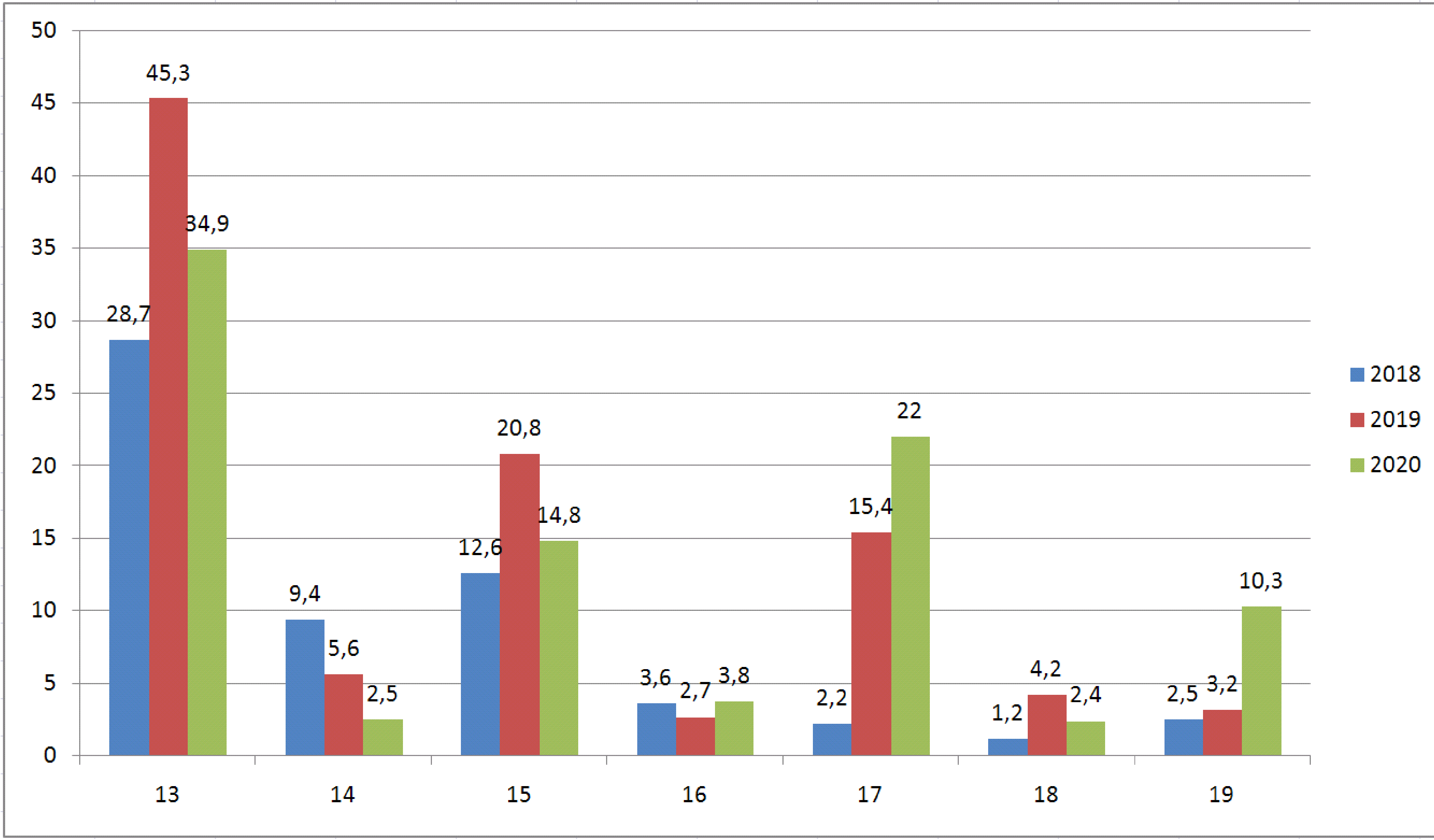
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	–	35

Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена

1		**Алгебра**
1.1		*Числа, корни и степени*
	1.1.1	Целые числа
	1.1.2	Степень с натуральным показателем
	1.1.3	Дроби, проценты, рациональные числа

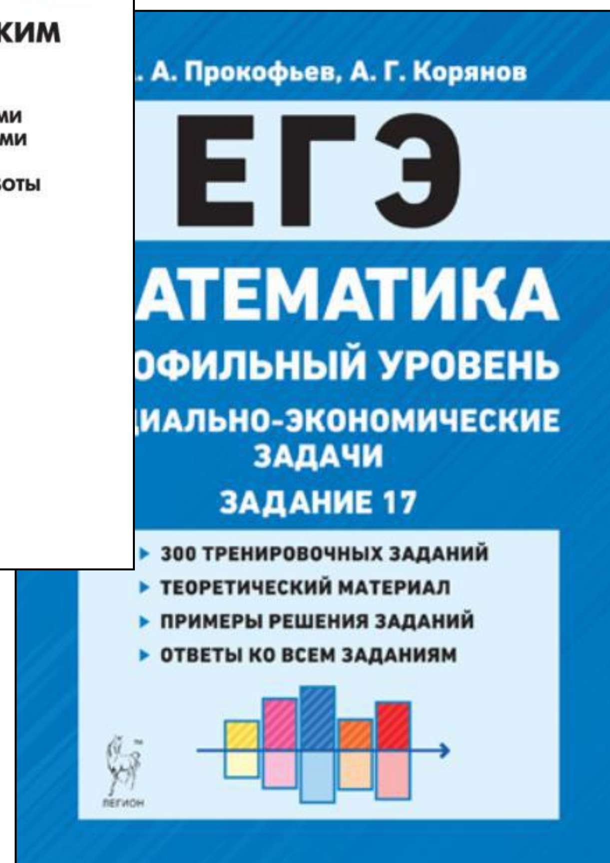
2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений

