

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Московский Авиационный Институт»**  
**(Национальный Исследовательский Университет)**

**Институт: №8 «Информационные технологии  
и прикладная математика»**

**Кафедра: 806 «Вычислительная математика  
и программирование»**

**Лабораторная работа № 5  
по курсу «Численные методы»**

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластущенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

## **1    Тема**

Численное решение уравнений параболического типа.

## **2    Задание**

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка–Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

Вариант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u_x(0, t) = \exp(-at),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-at),$$

$$u(x, 0) = \sin x .$$

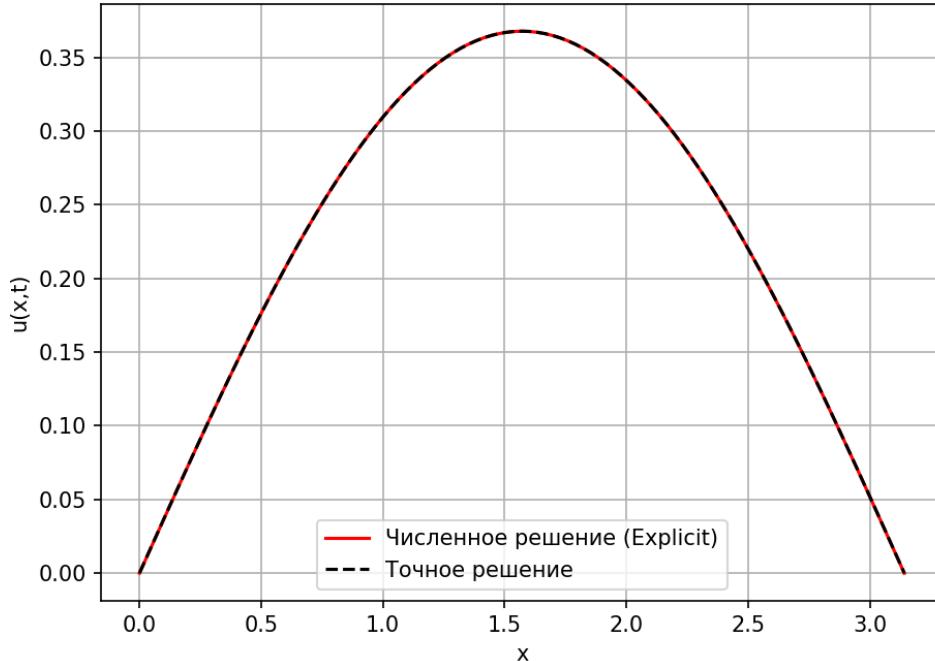
Аналитическое решение:  $U(x, t) = \exp(-at) \sin x .$

### 3   Листинг кода

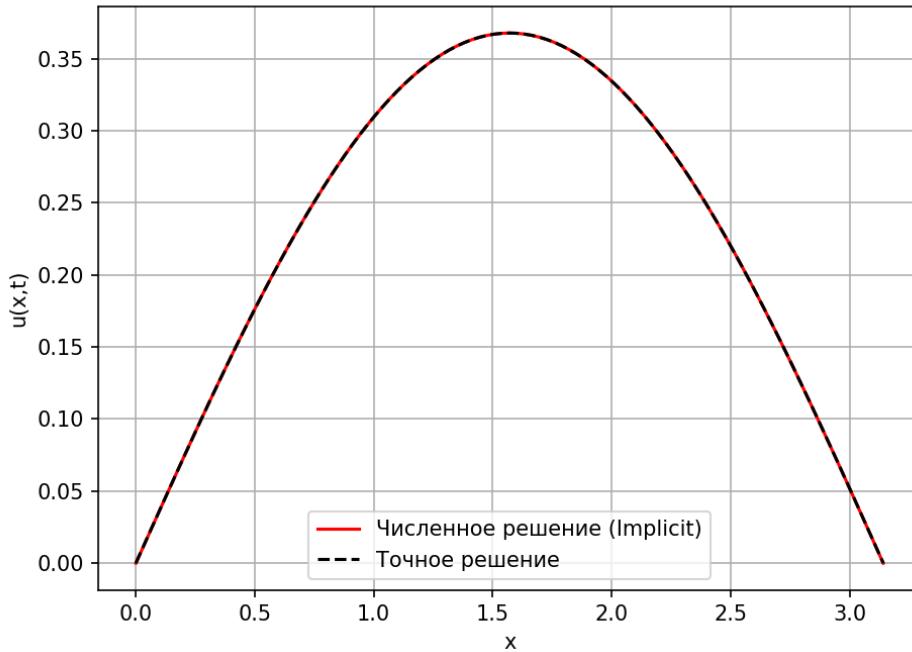
<https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab5/lab5.py>

