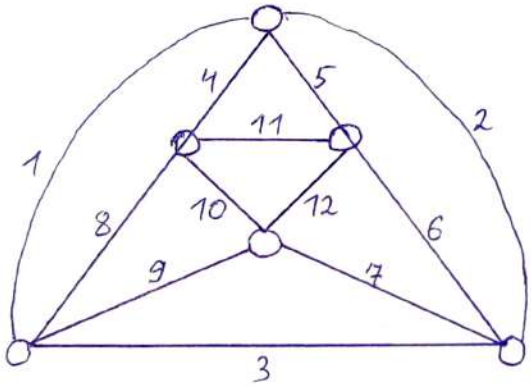
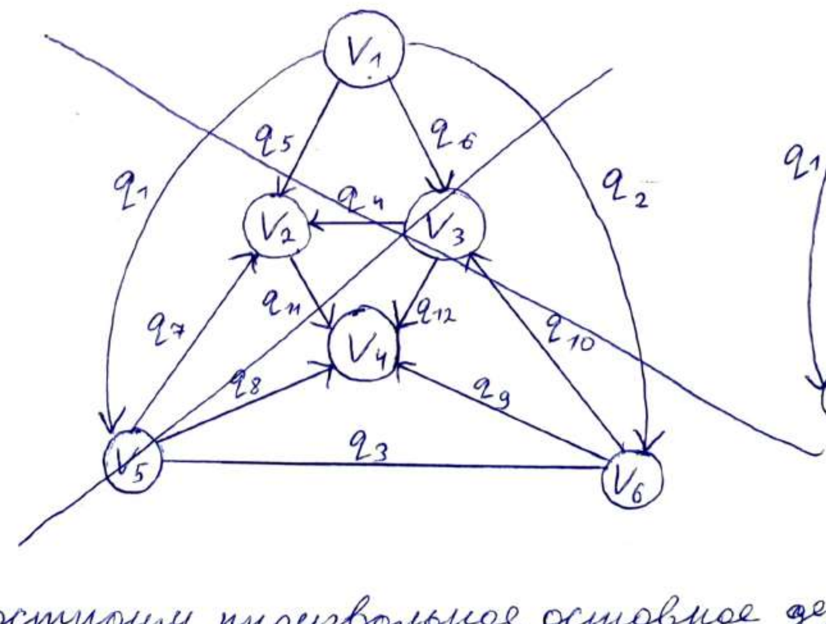
Костюков Евгений
группа 107
вариант 14

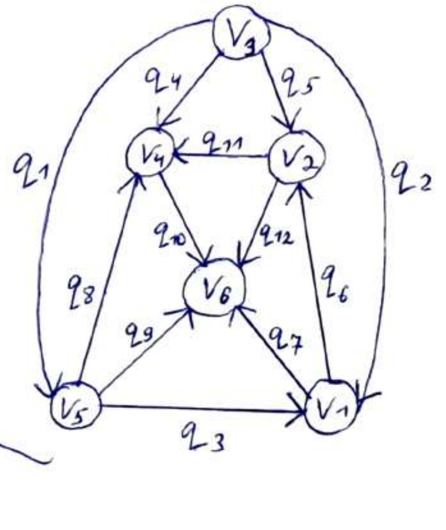
КР №6

Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



Решение. 1. Зададим на графе произвольную ориентацию:



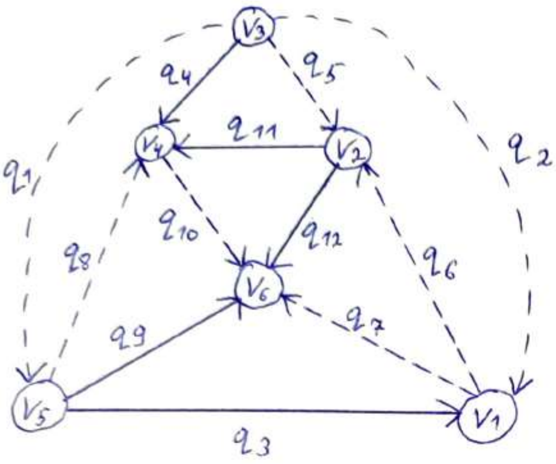


2. Построим произвольное основное дерево D заданного графа: Рёбра q_1 и q_5, соответствующие ЭДС, в основное дерево не взяли.

Костюков Евгений
группа 107
вариант 14

КР №6

Продолжение.



3. Найдём базис циклов, добавляя к остовному дереву по одному не вошедшему в него ребру (изображены пунктиром). Затем найдём соответствующие вектор-циклы.

