

# Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности

студент 4 курса Е. В. Гуров  
научный руководитель — академик, д.ф.-м.н., проф.  
А. Б. Куржанский

Кафедра системного анализа  
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

# Постановка задачи

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t)$$

Здесь:

- $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы
- $u \in \mathbb{R}^p$  — управление
- $v \in \mathbb{R}^q$  — некоторое неизвестное внешнее возмущение

Известны "геометрические" ограничения на помеху и управление

$$v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad u(t) \in \mathcal{P}(t),$$

а также задано компактное целевое множество  $\mathcal{M} \in \text{comp } \mathbb{R}^n$ .

Необходимо отыскать множество разрешимости  $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$  и позиционное управление  $u = \mathcal{U}(t, x)$  такие, что все решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

выпущенные из любой начальной позиции  $\{\tau, x_\tau\}$ ,  $x_\tau = x(\tau)$ ,  $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ ,  $\tau \in [t_0, t_1)$ , достигали бы целевого множества  $\mathcal{M}$  в момент времени  $t_1$  при любом внешнем неизвестном возмущении  $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ .

Приведем вначале систему к более простому виду

$$\dot{x} = u + v$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t),$$

где  $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$ ,  $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$  и  $G(t_1, t)$  — фундаментальная матрица однородного уравнения. Для этого сделаем замену  $x(t) = G(t_1, t)x(t)$ .

# Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Введем функцию цены

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{ \mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathcal{P}}, x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot) \},$$

где

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и  $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$  — множество всех траекторий  $x(\cdot)$  включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$

порожденных заданной стратегией  $\mathcal{U}$ .

В таком случае для функции  $\mathcal{V}(t, x)$  можно составить следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t), \quad v \in \mathcal{Q}(t),$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}).$$

# Вид функции цены

Рассматриваемая задача с неопределенностью приводит к понятию альтернированного интеграла Понтрягина  $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ .

## Теорема

Множество разрешимости  $\mathcal{W}[t]$  может быть представлено как

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

С помощью альтернированного интеграла возможно получить явный вид для функции цены в данной задаче.

## Теорема

Функция цены представляется в виде

$$\mathcal{V}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}[t]) = d^2(x, \mathcal{W}[t]).$$

Эта теорема даёт подход к построению управлений. Получается, что для минимизации функции цены необходимо строить управление, минимизирующее расстояние до множества разрешимости.

# Система с эллипсоидальными ограничениями

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $P(t)$ ,  $Q(t)$  предполагаются заданными и непрерывными. Вектор  $m$  и матрица  $M$  фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{ x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где  $Q > 0$ .

Множество разрешимости такой системы  $\mathcal{W}[t]$ , как многозначная функция, удовлетворяет при всех  $t \in [t_0, t_1]$  эволюционному уравнению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_+ (\mathcal{W}[t - \sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0, \\ \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}.$$

# Уравнения для внутренней оценки

Эллипсоидозначная функция  $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$ , определяемая дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}^*(t) = p(t) + q(t),$$

а также

$$\begin{aligned}\dot{X}_-(t) = & \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)Q(t) - \\ & -(X_-(t))^{1/2}H(t)(P(t))^{1/2} - (P(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2}\end{aligned}$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M.$$

является решением вышеупомянутого эволюционного уравнения. Ортогональная матрица  $H(t)$  ищется из соотношения

$$H(t)(P(t))^{1/2}I = \frac{\langle I, P(t)I \rangle^{1/2}}{\langle I, X_-(t)I \rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}I.$$

Множитель  $\pi(t)$  в свою очередь выбирается как

$$\pi(t) = \frac{\langle I(t), Q(t)I(t) \rangle^{1/2}}{\langle I(t), X_-(t)I(t) \rangle^{1/2}}.$$

# Эллипсоидальный синтез управлений

Рассмотрим невырожденный эллипсоид  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$  и вектор  $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$ . Тогда градиент

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X)) / \partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*.$$

Здесь множитель лагранжа  $\lambda > 0$  — единственный корень уравнения  $f(\lambda) = 0$ , где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*)) - 1.$$

Пусть задан эллипсоид  $\mathcal{E}(p, P)$ . Тогда минимизатор  $u^*$  задачи

$$\min\{(l, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P)\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор  $u^* = p - Pl(I, Pl)^{-1/2}$ . Отсюда получаем общую формулу для искомой стратегии управления:

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

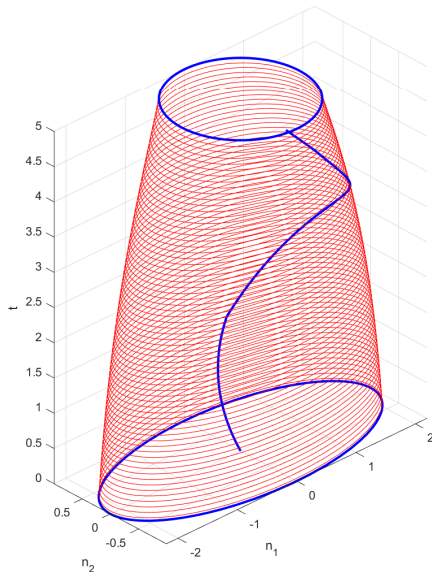


# Пример работы алгоритма

Рассмотрим простой пример:

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}, v(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Видно, что траектория, выходя за границы эллипсоидальной трубки, стремится вернуться обратно и в итоге приходит в целевое множество.

