Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Гуров Евгений Валерьевич

«Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности»

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
академик, д.ф.-м.н., профессор
А. Б. Куржанский

Москва, 2022

Содержание

1 Задача синтеза управлений при неопределенности

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) \tag{1}$$

с непрерывными матрицами $A(t), B(t), C(t)$. Здесь

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы,
- $u \in \mathbb{R}^p$ — управление,
- $v \in \mathbb{R}^q$ — неизвестное внешнее возмущение,

на которые почти всюду по t наложены некоторые "геометрические" ограничения:

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t), \tag{2}$$

где $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заданные непрерывные по t многозначные функции с выпуклыми компактными значениями. Управление может быть выбрано в одном из двух классов:

- в классе U программных управлений $\mathrm{u} = \mathrm{u(t)}$ — измеримых по Лебегу функций со значениями в $\mathcal{P}(t)$ почти всюду.
- в классе $U_{\mathcal{P}}$ позиционных управлений, представляющих собой многозначные функции $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$. При этом выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения

  $$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{3}$$

  для любой измеримой по Лебегу функции $v(t)$. [1] Далее речь пойдет именно про этот тип управлений, как наиболее пригодный для решения задач с неопределенностью.

Важно отметить, что в задачах с неопределенностью эти два типа управлений существенно не взимозаменяемы. Имея позиционное управление, подстановкой его и решением задачи относительно $u(t)$, уже нельзя однозначно найти программный аналог. Перейдем к постановке задачи синтеза управлений при неопределенности.

Пусть задано "целевое" множество $\mathcal{M} \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$. Задача о синтезе управлений при неопределенности состоит в отыскании множества разрешимости $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и позиционной стратегии управления $\mathcal{U}(t, x) \in U_{\mathcal{P}}$ таких, что все решения (3), выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in$

[1] Примером класса $U_{\mathcal{P}}$ может служить класс всех непрерывных по t и полунепрерывных сверху по x многозначных отображений с выпуклыми компактными значениями. В этом случае дифференциальное включение имеет решение на всем отрезке времени для произвольного $x^0 = x(t_0)$, то есть существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному включению почти всюду.

$[t_0, t_1)$, достигали бы целевого множества $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 при любом внешнем возмущении $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$. То есть для данного целевого множества и геометрических ограничений на управление и помеху необходимо найти трубку разрешимости, состоящую их всех состояний системы в различные моменты времени t, для которых вне зависимости от помехи существовала бы некоторая стратегия управления, приводящая систему в требуемое множество. Также для каждого такого состояния необходимо отыскать соответствующее целевое управление. Очевидно, что задача имеет смысл в случае $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \varnothing$.

Многозначная функция $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ называется трубкой разрешимости или мостом Красовского. Далее будет показано, что трубка разрешимости может быть представлена в виде некоторого многозначного интеграла, который называют альтернированным интегралом Л.С. Понтрягина.

2 Альтернированный интеграл Понтрягина

Для начала приведем исходную систему (1) к более простому виду. Для этого сделаем невырожденную замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$, где $G(t, t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1). В таком случае система примет вид:

$$\dot{x} = u + v, \tag{4}$$

а ограничения на управление и помеху изменятся:

$$\begin{gathered} u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t); \\ \mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t),\ \mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t). \end{gathered} \tag{5}$$

Далее вместо (1) с ограничениями (2) будем рассматривать (4) с ограничениями (5), опуская индекс нуль.

Естественно было бы определенить множество разрешимости двумя способами в терминах максимина и минимакса. Начнем с первого из них.

Определение 2.1. *Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество*

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{ x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x \right\},$$

где $d^2(x.\mathcal{M}) = \min\limits_z \{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ *и* $x(t_1)$ *— конец в момент* t_1 *траектории* $x(t)$ *системы* (4), *выпущенной из положения* $x(\tau) = x$ *при некоторых* $u(\cdot) \in U$ *и* $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Такое множество имеет аналитическое представление, а именно справедливо утверждение:

Утверждение 2.1. *Для* $W[t]$ *справедливо представление:*

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt, \quad \tau \leq t \leq t_1. \tag{6}$$

Здесь символ $\mathcal{P}\dot{-}\mathcal{Q}$ означает геометрическую разность двух множеств $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$. А именно, $c \in \mathcal{P}\dot{-}\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда $c + \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$.

