**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Московский Авиационный Институт»**

**(Национальный Исследовательский Университет)**

**Институт: №8 «Информационные технологии   
и прикладная математика»   
Кафедра: 806 «Вычислительная математика   
и программирование»**

Лабораторная работа № 7   
по курсу «Численные методы»

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластушенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

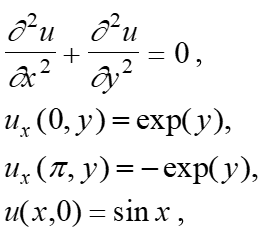
# **Тема**

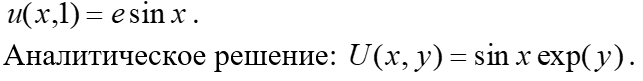
Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа.

# **Задание**

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

Вариант 4.





# **Листинг кода**

<https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab7/lab7.py>

Результаты:

*Jacobi: итераций=2400, diff=9.97e-07*

*Gauss-Seidel: итераций=1339, diff=9.96e-07*

*SOR (omega=1.905): итераций=122, diff=9.19e-07*

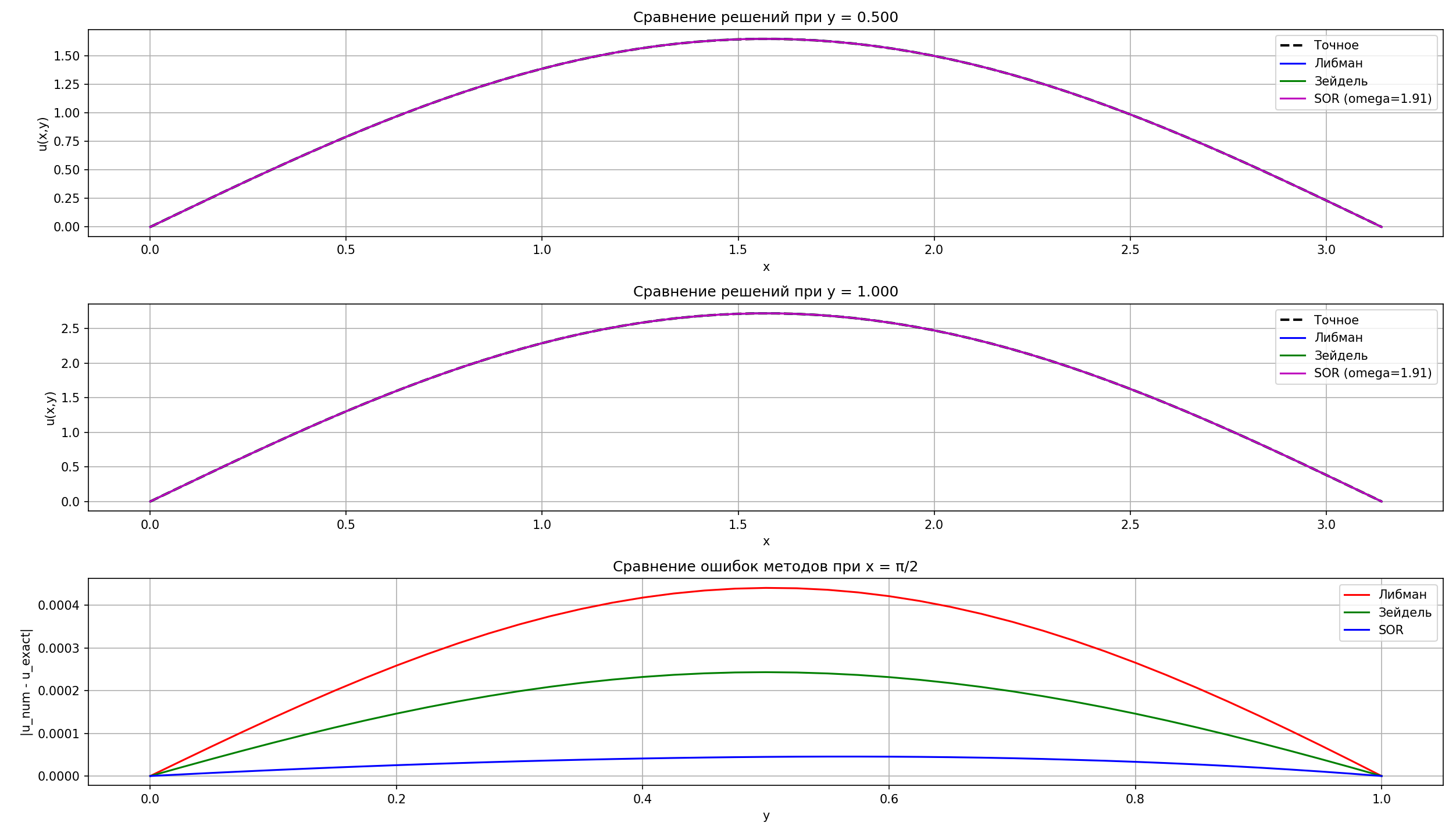
*Используем узлы сечений: y[20] = 0.500000, y[40] = 1.000000*

