

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Московский Авиационный Институт»**  
**(Национальный Исследовательский Университет)**

**Институт: №8 «Информационные технологии**  
**и прикладная математика»**  
**Кафедра: 806 «Вычислительная математика**  
**и программирование»**

Лабораторная работа № 7  
по курсу «Численные методы»

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластушенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

# 1 Тема

Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа.

## 2 Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением  $U(x, y)$ . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров  $h_x, h_y$ .

Вариант 4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_x(0, y) = \exp(y),$$

$$u_x(\pi, y) = -\exp(y),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$u(x, 1) = e \sin x.$$

Аналитическое решение:  $U(x, y) = \sin x \exp(y)$ .

### 3 Листинг кода

<https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab7/lab7.py>

Результаты:

*Jacobi*: итераций=2400,  $\text{diff}=9.97e-07$

*Gauss-Seidel*: итераций=1339,  $\text{diff}=9.96e-07$

*SOR* ( $\omega=1.905$ ): итераций=122,  $\text{diff}=9.19e-07$

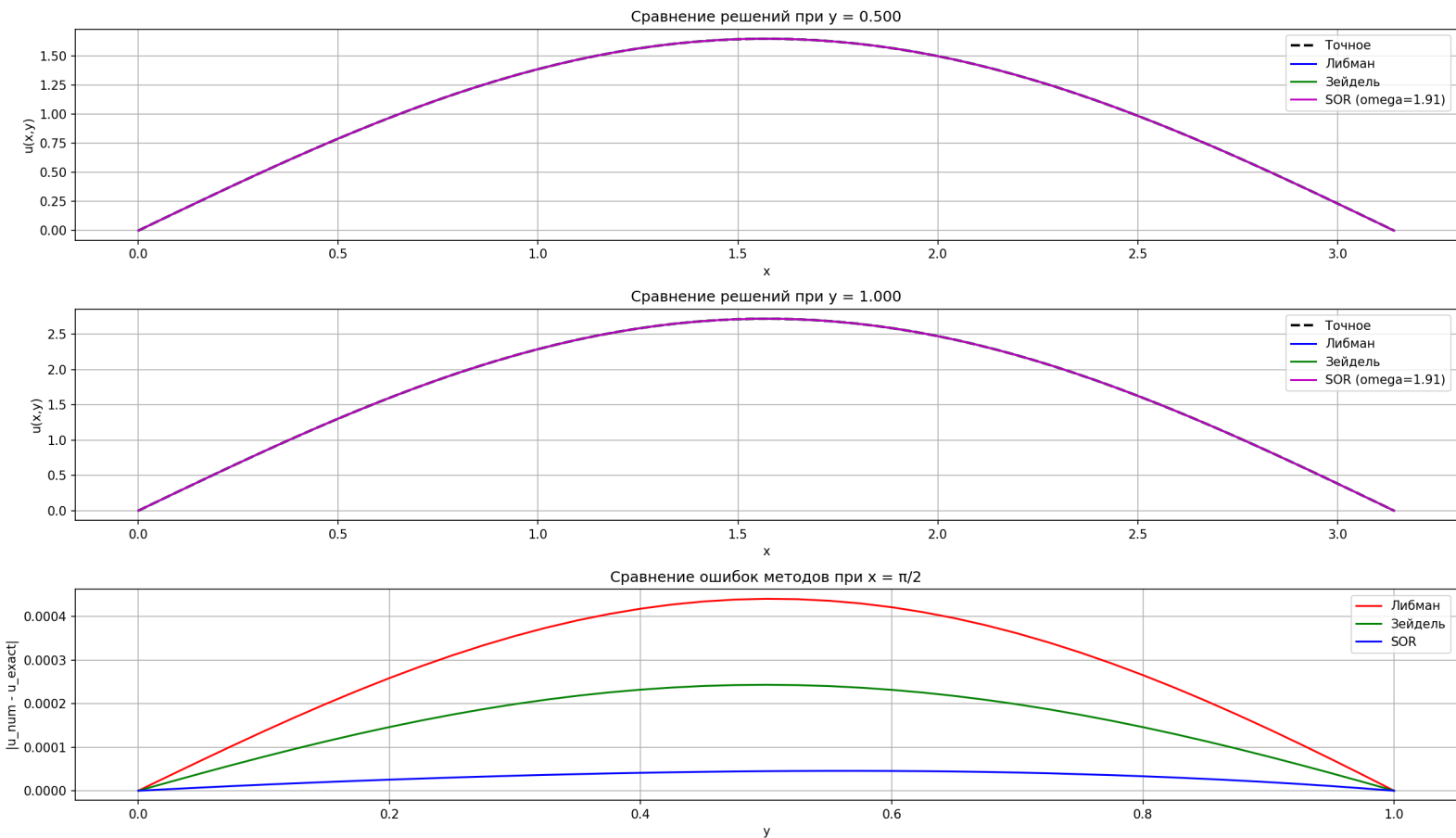
Используем узлы сечений:  $y[20] = 0.500000$ ,  $y[40] = 1.000000$

Макс. ошибки:

*Либман* =  $4.403e-04$

*Зейдель* =  $2.431e-04$

*SOR* =  $2.554e-04$



## 4 Метод решения

### 1. Метод решения и алгоритмическая реализация

#### 1.1. Постановка задачи и дискретизация

Рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения (типа Лапласа/Пуассона) в прямоугольной области  $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, 1]$ .