Доказательство. При заданных u, v на интервале (t, t_1) значение на правом конце выражается как

$$x(t_1) = x(t) + \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau + \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau.$$

В таком случае множество разрешимости в терминах объединений и пересечений представляется в виде

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \bigcap_{v\in\mathcal{Q}} \bigcup_{u\in\mathcal{P}} \left\{ x : x = x(t_1) - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau,\ x(t_1) \in \mathcal{M} \right\} =$$

$$= \bigcap_{v\in\mathcal{Q}} \bigcup_{u\in\mathcal{P}} \left\{ \mathcal{M} - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= \bigcap_{v\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ x : x \in \left(\mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) \right) - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau,\ \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\} =$$

$$= \left\{ x : x + \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau \in \mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau,\ \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\}.$$

Последнее в силу определения геометрической разности совпадает (6). □

Опишем процедуру последовательного построения альтернированного интеграла. Взяв интервал $\tau \leq t \leq t_1$, рассмотрим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$,

$$t = t_1 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i, \ldots, t_1 - \sigma_1, t_1, \quad \sigma_i > 0.$$

На первом шаге, найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие (6) будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau \right) \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau.$$

В следующей точке разбиения, имея в виду уже построенное на предыдущем шаге множество получим

$$W(t_1-\sigma_1-\sigma_2, t_1-\sigma_1, W[t_1-\sigma_1]) = \left(W[t_1-\sigma_1] + \int\limits_{t_1-\sigma_1-\sigma_2}^{t_1-\sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau\right) \dot{-} \\ \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1-\sigma_2}^{t_1-\sigma_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau$$

Продолжая процедуру, на левом конце получим множество разрешимости в виде суперпозиции множеств, построенных для всех предыдущих точек разбиения:

$$W(t, t+\sigma_k, W(t+\sigma_k, t+\sigma_k+\sigma_{k-1}, \ldots, W(t_1-\sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k).$$

Для корректного построения предполагается, что все возникающие здесь множества непусты. Это может быть обеспечено следующим предположением:

Предположение 2.1. *Существует такая непрерывная функция* $\beta(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, *что все множества*

$$W\left(t_1-\sum_{i=1}^{j}\sigma_i, t_1-\sum_{i=1}^{j-1}\sigma_i, W\left(t_1-\sum_{i=1}^{j-1}\sigma_1, t_1-\sum_{i=1}^{j-2}\sigma_i, \ldots, W(t_1-\sigma_1, t_1, \mathcal{M})\right)\ldots\right) \dot{-} \\ \dot{-}\ \beta\left(t_1-\sum_{i=1}^{j}\sigma_i\right) S \neq \varnothing \tag{7}$$

при $j = 1, \ldots, k$, *каким бы ни было разбиение* Σ_k.

Ниже всюду будем считать предположение (2.1) выполненым. Отметим, что данное предположение важно и без него дальнейшие утверждения могут быть неверны.

Следуя приведенной схеме, приходим к аналитическому выражению для "дискретного" множества разрешимости.

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\ldots\left(\left(\mathcal{M} + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1}(-\mathcal{P}(\tau))d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1}\mathcal{Q}(\tau)d\tau\right) + \ldots \dot{-} \\ \int\limits_{t}^{t+\sigma_k}\mathcal{Q}(\tau)d\tau\right). \tag{8}$$

При этом множества $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$ есть выпуклые компакты для любого разбиения Σ_k.

Для дальнейшего напомним определение хаусдорфова расстояния между выпуклыми компактными множествами.

Определение 2.2. *Хаусдорфово полурасстояние между компактами $\mathcal{Q}, \mathcal{M}$ определяется как*

$$h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max_x \min_z \{(x-z, x-z)^{1/2} \mid x \in \mathcal{Q}, z \in \mathcal{M}\},$$

в то время как хаусдорфово расстояние:

$$h(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max\{h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}), h_+(\mathcal{M}, \mathcal{Q})\}.$$

Оказывается, что для построенных выше множеств $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$, при измельчении рассмотренного разбиения, существует хаусдорфов предел, не зависящий от разбиения Σ_k (См. например [6]). Это наталкивает на мысль о том, что этот предел является действительным множеством разрешимости задачи (4).

Лемма 2.1. *Существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$*

$$\lim h\left(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})\right) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \ldots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k.

Множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ будем называть *альтернированной областью разрешимости* задачи (4). Фактически множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть значение некоторого многозначного интеграла, известного как *альтернированный интеграл Понтрягина*. Будем обозначать его как

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \int\limits_{t_1, \mathcal{M}}^{t} \left((-\mathcal{P}(\tau))d\tau \dot{-} \mathcal{Q}(\tau)d\tau\right). \tag{9}$$

Лемма 2.2. *Многозначное отображение $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t, \mathcal{I}(t, t_1, \ \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1. \tag{10}$$

Доказательство. Доказательство этого факта вытекает из свойства аддитивности альтернированного интеграла, которое доказывается, например, в [6]. □

Ключевое свойство альтернированного интеграла содержит следующая

Теорема 2.1. *Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как*

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{11}$$

Аналогично построению альтернированного интеграла, исходящему из понятия множества разрешимости максиминного типа, возможно по аналогичной последовательной схеме построить альтернированный интеграл второго рода. Выясняется, что построенные при этом множества разрешимости совпадают и равны действительному множеству разрешимости задачи.

Прежде чем приступить к аналогичной процедуре построения альтернированного инеграла второго рода дадим необходимое определение.

Определение 2.3. *Множество разрешимости $W^{-}[\tau]$ минимаксоного типа называется следующая совокупность векторов*

$$W_{-}[\tau] = W_{-}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : \min_{u} \max_{v} d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\}.$$

Для введенного множества справедливо представление аналогичное представлению (6).

Утверждение 2.2. *Для $W_{-}[\tau]$ справедливо представление*

$$W_{-}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int\limits_{\tau}^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt\right) + \int\limits_{\tau}^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt, \quad t_0 \leq s \leq t_1. \tag{12}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для множества максиминного типа.

Теперь, аналогично построению альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, рассмотрим суперпозицию множеств $W_{-}(t, t_1, \mathcal{M})$ для произвольного разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ отрезка $\tau \leq t \leq t_1$.

$$W_{-}(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(s)ds\right) + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(s))ds.$$

И далее приходим к выражению

$$\mathcal{I}_{-}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\ldots\left(\left(\mathcal{M} \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau\right) + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau\right) \dot{-} \ldots \right. \\ \left. + \int\limits_{t}^{t+\sigma_k} (-\mathcal{P}(\tau)))d\tau\right). \tag{13}$$

Здесь, как и прежде, предполгается, что возникающие множества не пусты. Для этого примем

Предположение 2.2. *Для произвольного разбиения существует непрерывная функция $g(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ и числа r_j такие, что*

$$g\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i\right) + r_j B \subseteq \mathcal{I}_{-}\left[t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i\right], \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для построенных таким образом множеств справедливо утверждение аналогичное лемме (2.1)

Лемма 2.3. *Существует хаусдорфов предел* $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\left(\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})\right) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \ldots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$

и этот предел не зависит от выбора разбиений Σ_k.

Будем называть $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *альтернированным интегралом Понтрягина второго рода.*

Можно заметить, что альтернированные интегралы разных типов соответствуют различным информационным схемам. Альтернированный интеграл Понтрягина предполагает появление информации о помехах с опережением, а интеграл второго рода — с запаздыванием. Замечательно, что при условиях невырожденности (2.1) и (2.2) в пределе эти схемы дают один и тот же результат, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 2.2. *Альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода:*

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}).$$

Из вышесказанного можно сделать вывод, что множество разрешимости системы имеет явный вид и представляется в виде альтернированного интерала, который можно считать дискретными методами, зная опорные функции множеств в него входящих. Трудность в таком подходе возникает при попытке подсчитать опорную функцию разности двух множеств, которая вообще говоря удовлетворяет

$$\rho(l \mid A \dot{-} B) = \mathrm{conv}(\rho(l \mid A) - \rho(l \mid B)) \leq \rho(l \mid A) - \rho(l \mid B), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n.$$

В связи с этим возникает необходимость весьма трудоемкого "овыпукления" разности опорных функций. Рассмотренный далее подход эллипсоидальных аппроксимаций позволяет избежать этой проблемы.

3 Функции цены

Применительно к данной задаче, рассмотрим подход к решению с помощью функций цены. Введем

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}},\ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\}.$$

Здесь функционал
$$\mathcal{I}(t,x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M}),$$
а $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий дифференциального включения
$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t,x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$
порожденных стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.

Для введенной функции $\mathcal{V}(t,x)$ можно составить уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:
$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u+v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t),\ v \in \mathcal{Q}(t), \tag{14}$$
с граничным условием
$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}). \tag{15}$$

Аналогично введенным выше рекуррентным схемам построения альтернированных интегралов, введем рекуррентную схему построения функций цены. Как и ранее рассмотрим интервал $\tau \le t \le t_1$ и построим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Для этого разбиения рассмотрим соотношения:
$$V_k^+(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \le t \le t_1,\ x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^+(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \Big\{ \max_v \min_u V_k^+(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \le t \le t_1 - \sigma_1, \\ x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \Big\}.$$

Продолжая процедуру, в точке $\tau = t_1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i$ получаем:
$$V_k^+(\tau, x) = \left\{ \max_v \min_u V_k^+(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \le t \le \tau + \sigma_k,\ x(\tau) = x \right\},$$
Всюду будем предполагать, что "максимины" существуют.

