

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии
и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика
и программирование»

Лабораторная работа № 5
по курсу «Численные методы»

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластушенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

1 Тема

Численное решение уравнений параболического типа.

2 Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка–Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

Вариант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

$$u_x(0, t) = \exp(-at),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-at),$$

$$u(x, 0) = \sin x.$$

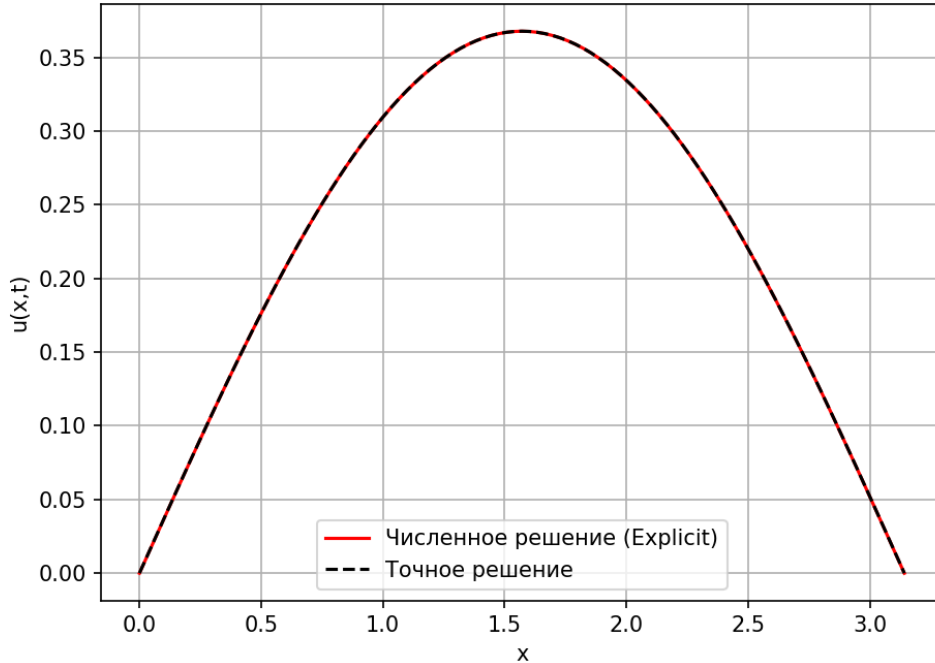
Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \sin x$.

3 Листинг кода

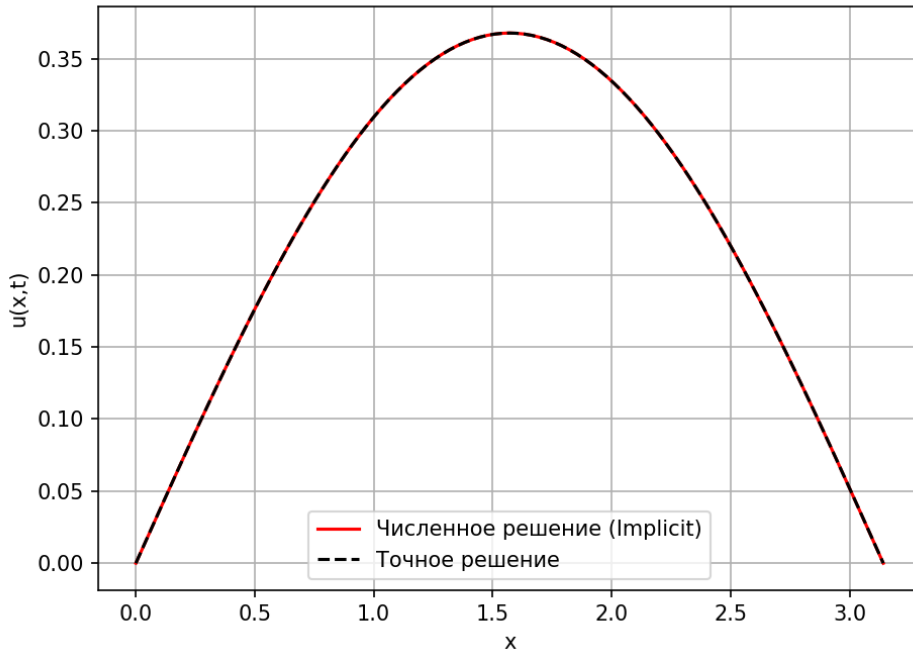
<https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab5/lab5.py>