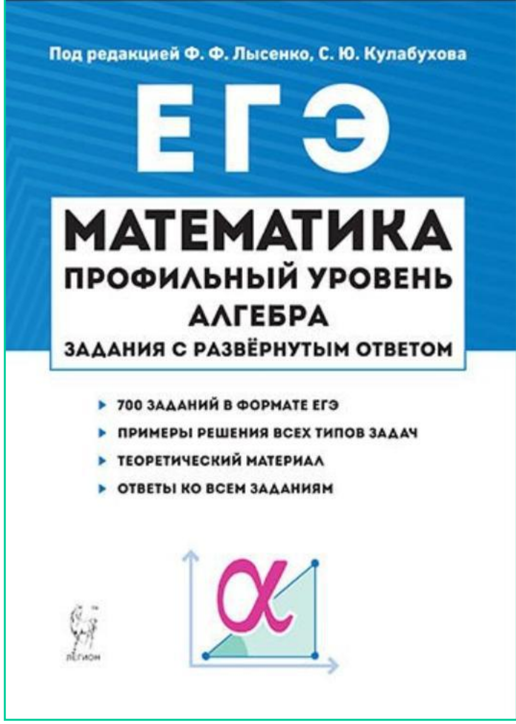
Выполнение заданий с развернутым ответом на профильном ЕГЭ по математике (средний процент выполнения)



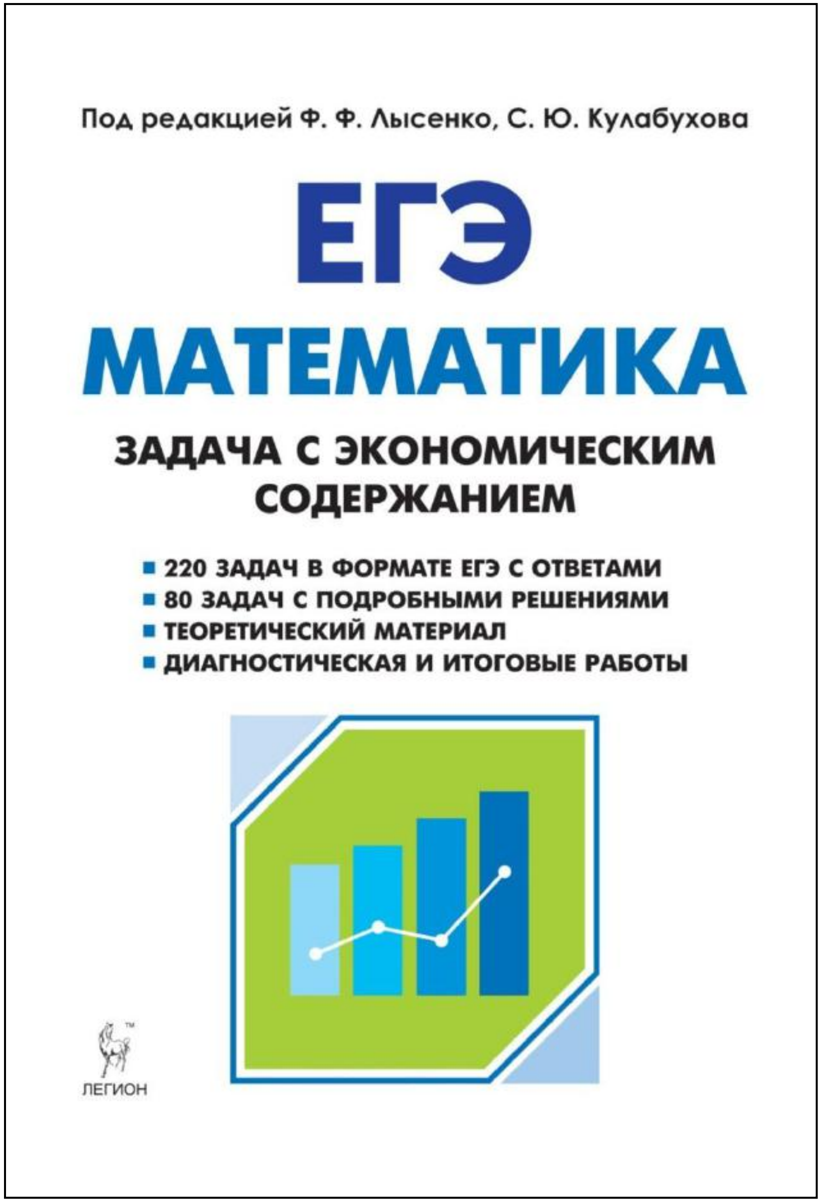
www.fipi.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru





Часть III. Методы решения экономических задач


Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова
ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧА С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ
■ 220 ЗАДАЧ В ФОРМАТЕ ЕГЭ С ОТВЕТАМИ
■ 80 ЗАДАЧ С ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ
■ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ
■ ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ И ИТОГОВЫЕ РАБОТЫ
ЛЕГИОН

Оглавление

Проценты

Процент — это $\dfrac{1}{100}$ часть.

Если величина B равна $x\%$ от A, то

$$B = \frac{x}{100}A.$$

Если величина C увеличилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)C.$$

Если величина C уменьшилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)C.$$

Простые задачи

Задача Пирожок с мясом сто́ит на 50% дороже пирожка с джемом. На сколько процентов пирожок с джемом дешевле пирожка с мясом? Ответ округлите до целого числа процентов.

Решение. Пусть пирожок с джемом стоит x, тогда пирожок с мясом стоит $1{,}5x$. Ясно, что $\frac{x}{1{,}5x} = \frac{2}{3}$. То есть цена пирожка с джемом меньше цены пирожка с мясом на $\frac{1}{3}$ от цены пирожка с мясом, то есть на $0{,}3333\ldots$, или на $33{,}33\ldots\% \approx 33\%$.

