Т-6

H_0: $\xi \sim Bi(2, \theta)$, где θ - вероятность заболеть.

$$p = C_2^x \theta^x (1-\theta)^{2-x}$$

H_1: $\overline{H_0}$

Правдоподобна ли гипотеза? $\alpha = 0,05$

Решение:

Количество заболеваний	0	1	2
m	10	181	9
p	$(1-\theta)^2$	$2\theta(1-\theta)$	θ^2

$$L = (1-\theta)^{20} (2\theta(1-\theta))^{181} \theta^{18} \to \max$$

$$\ln L = 20\ln(1-\theta) + 181\ln(2\theta(1-\theta)) + 18\ln\theta \to \max$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{20}{1-\theta} + \frac{181(1-2\theta)}{\theta(1-\theta)} + \frac{18}{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 181 - 362\theta - 20\theta + 18 - 18\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{199}{400}$$

Проверка на максимум:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{20}{(1-\theta)^2} - \frac{18}{\theta^2} - 181\left(\frac{2}{\theta(1-\theta)} + \frac{(1-2\theta)^2}{(\theta(1-\theta))^2}\right) < 0$$

т.к. $\theta > 0$, $\theta < 1$ и все слагаемые в левой части отрицательные.

$\Rightarrow \theta = \frac{199}{400}$

Отсюда имеем

$p_1 = (1-\theta)^2 = \left(\frac{201}{400}\right)^2$; $p_2 = 2\theta(1-\theta) = 2\,\frac{199 \cdot 201}{(400)^2}$

$p_3 = \theta^2 = \left(\frac{199}{400}\right)^2$

$np_1 \approx 51$; $np_2 = 100$; $np_3 = 49$

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(10-51)^2}{51} + \frac{(181-100)^2}{100} + \frac{(9-49)^2}{49}$$

$\approx 131{,}2$

$\Delta \sim \chi^2(m-1-s) = \chi^2(3-1-1) = \chi^2(1)$

$P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = P(\Delta \geq 131{,}2) = \int_{131{,}2}^{\infty} p_{\chi^2}(x)\,dx \approx 0 < \alpha.$

Ответ: Гипотеза отвергается – результаты статистически значимы.

III-7

H_0: номер партии и размер детали независимы

H_1: $\overline{H_0}$, $\alpha = 0{,}05$

Решение:

	I партия	II партия	q_i
Занижен	25	52	0,385
Нормален	50	41	0,455
Завышен	25	7	0,16
p_j	0,5	0,5	

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - np_jq_i)^2}{np_jq_i} \approx 20,48 \ ; \ \Delta \sim \chi^2((m-1)(k-1)) = \chi^2(2)$$

$$P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = P(\Delta \geq 20,48) = \int_{20,48}^{+\infty} p_{\chi^2}(x)\,dx = 3,6 \cdot 10^{-5}$$

p-value $= 3,6 \cdot 10^{-5} < \alpha$

Ответ: Гипотеза отвергается - номер партии и размер детали зависимы.

Т-8

H_0: Оба потока однородны

H_1: $\overline{H_0}$, $\alpha = 0{,}05$

Решение:

	2	3	4	5	
1 поток	33	43	80	144	
2 поток	39	35	72	154	
p	0,12	0,13	0,253	0,497	$N = 600$

Новая таблица:

	2	3	4	5
1 поток	36 ~~0,12~~	39	76	149
2 поток	36,	39	76	149

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - p_i n_j)^2}{n_j p_i} \approx 2{,}08, \quad \tilde{\Delta} \sim \chi^2((k-1)(m-1)) = \chi^2(3)$$

$$\cancel{P(\Delta} \cdot P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = P(\Delta \geq 2{,}08) = \int_{2{,}08}^{+\infty} p_{\chi^2}(x)dx \approx 0{,}56$$

p-value $= 0{,}56 > \alpha$

Ответ: нет оснований отвергнуть гипотезу об однородности потоков.

