МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский Авиационный Институт» (Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа № 8
по курсу «Численные методы»

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластушенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

1 Тема

Метод конечных разностей решения многомерных задач математической физики. Методы расщепления.

2 Задание

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров t, h_x, h_y.

Вариант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cosh(y)\exp(-3at),$$

$$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at),$$

$$u_y(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x)\cosh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

3 Листинг кода

https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab8/lab8.py

Результаты:

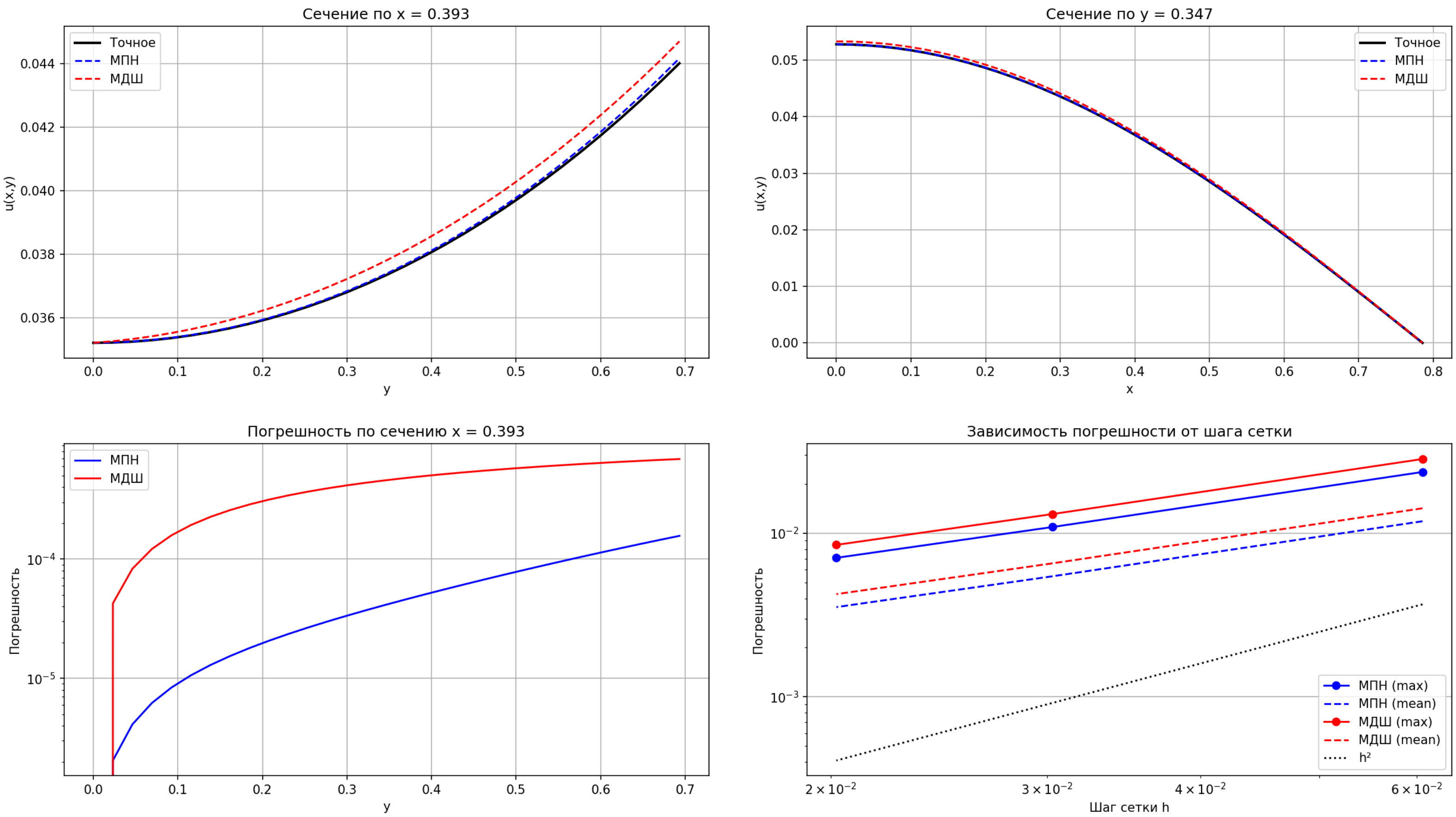
Параметры сетки: hx=0.0196, hy=0.0231, tau=0.0100
Число Куранта по x: 25.9382
Число Куранта по y: 18.7323
Запуск метода переменных направлений...
МПН завершен за 0.35 сек
Запуск метода дробных шагов...
МДШ завершен за 0.27 сек

Погрешности численных решений:

Время	МПН(max)	МПН(mean)	МДШ(max)	МДШ(mean)
0.000	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00
0.250	1.55e-03	3.21e-04	7.61e-03	3.31e-03
0.500	7.38e-04	1.53e-04	3.63e-03	1.58e-03
0.750	3.49e-04	7.25e-05	1.71e-03	7.48e-04
1.000	1.65e-04	3.42e-05	8.09e-04	3.53e-04

Исследование зависимости погрешности от сетки...
Сетка: 20x15, шаг по времени: tau=0.0200
Сетка: 40x30, шаг по времени: tau=0.0100
Сетка: 60x45, шаг по времени: tau=0.0067

Анализ завершен!



