Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Гуров Евгений Валерьевич

«Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности»

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
академик, д.ф.-м.н., профессор
А. Б. Куржанский

Москва, 2022

Содержание

1 Задача синтеза управлений при неопределенности

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) \tag{1}$$

с непрерывными матрицами $A(t), B(t), C(t)$. Где $x \in \mathbb{R}^n$ — *вектор состояния* системы; $u \in \mathbb{R}^p$ — *управление*, $v \in \mathbb{R}^q$ — *внешнее возмущение*, стесненные почти всюду по t некоторыми "геометрическими"ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t),$$

где $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заданные многозначные функции с выпуклыми компактными значениями, непрерывно зависящие от времени. Управление может быть выбрано в одном из двух классов:

- в классе U программных управлений $\mathrm{u} = \mathrm{u(t)}$ — измеримых по Лебегу функций со значениями в $\mathcal{P}(t)$ почти всюду.
- в классе $U_{\mathcal{P}}$ позиционных управлений, представляющих собой многозначные функции $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$. При этом выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t, x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{2}$$

  для любой измеримой по Лебегу функции $v(t)$. [1] В этой работе речь пойдет именно про этот тип управлений.

Важно отметить, что в задачах с неопределенностью эти два типа управлений существенно не взимозаменямы. Имея позиционное управление, подстановкой его и решением задачи относительно $u(t)$, уже нельзя однозначно найти программный аналог.

Пусть задано "целевое"множество $\mathcal{M} \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$. Задача *о синтезе управления при неопределенности* состоит в отыскании *множества разрешимости* $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и *позиционной стратегией управления* $\mathcal{U}(t, x) \in U_{\mathcal{P}}$ таких, что все решения (2), выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали бы *целевого множества* $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 при любом внешнем возмущени $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Задача имеет смысл в случае $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \varnothing$. Многозначная функция $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ называется *трубкой разрешимости* или *мостом Красовского*, и является ключевым элементом в решении задачи. Существенным обстоятельством является возможность вычислить эту функцию при помощи некоторого многозначного инетграла — *альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина.*

---

[1] Примером класса $U_{\mathcal{P}}$ может служить класс всех непрерывных по t и полунепрерывных сверху по x многозначных отображений с выпуклыми компактными значениями. В этом случае дифференциальное включение имеет решение на всем отрезке времени для произвольного $x^0 = x(t_0)$, то есть существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному включению почти всюду.[ссылка на доказательство леммы филлипова(например)]

2 Альтернированный интеграл Понтрягина

Напомним определение этого интеграла. Для этого приведем вначале систему (1) к более простому виду

$$\dot{x} = u + v \tag{3}$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $G(t, t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1). Для этого сделаем *невырожденную замену* $x(t) = G(t_1, t)x(t)$. Далее вместо (1) будем рассматривать (3) с ограничениями (4), опуская индекс нуль.

Определение 2.1. *Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество*

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\right\}, \tag{5}$$

где $d^2(x.\mathcal{M}) = \min\limits_z\{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ *и* $x(t_1)$ *— конец в момент* t_1 *траектории* $x(t)$ *системы* (3), *выпущенной из положения* $x(\tau) = x$.

Утверждение 2.1. *Для* $W[t]$ *справедливо представление:*

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt\right) \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt, \quad \tau \leq t \leq t_1. \tag{6}$$

Здесь символ $\mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ *означает геометрическую(по Минковскому) разность двух множеств* $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$. *А именно,* $c \in \mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ *тогда и только тогда, когда* $c + \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$.

Доказательство. При заданных u и v значение на правом конце выражается как

$$x(t_1) = x(t) + \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau + \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau.$$

В таком случае множество разрешимости очевидно представляется в виде

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{x : x = x(t_1) - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau,\, x(t_1) \in \mathcal{M}\right\} =$$

$$= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \bigcup_{u \in \mathcal{P}} \left\{\mathcal{M} - \int\limits_t^{t_1} u(\tau)d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \bigcap_{v \in \mathcal{Q}} \left\{\mathcal{M} + \int\limits_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau - \int\limits_t^{t_1} v(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \left\{ x : x \in \left(\mathcal{M} + \int\limits_{t}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) \right) - \int\limits_{t}^{t_1} v(\tau)d\tau, \, \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\} =$$

$$= \left\{ x : x + \int\limits_{t}^{t_1} v(\tau)d\tau \in \mathcal{M} + \int\limits_{t}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau, \, \forall v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau) \right\}.$$