Ответ: 33%.

Задача

Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 14%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. Клиент будет вносить ежемесячно

$$\frac{18\,000 \cdot 1{,}14}{12} = \frac{20\,520}{12} = 1710 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 1710 рублей.

Кредиты

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 96 500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Решение.
S — сумма кредита (в рублях), x — годовой платёж (в рублях).
Общая сумма выплат $3x$.

$$3x - S = 96\,500$$

Год	Долг в начале года (в руб.)	Долг после начисления процентов (в руб.)	Долг после внесения суммы (в руб.)
1	S	$1{,}2S$	$1{,}2S-x$
2	$1{,}2S-x$	$1{,}2\cdot(1{,}2S-x)$	$1{,}2\cdot(1{,}2S-x)-x=$ $=1{,}2^2S-2{,}2x$
3	$1{,}2^2S-2{,}2x$	$1{,}2\cdot(1{,}2^2S-2{,}2x)$	$1{,}2\cdot(1{,}2^2S-2{,}2x)-x=$ $=1{,}2^3S-3{,}64x\ \underline{=\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} 3x-S=96\,500\\ 1{,}2^3S-3{,}64x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-S=96\,500\\ 1{,}2^3S-3{,}64\cdot\dfrac{S+96\,500}{3}=0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3S-3{,}64\cdot\frac{S+96\,500}{3}=0 \qquad \frac{216}{125}S-3{,}64\cdot\frac{S+96\,500}{3}=0$$

$$648S=455S+96\,500\cdot455 \qquad 193S=96\,500\cdot455$$

$$S=227\,500$$

Общая сумма выплат

$3x=S+96\,500=227\,500+96\,500=324\,000$ (рублей).

Ответ: 324 000 рублей.

17. В августе 2021 года Виктор Валентинович планирует взять кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый февраль долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с марта по июль необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Известно, что если Виктор Валентинович каждый раз будет выплачивать по 200 000 рублей, то он рассчитается по кредиту за 4 года, а если по 328 000 рублей, то за два. Найдите r.

Решение

17. Чтобы уменьшить запись, будем все денежные суммы измерять в тысячах рублей. Каждый февраль долг увеличивает на $r\%$, то есть в $1+\frac{r}{100}$ раз. Обозначим $p=1+\frac{r}{100}$. Сумму кредита обозначим через K.

Составим таблицу для случая погашения за два года.

Год	Долг на начало года (в тыс. рублей)	Долг после начисления процентов (в тыс. рублей)	Долг после выплаты (в тыс. рублей)
1	K	pK	$pK-328$
2	$pK-328$	$p(pK-328)$	$p(pK-328)-328$

$$p(pK-328)-328=0;$$

$$p^2K-328(p+1)=0.$$

Составим таблицу для случая погашения за четыре года.

Год	Долг на начало года (в тыс. рублей)	Долг после начисления процентов (в тыс. рублей)	Долг после выплаты (в тыс. рублей)
1	K	pK	$pK-200$
2	$pK-200$	$p(pK-200)$	$p(pK-200)-200=$ $=p^2K-200(p+1)$
3	$p^2K-200(p+1)$	$p(p^2K-200(p+1))$	$p^3K-200(p^2+p+1)$
4	$p^3K-200(p^2+p+1)$	$p(p^3K-200(p^2+p+1))$	$p^4K-200(p^3+p^2+p+1)$

$$p^4K-200(p^3+p^2+p+1)=0.$$

$$\begin{cases} p^2K-328(p+1)=0; \\ p^4K-200(p^3+p^2+p+1)=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим K, $K=\dfrac{328(p+1)}{p^2}$.

$$p^4\cdot\frac{328(p+1)}{p^2}-200(p^3+p^2+p+1)=0;$$

$$p^4 \cdot \frac{328(p+1)}{p^2} - 200(p^3+p^2+p+1) = 0;$$
$$328(p^3+p^2) - 200(p^3+p^2+p+1) = 0;$$

$$128(p^3+p^2) = 200(p+1);$$
$$128p^2(p+1) = 200(p+1).$$

$$128p^2 = 200; p^2 = \frac{100}{64}; p = \frac{10}{8} = \frac{5}{4};$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{5}{4}; r = 25.$$

Ответ: 25.

КРИТЕРИИ

Содержание критерия, задание 17	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru

Подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т .п. Предъявленный текст должен включать и описание того, как построена модель, и направление, «продолжаемое» до верного решения.

Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи. Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или пробелы в описании составления модели.

«МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ»

Задача

Двадцать пятого ноября 2013 года Иван взял в банке 2 млн рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 25 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на $x\%$, а затем Иван переводит очередной транш. Иван выплатил кредит за 2 транша, переведя в первый раз 1 210 000 рублей, а во второй — 1 219 800 рублей. Под какой годовой процент банк выдал кредит Ивану?

Решение.

После первого года

$$\left(2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 1\,210\,000\right) \text{ рублей.}$$

После второго года

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 1\,210\,000\right) - 1\,219\,800 = 0$$

Сделаем замену $y = \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ $(y > 1)$ и разделим обе части на 200:

$$y \cdot \left(10\,000y - 6050\right) = 6099,$$

$$y \cdot \left(10\,000y - 6050\right) = 6099,$$
$$10\,000y^2 - 6050y - 6099 = 0.$$

$D = 50^2 \cdot 5^2 \cdot 4489.$

Отсюда

$$y_{1,2} = \frac{6050 \pm 50 \cdot 5 \cdot \sqrt{4489}}{2 \cdot 10\,000} = \frac{121 \pm 5 \cdot 67}{400} = \frac{121 \pm 335}{400}.$$

$y = \dfrac{456}{400} = \dfrac{114}{100} = 1{,}14$, откуда $x = 14$.

