Математический анализ (практика)

Перфильев Евгений Владимирович(ПИУ)

ИДЗ 6.1

Вариант 20

№ 1

Домашняя работа.

ИДЗ №6.1.

Вариант 20.

№1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{\sqrt[3]{n+1}}$$

$n=1$: $a_1 = \frac{5\cdot 1}{\sqrt[3]{1+1}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

$n=2$: $a_2 = \frac{5\cdot 2}{\sqrt[3]{2+1}} = \frac{10}{\sqrt[3]{3}} = \frac{10\sqrt[3]{9}}{3}$

$n=3$: $a_3 = \frac{5\cdot 3}{\sqrt[3]{3+1}} = \frac{15}{\sqrt[3]{4}} = \frac{15\sqrt[3]{2}}{2}$

$n=4$: $a_4 = \frac{5\cdot 4}{\sqrt[3]{4+1}} = \frac{20}{\sqrt[3]{5}} = \frac{20\sqrt[3]{25}}{5} = 4\sqrt[3]{25}$

$n=5$: $a_5 = \frac{5\cdot 5}{\sqrt[3]{5+1}} = \frac{25}{\sqrt[3]{6}} = \frac{25\sqrt[3]{36}}{6}$

№ 2

№2

$$\underset{n=0}{\frac{1}{1\cdot 4}} + \underset{n=1}{\frac{1}{4\cdot 7}} + \underset{n=2}{\frac{1}{7\cdot 10}} + \underset{n=3}{\frac{1}{10\cdot 13}} + \underset{n=4}{\frac{1}{13\cdot 16}} + \dots$$

Формула n-го члена ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+3n)(4+3n)}$

Проверка: $n=0$: $\frac{1}{(1+3\cdot 0)(4+3\cdot 0)} = \frac{1}{1\cdot 4}$ – да

$n=1$: $\frac{1}{(1+3)(4+3)} = \frac{1}{4\cdot 7}$ – да

$n=2$: $\frac{1}{(1+6)(4+6)} = \frac{1}{7\cdot 10}$ – да

$n=3$: $\frac{1}{(1+9)(1+12)} = \frac{1}{10\cdot 13}$ – да.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+3n)(4+3n)}$

№ 3

$$\frac{1}{13\cdot16}+\frac{1}{16\cdot19}+\frac{1}{19\cdot22}+\frac{1}{22\cdot25}+\frac{1}{25\cdot28}+\dots$$

а) Формула общего члена ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(13+3n)(16+3n)}$

Проверим первые 3 члена ряда:

$n=0$: $\frac{1}{(13+3\cdot0)(16+3\cdot0)}=\frac{1}{13\cdot16}$ – да

$n=1$: $\frac{1}{(13+3\cdot1)(16+3\cdot1)}=\frac{1}{16\cdot19}$ – да

$n=2$: $\frac{1}{(13+6)(16+6)}=\frac{1}{19\cdot22}$ – да.

б) Формула для нахождения n-ой частичной суммы ряда:

$$\frac{1}{(13+3n)(16+3n)}=\frac{A}{13+3n}+\frac{B}{16+3n}=$$

$$=\frac{A(16+3n)+B(13+3n)}{(13+3n)(16+3n)}=\frac{16A+3An+13B+3Bn}{(13+3n)(16+3n)}=$$

$$\begin{cases}3A+3B=0\\16A+13B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\16A+13B=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13+3n}-\frac{1}{16+3n}\right)\quad S_n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{13+3n}-\frac{1}{16+3n}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{13+3n}-\frac{1}{16+3n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}-\cancel{\frac{1}{16}}+\cancel{\frac{1}{16}}-\cancel{\frac{1}{19}}+\cancel{\frac{1}{19}}-\cancel{\frac{1}{22}}+\dots+\cancel{\frac{1}{13+3n}}-\frac{1}{16+3n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16+3n}\right)$$

в) $S_5=\frac{1}{13\cdot16}+\frac{1}{16\cdot19}+\frac{1}{19\cdot22}+\frac{1}{22\cdot25}+\frac{1}{25\cdot28}+\frac{1}{28\cdot31}$

$$=\frac{1}{208}+\frac{1}{304}+\frac{1}{418}+\frac{1}{550}+\frac{1}{700}+\frac{1}{868}\ \frac{5}{364}=\frac{6}{403}$$

$$S_5=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16+3\cdot5}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{31}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{403}=\frac{6}{403}$$

г) $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16+3n}\right)=\frac{1}{39}$

