

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Гуров Евгений Валерьевич

**«Гамильтонов формализм для
задачи гарантированного синтеза
управлений при геометрической
неопределенности»**

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
академик, д.ф.-м.н., профессор
А. Б. Куржанский

Москва, 2022

Содержание

1	Введение	3
2	Задача синтеза управлений при неопределенности	3
3	Альтернированный интеграл Понтрягина	4
4	Функции цены	10
5	Решение задачи синтеза	12
6	Эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости	14
7	Эллипсоидальный синтез управлений	16
8	Пример синтеза гарантирующего управления	17
8.1	Пример 1	17
8.2	Пример 2	18
8.3	Особенности численного метода	20
9	Более общая задача	21
10	Пример	22
11	Заключение	25
	Список литературы	26

1 Введение

В данной работе рассматривается проблема гарантированного синтеза управлений, обеспечивающих попадание в некоторое желаемое "целевое" множество состояний, когда на систему действует неизвестная, но ограниченная помеха. Применительно к решению этой задачи, рассматривается связь альтернированного интеграла Понтрягина и методов Гамильтонова формализма, основанных на уравнениях Гамильтона-Якоби-Беллмана. Отдельное внимание уделено технике эллипсоидального исчисления [2], позволяющей перейти от теоретического алгоритма к численно реализуемому методу синтеза.

2 Задача синтеза управлений при неопределенности

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) \quad (1)$$

с непрерывными матрицами $A(t), B(t), C(t)$. Здесь

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы,
- $u \in \mathbb{R}^p$ — управление,
- $v \in \mathbb{R}^q$ — неизвестное внешнее возмущение,

на которые почти всюду по t наложены некоторые "геометрические" ограничения:

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad (2)$$

где $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заданные непрерывные по t многозначные функции с выпуклыми компактными значениями. Управление может быть выбрано в одном из двух классов:

- в классе U программных управлений $u = u(t)$ — измеримых по Лебегу функций со значениями в $\mathcal{P}(t)$ почти всюду.
- в классе $U_{\mathcal{P}}$ позиционных управлений, представляющих собой многозначные функции $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$. При этом выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3)$$

для любой измеримой по Лебегу функции $v(t)$.¹ Далее речь пойдет именно про этот тип управлений, как наиболее пригодный для решения задач с неопределенностью.

¹Примером класса $U_{\mathcal{P}}$ может служить класс всех непрерывных по t и полунепрерывных сверху по x многозначных отображений с выпуклыми компактными значениями. В этом случае дифференциальное включение имеет решение на всем отрезке времени для произвольного $x^0 = x(t_0)$, то есть существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному включению почти всюду.

Важно отметить, что в задачах с неопределенностью эти два типа управлений существенно не взаимозаменяемы. Имея позиционное управление, подстановкой его и решением задачи относительно $u(t)$, уже нельзя однозначно найти программный аналог. Перейдем к постановке задачи синтеза управлений при неопределенности.

Пусть задано "целевое" множество $\mathcal{M} \in \text{comp } \mathbb{R}^n$. Задача о синтезе управлений при неопределенности состоит в отыскании множества разрешимости $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и позиционной стратегии управления $\mathcal{U}(t, x) \in U_{\mathcal{P}}$ таких, что все решения (3), выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1]$, достигали бы целевого множества \mathcal{M} в момент времени t_1 при любом внешнем возмущении $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$. То есть для данного целевого множества и геометрических ограничений на управление и помеху необходимо найти трубку разрешимости, состоящую из всех состояний системы в различные моменты времени t , для которых вне зависимости от помехи существовало бы некоторое управление, приводящее систему в требуемое множество. Также для каждого такого состояния необходимо отыскать соответствующее целевое управление. Очевидно, что задача имеет смысл в случае $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \emptyset$.

Многозначная функция $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ называется трубкой разрешимости или мостом Красовского. Далее будет показано, что трубка разрешимости может быть представлена в виде некоторого многозначного интеграла, который называют альтернированным интегралом Л.С. Понтрягина.

3 Альтернированный интеграл Понтрягина

Для начала приведем исходную систему (1) к более простому виду. Для этого сделаем невырожденную замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$, где $G(t_1, t)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1). В таком случае система примет вид:

$$\dot{x} = u + v, \quad (4)$$

а ограничения на управление и помеху изменятся:

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t); \\ \mathcal{P}_0(t) &= G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t), \quad \mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Далее вместо (1) с ограничениями (2) будем рассматривать (4) с ограничениями (5), опуская индекс нуль.

Естественно было бы определить множество разрешимости двумя способами в терминах максимина и минимакса. Начнем с первого из них.

Определение 3.1. *Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество*

$$\mathcal{W}[\tau] = \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{ x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x \right\},$$

где $d^2(x, \mathcal{M}) = \min_z \{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ и $x(t_1)$ — конец в момент t_1 траектории $x(t)$ системы (4), выпущенной из положения $x(\tau) = x$ при некоторых $u(\cdot) \in U$ и $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Такое множество имеет аналитическое представление, а именно справедливо утверждение:

Утверждение 3.1. Для $W[t]$ справедливо представление:

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau, \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (6)$$

Здесь символ $\mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ означает геометрическую разность двух множеств \mathcal{P}, \mathcal{Q} . А именно, $s \in \mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда $s + \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$.