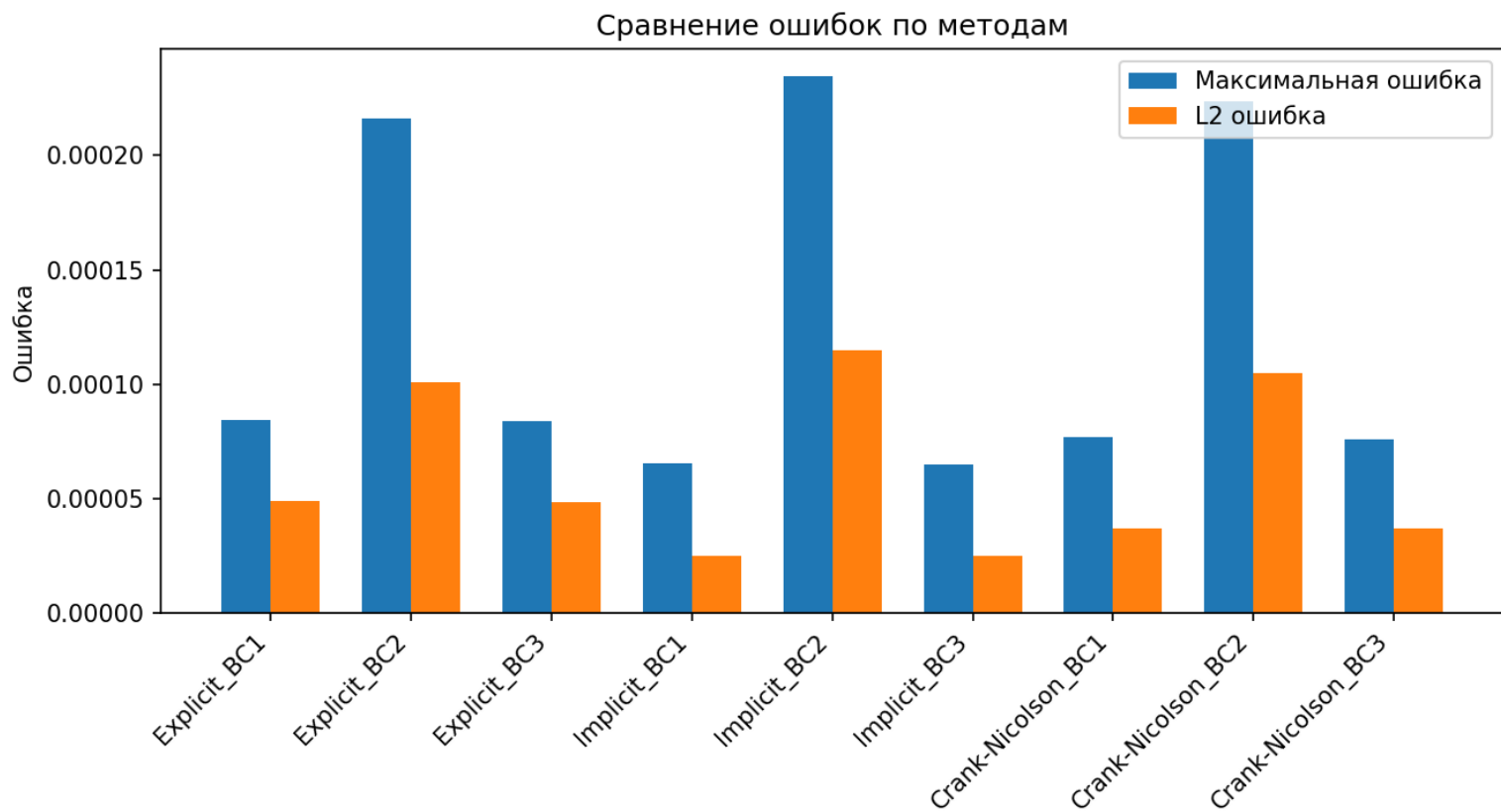