Последнее в силу определения разности по Минковскому совпадает с правой частью формулы (6). □

Опишем формальную процедуру построения альтернированного интеграла. Для этого построим множество $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, являющееся суперпозицей множеств $W(\tau, t_1, \mathcal{M})$, определенных выше. Взяв интервал $\tau \le t \le t_1$, рассмотрим разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$,

$$t = t_1 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1, \quad \sigma_i > 0.$$

На первом шаге, начав с момента t_1, найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие (6) будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int\limits_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau \right) \dot{-} \int\limits_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Продолжая последовательную процедуру, имеем

$$W(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, t_1 - \sigma_1, W[t_1 - \sigma_1]) = \left(W[t_1 - \sigma_1] + \int\limits_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau))d\tau \right) \dot{-} \\ \dot{-} \int\limits_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau \tag{8}$$

и, в итоге, получаем

$$W(t, t + \sigma_k, W(t + \sigma_k, t + \sigma_k + \sigma_{k-1}, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k). \tag{9}$$

В приведенной процедуре предполагается, что все возникающие множества $W(\cdot)$ вида (9) непусты.

Предположение 2.1. *Существует такая непрерывная функция $\beta(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, что все множества*

$$W\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i, t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i, W\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_1, t_1 - \sum_{i=1}^{j-2} \sigma_i, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) \right) \dots \right) \dot{-} \\ \dot{-} \beta\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i \right) S \ne \varnothing \tag{10}$$

при $j = 1, \ldots, k$, *каким бы ни было разбиение* Σ_k.

Предположение (2.1) обеспечивает условие $W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) \neq \varnothing$ для любого разбиения Σ_k.

Ниже всюду будем случитать предположение (2.1) выполненым. Следует заметить, что данное замечание введено не только для облегчения выкеладок. В его отсутствие некоторые из утверждений, приводимых далее, могут оказаться неверными.

Следуя (7) — (9), приходим к аналитическому выражению

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\ldots \left(\left(\mathcal{M} + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right) + \ldots \dot{-} \int\limits_{t}^{t+\sigma_k} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right). \quad (11)$$

Множества $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$ есть выпуклые компакты для любого разбиения Σ_k. Рассмотрим хаусдорфов предел этих множеств при $\max\{\sigma_i : \ i = 1, \ldots, k\} \to 0$.

Напомним, что *хаусдорфово полурасстояние* между компактами $\mathcal{Q}, \mathcal{M}$ определяется как

$$h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max_x \min_z \{(x - z, x - z)^{1/2} \mid x \in \mathcal{Q}, z \in \mathcal{M}\},$$

в то время как *хаусдорфово расстояние* $h(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max\{h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}), h_+(\mathcal{M}, \mathcal{Q})\}$.

Лемма 2.1. *Существует хаусдорфов предел* $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\left(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})\right) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \ldots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k.

Множество

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[t] \quad (12)$$

будем называть *альтернированной областью разрешимости* задачи (1), обозначая его как

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \int\limits_{t_1, \mathcal{M}}^{t} \left((-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \dot{-} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \right).$$

Фактически множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть значение некоторого многозначного интеграла, известного как *альтернированный интеграл Понтрягина*. Этот интеграл детально описан в статье [1].

Лемма 2.2. *Многозначное отображение $\mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$\mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*(\tau, t, \mathcal{W}^*(t, t_1,\ \mathcal{M})), \quad \tau \leq t \leq t_1. \tag{13}$$

Доказательство. Доказательство этого факта вытекает из свойства аддитивности альтернированного интеграла $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$, которое доказывается, например, в [1]. □

Ключевое свойство альтернированного интеграла содержит следующая

Теорема 2.1. *Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как*

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{W}^*[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{14}$$

3 Гарантированный синтез управлений. Функции цены

Сформулированная задача *гарантированного синтеза управлений при неопределенности* не содержит каких-либо криетриев оптимальности. В ней требуется найти лишь некоторое допустимое "гарантированное"решение. Тем не менее будем рассматривать её посредством сведения к процедурам оптимизации, принятых в рамках идей динамического программирования.

Введем *функцию цены*

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t, x) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}},\ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\}, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x, \tag{16}$$

порожденных заданной стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.

В таком случае для функции $\mathcal{V}(t, x)$ можно составить следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_{u} \max_{v} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t),\ v \in \mathcal{Q}(t), \tag{17}$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}). \tag{18}$$

В общем случае подобное уравнение может не иметь классического решения и для его рассмотрения следует привлекать понятия обобщенных "вязкостных"или "минимаксных"решений. В данной работе функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ оказывается выпуклой или квазивыпуклой по x. Поэтому решения соответствующих уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса, рассматриваемых здесь, не выходят за рамки вязкостных или даже классических решений.