Доказательство. При заданных u, v на интервале (t, t_1) значение на правом конце выражается как

$$x(t_1) = x(t) + \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau.$$

В таком случае множество разрешимости в терминах объединений и пересечений представляется в виде

$$\begin{aligned} W(t, t_1, \mathcal{M}) &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{ x : x = x(t_1) - \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau, x(t_1) \in \mathcal{M} \right\} = \\ &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \mathcal{M} - \int_t^{t_1} u(\tau) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \left\{ x : x \in \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) - \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau, \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\} = \\ &= \left\{ x : x + \int_t^{t_1} v(\tau) d\tau \in \mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau, \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее в силу определения геометрической разности совпадает (6). \square

Опишем процедуру последовательного построения альтернированного интеграла. Взяв интервал $\tau \leq t \leq t_1$, рассмотрим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$,

$$t = t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1, \quad \sigma_i > 0.$$

На первом шаге, найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие (6) будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau.$$

В следующей точке разбиения, имея в виду уже построенное на предыдущем шаге множество получим

$$\begin{aligned} W(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, t_1 - \sigma_1, W[t_1 - \sigma_1]) &= \left(W[t_1 - \sigma_1] + \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \\ &\dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Продолжая процедуру, на левом конце получим множество разрешимости в виде суперпозиции множеств, построенных для всех предыдущих точек разбиения:

$$W(t, t + \sigma_k, W(t + \sigma_k, t + \sigma_k + \sigma_{k-1}, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k).$$

Такая последовательная схема реализует идеи построения программного управления с коррекцией. С измельчением разбиения возрастает число точек коррекции программного управления. Для корректного построения предполагается, что все возникающие здесь множества непусты. Это может быть обеспечено следующим предположением:

Предположение 3.1. *Существует такая непрерывная функция $\beta(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, что все множества*

$$\begin{aligned} W \left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i, t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i, W \left(t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i, t_1 - \sum_{i=1}^{j-2} \sigma_i, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) \right) \dots \right) \dot{-} \\ \dot{-} \beta \left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i \right) S \neq \emptyset \end{aligned} \quad (7)$$

при $j = 1, \dots, k$, каким бы ни было разбиение Σ_k .

Ниже всюду будем считать предположение (3.1) выполненным. Отметим, что данное предположение непустоты важно и без него дальнейшие утверждения могут быть неверны.

Следуя приведенной схеме, приходим к аналитическому выражению для "дискретного" множества разрешимости.

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\dots \left(\left(\mathcal{M} + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \dots \dot{-} \int_t^{t+\sigma_k} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right). \quad (8)$$

При этом множества $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$ есть выпуклые компакты для любого разбиения Σ_k .

Для дальнейшего напомним определение хаусдорфова расстояния между выпуклыми компактными множествами.

Определение 3.2. Хаусдорфово полурасстояние между компактами \mathcal{Q}, \mathcal{M} определяется как

$$h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max_x \min_z \{(x - z, x - z)^{1/2} \mid x \in \mathcal{Q}, z \in \mathcal{M}\},$$

в то время как хаусдорфово расстояние:

$$h(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max\{h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}), h_+(\mathcal{M}, \mathcal{Q})\}.$$

Оказывается, что для построенных выше множеств $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$, при измельчении рассмотренного разбиения, существует хаусдорфов предел, не зависящий от разбиения Σ_k (См. например [6]). Это наталкивает на мысль о том, что этот предел является действительным множеством разрешимости задачи (4).

Лемма 3.1. Существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k .

Множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ будем называть *альтернированной областью разрешимости* задачи (4). Фактически множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть значение некоторого многозначного интеграла, известного как *альтернированный интеграл Понтрягина*. Будем обозначать его как

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \int_{t_1, \mathcal{M}}^t ((-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \dot{-} \mathcal{Q}(\tau) d\tau). \quad (9)$$

Лемма 3.2. Многозначное отображение $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству:

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t, \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (10)$$

Доказательство. Доказательство этого факта вытекает из свойства аддитивности альтернированного интеграла, которое доказывается, например, в [6]. \square

Ключевое свойство альтернированного интеграла содержит следующая

Теорема 3.1. *Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как*

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (11)$$

Аналогично построению альтернированного интеграла, исходящему из понятия множества разрешимости максиминного типа, возможно по аналогичной последовательной схеме построить альтернированный интеграл второго рода. Выясняется, что построенные при этом множества разрешимости совпадают и равны действительному множеству разрешимости задачи.

Прежде чем приступить к аналогичной процедуре построения альтернированного интеграла второго рода дадим необходимое определение.

Определение 3.3. *Множество разрешимости $W^-[\tau]$ минимаксного типа называется следующая совокупность векторов*

$$W_-[\tau] = W_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\}.$$

Для введенного множества справедливо представление аналогичное представлению (6).

Утверждение 3.2. *Для $W_-[\tau]$ справедливо представление*

$$W_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{\tau}^{t_1} \mathcal{Q}(t) dt \right) + \int_{\tau}^{t_1} (-\mathcal{P}(t)) dt, \quad t_0 \leq s \leq t_1. \quad (12)$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для множества максиминного типа.