Результаты:

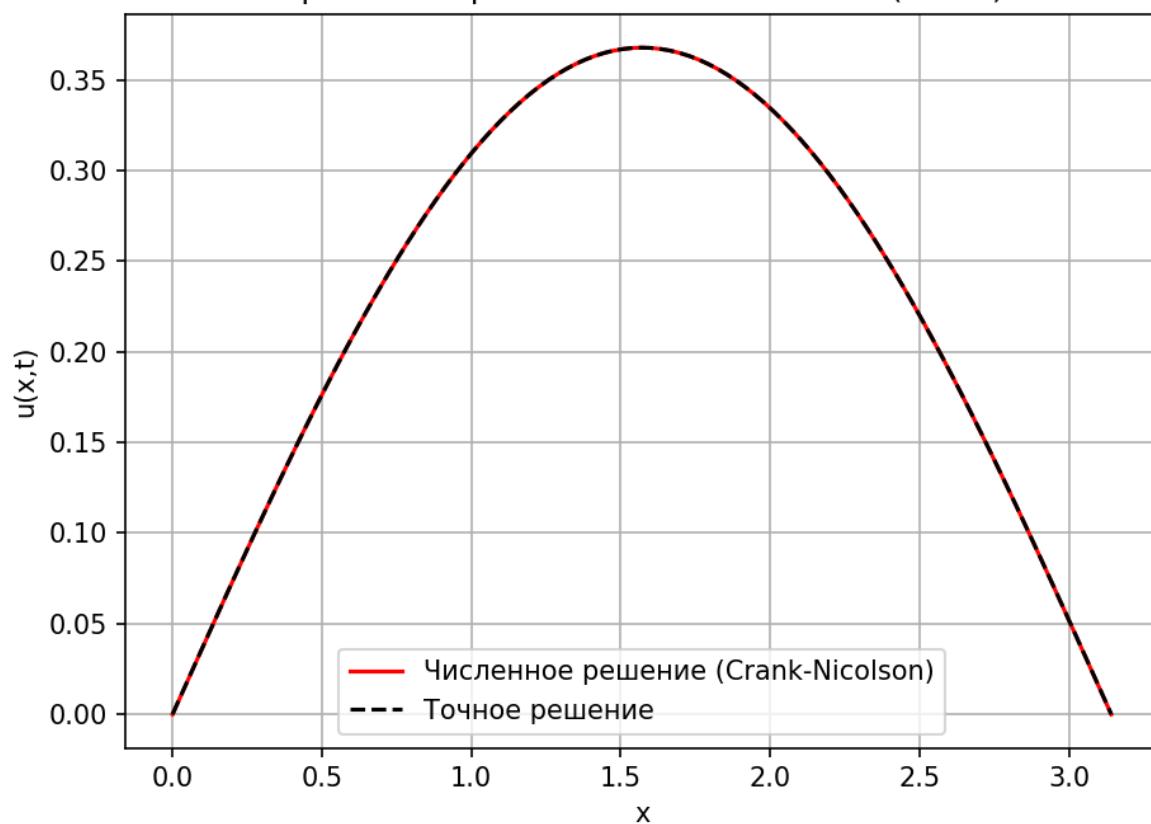
Сравнение решений: Explicit (t=1.0)