Перейдем к другой интерпретации функции цены $\mathcal{V}(t,x)$. Рассмотрим интервал $\tau \le t \le t_1$ и построим разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$, подобное рассмотренному в разделе 1. Для данного разбиения рассмотрим рекуррентные соотношения

$$V_k^+(t_1-\sigma_1,x) = \left\{\max_v \min_u d^2(x(t_1),\mathcal{M}) \mid t_1-\sigma_1 \le t \le t_1,\ x(t_1-\sigma_1)=x\right\},$$

$$V_k^+(t_1-\sigma_1-\sigma_2,x) = \Big\{\max_v \min_u V_k^+(t_1-\sigma_1,x(t_1-\sigma_1)) \mid t_1-\sigma_1-\sigma_2 \le t \le t_1-\sigma_1,$$
$$x(t_1-\sigma_1-\sigma_2)=x\Big\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum_{i=1}^{k}\sigma_i$:

$$V_k^+(\tau,x) = \left\{\max_v \min_u V_k^+(\tau+\sigma_k,x(\tau+\sigma_k)) \mid \tau \le t \le \tau+\sigma_k,\ x(\tau)=x\right\},$$

где $v(t)\in\mathcal{Q}(t), u(t)\in\mathcal{P}(t)$ почти всюду на соответствующих интервалах. Всюду предполагаем, что "максимины"существуют.

Лемма 3.1. *При*

$$\max_{i=1,\ldots,k}\{\sigma_i\},\quad k\to\infty,\quad \sum_{i=1}^{k}\sigma_i = t_1-\tau,$$

существует поточечный предел

$$V^+(\tau,x) = \lim_{k\to\infty} V_k^+(\tau,x),$$

не зависит от выбора разбиения Σ_k.

Будем называть $V^+(\tau,x)$ *последовательным максимином.* Обозначим

$$V^+(\tau,x) = V^+(\tau,x \mid V^+(t_1,\cdot)),\quad V^+(t_1,x)\equiv d^2(x,\mathcal{M}). \tag{19}$$

Нетрудно заметить, что имеет место следующая

Лемма 3.2. *Функция* $V^+(\tau,x)$ *удовлетворяет полурупповому свойству*

$$V^+(\tau,x \mid V^+(t_1,\cdot)) = V^+(\tau,x \mid V^+(t,\cdot \mid V^+(t_1,\cdot))).$$

При этом справедливо неравенство

$$V^+(t,x) \ge \left\{\max_v \min_u V^+(t+\sigma,x(t+\sigma)) \mid x(t)=x\right\},\quad \sigma>0.$$

Отметим связь функции с альтернированным интегралом.

Лемма 3.3. *Справедливо равенство*

$$V^+(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

где $\mathcal{W}^*[\tau] = \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *— значение альтернированного интеграла*

Отюсда прямо следует

Лемма 3.4. *Альтернированный инетграл* $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *совпадает с множеством уровня последовательного максимина* $V^+(\tau, x)$*:*

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^+(\tau, x) \le 0\}.$$

Теперь рассмотрим задачу аналогичную предыдущей. Для произвольного Σ_k, построим рекуррентные соотношения

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1, x) = \left\{ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \le t \le t_1,\ x(t_1 - \sigma_1) = x \right\},$$

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \Big\{ \min_u \max_v V_k^-(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \le t \le t_1 - \sigma_1, \\ x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x \Big\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i$:

$$V_k^-(\tau, x) = \left\{ \min_u \max_v V_k^-(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \le t \le \tau + \sigma_k,\ x(\tau) = x \right\},$$

Для определенных таким образом функций имеют место аналогичные утверждения

Лемма 3.5. *1. При*

$$\max_{i=1,\dots,k} \{\sigma_i\}, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^-(\tau, x) = \lim_{k \to \infty} V_k^-(\tau, x),$$

не зависит от выбора разбиения Σ_k.
2. Функция $V^-(\tau, x)$ *удовлетворяет полугрупповому свойству.*

$$V^-(\tau, x \mid V^-(t_1, \cdot)) = V^-(\tau, x \mid V^-(t, \cdot \mid V^-(t_1, \cdot))). \tag{20}$$