Теперь, аналогично построению альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, рассмотрим суперпозицию множеств $W_-(t, t_1, \mathcal{M})$ для произвольного разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ отрезка $\tau \leq t \leq t_1$.

$$W_-(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(s) ds \right) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(s)) ds.$$

И далее приходим к выражению

$$\mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\dots \left(\left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \dots \right)$$

$$+ \int_t^{t+\sigma_k} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \Bigg). \quad (13)$$

Здесь, как и прежде, предполагается, что возникающие множества не пусты. Для этого примем

Предположение 3.2. Для произвольного разбиения существует непрерывная функция $g(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и числа r_j такие, что

$$g\left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right) + r_j B \subseteq \mathcal{I}_- \left[t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i \right], \quad j = 1, \dots, m.$$

Для построенных таким образом множеств справедливо утверждение аналогичное лемме (3.1)

Лемма 3.3. Существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h(\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

и этот предел не зависит от выбора разбиений Σ_k .

Будем называть $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *альтернированным интегралом Понтрягина второго рода*.

Можно заметить, что альтернированные интегралы разных типов соответствуют различным информационным схемам. Альтернированный интеграл Понтрягина предполагает появление информации о помехах с опережением, а интеграл второго рода — с запаздыванием. Замечательно, что при условиях невырожденности (3.1) и (3.2) в пределе эти схемы дают один и тот же результат, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 3.2. Альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода:

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}).$$

Из вышесказанного можно сделать вывод, что множество разрешимости системы имеет явный вид и представляется в виде альтернированного интервала, который можно считать дискретными методами, зная опорные функции множеств в него входящих. Трудность в таком подходе возникает при попытке подсчитать опорную функцию разности двух множеств, которая вообще говоря удовлетворяет

$$\rho(l \mid A \dot{-} B) = \text{conv}(\rho(l \mid A) - \rho(l \mid B)) \leq \rho(l \mid A) - \rho(l \mid B), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n.$$

В связи с этим возникает необходимость весьма трудоемкого "овыпукления" разности опорных функций. Рассмотренный далее подход эллипсоидальных аппроксимаций позволяет избежать этой проблемы.

4 Функции цены

Рассмотрим подход к решению данной задачи с помощью функций цены. Введем

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}, x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\}.$$

Здесь функционал

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M}),$$

а $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий дифференциального включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$

порожденных стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.

Для введенной функции $\mathcal{V}(t, x)$ можно составить уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t), v \in \mathcal{Q}(t), \quad (14)$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}). \quad (15)$$

Аналогично введенным выше рекуррентным схемам построения альтернированных интегралов, введем рекуррентную схему построения функций цены. Как и ранее рассмотрим отрезок $\tau \leq t \leq t_1$ и построим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Для этого разбиения рассмотрим соотношения:

$$V_k^+(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1, x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^+(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \left\{ \max_v \min_u V_k^+(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, \right. \\ \left. x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \right\}.$$

Продолжая процедуру, в точке $\tau = t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i$ получаем:

$$V_k^+(\tau, x) = \left\{ \max_v \min_u V_k^+(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \leq t \leq \tau + \sigma_k, x(\tau) = x \right\},$$

Всюду будем предполагать, что "максимины" существуют.

Оказывается, что для введенных таким образом функций, при неограниченном измельчении разбиения, существуют поточечные пределы, то есть справедлива

Лемма 4.1. При

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^+(\tau, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^+(\tau, x),$$

не зависящий от выбора разбиения Σ_k .

Будем называть $V^+(\tau, x)$ *последовательным максимином*.

Лемма 4.2. Функция $V^+(\tau, x)$ удовлетворяет полугрупповому свойству

$$V^+(\tau, x \mid V^+(t_1, \cdot)) = V^+(\tau, x \mid V^+(t, \cdot \mid V^+(t_1, \cdot))).$$

При этом справедливо неравенство

$$V^+(t, x) \geq \left\{ \max_v \min_u V^+(t + \sigma, x(t + \sigma)) \mid x(t) = x \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Важным свойством построенного последовательного максимина является его связь с альтернированным интегралом.

Лемма 4.3. Справедливо равенство

$$V^+(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

Отсюда прямо следует следующий факт:

Лемма 4.4. Альтернированный интеграл $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ совпадает с множеством уровня последовательного максимина $V^+(\tau, x)$:

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^+(\tau, x) \leq 0\}.$$

Теперь рассмотрим соотношения аналогичные введенным выше, изменяя порядок следования максимума и минимума. Для произвольного Σ_k , построим

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \leq t \leq t_1, \quad x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \left\{ \min_u \max_v V_k^-(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \leq t \leq t_1 - \sigma_1, \right. \\ \left. x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \right\},$$

и так далее. Наконец, в точке $\tau = t_1 - \sum_{i=1}^k \sigma_i$:

$$V_k^-(\tau, x) = \left\{ \min_u \max_v V_k^-(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \leq t \leq \tau + \sigma_k, \quad x(\tau) = x \right\}.$$

Для таких рекуррентных функций справедливы аналогичные утверждения. Перечислим их в виде следующей леммы.

Лемма 4.5. 1. При

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^-(\tau, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^-(\tau, x),$$

не зависит от выбора разбиения Σ_k .

