Костюков Е.С.
группа 107
вариант 14

# РГР №5

Определить, является ли полем или кольцом заданная алгебраическая структура. Проверить, существуют ли делители нуля.

Классы вычетов по mod 3 с операциями сложения и умножения индексов классов по mod 3.

Таблица Кэли

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 |

Решение. Обозначим $a \bmod 3 = [a]$.

Проверим аксиомы:

(1) Коммутативность сложения и умножения:

Пусть $a$ и $b$ - произвольные элементы ~~из поля~~ заданной алгебраической структуры, тогда $a+b=[a]+[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+[a]=b+a$. Аналогично, $a\cdot b=[a]\cdot[b]=[a\cdot b]=[b\cdot a]=[b]\cdot[a]=b\cdot a$.

(2) Ассоциативность сложения и умножения:

Пусть $a, b$ и $c$ - произвольные элементы заданной алгебраической структуры, тогда $a+(b+c)=[a]+([b]+[c])=[a+(b+c)]=$ $=[(a+b)+c]=([a]+[b])+[c]=(a+b)+c$. Ассоциативность умножения доказывается аналогично.

(3) Нейтральный элемент сложение и умножение:

~~$[a]+[0]$~~ $a+0=[a+0]=[a]=a \Rightarrow 0$ - нейтральный элемент сложение

$a\cdot 1=[a\cdot 1]=[a]=a \Rightarrow 1$ - нейтр. эл-т умножение.

(4) Обратный эл-т сложение и умножение:

$a+(-a)=[a+(-a)]=0 \Rightarrow$ ~~$a$~~ $-a$ - обратный эл-т сложение

$\forall a\neq 0\ \exists\ a^{-1}: a\cdot a^{-1}=1$. Например, ~~для класса вычетов 1 обратным элементом будет 2, т.к. 1·2=2·1=2~~ если $a=2$, то $a^{-1}=2^{-1}=2$, поскольку $2\cdot 2=4\equiv 1 \pmod 3$.

(5) Дистрибутивность:

$a\cdot(b+c)=a\cdot[b+c]=a\cdot[[b]+[c]]=a\cdot([b]+[c])=a\cdot[b]+a\cdot[c]=[a\cdot b+a\cdot c]$ $=a\cdot b+a\cdot c$. ч.т.д.

Вывод:

Все аксиомы выполняются $\Rightarrow$ классы вычетов по mod 3 с операциями сложения и умножения индексов классов по mod 3 являются полем.

Делителей нуля нет, т.к. отсутствие делителей нуля является одним из свойств поля.