д) $r_n=\frac{1}{(13+3(n+1))(16+3(n+1))}+\frac{1}{(13+3(n+2))(16+3(n+2))}+\dots$

е) $r_n=S-S_n$

$r_5=\frac{1}{39}-S_5=\frac{1}{39}-\frac{6}{403}=\frac{1}{93}$

ж) $S\approx S_5$

$\delta_n=\frac{1}{93}\cdot\frac{39}{1}=\frac{13}{31}\cdot100\%$

№ 4

№4

а) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S = \frac{b_1}{1-q}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$: $|q| = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n+3^n}{6^n}$ – расходится

б) $S = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n-16}{4^n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n \mp \sum_{n=3}^{\infty} + \frac{16}{4^n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{16}{4^n}$

$S = \frac{b_1}{1-q}$

$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $|q| = \frac{1}{2}$

$S_1 = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{16}{4^n}$: $b_1 = \left(\frac{16}{4^3}\right) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$; $|q| = \frac{1}{4}$

$S_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

$S = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = -\frac{1}{12}$

Ответ: $-\frac{1}{12}$

№ 5

№5

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2+n^3}{2+n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2+n^3}{2+n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^3}\right)^{\to 0} - \left(\frac{n^2}{n^3}\right)^{\to 0} + \frac{n^3}{n^3}}{\left(\frac{2}{n^3}\right)_{\to 0} + \frac{n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Вывод: Не выполняется необходим~~ый~~ое ~~признак~~ условие сходимости => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2+n^3}{2+n^3}$ расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 0$$

Вывод: Выполняется необходимое условие сходимости ряда => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ либо сходится, либо расходится.

№ 6

№6

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ $\qquad S_n = \frac{b_1}{1-q}$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$:

$b_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится (1)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

$b_1 = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$; $q = \frac{1}{10}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1\cdot 10}{10\cdot 9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ – сходится (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ – сходится

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится (1)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) – расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ – расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{301}}\right)$.

$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{301}}\right)$ на сходимость ряда не влияет $\Rightarrow$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{301}}\right)$ сходится.

№ 7

№ 7

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+3)}$

По признаку Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n(n+3)}{(n+1)(n+4)\cdot 2^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2+5n+4} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\left(\frac{3}{n}\right)^{\to 0}}{\frac{n^2}{n^2}+\left(\frac{5}{n}\right)_{\to 0}+\left(\frac{4}{n^2}\right)_{\to 0}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} 1 = 2\cdot 1 = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+3)}$$ расходится

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n-7}{(n+4)!\cdot\sqrt{n+2}}$ #

По признаку Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{(9n+2)\cdot\cancel{(n+4)!}\cdot\sqrt{n+2}}{(n+5)!\cdot\sqrt{n+3}\cdot(9n-7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(9n+2)\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}\,(9n^2+38n-35n)} = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n-7}{(n+4)!\cdot\sqrt{n+2}}$$ сходится

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+4}}$ По интегральному признаку Коши.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+4}}\,dn = \left| \begin{matrix} v = 2n+4 \\ \frac{1}{2}dv = dn \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{2\sqrt{v}}\,dv = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{v} = \sqrt{v} = \left(\sqrt{2n+4}\right)\Big|_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+4} - \sqrt{6} =$$

$$= \infty - \sqrt{6} \Rightarrow$$ интеграл расходится $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+4}}$$ расходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{n-4}\right)^{n^3}$

По $\sqrt{\ }$ признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{n-4}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{n-4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{n}+\underbrace{\frac{5}{n}}_{\to 0}}{\frac{n}{n}-\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3^{n^2} = \infty > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{n-4}\right)^{n^3}$$ расходится

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(3n-1)}$ $\neq$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$

По предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n^2}{2n(3n-1)\cdot 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{6n}{n}-\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(3n-1)}$ сходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!}$ $[n! = n(n-1)!]$

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot 2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n-1)!}}{(2n+1)\cdot(2n)\cancel{(2n-1)!}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2+2n} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}{\frac{4n^2}{n^2}+\underbrace{\frac{2n}{n^2}}_{\to 0}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{0}{4} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!}$$ сходится

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$

По предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n}{\sqrt{2n^2+1}\cdot 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$ расходится.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(n+5)}$

По простому признаку сравнение:

$\sum\frac{1}{n^2}$ – сходится,

Т.к. $\frac{1}{(2n+3)(n+5)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n\in N \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(n+5)}$ –

сходится

№ 8

№8

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+5)}$

По признаку Лейбница:

$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+5)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится по Лейбницу

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$

По простому признаку сравнения:

$\sum \frac{1}{n^2}$ - сходится

Т.к. $\frac{1}{(n+1)(n+5)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$ - сходится

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+5)}$ абсолютно сходится.

б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{7n+5}{8n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{7n+5}{8n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+5}{8n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{8n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{7}{8} \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{7n+5}{8n+1}$ - расходится

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$ - сходится $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ по Лейбницу.

По предельному признаку сравнения:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} \cdot 1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ - сходится условно.