2. Функция $V^-(\tau, x)$ удовлетворяет полугрупповому свойству.

$$V^-(\tau, x \mid V^-(t_1, \cdot)) = V^-(\tau, x \mid V^-(t, \cdot \mid V^-(t_1, \cdot))).$$

3. Справедливо неравенство

$$V^-(t, x) \leq \min_u \max_v \{V^-(t + \sigma, x(t + \sigma)) \mid x(t) = x\}, \quad \sigma > 0.$$

Функцию $V^-(t, x)$ по аналогии с $V^+(t, x)$ будем называть *последовательным минимаксом*. Подобно тому как альтернированный интеграл Понтрягина являлся множеством уровня последовательного максимина, альтернированный интеграл второго рода является множеством уровня последовательно минимакса.

Лемма 4.6. Справедливы соотношения:

$$V^-(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})), \quad \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^-(\tau, x) \leq 0\}$$

Лемма 4.7. Многозначное отображение $\mathcal{I}^-(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству, а именно

$$\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}_-(\tau, t, \mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

5 Решение задачи синтеза

Объединим основные утверждения, описанные выше, в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. 1. Последовательные максимин $V^+(\tau, x)$ и минимакс V^- равны и совпадают с функцией цены $\mathcal{V}(\tau, x)$:

$$V^+(\tau, x) \equiv V^-(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x),$$

2. Множество разрешимости задачи допускает следующие эквивалентные представления:

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau] = \{x : \mathcal{V}(\tau \leq 0)\}, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1.$$

То есть, альтернированный интеграл Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, сечение моста Краковского $\mathcal{W}[\tau]$ и множество уровня функции цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ это одно и то же множество.

Кроме того, функция цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ обладает следующими свойствами.

Теорема 5.2. 1. *Справедлив принцип оптимальности*

$$\mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t, \cdot \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot))), \quad \mathcal{V}(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}), \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

2. *Если существует непрерывная частная производная $\partial \rho(l \mid \mathcal{W}[t]) / \partial t, \forall l \in \mathbb{R}^n$, то функция $\mathcal{V}(t, x)$ является классическим решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса.*

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

с краевым условием $\mathcal{V}(t_1, x) = h_+^2(x, \mathcal{M})$.

В таком случае, если находится решение (14), (15), то гарантирующую стратегию можно найти следующим образом:

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\}, \quad (16)$$

если градиент $\partial \mathcal{V} / \partial x$ существует в точке (t, x) . Или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \left\{ u : \max_v \{ dh_+^2(x, \mathcal{W}[t]) / dt : v \in \mathcal{Q}(t) \} \leq 0 \right\}. \quad (17)$$

Теорема 5.3. *Все решения дифференциального включения*

$$\dot{x} \in \mathcal{U}_*(t, x) + v(t), \quad x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}[t],$$

удовлетворяют включению $x(t) \in \mathcal{W}[t], \tau \leq t \leq t_1$, и, следовательно, достигают целевого множества $\mathcal{M} : x(t_1) \in \mathcal{M}$ при любом возмущении $v(t)$.

Таким образом синтезирующая стратегия $\mathcal{U}_*(t, x)$ разрешает задачу целевого синтеза управлений при неопределенности. Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t, x)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{U}_*(t, x)$, то есть обеспечивающих выполнение теоремы (5.3), находится стратегия "экстремального прицеливания":

$$\mathcal{U}_e(t, x) = \partial_l k(t, -l) = \operatorname{argmin} \{ (l^0, u) \mid u \in \mathcal{P}(t) \}. \quad (18)$$

Здесь $\partial_l k$ — субдифференциал функции $k(t, l)$ по переменной l , $k(t, l) = \rho(l \mid \mathcal{P}(t))$, $l^0 = l^0(t, x) \neq 0$ — максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{W}[\tau]) = \max \{ (l, x) - \rho(l \mid \mathcal{W}[\tau]) \mid (l, l) \leq 1 \}, \quad (19)$$

причем $l^0(t, x) = 0$, если $h_+(x, \mathcal{W}[\tau]) = 0$.

Как видно для поиска гарантирующей стратегии достаточно знать лишь сечения $\mathcal{W}[t]$ функции цены $\mathcal{V}(t, x)$. Поскольку интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби, как правило, очень нетривиально, будем использовать аппроксимации сечения функции цены вместо самой функции. Таким образом сведем задачу к задаче поиска аппроксимаций альтернированного интеграла Понтрягина.

6 Эллипсоидальные аппроксимации множества разре- шимости

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \{x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q > 0$.

Приведем для начала основные утверждения эллипсоидального исчисления, необходимые в дальнейшем. Подробнее см. [2] и [4].

