МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский Авиационный Институт» (Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа № 6
по курсу «Численные методы»

Группа: М8О-407Б-22

Студент: Е.С. Кострюков

Преподаватель: Ю.В. Сластушенский

Оценка:

Дата: 26.12.2025

Москва, 2025

1 Тема

Метод конечных разностей для решения уравнений гиперболического типа.

2 Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров t,h.

Вариант 4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u\,,$$

$$u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0,$$

$$u_x(1,t) - 2u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(2x)\,,$$

$$u_t(x,0) = 0\,.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(2x)\cos t$.

3 Листинг кода

https://github.com/EvgenyMAI/Study/blob/main/NumMethods/solutions/lab6/lab6.py

Результаты:

Максимальные погрешности

T = 0.5:

Явная схема (1 порядок): 0.014949

Неявная схема (1 порядок): 0.015061

Явная схема (2 порядок): 0.013841

Неявная схема (2 порядок): 0.013953

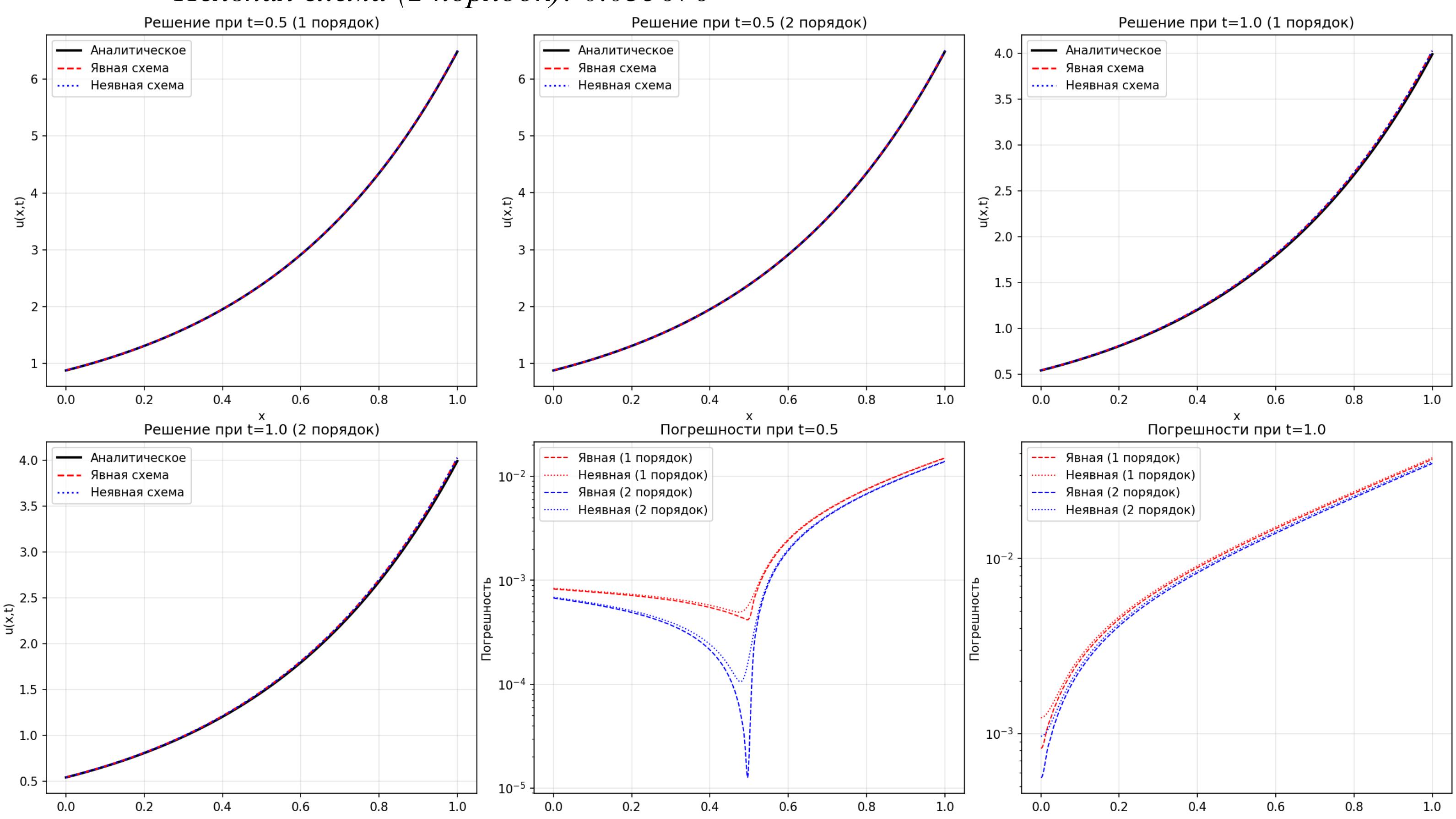
T = 1.0:

Явная схема (1 порядок): 0.036862

Неявная схема (1 порядок): 0.037623

Явная схема (2 порядок): 0.034914

Неявная схема (2 порядок): 0.035676



4 Метод решения

1. Метод решения и алгоритмическая реализация

1.1. Дискретизация и область моделирования

Задача решается в области $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$. Вводится равномерная прямоугольная сетка:

- Пространственный шаг $h = L/N$.
- Временной шаг $\tau = T/K$.
- Критерий устойчивости (число Куранта): $\sigma^2 = \frac{\tau^2}{h^2}$. Для явной схемы требуется выполнение условия $\sigma \leq 1$.