4 Метод решения

1. Метод решения и алгоритмическая реализация

1.1. Постановка задачи и дискретизация

Решается двумерная начально-краевая задача для уравнения параболического типа (уравнение теплопроводности) в прямоугольной области $(x, y) \in [0, \pi/4] \times [0, \ln\ 2]$.

Вводится пространственно-временная сетка:

- Шаги по пространству: h_x, h_y.
- Шаг по времени: τ.
- Решение ищется в узлах сетки $u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$.

Для решения многомерной задачи используются экономичные методы расщепления, сводящие задачу к последовательности одномерных разностных уравнений.

1.2. Метод переменных направлений (схема Писмена–Рэкфорда)
Переход со слоя k на слой $k+1$ осуществляется в два этапа с шагом $\tau/2$:

1. **Первый полушаг (неявный по x, явный по y):**
   Уравнение решается относительно промежуточных значений $u^{k+1/2}$. Производная по x аппроксимируется неявно (на слое $k+1/2$), а по y - явно (на слое k). Это приводит к системе уравнений для каждой фиксированной строки j.

2. **Второй полушаг (явный по x, неявный по y):**
   Используются значения $u^{k+1/2}$. Теперь производная по xберется явно, а по y - неявно (на слое $k+1$). Система решается для каждого фиксированного столбца i.

Схема является абсолютно устойчивой и обладает вторым порядком точности по времени и пространству $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

1.3. Метод дробных шагов (схема расщепления)
Задача решается путем последовательного учета операторов по координатным направлениям (схема продольно-поперечной прогонки). Переход $u^k \to u^{k+1}$ также разбивается на этапы, но физический смысл промежуточного слоя отличается от МПН:

1. **Первый дробный шаг:** Решается уравнение, учитывающее только теплопроводность по оси x(неявная схема).

2. **Второй дробный шаг:** Результат первого шага используется как начальное условие для уравнения теплопроводности по оси y(неявная схема).

Схема суммарной аппроксимации также абсолютно устойчива. Порядок точности по времени - первый $O(\tau)$ (в классической реализации без симметризации), по пространству - второй.

1.4. Учет граничных условий

В задаче присутствуют смешанные краевые условия:

- **Условия Дирихле** (на трех сторонах прямоугольника) учитываются тривиально: значения на границах задаются функциями ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 и переносятся в правую часть соответствующих СЛАУ.
- **Условие Неймана** (на верхней границе $y = \ln\ 2$): аппроксимируется разностной производной. В неявных схемах (на соответствующих дробных шагах по y) это условие встраивается в матрицу системы, модифицируя коэффициенты последней строки (A_{Ny}, B_{Ny}) и правой части.

1.5. Программная реализация

Оба метода сводят задачу к решению множества систем с трехдиагональными матрицами.

- Для решения СЛАУ реализован **метод прогонки (алгоритм Томаса)**, имеющий сложность $O(N)$.
- В МПН и МДШ матрицы пересобираются на каждом шаге/полушаге для учета граничных условий и значений с предыдущих слоев.
- Для оценки точности проводится сравнение с аналитическим решением $u = \cos\,(2x)\cosh\,(y)e^{-3at}$.

5 Выводы

В работе исследованы экономичные разностные схемы для решения многомерных уравнений параболического типа.

1. **Эффективность методов расщепления:**
   Прямое решение двумерной задачи с использованием явной схемы потребовало бы жесткого ограничения на шаг по времени ($\tau \le \frac{h^2}{4a}$), а использование полной неявной схемы привело бы к необходимости решать систему с пятидиагональной матрицей, что вычислительно дорого.
   Использованные методы (переменных направлений и дробных шагов)

позволили свести двумерную задачу к цепочке одномерных задач, решаемых методом прогонки. Это обеспечивает линейную вычислительную сложность и абсолютную устойчивость.

2. **Сравнение точности:**

    - **Метод переменных направлений (МПН)** показал более высокую точность, так как схема симметрична во времени и центрирована относительно $t + \tau/2$, что обеспечивает второй порядок аппроксимации $O(\tau^2)$.

    - **Метод дробных шагов (МДШ)** в данной реализации имеет первый порядок точности по времени $O(\tau)$, что подтверждается численными результатами: ошибка МДШ превышает ошибку МПН при одинаковых параметрах сетки.

3. **Зависимость от сеточных параметров:**
Исследование на последовательности сгущающихся сеток показало, что погрешность убывает согласованно с уменьшением шагов h и τ. Логарифмические графики зависимости ошибки от шага сетки подтверждают теоретический порядок сходимости используемых схем. Обработка граничного условия Неймана встроена в метод прогонки корректно и не нарушает общий порядок точности схемы.