Теорема 6.1. Пусть $\mathcal{E}_1(a_1, Q_1), \mathcal{E}_2(a_2, Q_2)$ — пара невырожденных эллипсоидов. Рассмотрим

- семейство матриц $Q[p]$:

$$Q[p] = (1 + p^{-1})Q_1 + (1 + p)Q_2,$$

$$p \in \Pi^+ = [\lambda_{\min}^{1/2}, \lambda_{\max}^{1/2}]$$

где $\lambda_{\min} > 0, \lambda_{\max} < \infty$ — относительные собственные значения пары матриц Q_1, Q_2 , или, иначе, корни уравнения

$$\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0.$$

Обозначим также

$$\Pi^- = \Pi^+ \cap (1, \lambda_{\min})$$

- семейство матриц $Q[S_1, S_2]$:

$$Q[S_1, S_2] = (S_1 Q_1^{1/2} + S_2 Q_2^{1/2})^T (S_1 Q_1^{1/2} + S_2 Q_2^{1/2}),$$

где

$$S_1, S_2 \in \Sigma = \{S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : S^T S = S S^T = I\}.$$

Для этих семейств справедливы следующие включения:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q[S_1, S_2]), \quad \forall S_1, S_2 \in \Sigma$$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q[-p]), \quad \forall p \in \Pi^-$$

Более того, для некоторого фиксированного вектора l представляется возможным найти значения параметров p, S_1, S_2 такие, что для опорных функций суммы и разности эллипсоидов и их внутренних оценок справедливо равенство. Или иначе, внутренняя оценка касается суммы или разности эллипсоидов.

Теорема 6.2. *Для невырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}(a_1, Q_1), \mathcal{E}(a_2, Q_2)$ справедливо:*

- Для любого вектора l существуют значения параметров $S_1^*, S_2^* \in \Sigma$ такие, что

$$\rho(l \mid \mathcal{E}(a_1, Q_1) + \mathcal{E}(a_2, Q_2)) = \rho(l \mid \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q[S_1^*, S_2^*])),$$

- Для всех "хороших" направлений l геометрической разности эллипсоидов существует значение $p^* \in \Pi^-$ такое, что

$$\rho(l \mid \mathcal{E}(a_1, Q_1) - \mathcal{E}(a_2, Q_2)) = \rho(l \mid \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q[-p^*])).$$

Отправной точкой для построения оценок множества разрешимости является тот факт, что функция $\mathcal{W}[t]$ в условиях невырожденности предположения (3.1) является решением эволюционного уравнения.

Теорема 6.3. *Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_+ (\mathcal{W}[t - \sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma \mathcal{E}(p(t), P(t))) - \sigma \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0, \quad \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}. \quad (20)$$

и это решение максимально по включению относительно всех других решений этого уравнения.

При этом мы будем заинтересованы именно во внутренних аппроксимациях множества разрешимости, так как построение управления по схеме описанной в следующем разделе, "удерживающее" траекторию внутри такой аппроксимации будет гарантировать попадание в целевое множество. Поэтому будем искать максимальное по включению эллипсоидальное решение (20). Исходя из эволюционного уравнения будем строить внутреннюю аппроксимацию, пользуясь формулами из теоремы (6.1). В итоге приходим к утверждению

Теорема 6.4. *Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:*

$$\dot{x}^*(t) = p(t) + q(t), \quad (21)$$

а также

$$\begin{aligned} \dot{X}_-(t) = & \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)Q(t) - \\ & -(X_-(t))^{1/2}H(t)(P(t))^{1/2} - (P(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2} \end{aligned} \quad (22)$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M. \quad (23)$$

является решением (20).

При этом для некоторых направлений $l \in \mathbb{R}^n$ существуют функции $\pi(t), H(t)$ такие, что

$$\rho(l \mid \mathcal{W}[t]) = \rho(l \mid \mathcal{E}(x^*, X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot))))$$

что означает, что построенный эллипсоид \mathcal{E} является максимальным по включению решением (20).

7 Эллипсоидальный синтез управлений

Следуя предыдущим разделам, для вычисления стратегии управления требуется найти множество разрешимости $\mathcal{W}[\cdot]$, определить значение функции цены $\mathcal{V}(t, x) = d^2(x(t), \mathcal{W}(t))$ и её градиент, решить задачу (19). Для множеств произвольной формы все эти задачи, вообще говоря, представляют большую сложность. Поэтому основная идея эллипсоидального синтеза состоит в замене $\mathcal{W}[t]$ некоторой его внутренней эллипсоидальной аппроксимацией, и применении вышеописанной схемы к ней. Это даёт:

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases} \quad (24)$$

где $l^0 = l^0(t, x)$ — единичный вектор, максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{E}_-[t]) = (l^0, x) - \rho(l^0 \mid \mathcal{E}_-[t]) = \max\{(l, x) - \rho(l \mid \mathcal{E}_-[t]) \mid \|l\| \leq 1\}.$$

Последняя задача теперь может быть решена однозначно. Если

$$s^0 = \operatorname{argmin}\{\|x - s\| : s \in \mathcal{E}_-[t], x = x(t)\},$$

то можно положить $l^0 = k(x(t) - s^0)$, $k > 0$, так что вектор l^0 будет градиентом функции $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ при фиксированном t .

Лемма 7.1. *Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент*

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X)) / \partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*.$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*)) - 1.$$

При этом понятно, что при известных x^*, X параметр λ может быть представлен единственным образом как $\lambda = \lambda(x)$.

Выражение для управления (24) является следствием следующего факта:

Лемма 7.2. Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи

$$\min\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P)\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

8 Пример синтеза гарантирующего управления

8.1 Пример 1

Будем рассматривать ту же систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad m &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P), \quad p &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} = \mathcal{E}(q, Q), \quad q &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Начальное условие для траекторий:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}.$$

Помеху выберем например как

$$v(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Визуализируем полученную оценку для дискретной схемы (Рис. (1)). Построим график оценки и траектории. Траектория, упираясь в границу эллипсоидальной трубки, идет по этой границе, так как генерирующееся управление стремится оставить её внутри эллипсоидальной оценки. Как итог траектория приходит в целевое множество.