Ответ: 14.

17. 15 августа 2016 года Егор Максимович взял кредит в банке на некоторую сумму на срок 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 9 месяцев Егор Максимович выплатил банку 11,34 млн рублей. Сколько миллионов рублей он взял в кредит?

Решение

17. Пусть Егор Максимович взял в кредит K млн рублей. Каждое 15-е число его долг уменьшался на одну и ту же сумму (x млн рублей). Составим таблицу по условию задачи.

Месяц	Долг на 15-е число (в млн рублей)	Начисленные проценты (в млн рублей)	Долг на 15-е число после выплаты (в млн рублей)	Выплата (в млн рублей)
1	K	$\frac{4}{100}\cdot K$	$K-x$	$x+\frac{4}{100}\cdot K$
2	$K-x$	$\frac{4}{100}\cdot(K-x)$	$K-2x$	$x+\frac{4}{100}\cdot(K-x)$
3	$K-2x$	$\frac{4}{100}\cdot(K-2x)$	$K-3x$	$x+\frac{4}{100}\cdot(K-2x)$
...	...	...	...	...
9	$K-8x$	$\frac{4}{100}\cdot(K-8x)$	$K-9x$	$x+\frac{4}{100}\cdot(K-8x)$
...	...	...	...	...
23	$K-22x$	$\frac{4}{100}\cdot(K-22x)$	$K-23x$	$x+\frac{4}{100}\cdot(K-22x)$
24	$K-23x$	$\frac{4}{100}\cdot(K-23x)$	$\boxed{K-24x=0}$	$x+\frac{4}{100}\cdot(K-23x)$

Тогда сумма первых девяти выплат равна

$$9x + \frac{4}{100}\Big(K + (K - x) + (K - 2x) + \ldots + (K - 8x)\Big).$$

Преобразуем эту сумму, получим:

$$9x + \frac{4}{100}\left(9K - \frac{x + 8x}{2} \cdot 8\right) = 9x + \frac{4}{100}(9K - 36x).$$

Так как $K - 24x = 0$, то $x = \dfrac{K}{24}$.

Отсюда сумма первых девяти выплат равна $\dfrac{9K}{24} + \dfrac{4}{100}\left(9K - \dfrac{36K}{24}\right)$.

Получаем уравнение: $\dfrac{9K}{24} + \dfrac{4}{100}\left(9K - \dfrac{36K}{24}\right) = 11{,}34;$

$K = 16{,}8.$

Егор Максимович взял в кредит 16,8 млн рублей.

Ответ: 16,8.

17. 3 января Виталий Сергеевич взял кредит на 15 месяцев. Условия возврата таковы:

— 5-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим днём;

— с 6-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем на 4-е число того же месяца.

Известно, что после полного погашения общая сумма выплат оказалась на 24% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение

17. Обозначим сумму кредита (в рублях) через K и заполним таблицу согласно условию задачи.

Месяц	Долг на 4-е число (в рублях)	Начисленные проценты (в рублях)	Долг на 15-е число после выплаты (в рублях)
1	K	$\frac{r}{100}\cdot K$	$K-\frac{K}{15}=\frac{14K}{15}$
2	$\frac{14K}{15}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{14K}{15}$	$\frac{14K}{15}-\frac{K}{15}=\frac{13K}{15}$
3	$\frac{13}{15}K$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{13K}{15}$	$\frac{13K}{15}-\frac{K}{15}=\frac{12K}{15}$
...	...	...	...
14	$\frac{2K}{15}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{2K}{15}$	$\frac{2K}{15}-\frac{K}{15}=\frac{K}{15}$
15	$\frac{K}{15}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{K}{15}$	0

общая сумма выплат (в рублях) равна

$$K+\frac{r}{100}\cdot K+\frac{r}{100}\cdot\frac{14K}{15}+\frac{r}{100}\cdot\frac{13K}{15}+\ldots+\frac{r}{100}\cdot\frac{2K}{15}+\frac{r}{100}\cdot\frac{K}{15}.$$

$$K+\frac{r}{100}\left(K+\frac{14K}{15}+\frac{13K}{15}+\ldots+\frac{2K}{15}+\frac{K}{15}\right)=1{,}24K;$$

$$\frac{r}{100}\left(\frac{15K}{15}+\frac{14K}{15}+\frac{13K}{15}+\ldots+\frac{2K}{15}+\frac{K}{15}\right)=0{,}24K;$$

$$\frac{r}{100}\cdot\frac{K}{15}(15+14+13+\ldots+1)=0{,}24K.$$

По формуле суммы арифметической прогрессии получаем $15+14+13+\ldots+1=\dfrac{15+1}{2}\cdot 15=120.$

Следовательно, $\dfrac{r}{100}\cdot\dfrac{K}{15}\cdot 120=0{,}24K;$

$$\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{15}\cdot 120=\frac{24}{100};$$

$r=3.$

Ответ: 3.

17. 18 декабря 2020 года Владимир Михайлович планирует взять кредит на 1 200 000 рублей. Условия его возврата таковы:

– 5-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– с 6-го по 17-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 18-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 18-е число предыдущего месяца;

– к 18-му числу 16-го месяца после получения кредита долг должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 18-го числа 15-го месяца, если общая сумма выплат после погашения кредита равна 1 560 000 рублей?

Решение

17. Составим таблицу по условию задачи. Пусть каждое 18-е число долг меньше на x тысяч рублей. Тогда искомая сумма равна $(1200 - 15x)$ тысяч рублей.