Оказывается, что для введенных таким образом функций, при неограниченном измельчении разбиения, существуют поточечные пределы, то есть справедлива

Лемма 3.1. *При*
$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$
существует поточечный предел
$$V^+(\tau, x) = \lim_{k \to \infty} V_k^+(\tau, x),$$
не зависящий от выбора разбиения Σ_k.

Будем называть $V^{+}(\tau, x)$ *последовательным максимином.*

Лемма 3.2. *Функция $V^{+}(\tau, x)$ удовлетворяет полурупповому свойству*

$$V^{+}(\tau, x \mid V^{+}(t_1, \cdot)) = V^{+}(\tau, x \mid V^{+}(t, \cdot \mid V^{+}(t_1, \cdot))).$$

При этом справедливо неравенство

$$V^{+}(t, x) \geq \left\{ \max_{v} \min_{u} V^{+}(t+\sigma, x(t+\sigma)) \mid x(t) = x \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Отметим связь функции с альтернированным интегралом.

Лемма 3.3. *Справедливо равенство*

$$V^{+}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

где $\mathcal{W}^*[\tau] = \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ — значение альтернированного интеграла

Отюсда прямо следует

Лемма 3.4. *Альтернированный инетграл $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ совпадает с множеством уровня последовательного максимина $V^{+}(\tau, x)$:*

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^{+}(\tau, x) \leq 0\}.$$

Теперь рассмотрим задачу аналогичную предыдущей. Для произвольного Σ_k, построим рекуррентные соотношения

$$V_k^{-}(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \min_{u} \max_{v} d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1,\ x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^{-}(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \Big\{ \min_{u} \max_{v} V_k^{-}(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, \\ x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \Big\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i$:

$$V_k^{-}(\tau, x) = \left\{ \min_{u} \max_{v} V_k^{-}(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \leq t \leq \tau + \sigma_k,\ x(\tau) = x \right\}.$$

Для определенных таким образом функций имеют место аналогичные утверждения

Лемма 3.5. *1. При*

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\}, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^{-}(\tau, x) = \lim_{k\to\infty} V_k^{-}(\tau, x),$$

не зависит от выбора разбиения Σ_k.
2. Функция $V^{-}(\tau, x)$ *удовлетворяет полугрупповому свойству.*

$$V^{-}(\tau, x \mid V^{-}(t_1, \cdot)) = V^{-}(\tau, x \mid V^{-}(t, \cdot \mid V^{-}(t_1, \cdot))). \tag{16}$$

3. Справедливо неравенство

$$V^{-}(t, x) \le \min_u \max_v \{V^{-}(t+\sigma, x(t+\sigma)) \mid x(t) = x\}, \quad \sigma > 0. \tag{17}$$

Лемма 3.6. *Справедливы соотношения:*

$$V^{-}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}_{-}(\tau, t_1, \mathcal{M})), \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \big\{x : V^{-}(\tau, x) \le 0\big\}$$

Лемма 3.7. *Многозначное отображение* $\mathcal{W}^{-}(t, t_1, \mathcal{M})$ *удовлетворяет полугрупповому свойству, а именно*

$$\mathcal{W}_{-}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_{-}(\tau, t, \mathcal{W}_{-}(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \le t \le t_1.$$

4 Решение задачи синтеза

Суммируем основыне утверждения в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. *1. Последовательные максимин* $V^{+}(\tau, x)$ *и минимакс* V^{-} *равны и совпадают с функцией цены* $\mathcal{V}(\tau, x)$*:*

$$V^{+}(\tau, x) \equiv V^{-}(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x),$$

2. Множество разрешимости задачи допускает следющие эквивалентные представления:

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^{*}[\tau] = \{x : \mathcal{V}(\tau \le 0\}, \quad t_0 \le \tau \le t_1.$$

То есть, алтернированный интеграл Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$*, сечение моста Красовского* $\mathcal{W}[\tau]$ *и множество уровня определенной нами функции* $\mathcal{V}(\tau, x)$ *суть одно и то же множество.*

Кроме того, функция цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ обладает следующими свойствами.