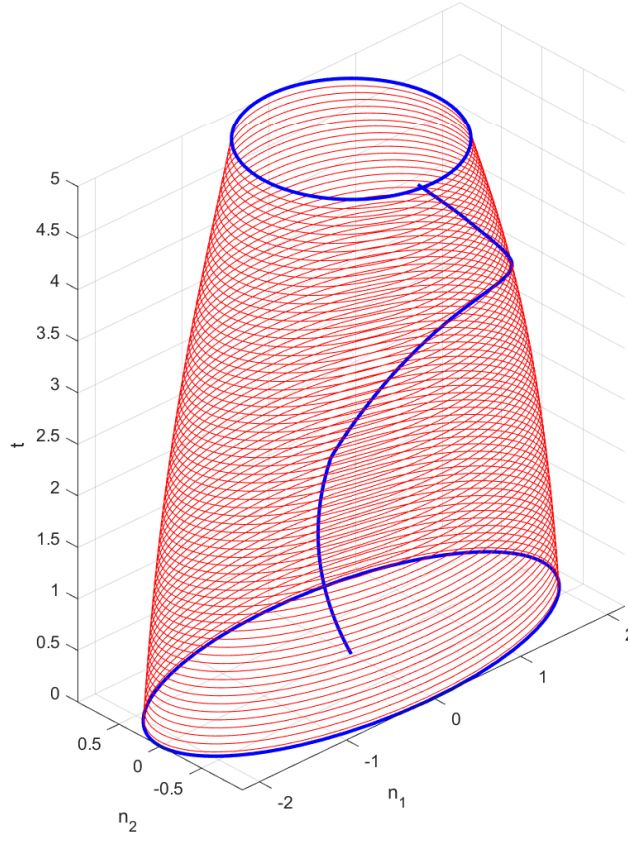


Рис. 1: Внутренняя эллипсоидальная оценка для множества разрешимости и траектория системы (Пример 1).

8.2 Пример 2

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

где на управление и помеху наложены эллипсоидальные ограничения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{E}(m, M), \quad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P}(t) &= \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) + 2 & 0 \\ 0 & \sin(3t) + 2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q}(t) &= \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} \cos(3t) + 2 & 0 \\ 0 & \cos(3t) + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Начальное условие для траекторий:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Помеху выберем например следующим образом:

$$v(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

В этом примере ограничения на управление и помеху поочередно "доминируют" друг на другом, поэтому соответствующий альтернированный интеграл с течением времени расширяется и сужается.

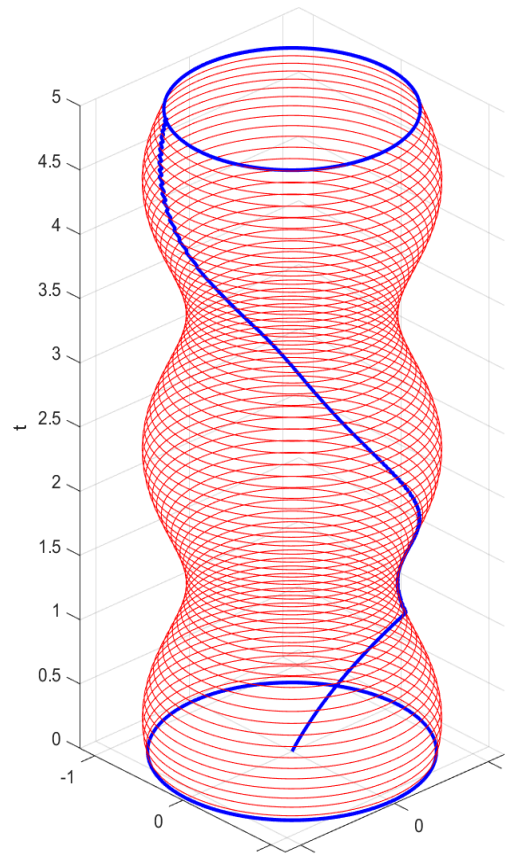


Рис. 2: Внутренняя эллипсоидальная оценка для множества разрешимости и траектория системы (Пример 2).

8.3 Особенности численного метода

Для численного решения задач и удобной визуализации будем использовать язык Matlab. Из теоретической части ясно, что для задач с эллипсоидальными ограничениями эллипсоидальные трубки разрешимости удовлетворяют дифференциальным уравнениям (21) и (22) с конечными условиями (23). Для решения подобных дифференциальных уравнений удобно пользоваться итерационными методами. Будем использовать классический метод Эйлера. Разобьем отрезок времени на n частей: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$. Для каждого момента, начиная с t_n , последовательно определим центр $x^*(t_k)$ внутренней эллипсоидальной трубки и матрицу $X_-(t_k)$.