Месяц	Долг на 1-е число (в тысячах рублей)	Начисленные проценты (в тысячах рублей)	Долг на 18-е число после выплаты (в тысячах рублей)
1	1200	$\frac{3}{100} \cdot 1200$	$1200 - x$
2	$1200 - x$	$\frac{3}{100} \cdot (1200 - x)$	$1200 - 2x$
3	$1200 - 2x$	$\frac{3}{100} \cdot (1200 - 2x)$	$1200 - 3x$
...	...	...	...
15	$1200 - 14x$	$\frac{3}{100} \cdot (1200 - 14x)$	$1200 - 15x$
16	$1200 - 15x$	$\frac{3}{100} \cdot (1200 - 15x)$	0

Общая сумма выплат равна сумме исходного кредита, а также всех начисленных процентов.

$$1200 + \frac{3}{100} \cdot 1200 + \frac{3}{100}(1200 - x) + \frac{3}{100}(1200 - 2x) + \ldots +$$

$$+ \frac{3}{100}(1200 - 14x) + \frac{3}{100}(1200 - 15x) = 1560;$$

Общая сумма выплат равна сумме исходного кредита, а также всех начисленных процентов.

$$1200+\frac{3}{100}\cdot 1200+\frac{3}{100}(1200-x)+\frac{3}{100}(1200-2x)+\ldots+$$

$$+\frac{3}{100}(1200-14x)+\frac{3}{100}(1200-15x)=1560;$$

$$\frac{3}{100}\cdot\Big(1200+(1200-x)+\ldots+(1200-14x)+(1200-15x)\Big)=360;$$

$$1200+(1200-x)+\ldots+(1200-14x)+(1200-15x)=12\,000.$$

По формуле арифметической прогрессии, левая часть равна $1200+(1200-x)+\ldots+(1200-14x)+(1200-15x)=$

$$=\frac{1200+(1200-15x)}{2}\cdot 16=19\,200-120x.$$

$19\,200-120x=12\,000;$
$120x=7200;$
$x=60.$
Искомая величина равна $1200-60\cdot 15=300$ (тысяч рублей).
Ответ: 300 000 рублей.

Задача

15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение:

Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, …, x_6 — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые отражают график погашения кредита.

$$\text{На } 15.02: \quad 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,$$

$$\text{На } 15.03: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,$$

$$\text{На } 15.04: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,$$

$$\text{На } 15.05: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,$$

$$\text{На } 15.06: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,$$

$$\text{На } 15.07: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.$$

Сложим все уравнения.

$$1{,}04S\cdot(1+0{,}9+\ldots+0{,}5)-(x_1+x_2+\ldots+x_6)=S\cdot(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5).$$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат.

Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \dfrac{5+9}{2}\cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S\cdot 4{,}5 - X = S\cdot 3{,}5,$$

$$X = S\cdot(1{,}04\cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

2-й способ

$$0{,}04\cdot(S+0{,}9S+0{,}8S+0{,}7S+0{,}6S+0{,}5S) = 0{,}04\cdot 4{,}5S = 0{,}18S.$$

Переплата составит 18%.

Ответ: 18

17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.

Решение 1

Найдём все выплаты в соответствии с условием задачи. Для этого заполним следующую таблицу.

Год	Январь	Июль	Выплаты
2020	$1{,}3S$	$0{,}7S$	$1{,}3S - 0{,}7S = 0{,}6S$
2021	$1{,}3 \cdot 0{,}7S$	$0{,}3S$	$1{,}3 \cdot 0{,}7S - 0{,}3S = 0{,}61S$
2022	$1{,}3 \cdot 0{,}3S$	0	$1{,}3 \cdot 0{,}3S = 0{,}39S$

По условию каждая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$\begin{cases} 0{,}6S > 3 \\ 0{,}61S > 3 \\ 0{,}39S > 3 \end{cases}$$

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству

$$0{,}39S > 3$$

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Ответ: 8.

Решение 2

1) Чтобы каждая выплата была больше 3 млн. рублей достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла наименьшая из всех выплат.

2) Каждая выплата состоит из двух частей:

а) проценты на оставшуюся часть долга;

б) часть основного долга на которую он уменьшается в соответствии с данной таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}3S$	0

Понятно, что последняя выплата будет самой маленькой, так как у неё самая маленькая часть а) и одна из самых маленьких часть б) выплаты.

3) Последняя выплата равна $\underbrace{0{,}3\cdot 0{,}3S}_{\text{часть а)}} + \underbrace{0{,}3S}_{\text{часть б)}} = 0{,}39S$.

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству $0{,}39S > 3$.

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Ответ: 8.

Вклады

Банк предлагает два вида вкладов, «Стабильный» и «Прогрессивный». Вклад «Стабильный» имеет процентную ставку 10% годовых. Вклад «Прогрессивный» — 6% за первый год и $p\%$, начиная со второго года. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое p, при котором трёхлетний вклад «Прогрессивный» окажется выгоднее, чем «Стабильный».

Решение

Пусть на каждый из этих вкладов было положено по S рублей.

Вклад «Стабильный».

Год	Сумма на начало года (в рублях)	Сумма на конец года (в рублях)
1	S	$1{,}1S$
2	$1{,}1S$	$(1{,}1)^2S$
3	$(1{,}1)^2S$	$(1{,}1)^3S$

Вклад «Прогрессивный».