Теорема 4.2. *1. Справедлив принцип оптимальности*

$$\mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t, \cdot \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot))), \quad \mathcal{V}(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}), \quad \tau \le t \le t_1.$$

2. Если существует непрерывная частная производная $\partial\rho(l \mid \mathcal{W}[t])/\partial t, \forall l \in \mathbb{R}^n$*, то фукнция* $\mathcal{V}(t, x)$ *является классическим решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса.*

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v\right) = 0$$

с краевым условием $\mathcal{V}(t_1, x) = h_{+}^2(x, \mathcal{M})$.

Если решение (14), (15) удается найти, то гарантирующая стратегия управления находится следубщим образом:

$$\mathcal{U}_*(t,x) = \text{argmin}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u\right) : u \in \mathcal{P}(t)\right\}, \tag{18}$$

если градиент $\partial\mathcal{V}/\partial x$ существует в точке (t,x). Или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t,x) = \left\{u : \max_v \{dh_+^2(x, \mathcal{W}[t])/dt : v \in \mathcal{Q}(t)\} \leq 0\right\}. \tag{19}$$

Теорема 4.3. *Все решения дифференциального включения*

$$\dot{x} \in \mathcal{U}_*(t,x) + v(t), \quad x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}[t],$$

удовлетворяют включению $x(t) \in \mathcal{W}[t], \tau \leq t \leq t_1$, и, следовательно, достигают целевого множества $\mathcal{M} : x(t_1) \in \mathcal{M}$ при любом возмущении $v(t)$.

Таким образом синтезирующая стратегия $\mathcal{U}_*(t,x)$ разрешает задачу целевого синтеза управлений при неопределенности. Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t,x)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(t,x) \subseteq \mathcal{U}_*(t,x)$, то есть обеспечивающих выполнение теоремы (4.3), находится стратегия "экстремального прицеливания задаваемая условиями

$$\mathcal{U}_e(t,x) = \partial_l k(t,-l) = \text{argmin}\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{P}(t)\}. \tag{20}$$

Здесь $\partial_l k$ — субдифференциал функции $k(t,l)$ по переменной l, $k(t,l) = \rho(l \mid \mathcal{P}(t)), l^0 = l^0(t,x) \neq 0$ — максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{W}[\tau]) = \max\{(l,x) - \rho(l \mid \mathcal{W}[\tau]) \mid (l,l) \leq 1\}, \tag{21}$$

причем $l^0(t,x) = 0$, если $h_+(x, \mathcal{W}[\tau)) = 0$.

Как видно для поиска гарантирующей стратегии достаточно знать лишь сечения $\mathcal{W}[t]$ функции цены $\mathcal{V}(t,x)$. Поскольку интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби, как правило, очень нетривиально, будем использовать аппроксимации сечения функции цены вместо самой функции. Таким образом сведем задачу к задаче поиска аппроксимаций альтернированного интеграла Понтрягина.

5 Эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{x : (x-a, Q^{-1}(x-a)) \leq 1\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

где $Q > 0$.

Приведем для начала основные утверждения эллипсоидального исчисления, необходимые в дальнейшем. Подробнее см. [2] и [4].

Теорема 5.1. *Пусть $\mathcal{E}_1(a_1, Q_1), \mathcal{E}_2(a_2, Q_2)$ — пара невырожденных эллипсоидов. Рассмотрим*

- *семейство матриц $Q[p]$:*

$$Q[p] = (1 + p^{-1})Q_1 + (1 + p)Q_2,$$
$$p \in \Pi^+ = \left[\lambda_{\min}^{1/2}, \lambda_{\max}^{1/2}\right]$$

где $\lambda_{\min} > 0, \lambda_{\max} < \infty$ — относительные собственные значения пары матриц Q_1, Q_2, или, иначе, корни уравнения

$$\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0.$$

Обозначим также

$$\Pi^- = \Pi^+ \cap (1, \lambda_{\min})$$

- *семейство матриц $Q[S_1, S_2]$:*

$$Q[S_1, S_2] = (S_1 Q_1^{1/2} + S_2 Q_2^{1/2})^T (S_1 Q_1^{1/2} + S_2 Q_2^{1/2}),$$

где

$$S_1, S_2 \in \Sigma = \{S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : S^T S = S S^T = I\}.$$

Для этих семейств справедливы следующие включения:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q[S_1, S_2]), \quad \forall S_1, S_2 \in \Sigma \tag{23}$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q[-p]), \quad \forall p \in \Pi^- \tag{24}$$

Более того, для некоторого фиксированного вектора l представляется возможным найти значения параметров p, S_1, S_2 такие, что для опорных функций суммы и разности эллипсоидов и их внутренних оценок справедливо равенство. Или иначе, внутренняя оценка касается суммы или разности эллипсоидов.