3. Справедливо неравенство

$$V^-(t, x) \le \min_u \max_v \{V^-(t + \sigma, x(t + \sigma)) \mid x(t) = x\}, \quad \sigma > 0. \tag{21}$$

Подобно тому как альтернированный интеграл $I(\tau, t_1, \mathcal{M})$ является множеством уровня последовательного максимина, множество уровня последовательного минимакса также представляет собой некоторый многозначный интеграл. Определим его, для чего введем следующее

Определение 3.1. *Множество разрешимости $W^-[\tau]$ минимаксоного типа называется следующая совокупность векторов*

$$W_-[\tau] = W_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\}.$$

Для введенного множества справедливо представление аналогичное представлению

Утверждение 3.1. *Для $W_-[\tau]$ справедливо представление*

$$W_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_\tau^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt\right) + \int_\tau^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt, \quad t_0 \leq s \leq t_1. \tag{22}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для множества максиминного типа.

Теперь, аналогично построению альтернированного интеграла Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, рассмотрим суперпозицию множеств $W_-(t, t_1, \mathcal{M})$ для произвольного разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ отрезка $\tau \leq t \leq t_1$.

$$W_-(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(s)ds\right) + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(s))ds.$$

И далее приходим к выражению

$$\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\ldots\left(\left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt\right) + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt\right) \dot{-} \ldots \right. \\ \left. + \int_\tau^{\tau+\sigma_k} (-\mathcal{P}(t))dt\right). \tag{23}$$

Формальная процедура, описанная выше, предполгает что все множества $\mathcal{I}_-[\cdot]$ не пусты. Для этого необходимо принять

Предположение 3.1. *Существует непрерывная функция $g(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ и число r такие, что для любого разбиения Σ_k справедливо включение*

$$g\left(t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right) + rB \subseteq \mathcal{I}_-\left[t_1 - \sum_{i=1}^j \sigma_i\right], \quad j = 1, \ldots, m.$$

Лемма 3.6. *Существует замкнутое множество — хаусдорфов предел* $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\left(\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})\right) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \dots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$

и этот предел не зависит от выбора разбиений Σ_k

Будем называть

$$\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-[t]$$

альтернированным интегралом Л.С. Понтрягина второго рода.

Лемма 3.7. *Справедливы соотношения:*

$$V^-(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})), \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \big\{x : V^-(\tau, x) \le 0\big\}$$

Лемма 3.8. *Многозначное отображение* $\mathcal{W}^-(t, t_1, \mathcal{M})$ *удовлетворяет полугрупповому свойству, а именно*

$$\mathcal{W}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-(\tau, t, \mathcal{W}_-(t, t_1, \mathcal{M})), \quad \tau \le t \le t_1.$$

Отметим, что алтернированные интегралы соответствуют пределам разных информационных схем. Так, альтернированный интеграл Понтрягина предполагает появление текущей информации о помехах с опережением, в то время как интеграл второго рода — с запаздывааниeм. Тем не менее, в пределе эти схемы дают один и тот же результат, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 3.1. *Альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода:*

$$\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-(t, t_1, \mathcal{M}).$$

4 Решение задачи синтеза

Суммируем основыне утверждения в виде следуещей теоремы.

Теорема 4.1. *1. Последовательные максимин* $V^+(\tau, x)$ *и минимакс* V^- *равны и совпадают с функцией цены* $\mathcal{V}(\tau, x)$*:*

$$V^+(\tau, x) \equiv V^-(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x),$$

2. Множество разрешимости задачи допускает следющие эквивалентные представления:

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[\tau] = \{x : \mathcal{V}(\tau \le 0\}, \quad t_0 \le \tau \le t_1.$$

То есть, алтернированный интеграл Понтрягина $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$*, сечение моста Красовского* $\mathcal{W}[\tau]$ *и множество уровня определенной нами функции* $\mathcal{V}(\tau, x)$ *суть одно и то же множество.*

Кроме того, функция цены $\mathcal{V}(\tau, x)$ обладает следующими свойствами.

Теорема 4.2. *1. Справедлив принцип оптимальности*

$$\mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, x \mid \mathcal{V}(t, \cdot \mid \mathcal{V}(t_1, \cdot))), \quad \mathcal{V}(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}), \quad \tau \le t \le t_1.$$

2. Если существует непрерывная частная производная $\partial\rho(l \mid \mathcal{W}[t])/\partial t, \forall l \in \mathbb{R}^n$, то фукнция $\mathcal{V}(t, x)$ является классическим решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса.