Год	Сумма на начало года (в рублях)	Сумма на конец года (в рублях)
1	S	$\left(1+\frac{6}{100}\right)S$
2	$\left(1+\frac{6}{100}\right)S$	$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)S$
3	$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)S$	$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{6}{100}\right)S$

$$(1 + p/100)^2 \cdot 1{,}06 \cdot S > (1{,}1)^3 S;$$

$$(1 + p/100)^2 > \frac{(1{,}1)^3}{1{,}06};$$

$$\left(\frac{100 + p}{100}\right)^2 > \frac{1{,}331}{1{,}06};$$

$$(100 + p)^2 > \frac{1{,}331 \cdot 100^2}{1{,}06} = \frac{1\,331\,000}{106} = 12\,556{,}6\ldots;$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

Число p целое, тогда $(100 + p)$ — тоже целое. Вычислим два последовательных целых числа, между которыми лежит $\sqrt{12\,556{,}6\ldots}$.

$$110^2 = 12\,100,\ 111^2 = 12\,321,\ 112^2 = 12\,554,\ 113^2 = 12\,769,$$

значит $112^2 < 12\,556{,}6\ldots < 113^2$. Отсюда

$$112 < \sqrt{12\,556{,}6\ldots} < 113.$$

Так как $(100 + p)$ целое число, то $100 + p \geqslant 113$, $p \geqslant 13$. Значит, нам подходит любое $p \geqslant 13$, а наименьшее подходящее p равно 13.

Ответ: 13.

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Решение

Пусть x — размер первоначального вклада в млн рублей.

Год	**Вклад**	
	в начале года	**в конце года**
1	x	$1{,}1x$
2	$1{,}1x$	$1{,}1^2x$
3	$1{,}1^2x+3$	$1{,}1(1{,}1^2x+3)=1{,}1^3x+3{,}3$
4	$1{,}1^3x+3{,}3+3=1{,}1^3x+6{,}3$	$1{,}1(1{,}1^3x+6{,}3)=1{,}1^4x+6{,}93$

Необходимо найти наибольшее целое решение неравенства:

$$1{,}1^4x+6{,}93<25 \qquad x<\frac{25-6{,}93}{1{,}1^4}=\frac{18{,}07}{1{,}4641}\approx 12{,}3$$

Наибольшее целое решение этого неравенства $x=12$.

Ответ: 12 млн рублей.

17. Валентин Петрович сделал банковский вклад на сумму 80 000 рублей. Несколько лет он получал то 15%, то 20% годовых (проценты начислялись один раз в год в конце года и прибавлялись к сумме вклада), а за последний год он получил 25% годовых. В результате его вклад стал составлять 228 528 рублей. Сколько лет пролежал вклад?

Решение

17. Предположим, вклад пролежал n лет под 20% годовых и k лет под 15% годовых, кроме того по условию вклад пролежал один год под 25% годовых. При каждом начислении процентов сумма вклада увеличивалась соответственно в 1,2; 1,15 и 1,25 раз.

Тогда $80\,000 \cdot 1{,}2^n \cdot 1{,}15^k \cdot 1{,}25 = 228\,528$;

$$100\,000 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{23}{20}\right)^k = 228\,528;$$

$$100\,000 \cdot 6^n \cdot 23^k = 228\,528 \cdot 5^n \cdot 20^k.$$

$100\,000 \cdot 6^n \cdot 23^k = 228\,528 \cdot 5^n \cdot 20^k.$

В левой части множитель 23 встречается k раз, а в правой ровно столько, сколько раз 228 528 делится нацело на 23 (остальные числа в равенстве не делятся нацело на 23).

$228\,528 : 23 = 9936;$

$9936 : 23 = 432;$

$432 : 23 = 18\frac{18}{23}$ — не делится на 23.

Следовательно, $k = 2$.

$100\,000 \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot 5^2 = 432 \cdot 5^n \cdot 100^2.$

В левой части множитель 3 встречается n раз, а в правой ровно столько, сколько раз 432 делится нацело на 3 (остальные числа в равенстве не делятся нацело на 3).

$432 : 3 = 144;$

$144 : 3 = 48;$

$48 : 3 = 16.$

16 на 3 не делится нацело.

Следовательно, $n = 3$.

Проверим, что при $n = 3$ и $k = 2$ равенство
$100\,000 \cdot 3^n \cdot 4^n \cdot 23^k \cdot 5^k = 228\,528 \cdot 10^n \cdot 100^k$ верно.

Вклад лежал $k + n + 1 = 6$ лет.

Ответ: 6.

Свойства функций и экстремальные значения

17. Егор Сергеевич владеет двумя фабриками, выпускающими одинаковую продукцию при использовании одних и тех же технологий, но расположенными в разных городах. Если рабочие одной из фабрик суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то они выпускают $4t$ единиц продукции. За каждый час работы рабочему в первом городе Егор Сергеевич платит 300 рублей, а во втором городе — 500 рублей. Егор Сергеевич в сумме готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее число единиц продукции можно выпустить при этих условиях?

Решение

17. Составим таблицу по условию задачи.

Фабрика	Время (часы работы)	Количество единиц продукции	Оплата (руб.) (в тысячах рублей)
Первая	x^2	$4x$	$300x^2$
Вторая	y^2	$4y$	$500y^2$

17. Составим таблицу по условию задачи.

Фабрика	Время (часы работы)	Количество единиц продукции	Оплата (руб.) (в тысячах рублей)
Первая	x^2	$4x$	$300x^2$
Вторая	y^2	$4y$	$500y^2$

Чтобы выпустить больше продукции, надо использовать всю сумму, которая выделяется на оплату труда. Отсюда $300x^2 + 500y^2 = 1\,200\,000$; $3x^2 + 5y^2 = 12\,000$; $y^2 = \dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}$; $y = \sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$.