1.2. Разностные схемы для гиперболического уравнения

В работе реализованы два подхода к решению волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ (в простейшей форме, коэффициенты опущены для общности):

1. **Явная схема «крест»:**
   Используется центральная разностная аппроксимация вторых производных по времени и пространству. Значение на новом слое вычисляется явно по трем точкам предыдущего слоя и одной точке пред-предыдущего слоя:
   $$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \sigma^2(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$
   Схема имеет второй порядок точности $O(\tau^2 + h^2)$, но условно устойчива.

2. **Неявная схема:**
   Вторая производная по координате аппроксимируется на верхнем (новом) временном слое. Это приводит к системе уравнений относительно u^{k+1}:
   $$u_i^{k+1} - \sigma^2(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = 2u_i^k - u_i^{k-1}$$
   Схема является абсолютно устойчивой при любых значениях τ и h.

1.3. Аппроксимация начальных условий

Для гиперболического уравнения необходимо задать два начальных условия: $u(x,0) = \varphi(x)$ и $u_t(x,0) = \psi(x)$.

- Первый слой u^0 задается точно функцией $\varphi(x)$.

- Второй слой u^1 (необходимый для старта трехслойных схем) вычисляется двумя способами:

    1. **Первый порядок точности:** $u_i^1 = u_i^0$ (грубая аппроксимация, предполагающая нулевую начальную скорость или пренебрежение ей на малом шаге).

    2. **Второй порядок точности:** Используется разложение в ряд Тейлора:

    $$u(x,\tau) \approx u(x,0) + \tau u_t(x,0) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x,0)$$

    Вторая производная по времени заменяется на пространственную из уравнения: $u_{tt} = u_{xx}$.

1.4. Учет граничных условий и формирование СЛАУ

Граничные условия третьего рода (вида $u_x - \alpha u = 0$) аппроксимированы с помощью двухточечных разностей первого порядка точности.

- В **явной схеме** граничные значения u_0^{k+1} и u_N^{k+1} вычисляются после нахождения решения во внутренних узлах, используя выраженные явные формулы:

$$u_0 = \frac{u_1}{1+2h}, u_N = \frac{u_{N-1}}{1-2h}$$

- В **неявной схеме** граничные условия встраиваются в матрицу системы:
    - Левая граница вносит вклад в первую строку матрицы (коэффициенты b_0, c_0).
    - Правая граница модифицирует последнюю строку матрицы (коэффициенты a_N, b_N).
      Полученная трехдиагональная система уравнений решается методом **прогонки (алгоритм Томаса)** на каждом временном шаге.

1.5. Программная реализация

Алгоритм реализован на Python. Функции solve_explicit и solve_implicit инкапсулируют логику пересчета слоев. В основном теле программы производится сравнение численных решений с аналитическим $u(x,t) = e^{2x}\cos(t)$ и вычисление максимальной ошибки на сетке.

5 Выводы

В ходе работы исследованы численные методы решения гиперболического уравнения.

1. **Влияние начальной аппроксимации:**
   Сравнение результатов показало критическую важность корректной аппроксимации второго начального условия.
   - При использовании аппроксимации **1-го порядка** ($u^1 = u^0$) ошибка велика даже при малых шагах по времени, так как игнорируется начальная динамика процесса.
   - Аппроксимация **2-го порядка** (через ряд Тейлора и уравнение) существенно снижает глобальную погрешность, позволяя реализовать потенциальный второй порядок точности самих разностных схем. Графики погрешностей наглядно демонстрируют разницу в несколько порядков.
2. **Сравнение схем:**
   - **Явная схема** проста в реализации и эффективна по времени выполнения (не требует решения СЛАУ), однако ограничена условием Куранта. Нарушение условия $\sigma \leq 1$ приводит к мгновенному разрушению решения.
   - **Неявная схема** требует больших вычислительных затрат (метод прогонки), но обладает запасом устойчивости.
3. **Анализ погрешности:**
   Максимальная ошибка растет со временем ($T = 1.0$ против $T = 0.5$), что характерно для эволюционных задач из-за накопления дисперсионной ошибки схемы. При использовании согласованных порядков аппроксимации (схема 2-го порядка + старт 2-го порядка) численное решение визуально совпадает с аналитическим, подтверждая корректность реализации алгоритмов.