Теорема 5.2. *Для невырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}(a_1, Q_1), \mathcal{E}(a_2, Q_2)$ справедливо:*

- *Для любого вектора l существуют значения параметров $S_1^*, S_2^* \in \Sigma$ такие, что*

$$\rho(l \mid \mathcal{E}(a_1, Q_1) + \mathcal{E}(a_2, Q_2)) = \rho(l \mid \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q[S_1^*, S_2^*])),$$

- *Для всех "хороших" направлений l геометрической разности эллипсоидов существует значение $p* \in \Pi^-$ такое, что*

$$\rho(l \mid \mathcal{E}(a_1, Q_1)\dot{-}\mathcal{E}(a_2, Q_2)) = \rho(l \mid \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q[-p*])).$$

Отправной точкой для построения оценок множества разрешимости является тот факт, что функция $\mathcal{W}[t]$ в условиях невырожденности предположения (2.1) является решением эволюционного уравнения.

Теорема 5.3. *Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h_+ \big(\mathcal{W}[t-\sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t)))\,\dot{-}\sigma\mathcal{E}(q(t), Q(t))\big) = 0, \quad \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}. \tag{25}$$

и это решение максимально по включению относительно всех других решений этого уравнения.

При этом мы будем заинтересованы именно во внутренних аппроксимациях множества разрешимости, так как построение управления по схеме описанной в следующем разделе, "удерживающее"траекторию внутри такой аппроксимации будет гарантировать попадание в целевое множество. Поэтому будем искать максимальное по включению эллипсоидальное решение (25). Исходя из эволюционного уравнения будем строить внутреннюю аппроксимацию, пользуясь формулами из теоремы (5.1). В итоге приходим к утверждению

Теорема 5.4. *Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:*

$$\dot{x^*}(t) = p(t) + q(t), \tag{26}$$

а также

$$\begin{gathered} \dot{X_-}(t) = \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)Q(t) - \\ -(X_-(t))^{1/2}H(t)(P(t))^{1/2} - (P(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2} \end{gathered} \tag{27}$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M. \tag{28}$$

является решением (25).

При этом для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ сущетсвуют функции $\pi(t), H(t)$ такие, что

$$\rho(l \mid \mathcal{W}[t]) = \rho(l \mid \mathcal{E}(x^*, X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot)))) \tag{29}$$

что означает, что построенный эллипсоид $\mathcal{E}$ является максимальным по включению решением (25).

6 Эллипсоидальный синтез управлений

Следуя предыдущим разделам, для вычисления стратегии управления требуется найти множество разрешимости $\mathcal{W}[\cdot]$, определить значение функции цены $\mathcal{V}(t,x) = d^2(x(t), \mathcal{W}(t))$ и её градиент, решить задачу (21). Для множеств произвольной формы все эти задачи, вообще говоря, представляют большую сложность. Поэтому основная идея эллипсоидального синтеза состоит в замене $\mathcal{W}[t]$ некоторой его внутренней эллипсоидальной аппроксимацией, и применении вышеописанной схемы к ней. Это даёт:

$$\mathcal{U}_-(t,x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если} x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если} x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases} \tag{30}$$

где $l^0 = l^0(t,x)$ — единичный вектор, максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{E}_-[t]) = (l^0, x) - \rho(l^0 \mid \mathcal{E}_-[t]) = \max\{(l,x) - \rho(l \mid \mathcal{E}_-[t]) \mid \|l\| \le 1\}. \tag{31}$$

Последняя задача теперь может быть решена однозначно. Если

$$s^0 = \operatorname{argmin}\{\|x - s\| : s \in \mathcal{E}_-[t], x = x(t)\}, \tag{32}$$

то можно положить $l^0 = k(x(t) - s^0), k > 0$, так что вектор l^0 будет градиентом функции $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ при фиксированном t.

Лемма 6.1. *Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент*

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))/\partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*. \tag{33}$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*)) - 1.$$

При этом понятно, что при известных x^*, X параметр λ может быть представлен единственным образом как $\lambda = \lambda(x)$.

Выражение для управления (30) является следствием следующего факта:

Лемма 6.2. *Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи*

$$\min\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P))\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

7 Пример синтеза гарантирующего управления

7.1 Пример 1

Будем рассматривать ту же систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P), \quad p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{Q} = \mathcal{E}(q, Q), \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Начальное условие для траекторий:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}.$$

Помеху выберем например как

$$v(t) = \begin{bmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}.$$

Визуализируем полученную оценку для дискретной схемы (Рис. (1)). Построим график оценки и траектории. Траектория, упираясь в границу эллипсоидальной трубки, идет по этой границе, так как генерирующееся управления стремится оставить её внутри эллипсоидальной оценки. Как итог траектория приходит в целевое множество.

