Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Гуров Евгений Валерьевич

«Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности»

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
академик, д.ф.-м.н., профессор
А. Б. Куржанский

Москва, 2022

Содержание

Теоретическая часть

Задача синтеза управлений при неопределенности

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) \tag{1}$$

с непрерывными матрицами $A(t), B(t), C(t)$. Где $x \in \mathbb{R}^n$ — *вектор состояния* системы; $u \in \mathbb{R}^p$ — *управление*, $v \in \mathbb{R}^q$ — *внешнее возмущение*, стесненные почти всюду по t некоторыми "геометрическимио"ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t),$$

где $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заданные многозначные функции с выпуклыми компактными значениями, непрерывно зависящие от времени. Управление может быть выбрано в одном из двух классов:

- в классе U программных управлений $\mathrm{u} = \mathrm{u(t)}$ — измеримых по Лебегу функций со значениями в $\mathcal{P}(t)$ почти всюду.

- в классе $U_{\mathcal{P}}$ позиционных управлений, представляющих собой многозначные функции $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$. При этом выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения

  $$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{2}$$

  для любой измеримой по Лебегу функции $v(t)$. [1] В этой работе речь пойдет именно про этот тип управлений.

Важно отметить, что в задачах с неопределенностью эти два типа управлений существенно не взимозаменямы. Имея позиционное управление, подстановкой его и решением задачи относительно $u(t)$, уже нельзя однозначно найти программный аналог.

Пусть задано "целевое"множество $\mathcal{M} \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$. Задача *о синтезе управления при неопределенности* состоит в отыскании *множества разрешимости* $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[\tau]$ и *позиционной стратегией управления* $\mathcal{U}(t, x) \in U_{\mathcal{P}}$ таких, что все решения (2), выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали бы *целевого множества* $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 при любом внешнем возмущени $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Задача имеет смысл в случае $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \varnothing$. Многозначная функция $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ называется *трубкой разрешимости* или *мостом Красовского*, и является ключевым элементом в решении задачи. Существенным обстоятельством является возможность вычислить эту функцию при помощи некоторого многозначного инетграла — *альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина.*

[1] Примером класса $U_{\mathcal{P}}$ может служить класс всех непрерывных по t и полунепрерывных сверху по x многозначных отображений с выпуклыми компактными значениями. В этом случае дифференциальное включение имеет решение на всем отрезке времени для произвольного $x^0 = x(t_0)$, то есть существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному включению почти всюду.[ссылка на доказательство леммы филлипова(например)]

Альтернированный интеграл Понтрягина

Напомним определение этого интеграла. Для этого приведем вначале систему (1) к более простому виду

$$\dot{x} = u + v \tag{3}$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $G(t, t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1). Для этого сделаем невырожденную замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$. Далее вместо (1) будем рассматривать (3) с ограничениями (4), опуская индекс нуль.

Определение 1. *Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество*

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{ x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x \right\}, \tag{5}$$

где $d^2(x.\mathcal{M}) = \min_z \{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ *и* $x(t_1)$ *— конец в момент* t_1 *траектории* $x(t)$ *системы* (3), *выпущенной из положения* $x(\tau) = x$.

Утверждение 1. *Для* $W[t]$ *справедливо представление:*

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt, \quad \tau \leq t \leq t_1. \tag{6}$$

Доказательство. При заданных u и v значение на правом конце выражается как

$$x(t_1) = x(t) + \int_t^{t_1} u(\tau)d\tau + \int_t^{t_1} v(\tau)d\tau.$$

В таком случае множество разрешимости очевидно представляется в виде

$$
\begin{aligned}
W(t,t_1,\mathcal{M}) = \bigcap_{v\in\mathcal{Q}}\bigcup_{u\in\mathcal{P}}\left\{x : x = x(t_1) - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau,\ x(t_1)\in\mathcal{M}\right\} \\
= \bigcap_{v\in\mathcal{Q}}\bigcup_{u\in\mathcal{P}}\left\{\mathcal{M} - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau\right\} \\
= \bigcap_{v\in\mathcal{Q}}\left\{\mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau\right\} \\
= \left\{x : x \in \left(\mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1}(-\mathcal{P}(\tau))\right) - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau,\ \forall v(\tau)\in\mathcal{Q}(\tau)\right\} \\
= \left\{x : x + \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau \in \mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1}(-\mathcal{P}(\tau))d\tau,\ \forall v(\tau)\in\mathcal{Q}(\tau)\right\}
\end{aligned}
$$

□

Список литературы

[1] Авторов А. А. *Название*, Бином. М.: 2009.