Количество произведённой продукции равно

$4x + 4y = 4x + 4\sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x + 4\sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$ и найдём её наибольшее значение.

$$f'(x) = 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{3}{5} \cdot 2x}{\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}}} = 4\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}}}\right).$$

Найдём точки экстремума:

$f'(x) = 0.$

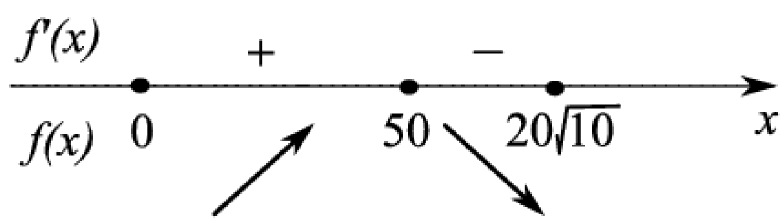
$$4\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}}}\right) = 0;$$

$$\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}} = \frac{3x}{5};$$

$$\frac{12\,000 - 3x^2}{5} = \frac{9x^2}{25};$$

$24x^2 = 60\,000; x^2 = 2500; x = 50.$

Ясно, что $f'(x) > 0$ при $0 < x < 50$ и $f'(x) < 0$ при $x > 50$ (на области определения функции: $\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5} \geqslant 0; x \leqslant 20\sqrt{10}$).



$$y = \sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}} = 30;$$ удовлетворяет условию задачи

Наибольшее количество деталей равно $4x + 4y = 320$.

Ответ: 320.

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят k^2 тыс. рублей в конце года k ($k = 1; 2; \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение №1

Пусть $f(k) = k^2(1+r)^{25-k}$ — сумма, которая будет на счету пенсионного фонда в конце 25 года, если ценные бумаги были проданы в конце k-го года ($k = 1; 2; 3; \ldots; 25, r > 0$).

Для поиска нужных значений r необходимо решить систему неравенств

$$\left\{ f(21) > f(k), \;\; k \neq 21. \right. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2(1+r)^{25-x}$ и исследуем её поведение при $x > 0$.

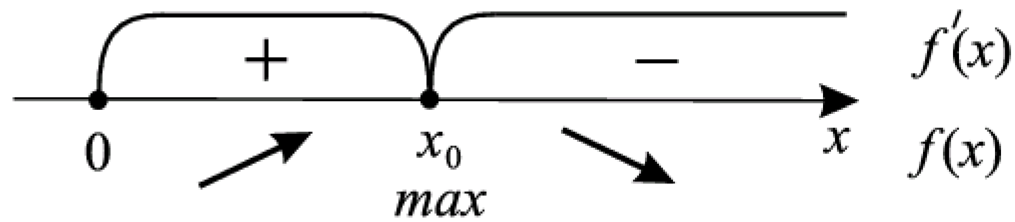
$$f'(x) = 2x(1+r)^{25-x} + x^2(1+r)^{25-x}\ln(1+r)\cdot(-1) = (1+r)^{25-x}(2x - x^2\ln(1+r))$$

$$(1+r)^{25-x}(2x - x^2\ln(1+r)) = 0$$

$$2x - x^2\ln(1+r) = 0 \qquad (\text{так как } (1+r)^{25-x} > 0)$$

$$2 - x\ln(1+r) = 0 \qquad (\text{так как } x > 0)$$

$$x_0 = \frac{2}{\ln(1+r)} \text{ — единственная стационарная точка.}$$



Из рисунка видно, что $x_0 = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$ — единственная точка экстремума, точка максимума функции $f(x)$.

Учитывая $(*)$ и свойства функции $f(x)$ можно сказать, что $20 < x_0 < 22$. Кроме того, выполняются неравенства

$$f(1) < f(2) < \ldots < \underline{f(20) < f(21) > f(22)} > \ldots > f(25).$$

Следовательно, условие того, что ценные бумаги нужно продавать именно в конце 21-го года

$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22), \end{cases}$$

так как все остальные неравенства из системы $(*)$ являются следствиями этих двух.

$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20}, \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{21}{20}\right)^2 > 1+r, \\ 1+r > \left(\dfrac{22}{21}\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < \left(\dfrac{21}{20}\right)^2 - 1, \\ r > \left(\dfrac{22}{21}\right)^2 - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} r < \dfrac{41}{400}, \\ r > \dfrac{43}{441}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

Решение №2

Пусть $f(k) = k^2(1+r)^{25-k}$ — сумма, которая будет на счету пенсионного фонда в конце 25 года, если ценные бумаги были проданы в конце k-го года ($k = 1; 2; 3; \ldots; 25, r > 0$).

Рассмотрим неравенство $f(k) < f(k+1)$.

$$k^2(1+r)^{25-k} < (k+1)^2(1+r)^{25-(k+1)}$$

$$k^2(1+r) < (k+1)^2$$

$$k^2 + rk^2 < k^2 + 2k + 1$$

$$rk^2 - 2k - 1 < 0$$

Пусть $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+r}}{r}$ — корни уравнения $rk^2 - 2k - 1 = 0$. Тогда $\dfrac{1-\sqrt{1+r}}{r} < k < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}$ — решение неравенства $f(k) < f(k+1)$.

Таким образом,

$$\begin{cases} f(k) < f(k+1), \text{ при } 0 < k < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}, \\ f(k) \geqslant f(k+1), \text{ при } k \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}. \end{cases}$$

Из условия задачи следует, что положительный корень уравнения $rk^2 - 2k - 1 = 0$ должен удовлетворять неравенству $20 < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r} < 21.$

Отсюда, $\begin{cases} y(20) < 0, \\ y(21) > 0, \end{cases}$ где $y(k) = rk^2 - 2k - 1.$

$$\begin{cases} 20^2 r - 2\cdot 20 - 1 < 0, \\ 21^2 r - 2\cdot 21 - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} r < \dfrac{41}{20^2}, \\ r > \dfrac{43}{21^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}.$

17 В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение 1

Пусть x_i часов затратили в i-ой области на производство алюминия и y_i часов — на производство никеля. Тогда всего было получено $0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1y_1 + \sqrt{y_2}$ килограммов сплава. Необходимо найти максимум этого выражения при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 200, \\ x_2 + y_2 = 200, \\ 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} = 3(0{,}1y_1 + \sqrt{y_2}). \qquad \text{(сплав } 3:1) \end{cases}$$