$(D+q_1)$: μ_1: $V_5-V_3-V_4-V_2-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_1)=(-1,0,0,1,0,0,0,0,-1,0,-1,1)$;

$(D+q_2)$: μ_2: $V_5-V_1-V_3-V_4-V_2-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_2)=(0,-1,1,1,0,0,0,0,-1,0,-1,1)$;

$(D+q_5)$: μ_3: $V_2-V_3-V_4-V_2 \Rightarrow C(\mu_3)=(0,0,0,1,-1,0,0,0,0,0,-1,0)$;

$(D+q_6)$: μ_4: $V_5-V_1-V_2-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_4)=(0,0,1,0,0,1,0,0,-1,0,0,1)$;

$(D+q_7)$: μ_5: $V_5-V_1-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_5)=(0,0,1,0,0,0,1,0,-1,0,0,0)$;

$(D+q_8)$: μ_6: $V_5-V_4-V_2-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_6)=(0,0,0,0,0,0,0,1,-1,0,-1,1)$;

$(D+q_{10})$: μ_7: $V_6-V_4-V_2-V_6 \Rightarrow C(\mu_7)=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,-1,1)$.

4. Цикломатическая матрица имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Костюков Евгений
группа 107
вариант 14

КР №6

Продолжение.

5. Выпишем закон Кирхгофа для напряжений:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Напряжения, соответствующие рёбрам, не вошедшим в остовное дерево $u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}$ – базисные переменные системы. Остальные – свободные. Выразим базисные переменные через свободные.

$$\begin{cases} -u_1+u_4-u_9-u_{11}+u_{12}=0 \\ -u_2+u_3+u_4-u_9-u_{11}+u_{12}=0 \\ u_4-u_5-u_{11}=0 \\ u_3+u_6-u_9+u_{12}=0 \\ u_3+u_7-u_9=0 \\ u_8-u_9-u_{11}+u_{12}=0 \\ -u_{10}-u_{11}+u_{12}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1=u_4-u_9-u_{11}+u_{12} \\ u_2=u_3+u_4-u_9-u_{11}+u_{12} \\ u_5=u_4-u_{11} \\ u_6=-u_3+u_9-u_{12} \\ u_7=-u_3+u_9 \\ u_8=u_9+u_{11}-u_{12} \\ u_{10}=-u_{11}+u_{12} \end{cases}$$

6. Выпишем уравнения Кирхгофа для токов. Найдём матрицу инцидентности B орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
V_1	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
V_2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1
V_3	-1	-1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
V_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	1	0
V_5	1	0	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
V_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1

Костюков Евгений
группа 107
вариант 14

КР №6

Продолжение.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_6 - I_7 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_{11} - I_{12} = 0 \\ -I_1 - I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\ I_4 + I_8 - I_{10} + I_{11} = 0 \\ I_1 - I_3 - I_8 - I_9 = 0 \\ I_7 + I_9 + I_{10} + I_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 + I_3 - I_6 - I_7 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_{11} - I_{12} = 0 \\ I_4 + I_8 - I_{10} + I_{11} = 0 \\ I_1 - I_3 - I_8 - I_9 = 0 \\ I_7 + I_9 + I_{10} + I_{12} = 0 \end{cases}$$

7. Подставим формулы закона Ома:

$$\cancel{E_1} \begin{cases} I_4 R_4 - I_9 R_9 - I_{11} R_{11} + I_{12} R_{12} = E_1 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_9 R_9 + I_{11} R_{11} - I_{12} R_{12} = 0 \\ I_4 R_4 - I_{11} R_{11} = E_2 \\ I_3 R_3 + I_6 R_6 - I_9 R_9 + I_{12} R_{12} = 0 \\ I_3 R_3 + I_7 R_7 - I_9 R_9 = 0 \\ I_8 R_8 - I_9 R_9 - I_{11} R_{11} + I_{12} R_{12} = 0 \\ I_{10} R_{10} + I_{11} R_{11} - I_{12} R_{12} = 0 \end{cases}$$

Костюков Евгений
группа 107
вариант 14

КР №6

Продолжение.

8. Совместная система имеет вид:

$$
\begin{cases}
I_2+I_3-I_6-I_7=0 \\
I_5+I_6-I_{11}-I_{12}=0 \\
I_4+I_8-I_{10}+I_{11}=0 \\
I_1-I_3-I_8-I_9=0 \\
I_7+I_9+I_{10}+I_{12}=0 \\
I_4R_4-I_9R_9-I_{11}R_{11}+I_{12}R_{12}=E_1 \\
I_2R_2-I_3R_3-I_4R_4+I_9R_9+I_{11}R_{11}-I_{12}R_{12}=0 \\
I_4R_4-I_{11}R_{11}=E_2 \\
I_3R_3+I_6R_6-I_9R_9+I_{12}R_{12}=0 \\
I_3R_3+I_7R_7-I_9R_9=0 \\
I_8R_8-I_9R_9-I_{11}R_{11}+I_{12}R_{12}=0 \\
I_{10}R_{10}+I_{11}R_{11}-I_{12}R_{12}=0
\end{cases}
$$

Двенадцать уравнений и двенадцать неизвестных - токи $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}$; ЭДС - E_1, E_2 и сопротивления $R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}$ известны.