Важно отметить, что в (22) в виде параметров присутствуют функции $\pi(t) > 0$ и $H(t)$. На каждом шаге решения дифференциальных уравнений будем определять значения параметров, так, чтобы внутренняя оценка касалась действительного множества разрешимости в некотором выбранном направлении l . Для этого будем выбирать ортогональную матрицу $H(t)$ из соотношения

$$H(t)(P(t))^{1/2}l = \frac{\langle l, P(t)l \rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t)l \rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l.$$

Такую матрицу можно найти с помощью сингулярного разложения векторов

$$v(t) = (P(t))^{1/2}l, \quad w(t) = \frac{\langle l, P(t)l \rangle^{1/2}}{\langle l, X_-(t)l \rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l$$

в виде

$$H(t) = V_{w(t)}V_{v(t)}^T,$$

где матрицы $V_{w(t)}$, $V_{v(t)}$ получаются из сингулярного разложения векторов $w(t)$, $v(t)$:

$$v(t) = V_{v(t)}\Sigma_{v(t)}u_{v(t)}, \quad w(t) = V_{w(t)}\Sigma_{w(t)}u_{w(t)}.$$

Значение $\pi(t)$ выберем как

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), Q(t)l(t) \rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t) \rangle^{1/2}}.$$

Отметим также, что гарантированно построить управление в задаче можно, если начальное положение системы $x(t_0) = x_0$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(x^*(t_0), X_-(t_0))$, поэтому это условие необходимо проверить. В таком случае для каждого момента времени t_k , имея центр $x^*(t_k)$ и матрицу $X_-(t_k)$ внутренней оценки, возможно по приведенной теоретической схеме построить управление в точках введенной сетки.

$$u(t_k, x) = \begin{cases} p(t_k), & \text{если } x \in \mathcal{E}(x^*(t_k), X_-(t_k)), \\ p(t_k) - P(t_k)l^0(l^0, P(t_k)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}(x^*(t_k), X_-(t_k)). \end{cases}$$

Вектор l^0 в соответствии с теоретической схемой может быть найден как:

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x^*(t_k)) + x^*(t_k).$$

Остаётся найти значение множителя λ , которое можно искать из уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x^*(t_k)), X_-^{-1}(t_k)(I + \lambda X_-^{-1}(t_k))^{-1}(x - x^*(t_k))) - 1$$

Очевидно, что если $x \notin \mathcal{E}(x^*(t_k), X_-(t_k))$, тогда в точке $\lambda = 0$, $f(0) > 0$. При этом при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$((I + \lambda Q^{-1})^{-1}x, Q^{-1}(I + \lambda Q^{-1})^{-1}x) \rightarrow 0.$$

А также $f'(\lambda) < 0$ при $\lambda > 0$. Поэтому значение параметра можно искать итерационно среди $\lambda > 0$.

Траекторию системы таким образом также удобно строить итерационно, исходя из разностного уравнения

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = h(u(t_k, x(t_k)) + v(t_k)), \quad h = t_{k+1} - t_k,$$

корректируя управление в точках сетки.

9 Более общая задача

Рассмотрим исходную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t)$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)) \subset \mathbb{R}^p, \quad v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subset \mathbb{R}^q.$$

Пусть также задано некоторое эллипсоидальное целевое множество

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M) \subset \mathbb{R}^n.$$

Будем строить гарантирующее управление, приводящее систему из некоторого положения x_0 в момент времени t_0 в целевое множество \mathcal{M} в момент времени t_1 . Как было отмечено в теоретической части, исходная система заменой $x(t) = G(t_1, t)x(t)$ приводится к виду

$$\dot{x}(t) = \hat{B}(t)u(t) + \hat{C}(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где

$$\hat{B}(t) = G(t_1, t)B(t), \quad \hat{C}(t) = G(t_1, t)C(t)$$

и

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)).$$

Для новой системы нужно перейти из состояния $G(t_1, t_0)x_0$ в целевое множество \mathcal{M} , остающееся без изменений.

Внутренняя эллипсоидальная оценка для системы такого вида может быть найдена из дифференциальных уравнений, которые строятся аналогично (21), (22), с учетом того факта, что $A\mathcal{E}(q, Q) = \mathcal{E}(Aq, AQA^T)$.

В итоге получаем уравнение на центр:

$$\dot{x}^*(t) = \hat{B}(t)p(t) + \hat{C}(t)q(t)$$

с начальным условием

$$x^*(t_1) = m,$$

и на матрицу конфигурации:

$$\begin{aligned} \dot{X}_-(t) = & \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)\hat{C}(t)Q(t)\hat{C}^T(t) - (X_-(t))^{1/2}H(t)(\hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t))^{1/2} - \\ & - (\hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t))^{1/2}H^T(t)(X_-(t))^{1/2} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$X_-(t_1) = M.$$

Для выполнения условия касания выберем

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), \hat{C}(t)Q(t)\hat{C}^T(t)l(t) \rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t) \rangle^{1/2}},$$

а ортогональную матрицу $H(t)$ будем искать из соотношения

$$H(t)(\hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t))^{1/2}l(t) = \frac{\langle l(t), \hat{B}(t)P(t)\hat{B}^T(t)l(t) \rangle^{1/2}}{\langle l(t), X_-(t)l(t) \rangle^{1/2}}(X_-(t))^{1/2}l(t).$$

Если в новых координатах найдена внутренняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}_-[t]$ множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$, то управление может быть аналогично найдено в виде обратной связи

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} p(t), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)\hat{B}^T(t)l^0(\hat{B}^T(t)l^0, P(t)\hat{B}^T(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

Строя с помощью такого управления траекторию новой системы и выполняя обратное преобразование, получаем траекторию исходной системы.