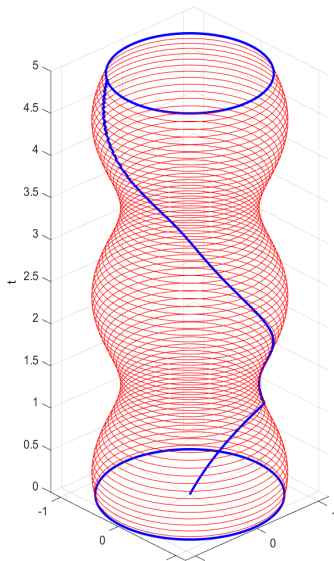


## Пример 2

Изменим матрицы конфигурации ограничений на помеху и управление.

$$P(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) + 2 & 0 \\ 0 & \sin(3t) + 2 \end{bmatrix},$$
$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos(3t) + 2 & 0 \\ 0 & \cos(3t) + 2 \end{bmatrix},$$

В этом случае ограничения на управление и помеху поочередно "доминируют" друг на другом, поэтому соответствующий альтернированный интеграл с течением времени расширяется и сужается.



# Пример решения более общей задачи

Рассмотрим линейную систему с постоянными матрицами:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cv(t)$$

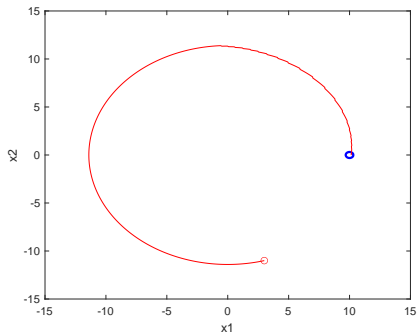
Где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

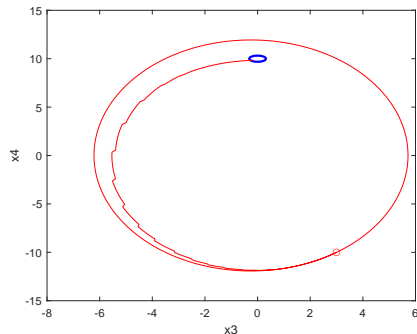
$$m = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}, v_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для первой помехи

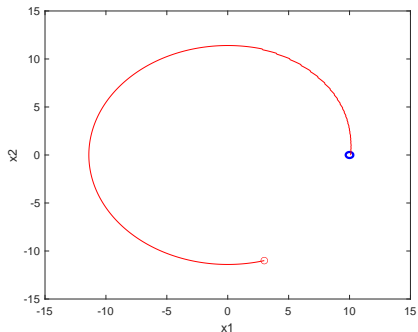


(a) Проекция на координаты первого осциллятора.

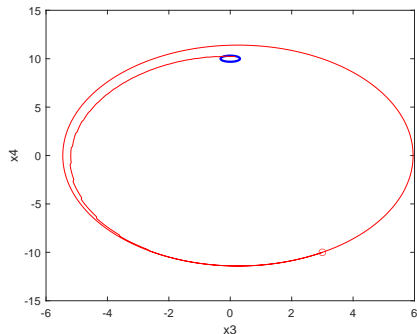


(b) Проекция на координаты второго осциллятора

# Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для второй помехи








(a) Проекция на координаты первого осциллятора.



(b) Проекция на координаты второго осциллятора

# Направления дальнейшей работы

- Задачи с неопределенностью приводят к появлению геометрической разности в формулах для альтернированного интеграла и, соответственно, в эволюционных уравнениях для эллипсоидальных оценок. В связи с этим поиск параметров  $H(t), \pi(t)$  в дифференциальных уравнениях на матрицу конфигурации из условий касания, то есть равенства опорных функций для некоторых направлений, в приведенном выше виде невозможен. Таким образом, в алгоритм необходимо внедрять методы решающие эту проблему.
- Внедрение средств параллельного программирования для вычисления внутренних оценок.
- Изучение алгоритмов овыпукления функций для решения задач с неопределенностью.
- Решение конкретных прикладных задач с помощью разобранной методики.

-  Kurzbanki A. B., Vâlyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1996
-  Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*, Springer, 2014
-  Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Reachability Analysis for Uncertain Systems — the Ellipsoidal Technique*, Journal of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Ser. B., v.9, No 3, 2002, pp. 347–367.
-  Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб., 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330
-  Kurzhanski A. A., Gagarinov P. *Ellipsoidal toolbox manual*, Release 2.0.1, 2014.