

Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности

студент 4 курса Е. В. Гуров
научный руководитель — академик, д.ф.-м.н., проф. А. Б.
Куржанский

Кафедра системного анализа
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Постановка задачи

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t)$$

с непрерывными по t матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$.

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы
- $u \in \mathbb{R}^p$ — управление
- $v \in \mathbb{R}^q$ — некоторое неизвестное внешнее возмущение

При этом достоверно известны "геометрические" ограничения на помеху, а также на управление:

$$v(t) \in Q(t), \quad u(t) \in P(t).$$

Здесь $P(t)$ и $Q(t)$ — заданные многозначные функции с выпуклыми компактными значениями, непрерывно зависящие от времени.

Задано также компактное целевое множество $M \in \text{comp } \mathbb{R}^n$.

Задача синтеза управления при неопределенности состоит в отыскании множества разрешимости $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и позиционной стратегии управления $u = \mathcal{U}(t, x)$ таких, что все решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1]$, достигали бы целевого множества \mathcal{M} в момент времени t_1 при любом внешнем неизвестном возмущении $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Приведем вначале систему к более простому виду

$$\dot{x} = u + v$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t),$$

где $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $G(t, t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения. Для этого сделаем замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$.

Определение

Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{ x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x \right\},$$

где $d^2(x, \mathcal{M}) = \min_z \{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ и $x(t_1)$ — конец в момент t_1 траектории $x(t)$ упрощенной системы, выпущенной из положения $x(\tau) = x$.

Для $W[t]$ справедливо представление:

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t)) dt \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(t) dt, \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

Построение альтернированного интеграла Понтрягина

На первом шаге, начав с момента t_1 , найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие вышесказанного будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau.$$

Продолжая последовательную процедуру, имеем

$$\begin{aligned} W(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, t_1 - \sigma_1, W[t_1 - \sigma_1]) &= \left(W[t_1 - \sigma_1] + \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \\ &\quad \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и, в итоге, получаем

$$W(t, t + \sigma_k, W(t + \sigma_k, t + \sigma_k + \sigma_{k-1}, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k).$$

Лемма

Существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k .

Важным свойством альтернированного интеграла является следующее:

Теорема

Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Альтернированный интеграл второго рода

Определение

Множество разрешимости $W_-[\tau]$ минимаксного типа называется следующей совокупность векторов

$$W_-[\tau] = W_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\}.$$

Для него аналогичным образом строится альтернированный интеграл второго рода

$$\mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}).$$

При этом оказывается, что альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода:

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}).$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Введем функцию цены

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{ \mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\mathcal{P}}, x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot) \},$$

где

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$

порожденных заданной стратегией \mathcal{U} .

В таком случае для функции $\mathcal{V}(t, x)$ можно составить следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t), \quad v \in \mathcal{Q}(t),$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}).$$

Последовательный максимин

Перейдем к другой интерпретации функции цены $\mathcal{V}(t, x)$. Рассмотрим интервал $\tau \leq t \leq t_1$ и построим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Для данного разбиения рассмотрим рекуррентные соотношения

$$V_k^+(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1, x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^+(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \left\{ \max_v \min_u V_k^+(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid \right. \\ \left. \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \right\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i$:

$$V_k^+(\tau, x) = \left\{ \max_v \min_u V_k^+(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \leq t \leq \tau + \sigma_k, x(\tau) = x \right\},$$

где $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду на соответствующих интервалах.

Лемма

При

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^+(\tau, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^+(\tau, x),$$

не зависящий от выбора разбиения Σ_k .

Лемма

Справедливо равенство

$$V^+(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

Теперь рассмотрим задачу аналогичную предыдущей. Для произвольного Σ_k , построим рекуррентные соотношения

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1, x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \left\{ \min_u \max_v V_k^-(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid \right. \\ \left. \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \right\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i$:

$$V_k^-(\tau, x) = \left\{ \min_u \max_v V_k^-(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \leq t \leq \tau + \sigma_k, x(\tau) = x \right\}.$$

Лемма

При

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^-(\tau, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^-(\tau, x),$$

не зависящий от выбора разбиения Σ_k .

Лемма

Справедливо соотношение:

$$V^-(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

Теорема

Последовательные максимин $V^+(\tau, x)$ и минимакс $V^-(\tau, x)$ равны и совпадают с функцией цены $\mathcal{V}(\tau, x)$:

$$V^+(\tau, x) \equiv V^-(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}[t]).$$

Эта теорема даёт подход к построению управлений. Получается, что для минимизации функции цены необходимо строить управление, минимизирующее расстояние до множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$.

Аналитическое выражение для управлений

Вернемся к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

Если решение уравнения удастся найти, то гарантирующая стратегия управления находится следующим образом:

$$u_*(t, x) = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\},$$

если градиент $\partial \mathcal{V} / \partial x$ существует в точке (t, x) . Или в общем случае

$$u_*(t, x) = \left\{ u : \max_v \{ dh_+^2(x, \mathcal{W}[t]) / dt : v \in \mathcal{Q}(t) \} \leq 0 \right\}.$$

Эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \{x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q > 0$.

Теорема

Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_+ (\mathcal{W}[t - \sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0,$$
$$\mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}.$$

и это решение максимально по включению относительно всех других решений этого уравнения.

Будем искать эллипсоидальные решения этого уравнения. С помощью формул внутренней аппроксимации для геометрической суммы и разности эллипсоидов отсюда приходим к дифференциальным уравнениям для центра и матрицы искомой внутренней эллипсоидальной оценки.

Уравнения для внутренней оценки

Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}^* = p(t) + q(t),$$

а также

$$\begin{aligned} \dot{X}_- = & \pi(t)X_- + \pi^{-1}(t)Q(t) - \\ & - H^{-1}(t)[(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2} + \\ & + (H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}]H^{T-1}(t), \end{aligned}$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M.$$

является решением вышеупомянутого эволюционного уравнения.

Эллипсоидальный синтез управлений

Задача минимизации расстояния до множества разрешимости, в случае замены этого множества некоторой его внутренней достаточно хорошей эллипсоидальной оценкой, теперь может быть решена однозначно.

Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X)) / \partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*.$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*))^{-1} - 1.$$

Лемма

Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи

$$\min\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P)\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

Отсюда получаем общую формулу для гарантирующей стратегии управления:

$$u_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

Численный пример алгоритма

Рассмотрим простой пример:

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}, v(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Видно, что траектория, упираясь в границу эллипсоидальной трубки, дальше идет по этой границе, и в итоге приходит в целевое множество.

solv_tube-eps-converted-to.pdf




- Функции $x^*(t), X_-(t)$ для центра и матрицы конфигурации оценки ищутся с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка.
- Управление выбирается не в виде многозначной функции, а однозначно в виде:

$$u(t, x) = \begin{cases} p(t), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)I^0(I^0, P(t)I^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

- Траектория ищется итерационно из разностного уравнения:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = h(u(t_k, x(t_k)) + v(t_k)), \quad h = t_{k+1} - t_k.$$

- Значение лагранжевого множителя λ также ищется итерационно среди $\lambda > 0$ в силу свойств функции f .

-  Понtryгин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб., 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330
-  Kurzbanki A. B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1996
-  Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*. Springer, 2014