Так как $y_1 = 200 - x_1$ и $y_2 = 200 - x_2$, то

$$f = 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1y_1 + \sqrt{y_2} =$$
$$= 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2} =$$
$$= 20 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}.$$

Таким образом, необходимо найти наибольшее значение функции $f(x_2) = 20 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}$ на отрезке $x_2 \in [0; 200]$.

$$f'(x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{200 - x_2}} = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{200 - x_2}};$$

$$x_2 = 200 - x_2;$$

$$x_2 = 100.$$

Так как $x_2 = 100$ — единственная точка максимума на отрезке $[0; 200]$, то наибольшее количество сплава равно

$f(100) = 20 + \sqrt{100} + \sqrt{200 - 100} = 40$ (кг).

Ответ: 40.

Замечание 1. Условие — соотношение алюминия и никеля в сплаве равно $3 : 1$ — при решении никак не используется. Видимо, это связано с тем, что в первой области производительности при производстве обоих металлов одинаковые и всё определяется производством во второй области.

Условие $3 : 1$ нужно, например, для получения плана производства по областям. Если $x_2 = 100$, то $y_2 = 100$ и система

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 200, \\ 0{,}1x_1 + \sqrt{100} = 3(0{,}1y_1 + \sqrt{100}) \end{cases}$$

имеет решение $x_1 = 200$, $y_1 = 0$. Значит, в первой области производят 20 кг алюминия и 0 кг никеля, а во второй — по 10 кг алюминия и никеля. Но в задаче не требуется узнать план производства!

Замечание 2. Если бы в первой области производительности алюминия и никеля были бы разными, то это существенно усложнило бы решение и, в этом случае, соотношение металлов в сплаве потребовалось бы для решения. Действительно, пусть в первой области рабочий добывает a кг алюминия и b кг никеля за 1 час и $a \neq b$. Тогда

$$f = ax_1 + \sqrt{x_2} + by_1 + \sqrt{y_2} =$$
$$= ax_1 + \sqrt{x_2} + b(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2} =$$
$$= 200b + (a - b)x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}. \qquad (*)$$

В этом выражении переменная x_1 не исчезает и тут уже требуется соотношение металлов в сплаве (как в условии берём соотношение $3:1$) $ax_1 + \sqrt{x_2} = 3(by_1 + \sqrt{y_2})$. Отсюда,

$ax_1 + \sqrt{x_2} = 3(b(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2})$. Это линейное относительно x_1 уравнение. Из него выражаем x_1 и подставляем в $(*)$. Получим $f = f(x_2)$. Далее — стандартное продолжение.

Решение 2

1) В 1-ой области можно добыть максимум $20 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 20$ кг металла в сутки.

2) Пусть во 2-ой области добывают x кг алюминия и y кг никеля в сутки. Тогда, так как $x^2 + y^2 \leqslant 20 \cdot 10 = 200$, то

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - (x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant 400.$$

Отсюда $x + y \leqslant 20$. Это означает, что 2-я область добывает не более 20 кг металла в сутки, причём максимум 20 кг достигается при $x = y$, то есть при добыче 10 кг алюминия и 10 кг никеля.

3) Так как для сплава алюминия нужно в 3 раза больше, чем никеля,то на добытые во 2-ой области 10 кг никеля требуются 30 кг алюминия. Из них 10 кг алюминия добыты в самой 2-ой области. Оставшиеся 20 кг должна дать 1-я область, полностью сосредоточившись на добыче алюминия. Итого 40 кг сплава.

Ответ: 40.

Задача

Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500Q + 1\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение:

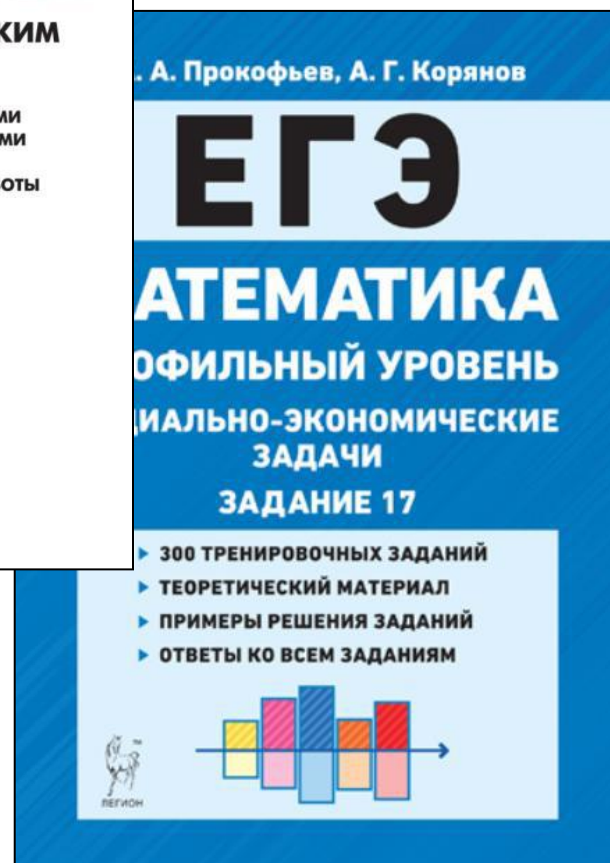
Прибыль:

$$f(P) = PQ - (2500Q + 1\,000\,000) = -P^2 + 14500P - 31\,000\,000$$

Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, то вершина параболы будет находиться в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на $\dfrac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%$.

Ответ: 75.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru



Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте **www.legionr.ru**

Спрашивайте
в книжных магазинах города!