10 Пример

Для демонстрации вышеописанного метода рассмотрим простой пример системы двух независимых осцилляторов.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С целевым множеством

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad m = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

То есть будем пытаться привести систему в некую малую окрестность желаемого состояния. Зададим ограничения на управление и помеху:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad q(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

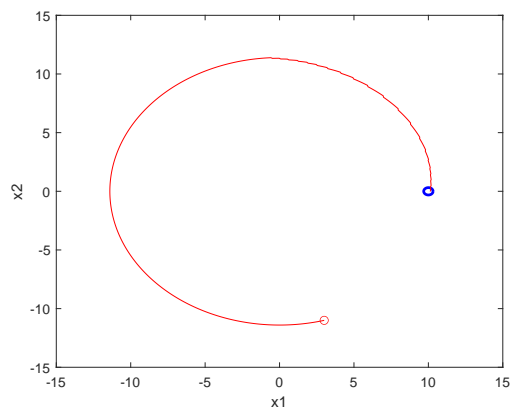
Начальное условие для траекторий зададим как

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

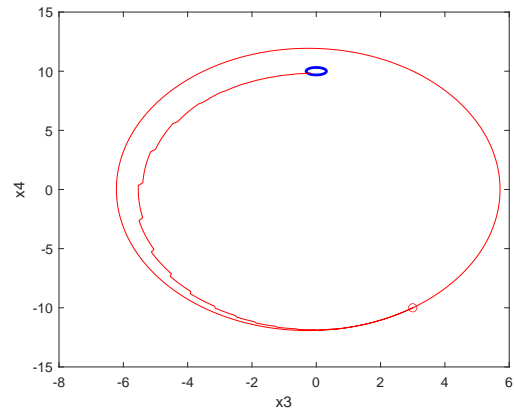
Помеху выберем например следующим образом:

$$1. \ v_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad 2. \ v_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Применяя схему предыдущего раздела, построим управления и траектории для такой системы. Сначала система находится внутри оценки и не нуждается в коррекции. Затем, в зависимости от помехи, система корректируется. В точках коррекции соответствующие траектории в новых координатах "упираются" в эллипсоидальную оценку и генерирующееся управление возвращает их обратно. Как итог, в обоих случаях система приходит в требуемое множество.

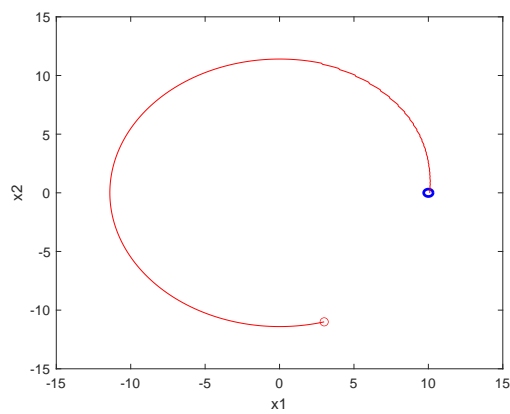


(a) Проекция на координаты первого осциллятора.

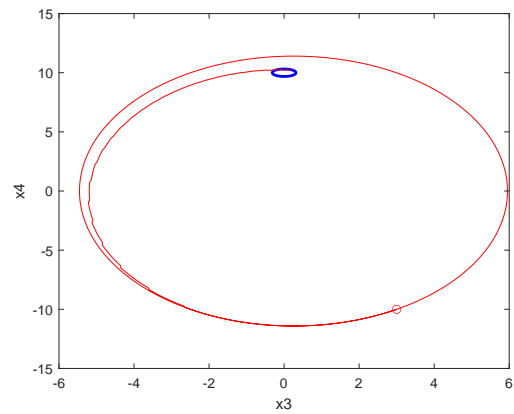


(b) Проекция на координаты второго осциллятора

Рис. 3: Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для первой помехи.



(a) Проекция на координаты первого осциллятора.



(b) Проекция на координаты второго осциллятора

Рис. 4: Иллюстрация траектории с коррекцией и целевого множества для второй помехи.

11 Заключение

В работе рассмотрена проблема гарантированного синтеза управлений при неопределенности для линейных систем, в случае когда на помеху наложены геометрические ограничения. Приведены основные утверждения теории, связанные с данной задачей, а также рассмотрен алгоритм построения искомой разрешающей стратегии. Рассмотрен переход к методу эллипсоидального исчисления, позволяющий строить управления в явном виде, а также приведены примеры применения метода для разных задач и ограничений на параметры.

Список литературы

- [1] Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*, Наука, М., 1977
- [2] Kurzhanski A. B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1996
- [3] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation*, Springer, 2014
- [4] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Reachability Analysis for Uncertain Systems — the Ellipsoidal Technique*, *Journal of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Ser. B., v.9, No 3, 2002, pp. 347–367.
- [5] Kurzhanski A. A., Gagarinov P. *Ellipsoidal toolbox manual*, Release 2.0.1, 2014.
- [6] Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб., 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330
- [7] Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974.