Математический анализ (практика)

Перфильев Евгений Владимирович(ПИУ)

ИДЗ 6.2

Вариант 20

№ 1

Домашняя работа.

ИДЗ № 6.2

Вариант 20

№1

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^n \cdot n!}$

$D_x = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{x^{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{10^n} \cdot \cancel{n!}}{10^{\cancel{n+1}} \cdot (n+1)! \cdot \cancel{x^n}} \right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10n+10} = 0 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow R \in (-\infty; +\infty)$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n}$

$D_x = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 7^n}{7^{n+1} \cdot x^n} \right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7} = \frac{|x|}{7} < 1$

$|x| < 7$

$-7 < x < 7$

При $x = 7$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ – расходится

При $x = -7$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{7^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n}{7^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ расходится по Лейбницу

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n}$ сх. при $-7 < x < 7$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5n-1)(x+3)^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}}$

$$D_x = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(5n+4)(x+3)^{n+1} \cdot \sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}}{\sqrt{5n+8} \cdot 3^{2n+2} \cdot (5n-1)(x+3)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(5n+4)(x+3) \cdot \sqrt{5n+3}}{\sqrt{5n+8} \cdot 9 \cdot (5n-1)} \right| = \left|\frac{x+3}{9}\right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(5n+4)\sqrt{5n+3}}{\sqrt{5n+8}\,(5n-1)} \right| =$$

$$= 1 \cdot \left|\frac{x+3}{9}\right| = \left|\frac{x+3}{9}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x+3}{9} < 1$$

$$-9 < x+3 < 9$$

$$-12 < x < 6$$

При $x = -12$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5n-1)(-12+3)^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(5n-1)(-9)^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n-1)(9^n)}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}} = \infty \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится по признаку Лейбница

При $x = 6$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5n-1)(6+3)^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(5n-1)\, 9^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{\sqrt{5n+3}} = \infty \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится по признаку Лейбница

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5n-1)(x+3)^n}{\sqrt{5n+3} \cdot 3^{2n}}$ сх., при $-12 < x < 6$.

п) $\sum_{n=1}^{\infty} (4n)! \cdot x^n$

$D_x = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(4n+4)! \cdot \cancel{x^{n+1}}}{(4n)! \cdot \cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} |(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)| = \infty$

=> ряд расходится

Ответ: $x \in \varnothing$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{3^n} x^n$

$D_x = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+4)^2 \, \cancel{x^{n+1}} \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^{n+1}} \cdot \cancel{x^n} \cdot (n+3)^2} \right| = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+4)^2}{(n+3)^2} \right| = \frac{|x|}{3} < 1$

$|x| < 3$

$-3 < x < 3$

При $x = -3$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{3^n} (-3)^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2 \, \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty} (n+3)^2 = \infty \neq 0 =>$ ряд расходится

по Лейбницу.

При $x = 3$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{3^n} 3^n$

$\lim_{n\to\infty} (n+3)^2 = \infty \neq 0 =>$ ряд расходится по Лейбницу.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{3^n} x^n$ сх., при $-3 < x < 3$.

№ 2

№2

$$f(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x) = g'(x)$$

$$g(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$(1+x)^m = 1 + xm + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{6}x^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots$$

$$g'(x) = \left(1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots\right)' = \frac{3}{2} + \frac{6x}{8} - \frac{3x^2}{16} + \dots =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{3x^2}{16} + \dots$$

Ответ: $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{3x^2}{16} + \dots$

№ 3

№3

$$y = \ln(1+x^2)$$

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} + \dots$$

Ряд сходится при $|x| < 1$ или $-1 < x < 1$.

При $x = \pm 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1^{2n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{2n}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow$$ ряд сходится по Лейбницу.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд) $\Rightarrow$ расходится $\Rightarrow$

=> при $x=+1$ сходится условно.

При $x=-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n}}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ => ряд сходится по Лейбницу.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) => расходится =>

=> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cancel{(-1)^{2n}}}{n}$ при $x=-1$ сходится условно.

Ответ: $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} + \dots$

Ряд сходится, при $|x|<1$, при $x=\pm 1$ ряд сходится условно.

№ 4

№4

$\ln 1{,}2 \qquad \delta = 0{,}001.$

$\ln 1{,}2 = \ln\left(1+\frac{2}{10}\right)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$

$\ln\left(1+\frac{2}{10}\right) = \frac{2}{10} - \frac{4}{200} + \frac{8}{3000} - \frac{16}{40000} + \dots =$

$= \frac{1}{5} - \frac{1}{50} + \frac{1}{375} - \frac{1}{2500} + \dots =$

$= 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}0027 - \underbrace{(0{,}0004)}_{<\delta}$

$\ln 1{,}2 = 0{,}182$

Ответ: $0{,}182$

№ 5

№5.

(а) $\int_0^{1/3} \ln(1+x^2)\,dx$

$\ln(1+x^2)$, $|\alpha|<1$, $\alpha = x^2$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$

$$\int_0^{1/3} \ln(1+x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5\cdot 10} + \frac{1}{3^7\cdot 21} \approx 0{,}0123457 - 0{,}000411523 + \cancel{0{,}000060219} \, 0{,}0000021773 = 0{,}0119363544$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{1/3} x^8\,dx = \frac{x^9}{36}\Big|_0^{1/3} = \frac{1}{3^9\cdot 36} = 1{,}41126\cdot 10^{-6}$$

$1{,}4\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$

Ответ: $\int_0^{1/3} \ln(1+x^2)\,dx \approx 0{,}0119363544$ с точностью 10^{-5}

(б) $\int_0^{1/3} \sqrt{x}\cdot e^{-x}\,dx$ с точностью до 10^{-3}

e^{-x}, $\alpha = -x$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$

$\sqrt{x}\cdot e^{-x} = \sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{6}$

$$\int_0^{1/3}\left(\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{6}\right)dx = \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{7\cdot 2} - \frac{2x^4\sqrt{x}}{9\cdot 6_3}\right)\Big|_0^{1/3} = \frac{2\sqrt{3}}{27} - \frac{2\sqrt{3}}{135} + \frac{\sqrt{3}}{567} - \frac{\sqrt{3}}{6561} =$$

$$= 0{,}1283 - 0{,}02566 + 0{,}00305476 - 0{,}000263992^{*}$$

$\approx 0{,}105$ $\qquad < 0{,}001$

Ответ: $\int_0^{1/3} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx \approx 0{,}105$.

№ 6

№6

$$y' = e^{-3x} + xy^2, \qquad y(0)=0$$

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$$

$$y'' = (e^{-3x} + xy^2)' = -3e^{-3x} + 2xyy' + y^2$$

$$y''(0) = -3 + 0 + 0 = -3 \neq 0$$

$$y''' = 9e^{-3x} + 2xyy'' + 2x(y')^2 + 2yy' + 2yy'$$

$$y'''(0) = 9 + 0 + 0 + 0 + 0 = 9 \neq 0$$

$$y \approx x + \left(-\frac{3x^2}{2}\right) + \frac{9x^3}{6}$$

$$y \approx x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$$

Ответ: $y \approx x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$