Лабораторная работа №4

1. Написать программу для нахождения определителя матрицы 2х2.
2. Написать программу для нахождения определителя матрицы NxN.
3. Написать программу для решения системы N линейных уравнений с N неизвестными по Методу Крамера.
4. Написать программу для нахождения обратной матрицы для матрицы 2х2.
5. Написать программу для нахождения обратной матрицы для матрицы NxN.
6. Написать программу для решения системы N линейных уравнений с N неизвестными методом обратной матрицы.

Теория

Определитель

Для матрицы 2 × 2 определитель вычисляется как:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

В общем случае, для матриц более высоких порядков (выше 2-го порядка) n × n определитель можно вычислить, применив следующую рекурсивную формулу:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$$

Где $\bar{M}_j^1$ – дополнительный минор к элементу a_{1j}. Эта формула называется разложением по строке.

Например, для матрицы 3x3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Дополнительный минор

Дополнительный минор $\bar{M}_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k}$ квадратной матрицы A порядка k (k ⩽ n) — определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием $i_1 \ldots i_k$ строк и $j_1 \ldots j_k$ столбцов.

Обратная матрица

Для матрицы 2x2

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Для матрицы NxN

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)},$$

где $\operatorname{adj}(A)$ – присоединенная матрица.

Присоединенная матрица

Присоединённая матрица — матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы.

$$C^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} — дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путем вычёркивания i -й строки и j -го столбца.