7.2 Пример 2

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

где на управление и помеху наложены эллипсоидальные ограничения:

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} sin(3t) + 2 & 0 \\ 0 & sin(3t) + 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} cos(3t) + 2 & 0 \\ 0 & cos(3t) + 2 \end{bmatrix}.$$

Начальное условие для траекторий:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Помеху выберем например следующим образом:

$$v(t) = \begin{bmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}.$$

В этом примере ограничения на управление и помеху поочередно "доминируют" друг на другом, поэтому соответствующий альтернированный интеграл с течением времени расширяется и сужается.

7.3 Особенности численного метода

Для численного решения задач и удобной визуализации будем использовать язык Matlab. Из теоретической части ясно, что для задач с эллипсоидальными ограничениями эллипсоидальные трубки разрешимости удовлетворяют дифференциальным уравнениям (26) и (27) с конечными условиями (28). Для решения подобных дифференциальных уравнений удобно пользоваться итерационными методами. Будем использовать классический метод Эйлера. Разобьем отрезок времени на n частей: $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$. Для каждого момента, начиная с t_n, последовательно определим центр $x^*(t_k)$ внутренней эллипсоидальной трубки и матрицу $X_-(t_k)$.

Важно отметить, что в (27) в виде параметров присутствуют функции $\pi(t) > 0$ и $H(t)$. На каждом шаге решения дифференциальных уравнений будем определять значения параметров, так, чтобы внутренняя оценка касалась действительного множества разрешимости в некотором выбранном направлении l. Для этого будем выбирать ортогональную матрицу $H(t)$ из соотношения

$$H(t)(P(t))^{1/2}l = \frac{\langle l, P(t)l\rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t)l\rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l.$$

Такую матрицу можно найти с помощью сингулярного разложения векторов

$$v = (P(t))^{1/2}l, \quad w = \frac{\langle l, P(t)l\rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t)l\rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l.$$

А значение $\pi(t)$ как

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), Q(t)l(t)\rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t)\rangle^{1/2}}.$$

Отметим также, что гарантированно построить управление в задаче можно, если начальное положение системы $x(t_0) = x_0$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(x^*(t_0), X_-(t_0))$, поэтому это условие необходимо проверить. В таком случае для каждого момента времени t_k, имея центр $x^*(t_k)$ и матрицу $X_-(t_k)$ внутренней оценки, возможно по приведенной теоретической схеме построить управление в точках введенной сетки.

$$u(t_k, x) = \begin{cases} p(t_k), & \text{если } x \in \mathcal{E}(x^*(t_i), X_-(t_i)), \\ p(t_k) - P(t_k)l^0(l^0, P(t_k)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}(x^*(t_k), X_-(t_k)). \end{cases}$$

Вектор l^0 в соответствии с теоретической схемой может быть найден как:

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x^*(t_k)) + x^*(t_k). \tag{34}$$

Остаётся найти значение множителя λ, которое можно искать из уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x^*(t_k)), X_-^{-1}(t_k)(I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x*(t_k))) - 1$$

Очевидно, что если $x \notin \mathcal{E}(x^*(t_k), X_-(t_k))$, тогда в точке $\lambda = 0$, $f(0) > 0$. При этом при $\lambda \to \infty$ имеем

$$((I + \lambda Q^{-1})^{-1}x, Q^{-1}(I + \lambda Q^{-1})^{-1}x) \to 0. \tag{35}$$

А также $f'(\lambda) < 0$ при $\lambda > 0$. Поэтому значение параметра можно искать итерационно среди $\lambda > 0$.

Траекторию системы таким образом также удобно строить итерационно, исходя из разностого уравнения

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = h(u(t_k, x(t_k)) + v(t_k)), \quad h = t_{k+1} - t_k,$$

корректируя управление в точках сетки.

8 Более общая задача

Рассмотрим исходную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t)$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)) \subset \mathbb{R}^p, \quad v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subset \mathbb{R}^q.$$

Пусть также задано некоторое эллипсоидальное целевое множество

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M) \subset \mathbb{R}^n.$$

Будем строить гарантирующее управление, приводящее систему из некоторого положения x_0 в момент времени t_0 в целевое множество $\mathcal{M}$ в момент времени t_1. Как было отмечено в теоретической части, исходная система заменой $x(t) = G(t_1, t)x(t)$ приводится к виду

$$\dot{x}(t) = \hat{B}(t)u(t) + \hat{C}v(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где

$$\hat{B}(t) = G(t_1, t)B(t),\ \hat{C}(t) = G(t_1, t)C(t)$$

и

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)),\ v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)).$$

Для новой системы нужно перейти из состояния $G(t_1, t_0)x_0$ в целевое множество $\mathcal{M}$, остающееся без изменений.