Т-10

$$H_0: \quad p_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$H_1: \quad p_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{1-x}}{e-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Решение:

а) $n=1$

$$L(x) = \frac{L_1(x)}{L_0(x)} = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{e^{1-x}}{e-1} \geq C \Rightarrow e^{-x} \geq \tilde{C}$$

$$\ln e^{-x} \geq \ln \tilde{C} \Rightarrow -x \geq \ln \tilde{C} \Leftrightarrow x \leq B$$

Критическая область: $G: \ x \leq B$

$$\alpha_1 = P(x \leq B \mid H_0) = \int_0^B dx = B \Rightarrow B = \alpha$$

$G: x \leq \alpha$, α – уровень значимости.

$$W = P(x \leq \alpha \mid H_1) = \int_0^\alpha \frac{e^{1-x}}{e-1} dx = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-\alpha})$$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{e}{e-1}(1 - e^{-\alpha})$$

Ответ: Критическая область: $x \leq \alpha$

$\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = 1 - \frac{e}{e-1}(1 - e^{-\alpha})$

$W = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-\alpha})$

б) $n=2$

$$L(x) = \frac{e^{-x_1+1}}{e-1} \cdot \frac{e^{-x_2+1}}{e-1} \geq C \; ; e^{-(x_1+x_2)} \geq \tilde{C}$$

$$-(x_1+x_2) \geq \ln \tilde{C} \Rightarrow x_1 + x_2 \leq B$$

$$G: \; x_1 + x_2 \leq B$$

$$\mathcal{L}_1 = P(\vec{x} \in G \mid H_0) = \iint\limits_G dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \int_0^B dx_1 \int_0^{B-x_1} dx_2 = \int_0^B (B - x_1) dx_1 = B^2 - \frac{B^2}{2} = \frac{B^2}{2}$$

$$\frac{B^2}{2} = \mathcal{L} \Rightarrow B = \sqrt{2\mathcal{L}} \Rightarrow G: \; x_1 + x_2 \leq \sqrt{2\mathcal{L}}$$

$$W = P(\vec{x} \in G \mid H_1) = \iint\limits_G p_1(x_1) p_2(x_2) =$$

$$= \iint\limits_G \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1} e^{-x_2} dx_1 d_2 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^B e^{-x_1} dx_1 \int_0^{B-x_1} e^{-x_2} dx_2 = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^B e^{-x_1} \left(1 - e^{x_1 - B}\right) dx_1 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \left(\int_0^B e^{-x_1} dx_1 - e^{-B} \int_0^B dx_1 \right) =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \left(1 - e^{-B} - e^{-B} B \right) \; ; B = \sqrt{2\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L}_2 = 1 - W$$

Ответ: критическая область: $G: x_1 + x_2 \leq \sqrt{2\alpha}$

c) n испытаний:

$$L(x) = \frac{L_1(x)}{L_0(x)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} p_1(x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} p_0(x_i)} = \prod_{i=1}^{n} p_1(x_i) \geq C$$

$$\ln L(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln p_1(x_i)$$

$$\eta = \ln p_1(\xi) = \ln \frac{e \cdot e^{-\xi}}{e-1} = \ln \frac{e}{e-1} - \xi$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - nM[\eta]}{\sqrt{n D[\eta]}} \sim N(0,1)$$

$$P(\ln L \geq \ln C \mid H_0) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - nM[\eta]}{\sqrt{n D[\eta]}} \geq A \mid H_0 \right)$$

$$A = \frac{\ln C - nM[\eta]}{\sqrt{n D[\eta]}}$$

$$M[\eta] = M\left[\ln \frac{e}{e-1} - \xi\right] = \ln \frac{e}{e-1} - \int_0^1 x\, dx =$$

$$= \ln \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}$$

$$\cancel{M} D[\eta] = D\left[\ln \frac{e}{e-1} - \xi\right] = D[\xi] = \frac{1}{12}$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - nM[\eta]}{\sqrt{nD[\eta]}} \geq A\right) = \alpha$$

$$A = \frac{\ln c - n\left(\ln\frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}\sqrt{12} = u_{1-\alpha}$$

$$\ln c = n\ln\frac{e}{e-1} - \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{12}}u_{1-\alpha}$$

$$\ln L = n\ln\frac{e}{e-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$G: \ln L \geq \ln c \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n}{12}}\,u_{1-\alpha}$$

