Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности

студент 4 курса Е. В. Гуров
научный руководитель — академик, д.ф.-м.н., проф. А. Б. Куржанский

Кафедра системного анализа
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Постановка задачи

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t)$$

Здесь:

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы
- $u \in \mathbb{R}^p$ — управление
- $v \in \mathbb{R}^q$ — некоторое неизвестное внешнее возмущение

Известны "геометрические" ограничения на помеху и управление

$$v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad u(t) \in \mathcal{P}(t),$$

а также задано компактное целевое множество $\mathcal{M} \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$.
Необходимо отыскать множество разрешимости $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и позиционное управление $u = \mathcal{U}(t, x)$ такие, что все решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали бы целевого множества $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 при любом внешнем неизвестном возмущени $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Редукция системы

Приведем вначале систему к более простому виду

$$\dot{x} = u + v$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t),$$

где $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $G(t_1, t)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения. Для этого сделаем замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$.

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Введем функцию цены

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}},\ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\},$$

где

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$

порожденных заданной стратегией $\mathcal{U}$.
В таком случае для функции $\mathcal{V}(t, x)$ можно составить следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_{u} \max_{v} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t),\ v \in \mathcal{Q}(t),$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}).$$

Вид функции цены

Рассматриваемая задача с неопределенностью приводит к понятию альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$.

Теорема

Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

С помощью альтернированного интеграла возможно получить явный вид для функции цены в данной задаче.

Теорема

Функция цены представляется в виде

$$\mathcal{V}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}[t]) = d^2(x, \mathcal{W}[t]).$$

Эта теорема даёт подход к построению управлений. Получается, что для минимизации функции цены необходимо строить управление, минимизирующее расстояние до множества разрешимости.

Вернемся к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

Если решение уравнения удается найти, то гарантирующая стратегия управления находится следующим образом:

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\},$$

если градиент $\partial \mathcal{V} / \partial x$ существует в точке (t, x). Или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \left\{ u : \max_v \{ dh_+^2(x, \mathcal{W}[t])/dt : v \in \mathcal{Q}(t) \} \leq 0 \right\}.$$

Система с эллипсоидальными ограничениями

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{ x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q > 0$.
Множество разрешимости такой системы $\mathcal{W}[t]$, как многозначная функция, удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h_+ \left(\mathcal{W}[t - \sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma\mathcal{E}(q(t), Q(t)) \right) = 0,$$

$$\mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}.$$

Уравнения для внутренней оценки

Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x^*}(t) = p(t) + q(t),$$

а также

$$\dot{X}_-(t) = \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)Q(t) -$$
$$-(X_-(t))^{1/2}H(t)(P(t))^{1/2} - (P(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2}$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M.$$

является решением вышеупомянутого эволюционного уравнения. Ортогональная матрица $H(t)$ ищется из соотношения

$$H(t)(P(t))^{1/2}l = \frac{\langle l, P(t)l\rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t)l\rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l.$$

Множитель $\pi(t)$ в свою очередь выбирается как

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), Q(t)l(t)\rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t)\rangle^{1/2}}.$$

Эллипсоидальный синтез управлений

Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))/\partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*.$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*)) - 1.$$

Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи

$$\min\{(l, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P))\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$. Отсюда получаем общую формулу для искомой стратегии управления:

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

Пример работы алгоритма

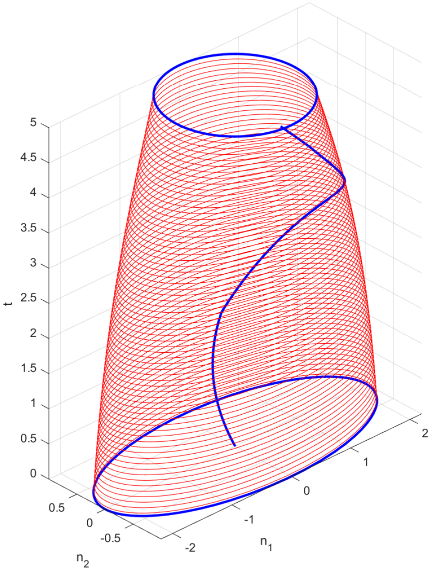
Рассмотрим простой пример:

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}, v(t) = \begin{bmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}.$$

Видно, что траектория, выходя за границы эллипсоидальной трубки, стремится вернуться обратно и в итоге приходит в целевое множество.