Внутренняя эллипсоидальная оценка для системы такого вида может быть найдена из дифференциальных уравнений, которые строятся аналогично (26), (27), с учетом того факта, что $A\mathcal{E}(q, Q) = \mathcal{E}(Aq, AQA^T)$.

В итоге получаем уравнение на центр:

$$\dot{x}^*(t) = \hat{B}(t)p(t) + \hat{C}(t)q(t)$$

с начальным условием

$$x^*(t_1) = m,$$

и на матрицу конфигурации:

$$\dot{X}_-(t) = \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)\hat{C}(t)Q(t)\hat{C}^T(t) - (X_-(t))^{1/2}H(t)(\hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t))^{1/2} - \\ -(\hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2}$$

с начальным условием

$$X_-(t_1) = M.$$

Для выполнения условия касания выберем

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), \hat{C}(t)Q(t)\hat{C}^T(t)l(t)\rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t)\rangle^{1/2}},$$

а ортогональную матрицу $H(t)$ будем искать из соотношения

$$H(t)(\hat{B}(t)P(t)\hat{B}(t))^{1/2}l(t) = \frac{\langle l(t), \hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t)l(t)\rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t)\rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l(t).$$

Если в новых координатах найдена внутренняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}_-[t]$ множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$, то управление может быть аналогично найдено в виде обратной связи

$$\mathcal{U}_-(t,x) = \begin{cases} p(t), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)\hat{B}^T(t)l^0(\hat{B}^T(t)l^0, P(t)\hat{B}^T(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

Строя с помощью такого управления траекторию новой системы и выполняя обратное преобразование, получаем траекторию исходной системы.

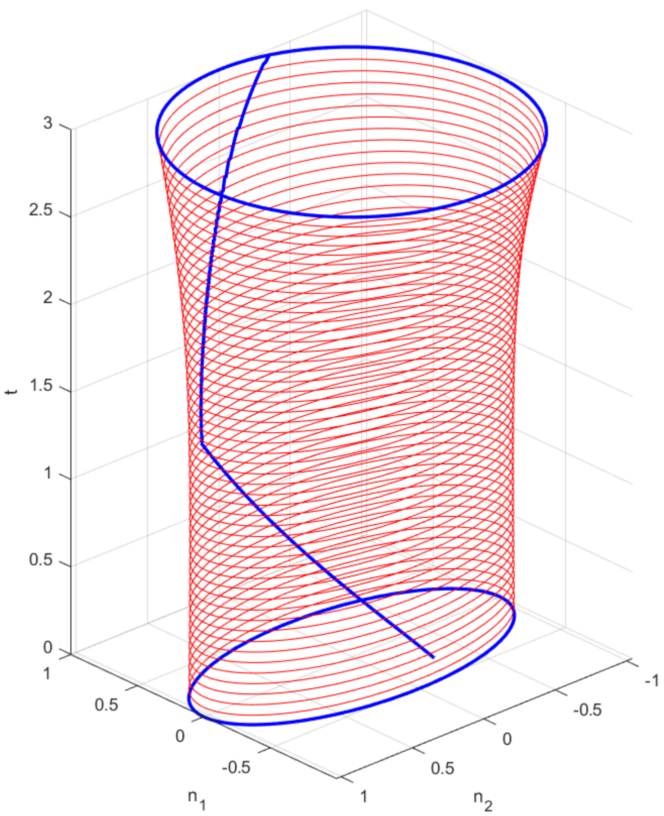

Рис. 1: Внутренняя эллипсоидальная оценка для множества разрешимости и траектория системы.

Список литературы

[1] Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности, Наука, М.*, 1977

[2] Kurzhanki A. B., Vâlyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, *Boston: Birkhäuser*, 1996

[3] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*, *Springer*, 2014

[4] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Reachability Analysis for Uncertain Systems — the Ellipsoidal Technique*, *Journal of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Ser. B., v.9, No 3, 2002, pp. 347–367.

[5] Kurzhanki A. A., Gagarinov P. *Ellipsoidal toolbox manual*, Release 2.0.1, 2014.

[6] Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, *Матем. сб.*, 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330