*Макс. ошибки:*

*Либман = 4.403e-04*

*Зейдель = 2.431e-04*

*SOR = 2.554e-04*



# **Метод решения**

**1. Метод решения и алгоритмическая реализация**

**1.1. Постановка задачи и дискретизация**  
Рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения (типа Лапласа/Пуассона) в прямоугольной области .  
Вводится равномерная прямоугольная сетка:

* Число узлов: по оси , по оси .
* Шаги сетки: , .

Оператор Лапласа аппроксимируется стандартным пятиточечным разностным шаблоном («крест») со вторым порядком точности . Разностное уравнение для внутреннего узла имеет вид:  
Отсюда выражается значение через значения в соседних узлах, что служит основой для итерационных методов.

**1.2. Граничные условия**

* **По оси (условия Дирихле):** Значения на нижней () и верхней () границах фиксированы и не меняются в процессе итераций:  
  , .
* **По оси (условия Неймана):** На левой () и правой () границах заданы значения производных. Для сохранения второго порядка точности аппроксимации используется **метод фиктивного узла**.  
  Например, для левой границы разностное условие позволяет выразить значение в фиктивном узле и исключить его, подставив в основное разностное уравнение. Полученная формула используется для пересчета граничных значений на каждой итерации.

**1.3. Итерационные методы решения СЛАУ**  
Поскольку матрица системы разреженная и диагонально преобладающая, для решения применяются итерационные методы (методы установления):

1. **Метод Либмана (Якоби):**  
   Новое значение вычисляется, используя значения соседей только с предыдущей итерации . Это позволяет проводить вычисления параллельно (или используя копию массива), но обеспечивает медленную сходимость.
2. **Метод Зейделя:**  
   При вычислении используются уже обновленные на текущей итерации значения соседей (, ), если они уже вычислены. Это ускоряет распространение граничных условий внутрь области и сокращает число итераций примерно вдвое по сравнению с методом Либмана.
3. **Метод верхней релаксации (SOR):**  
   Является модификацией метода Зейделя. Новое значение вычисляется как взвешенная сумма старого значения и результата шага Зейделя:  
   Параметр релаксации выбирается в диапазоне . В работе используется теоретическая оценка оптимального значения: , что обеспечивает максимальную скорость сходимости.

**1.4. Программная реализация**

* Начальное приближение строится как линейная интерполяция по между граничными условиями Дирихле, что уменьшает начальную невязку.
* Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия остановки: , где .
* Для верификации используется точное решение .

# **Выводы**

# В ходе работы была решена краевая задача для эллиптического уравнения тремя итерационными методами.

1. **Сравнение скорости сходимости:**
   * **Метод Либмана (Якоби)** показал наихудшую эффективность, потребовав наибольшего количества итераций для достижения заданной точности. Это объясняется медленным затуханием низкочастотных компонент ошибки.
   * **Метод Зейделя** продемонстрировал более быструю сходимость (число итераций сократилось примерно в 2 раза по сравнению с методом Либмана) за счет использования обновленных значений внутри одного итерационного шага.
   * **Метод верхней релаксации (SOR)** оказался наиболее эффективным. Использование оптимального параметра позволило сократить количество итераций на порядок по сравнению с методом Зейделя. Это подтверждает теоретические оценки эффективности метода SOR для сеточных задач эллиптического типа.
2. **Точность решения:**
   * Все три метода сошлись к одному и тому же численному решению (в пределах допуска ).
   * Итоговая погрешность численного решения относительно аналитического () определяется не критерием остановки итераций, а шагом сетки (ошибкой аппроксимации ). Дальнейшее уменьшение допуска остановки не приведет к улучшению точности решения без измельчения самой сетки.
3. **Аппроксимация границ:**  
   Использование метода фиктивных узлов для условий Неймана позволило сохранить второй порядок точности во всей области, включая границы. Анализ профилей ошибок показывает отсутствие резких скачков погрешности на границах и , что свидетельствует о корректности реализации граничных условий.