Вводится равномерная прямоугольная сетка:

- Число узлов:  $N_x + 1$  по оси  $x$ ,  $N_y + 1$  по оси  $y$ .
- Шаги сетки:  $h_x = \pi/N_x$ ,  $h_y = 1/N_y$ .

Оператор Лапласа аппроксимируется стандартным пятиточечным разностным шаблоном («крест») со вторым порядком точности  $O(h_x^2 + h_y^2)$ .

Разностное уравнение для внутреннего узла  $(i, j)$  имеет вид:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0$$

Отсюда выражается значение  $u_{i,j}$  через значения в соседних узлах, что служит основой для итерационных методов.

#### 1.2. Граничные условия

- **По оси  $y$  (условия Дирихле):** Значения на нижней ( $y = 0$ ) и верхней ( $y = 1$ ) границах фиксированы и не меняются в процессе итераций:  $u(x, 0) = \sin(x)$ ,  $u(x, 1) = e \cdot \sin(x)$ .
- **По оси  $x$  (условия Неймана):** На левой ( $x = 0$ ) и правой ( $x = \pi$ ) границах заданы значения производных. Для сохранения второго порядка точности аппроксимации используется **метод фиктивного узла**.

Например, для левой границы разностное условие  $\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h_x} = g(y_j)$  позволяет выразить значение в фиктивном узле  $u_{-1,j}$  и исключить его, подставив в основное разностное уравнение. Полученная формула используется для пересчета граничных значений на каждой итерации.

#### 1.3. Итерационные методы решения СЛАУ

Поскольку матрица системы разреженная и диагонально преобладающая, для решения применяются итерационные методы (методы установления):

### 1. Метод Либмана (Якоби):

Новое значение  $u_{i,j}^{(k+1)}$  вычисляется, используя значения соседей только с предыдущей итерации  $u^{(k)}$ . Это позволяет проводить вычисления параллельно (или используя копию массива), но обеспечивает медленную сходимость.

### 2. Метод Зейделя:

При вычислении  $u_{i,j}^{(k+1)}$  используются уже обновленные на текущей итерации значения соседей  $(u_{i-1,j}^{(k+1)}, u_{i,j-1}^{(k+1)})$ , если они уже вычислены. Это ускоряет распространение граничных условий внутрь области и сокращает число итераций примерно вдвое по сравнению с методом Либмана.

### 3. Метод верхней релаксации (SOR):

Является модификацией метода Зейделя. Новое значение вычисляется как взвешенная сумма старого значения и результата шага Зейделя:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = (1 - \omega)u_{i,j}^{(k)} + \omega u_{i,j}^{Seidel}$$

Параметр релаксации  $\omega$  выбирается в диапазоне  $(1, 2)$ . В работе используется теоретическая оценка оптимального значения:  $\omega_{opt} \approx \frac{2}{1 + \sin(\pi/N)}$ , что обеспечивает максимальную скорость сходимости.

## 1.4. Программная реализация

- Начальное приближение строится как линейная интерполяция по  $y$  между граничными условиями Дирихле, что уменьшает начальную невязку.
- Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия остановки:  $\max |u^{(k+1)} - u^{(k)}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-6}$ .
- Для верификации используется точное решение  $u(x, y) = e^y \sin(x)$ .

## 5 Выводы

В ходе работы была решена краевая задача для эллиптического уравнения тремя итерационными методами.

### 1. Сравнение скорости сходимости:

- **Метод Либмана (Якоби)** показал наихудшую эффективность, потребовав наибольшего количества итераций для достижения заданной точности. Это объясняется медленным затуханием низкочастотных компонент ошибки.
- **Метод Зейделя** продемонстрировал более быструю сходимость (число итераций сократилось примерно в 2 раза по сравнению с методом Либмана) за счет использования обновленных значений внутри одного итерационного шага.
- **Метод верхней релаксации (SOR)** оказался наиболее эффективным. Использование оптимального параметра  $\omega \approx 1.7 \dots 1.9$  позволило сократить количество итераций на порядок по сравнению с методом Зейделя. Это подтверждает теоретические оценки эффективности метода SOR для сеточных задач эллиптического типа.

### 2. Точность решения:

- Все три метода сошлись к одному и тому же численному решению (в пределах допуска  $\varepsilon$ ).
- Итоговая погрешность численного решения относительно аналитического ( $\approx 10^{-4} \dots 10^{-5}$ ) определяется не критерием остановки итераций, а шагом сетки (ошибкой аппроксимации  $O(h^2)$ ). Дальнейшее уменьшение допуска остановки не приведет к улучшению точности решения без измельчения самой сетки.

### 3. Аппроксимация границ:

Использование метода фиктивных узлов для условий Неймана позволило сохранить второй порядок точности во всей области, включая границы. Анализ профилей ошибок показывает отсутствие

резких скачков погрешности на границах  $x = 0$  и  $x = \pi$ , что свидетельствует о корректности реализации граничных условий.