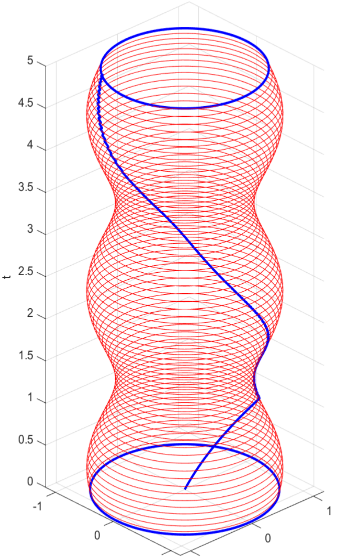


Пример 2

Изменим матрицы конфигурации ограничений на помеху и управление.

$$P(t) = \begin{bmatrix} sin(3t)+2 & 0 \\ 0 & sin(3t)+2 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} cos(3t)+2 & 0 \\ 0 & cos(3t)+2 \end{bmatrix},$$



В этом случае ограничения на управление и помеху поочередно "доминируют" друг на другом, поэтому соответствующий альтернированный интеграл с течением времени расширяется и сужается.

Пример решения более общей задачи

Рассмотрим линейную систему с постоянными матрицами:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cv(t)$$

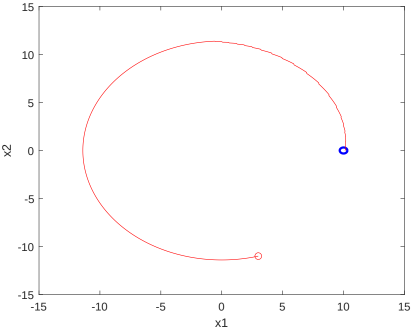
Где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

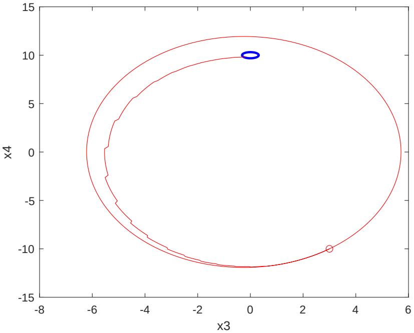
$$m = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}, v_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для первой помехи

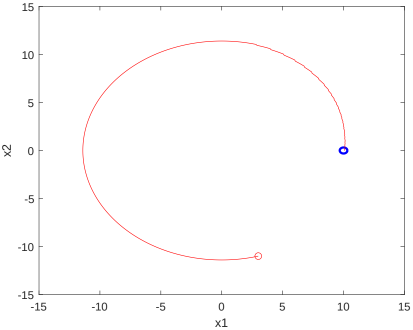


(a) Проекция на координаты первого осциллятора.

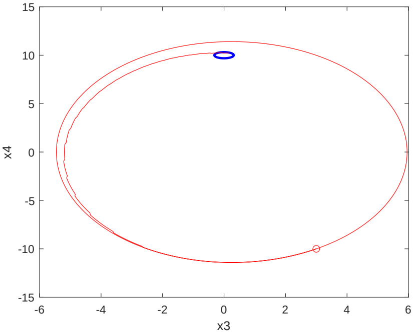


(b) Проекция на координаты второго осциллятора

Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для второй помехи



(a) Проекция на координаты первого осциллятора.



(b) Проекция на координаты второго осциллятора

Детали численного метода

- Функции $x^*(t), X_-(t)$ для центра и матрицы конфигурации эллипсоидальной оценки ищутся на временной сетке с помощью метода Эйлера.
- На каждом шаге метода Эйлера ортогональная матрица $H(t)$ ищется из сингулярного разложения векторов

$$v(t) = (P(t))^{1/2} l, \quad w(t) = \frac{\langle l, P(t) l\rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t) l\rangle^{1/2}} (X_-(t))^{1/2} l$$

  в виде

$$H(t) = V_{w(t)} V_{v(t)}^T,$$

  где матрицы $V_{w(t)}$, $V_{v(t)}$ получаются из разложений:

$$v(t) = V_{v(t)} \Sigma_{v(t)} u_{v(t)}, \quad w(t) = V_{w(t)} \Sigma_{w(t)} u_{w(t)}.$$

- Значение лагранжевого множителя λ также ищется итерационно среди $\lambda > 0$ в силу свойств функции $f(\lambda)$.

Направления дальнейшей работы

- Задачи с неопределенностью приводят к появлению геометрической разности в формулах для альтернированного интеграла и, соответственно, в эволюционных уравнениях для эллипсоидальных оценок. В связи с этим поиск параметров $H(t), \pi(t)$ в дифференциальных уравнениях на матрицу конфигурации из условий касания, то есть равенства опорных функций для некоторых направлений, в приведенном выше виде невозможен. Таким образом, в алгоритм необходимо внедрять методы решающие эту проблему.
- Внедрение средств параллельного программирования для вычисления внутренних оценок.
- Изучение алгоритмов овыпукления функций для решения задач с неопределенностью.
- Решение конкретной прикладной задачи с помощью разобранной методики.

Список литературы

Kurzhanki A. B., Vâlyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1996

Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*, Springer, 2014

Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Reachability Analysis for Uncertain Systems — the Ellipsoidal Technique*, Journal of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Ser. B., v.9, No 3, 2002, pp. 347–367.

Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб., 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330

Kurzhanski A. A., Gagarinov P. *Ellipsoidal toolbox manual*, Release 2.0.1, 2014.