$\overline{x} \leq \frac{1}{2} - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{12n}}$ – критическая область

$$W = P(\vec{x}_n \in G) = P\left(\overline{x} \leq \frac{1}{2} - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{12n}} \,\Big|\, H_1\right) =$$

$$\frac{\overline{x} - M[\xi]}{\sqrt{D[\xi]}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$M[\xi] = \frac{e}{e-1}\int_0^1 x e^{-x}\,dx = \frac{e}{e-1}\left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left(-\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{e-2}{e-1}$$

$$M[\xi^2] = \frac{e}{e-1}\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left(-x^2e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int x e^{-x}\,dx\right) =$$

$$\frac{e}{e-1}\left(-e^{-x} + 2\,\frac{e-2}{e}\right) = \frac{e}{e-1}\left(\frac{2e-5}{e}\right) = \frac{2e-5}{e-1}$$

$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{2e-5}{e-1} - \frac{e^2-4e+4}{(e-1)^2} =$$

$$= \frac{2e^2-5e-2e+5-e^2+4e-4}{(e-1)^2} = \frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$$

$$W = P(\overline{x} \le A \mid H_1) = P\left(\frac{\overline{x} - M[\xi]}{\sqrt{D[\xi]}}\sqrt{n} \le \frac{A - M[\xi]}{\sqrt{D[\xi]}}\sqrt{n}\right)$$

d) $G:\ x_{min} < c$

$$\alpha_1 = P(x_{min} < c \mid H_0) = \alpha$$

$$H_0:\ F_0 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow F_{min}(x) = 1 - (1 - F_0(x))^n$$

$$P(x_{min} < c \mid H_0) = F_{min}(c) = \alpha$$

$$F_{min}(c) = 1 - (1 - F_0(c))^n = \alpha$$

$$\cancel{F_0(c) = \alpha}\quad F_0(c) = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha} \Rightarrow c = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$W = P(x_{min} < c \mid H_1) = 1 - \alpha_2$$

$$F(x) = \frac{e}{e-1}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-x});\ F(c) = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-c})$$

$$W = F_{min}(c) = 1 - \left(1 - \frac{e}{e-1}(1 - e^{-c})\right)^n,\ c = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$\mathcal{L}_2 = 1 - W$

Ответ: $G: x_{min} < 1 - \sqrt[n]{1-\mathcal{L}}$

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}, \ \mathcal{L}_2 = 1 - W$

$W = 1 - \left(1 - \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{-c}\right)\right)^n, \ c = 1 - \sqrt[n]{1-\mathcal{L}}$

Т-11

$H_0: p_0(x) = \frac{1}{3}\delta(x-4) + \frac{1}{6}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$

$H_1: p_1(x) = \frac{1}{4}\left(\delta(x-4) + \delta(x-3) + \delta(x-2) + \delta(x-1)\right)$

$\mathcal{L} = 0{,}2$, $n = 2$

Решение:

$$l(\vec{x}) = \frac{p_1(x_1)\, p_1(x_2)}{p_0(x_1)\, p_0(x_2)} \geq C$$

$l(\vec{x})$:

	1	2	3	4
1	1	1	$\frac{24}{16}$	$\frac{12}{16}$
2	1	1	$\frac{24}{16}$	$\frac{12}{16}$
3	$\frac{24}{16}$	$\frac{24}{16}$	$\boxed{\frac{36}{16}}$	$\frac{18}{16}$
4	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{9}{16}$

H_0 :

	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$

H_1 :

	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Решаем оптимизационную задачу :

$\alpha_1 \leq \alpha$, $W \longrightarrow max$, с учётом того, что в G точно входит событие ,

„выпадение двух троек"

Получаем:

C: выпали следующие комбинации:

(3,3), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)

$\alpha_1 \approx 0{,}19 \leq 0{,}2$, $W = \frac{5}{16}$

Ответ: C: выпали следующие комбинации

(3,3), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), $W = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$

Т-12 $n = 3$, $N(a, \sigma^2)$ $\{-1{,}11, -6{,}1, 2{,}42\}$

$H_0: a = 0$

$\alpha = 0{,}05$

$H_1: a \neq 0;\ a < 0;\ a > 0.$

Решение:

По теореме Фишера: $\frac{\overline{x} - a}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

$n = 3$, $\overline{x} = -1{,}6$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 18{,}33$

$\widetilde{\Delta} = \frac{\overline{x} - a}{s}\sqrt{n} = -0{,}65$

1) $H_1: a < 0$

p-value $= P(\Delta \leq -|\widetilde{\Delta}|) = P(\Delta \leq -0{,}65) = \int_{-\infty}^{-0{,}65} p_{t(2)}(x)dx = 0{,}2$

p-value $> \alpha$

2) $H_2: a > 0$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = \int_{0,65}^{+\infty} p_{t(2)}(x)\,dx = 0,29$

$p\text{-value} > \alpha$

3) $H_1: \quad a \neq 0$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) + P(\Delta \leq -|\tilde{\Delta}|) =$

$= P(\Delta \geq 0,65) + P(\Delta \leq -0,65) = \int_{-\infty}^{-0,65} p_{t(2)}(x)\,dx + \int_{0,65}^{+\infty} p_{t(2)}(x)\,dx =$

$= 0,58$

$p\text{-value} > \alpha$

Ответ: ни в одном из случаев нет оснований отвергнуть гипотезу.

Т-13

$\vec{x}_n = (-1.11, -6.1, 2.42), \quad \vec{y}_m = (-2.29, -2.91)$

$x_n \sim N(a, \sigma_x^2), \quad y \sim N(b, \sigma_y^2)$

$\sigma_x^2 = 2, \quad \sigma_y^2 = 1$

$H_0: \quad a = b$

$H_1: \quad a \neq 0; \quad a > b; \quad a < b$ $\qquad \alpha = 0,05$

Решение:

По теореме Фишера:

$\frac{\overline{x} - a}{\sigma_x}\sqrt{n} \sim N(0,1); \quad \frac{\overline{y} - b}{\sigma_y} \sim N(0,1)$

$$\bar{x} - a \sim N(0, \frac{\sigma_x^2}{n}) \ ; \ \bar{y} - b \sim N(0, \frac{\sigma_y^2}{m})$$

$$\bar{x} - a - (\bar{y} - b) \sim N(0, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}) = N(0, \frac{\sigma_x^2 m + \sigma_y^2 n}{mn})$$

По теореме Фишера:

$$\frac{(n-1) S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n-1) \ ; \ \frac{(m-1) S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1) S_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{(m-1) S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

$$(\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{\frac{mn}{\sigma_x^2 m + \sigma_y^2 n}} \sim N(0,1)$$

$$\Delta = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{\frac{mn}{\sigma_x^2 m + \sigma_y^2 n}}}{\sqrt{\frac{(n-1) S_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{(m-1) S_y^2}{\sigma_y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m+n-2}}} \sim t(n+m-2)$$

$\bar{x} = -1,6$, $\bar{y} = -2,6$, $S_x^2 = 18,33$, $S_y^2 = 0,19$

$\tilde{\Delta} = 0,37$

1) $H_1: a > b$

$$\text{p-value} = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = \int_{0,37}^{+\infty} p_{t(3)}(x)\,dx = 0,37 > \alpha$$

2) $H_1: a < b$

$$\text{p-value} = P(\Delta \leq -|\tilde{\Delta}|) = \int_{-\infty}^{-0,37} p_{t(3)}(x)\,dx = 0,37 > \alpha$$

3) $H_1: a \neq b$

p-value $= 2P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = 0,74 > \alpha$

Ответ: нет оснований отвергнуть ни одну гипотезу