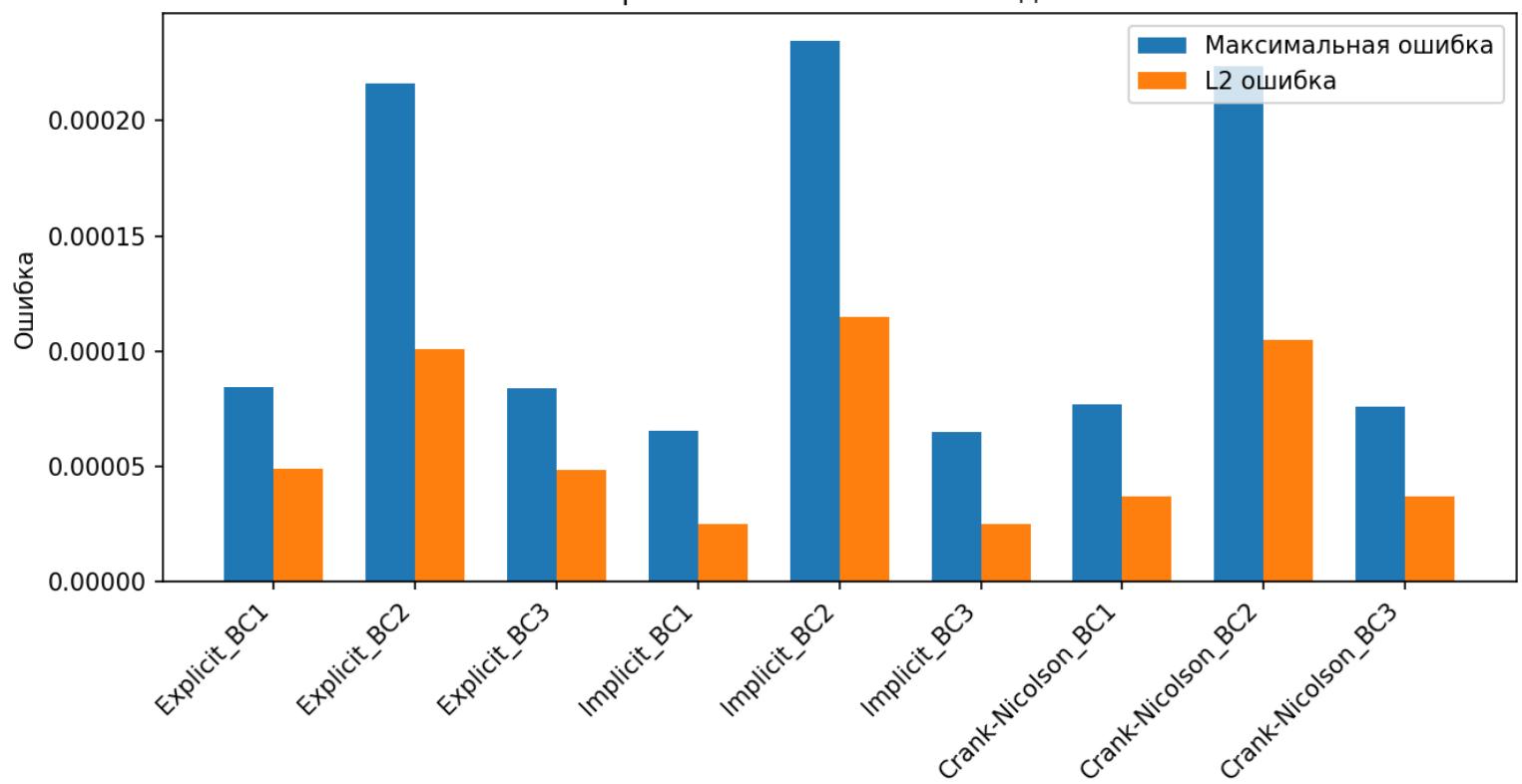
Сравнение решений: Implicit (t=1.0)



### Сравнение решений: Crank-Nicolson ( $t=1.0$ )



### Сравнение ошибок по методам



## 4 Метод решения

### 1. Описание алгоритма и численной реализации

#### 1.1. Дискретизация и сеточная область

Для численного решения введена равномерная пространственно-временная сетка.

- Пространственный шаг:  $h = L/N$ .
- Временной шаг:  $\tau = T/K$ .
- Параметр сетки (число Куранта/Фурье):  $\sigma = \frac{a\tau}{h^2}$ .

#### 1.2. Обобщенная разностная схема ( $\theta$ -метод)

Реализован универсальный алгоритм на основе взвешенной схемы с весовым коэффициентом  $\theta$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a(\theta \Lambda u^{n+1} + (1 - \theta) \Lambda u^n)$$

где  $\Lambda$  - оператор второй разностной производной.