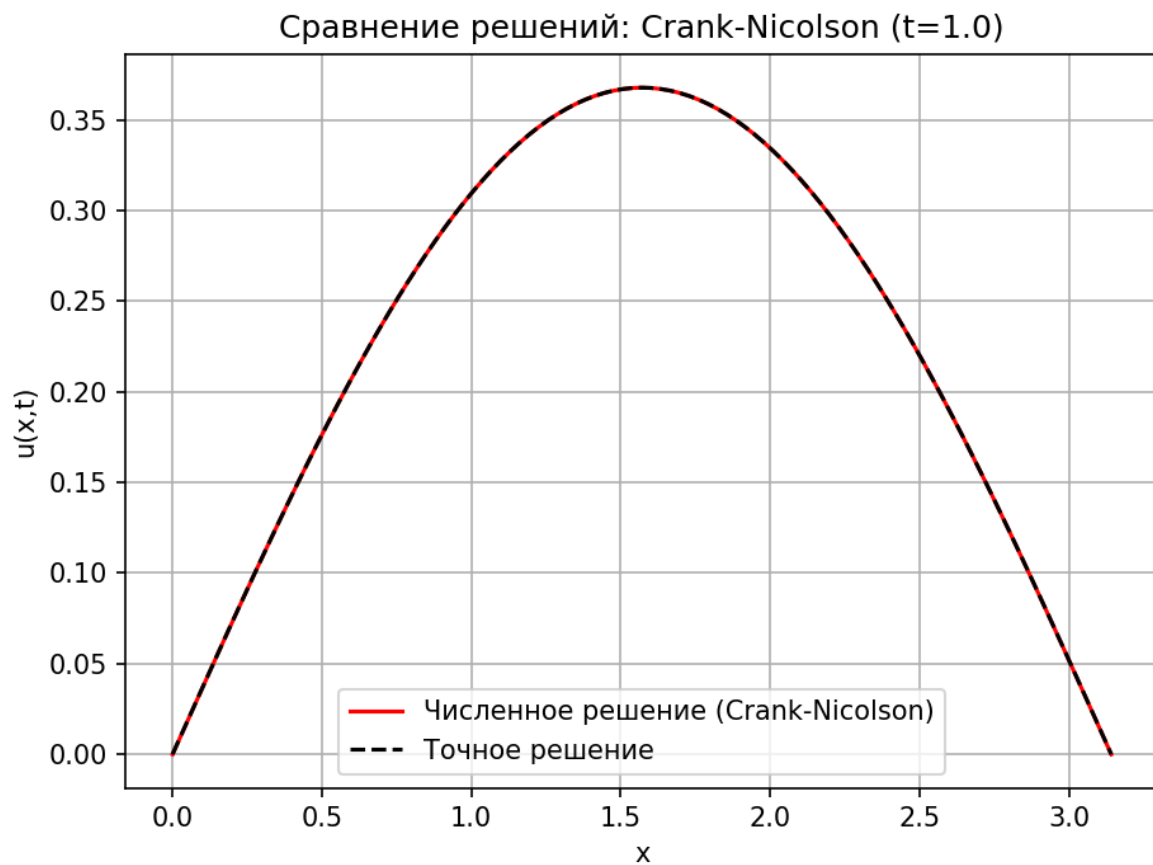
Результаты:

Сравнение решений: Explicit (t=1.0)



Сравнение решений: Implicit (t=1.0)





4 Метод решения

1. Описание алгоритма и численной реализации

1.1. Дискретизация и сеточная область

Для численного решения введена равномерная пространственно-временная сетка.

- Пространственный шаг: $h = L/N$.
- Временной шаг: $\tau = T/K$.
- Параметр сетки (число Куранта/Фурье): $\sigma = \frac{a\tau}{h^2}$.

1.2. Обобщенная разностная схема (θ -метод)

Реализован универсальный алгоритм на основе взвешенной схемы с весовым коэффициентом θ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a(\theta \Lambda u^{n+1} + (1 - \theta) \Lambda u^n)$$

где Λ - оператор второй разностной производной.

- При $\theta = 0$ алгоритм работает как **явная схема**. Вычисление нового слоя сводится к линейной комбинации значений предыдущего слоя (цикл по пространству без решения системы).
- При $\theta = 1$ (неявная схема) и $\theta = 0.5$ (схема Кранка–Николсона) алгоритм переходит к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Au^{n+1} = \mathbf{d}$ на каждом шаге по времени.

1.3. Формирование СЛАУ и учет граничных условий

Для неявных модификаций матрица системы имеет трехдиагональную структуру. Заполнение коэффициентов матрицы реализовано следующим образом:

1. **Внутренние узлы:** Коэффициенты a_i, b_i, c_i заполняются на основе стандартного трехточечного шаблона. Правая часть d_i формируется с учетом значений с предыдущего временного слоя u^n и функции источника (в данной задаче нулевой).
2. **Левая граница (Нейман):** Условие $u_x(0) = g_{left}$ аппроксимируется и переносится в правую часть уравнения для первого узла, что позволяет исключить фиктивную точку и сохранить размерность системы.

3. **Правая граница (Нейман):** Реализована вариативная обработка последней строки матрицы и вектора правой части в зависимости от порядка аппроксимации (bc_option):
- *Вариант 1 (1-й порядок):* Используется двухточечная разность назад. В матрице изменяются коэффициенты последней строки для связи u_N и u_{N-1} .
 - *Вариант 2 (2-й порядок, трехточечная):* Используется односторонняя разность на трех точках (u_N, u_{N-1}, u_{N-2}). Это нарушает трехдиагональность, поэтому в коде произведена алгебраическая редукция к двум точкам для сохранения структуры матрицы.
 - *Вариант 3 (2-й порядок, аппроксимация на дифференциальном уравнении):* Значение производной выражается через само уравнение теплопроводности. Это добавляет слагаемые, зависящие от τ , в коэффициенты a_N, b_N и правую часть d_N .

1.4. Метод решения СЛАУ

Так как матрица системы является трехдиагональной, для нахождения вектора u^{n+1} реализован **метод прогонки (алгоритм Томаса)**.

- *Прямой ход:* вычисление прогоночных коэффициентов α_i, β_i .
- *Обратный ход:* последовательное нахождение неизвестных от u_N к u_0 . Сложность алгоритма составляет $O(N)$, что делает вычислительную стоимость шага сопоставимой с явной схемой.

1.5. Программная реализация

Код написан на Python с использованием библиотеки numpy.

- Функция thomas_solve инкапсулирует логику линейной алгебры.
- Функции explicit_step и implicit_like_step разделяют логику явного пересчета и сборки/решения матрицы.
- Основной цикл run_simulation аккумулирует статистику ошибок (Max-norm и L2-norm) путем сравнения с аналитическим решением exact(x, t).

5 Выводы

В ходе лабораторной работы исследована эффективность различных конечно-разностных методов для решения параболического уравнения.

1. Сравнение алгоритмов по времени:

- Алгоритм на основе **явной схемы** показал себя как наименее затратный по памяти (не требует хранения матрицы), но критически зависимый от шага по времени. При $\sigma > 0.5$ наблюдается экспоненциальный рост вычислительной неустойчивости («разбалтывание» решения).
- Алгоритмы на основе **неявной схемы** и **схемы Кранка-Николсона**, использующие метод прогонки, продемонстрировали абсолютную устойчивость. Дополнительные затраты на сборку матрицы и прогонку (порядка $8N$ операций) окупаются возможностью выбирать шаг τ значительно больше, чем в явном методе.

2. Влияние аппроксимации границ:

- Численные эксперименты показали, что порядок аппроксимации граничных условий должен быть согласован с порядком внутренней схемы. Использование аппроксимации 1-го порядка (Вариант 1) вносит ошибку $O(h)$, которая доминирует над ошибкой схемы Кранка–Николсона $O(h^2)$, нивелируя её преимущества.
- Наиболее точный результат дает Вариант 3 (аппроксимация на уравнении), так как он учитывает локальную динамику процесса на границе более корректно, чем простые разностные формулы.

3. **Заключение:** Для практических расчетов оптимальной является комбинация схемы Кранка–Николсона и аппроксимации граничных условий второго порядка (Вариант 3), обеспечивающая минимальную погрешность при разумных вычислительных затратах.