- При  $\theta = 0$  алгоритм работает как **явная схема**. Вычисление нового слоя сводится к линейной комбинации значений предыдущего слоя (цикл по пространству без решения системы).
- При  $\theta = 1$ (неявная схема) и  $\theta = 0.5$ (схема Кранка–Николсона) алгоритм переходит к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида  $A\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{d}$  на каждом шаге по времени.

#### 1.3. Формирование СЛАУ и учет граничных условий

Для неявных модификаций матрица системы имеет трехдиагональную структуру. Заполнение коэффициентов матрицы реализовано следующим образом:

1. **Внутренние узлы:** Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  заполняются на основе стандартного трехточечного шаблона. Правая часть  $d_i$  формируется с учетом значений с предыдущего временного слоя  $u^n$  и функции источника (в данной задаче нулевой).
2. **Левая граница (Нейман):** Условие  $u_x(0) = g_{left}$  аппроксимируется и переносится в правую часть уравнения для первого узла, что позволяет исключить фиктивную точку и сохранить размерность системы.

3. **Правая граница (Нейман):** Реализована вариативная обработка последней строки матрицы и вектора правой части в зависимости от порядка аппроксимации (bc\_option):

- *Вариант 1 (1-й порядок):* Используется двухточечная разность назад. В матрице изменяются коэффициенты последней строки для связи  $u_N$  и  $u_{N-1}$ .
- *Вариант 2 (2-й порядок, трехточечная):* Используется односторонняя разность на трех точках  $(u_N, u_{N-1}, u_{N-2})$ . Это нарушает трехдиагональность, поэтому в коде произведена алгебраическая редукция к двум точкам для сохранения структуры матрицы.
- *Вариант 3 (2-й порядок, аппроксимация на дифференциальном уравнении):* Значение производной выражается через само уравнение теплопроводности. Это добавляет слагаемые, зависящие от  $\tau$ , в коэффициенты  $a_N, b_N$  и правую часть  $d_N$ .

#### 1.4. Метод решения СЛАУ

Так как матрица системы является трехдиагональной, для нахождения вектора  $u^{n+1}$  реализован **метод прогонки (алгоритм Томаса)**.

- *Прямой ход:* вычисление прогоночных коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$ .
- *Обратный ход:* последовательное нахождение неизвестных от  $u_N$  к  $u_0$ . Сложность алгоритма составляет  $O(N)$ , что делает вычислительную стоимость шага сопоставимой с явной схемой.

#### 1.5. Программная реализация

Код написан на Python с использованием библиотеки numtrpy.

- Функция `thomas_solve` инкапсулирует логику линейной алгебры.
- Функции `explicit_step` и `implicit_like_step` разделяют логику явного пересчета и сборки/решения матрицы.
- Основной цикл `run_simulation` аккумулирует статистику ошибок (Max-norm и L2-norm) путем сравнения с аналитическим решением `exact(x, t)`.

## 5 Выводы

В ходе лабораторной работы исследована эффективность различных конечно-разностных методов для решения параболического уравнения.

### 1. Сравнение алгоритмов по времени:

- Алгоритм на основе **явной схемы** показал себя как наименее затратный по памяти (не требует хранения матрицы), но критически зависимый от шага по времени. При  $\sigma > 0.5$  наблюдается экспоненциальный рост вычислительной неустойчивости («разбалтывание» решения).
- Алгоритмы на основе **неявной схемы и схемы Кранка–Николсона**, использующие метод прогонки, продемонстрировали абсолютную устойчивость. Дополнительные затраты на сборку матрицы и прогонку (порядка  $8N$  операций) окупаются возможностью выбирать шаг  $\tau$  значительно больше, чем в явном методе.

### 2. Влияние аппроксимации границ:

- Численные эксперименты показали, что порядок аппроксимации граничных условий должен быть согласован с порядком внутренней схемы. Использование аппроксимации 1-го порядка (Вариант 1) вносит ошибку  $O(h)$ , которая доминирует над ошибкой схемы Кранка–Николсона  $O(h^2)$ , нивелируя её преимущества.
- Наиболее точный результат дает Вариант 3 (аппроксимация на уравнении), так как он учитывает локальную динамику процесса на границе более корректно, чем простые разностные формулы.

### 3. Заключение:

Для практических расчетов оптимальной является комбинация схемы Кранка–Николсона и аппроксимации граничных условий второго порядка (Вариант 3), обеспечивающая минимальную погрешность при разумных вычислительных затратах.