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

с краевым условием $\mathcal{V}(t_1, x) = h_+^2(x, \mathcal{M})$.

Если решение (17), (18) удается найти, то гарантирующая стратегия управления находится следубщим образом:

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \mathrm{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\}, \tag{24}$$

если градиент $\partial\mathcal{V}/\partial x$ существует в точке (t, x). Или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \left\{ u : \max_v \{ dh_+^2(x, \mathcal{W}[t])/dt : v \in \mathcal{Q}(t) \} \le 0 \right\}. \tag{25}$$

Теорема 4.3. *Все решения дифференциального включения*

$$\dot{x} \in \mathcal{U}_*(t, x) + v(t), \quad x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}[t],$$

удовлетворяют включению $x(t) \in \mathcal{W}[t], \tau \le t \le t_1$, и, следовательно, достигают целевого множества $\mathcal{M} : x(t_1) \in \mathcal{M}$ при любом возмущении $v(t)$.

Таким образом синтезирующая стратегия $\mathcal{U}_*(t, x)$ разрешает задачу целевого синтеза управлений при неопределенности. Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t, x)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{U}_*(t, x)$, то есть обеспечивающих выполнение теоремы (4.3), находится стратегия "экстремального прицеливания задаваемая условиями

$$\mathcal{U}_e(t, x) = \partial_l k(t, -l) = \mathrm{argmin}\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{P}(t)\}. \tag{26}$$

Здесь $\partial_l k$ — субдифференциал функции $k(t, l)$ по переменной l, $k(t, l) = \rho(l \mid \mathcal{P}(t)), l^0 = l^0(t, x) \ne 0$ — максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{W}[\tau]) = \max\{(l, x) - \rho(l \mid \mathcal{W}[\tau]) \mid (l, l) \le 1\}, \tag{27}$$

причем $l^0(t, x) = 0$, если $h_+(x, \mathcal{W}[\tau)) = 0$.

Как видно для поиска гарантирующей стратегии достаточно знать лишь сечения $\mathcal{W}[t]$ функции цены $\mathcal{V}(t, x)$. Поскольку интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби, как правило, очень нетривиально, будем использовать аппроксимации сечения функции цены вместо самой функции. Таким образом сведем задачу к задаче поиска аппроксимаций альтернированного интеграла Понтрягина.

5 Эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипосоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{ x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{28}$$

где $Q > 0$.

Приведем для начала основные утверждения эллипсоидального исчисления, необходимые в дальнейшем. Все эти результаты подробно описаны в [2].

Теорема 5.1. *Пусть $\mathcal{E}_1(a_1, Q_1), \mathcal{E}_2(a_2, Q_2)$ — пара невырожденных эллисоидов. Рассмотрим семейства матриц:*

- $Q(p)$ — *параметрическое семейство матриц*

  $$Q(p) = (1 + p^{-1})Q_1 + (1 + p)Q_2,$$
  $$p \in \Pi^+ = \left[\lambda_{\min}^{1/2}, \lambda_{\max}^{1/2}\right]$$

  где $\lambda_{\min} > 0, \lambda_{\max} < \infty$ — относительные собственные значения пары матриц Q_1, Q_2, или, иначе, корни уравнения

  $$\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0.$$

  Обозначим также

  $$\Pi^- = \Pi^+ \cap (1, \lambda_{\min})$$

- $Q_+[S], Q_-[S]$ — *параметрические семейства матриц:*

  $$Q_+[S] = S^{-1}[(SQ_1S^T)^{1/2} + (SQ_2S^T)^{1/2}]^2 S^{T^{-1}},$$
  $$Q_+[S] = S^{-1}[(SQ_1S^T)^{1/2} - (SQ_2S^T)^{1/2}]^2 S^{T^{-1}},$$

  где

  $$S \in \Sigma = S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : S^T = S, |S| \neq 0.$$

Для этих семейств справедливы следующие включения:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)), \quad \forall p \in \Pi^+ \tag{29}$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]), \quad \forall S \in \Sigma \tag{30}$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]), \quad \forall S \in \Sigma \tag{31}$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)), \quad \forall p \in \Pi^- \tag{32}$$

При этом имеют место следующие точные представления:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \bigcap \left\{\mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)), \forall p \in \Pi^+\right\} \tag{33}$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \bigcup \{\mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]), \forall S \in \Sigma\} \tag{34}$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 = \bigcap \{\mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]), \forall S \in \Sigma\} \tag{35}$$

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 = \overline{\bigcup \{\mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)), \forall p \in \Pi^-\}} \tag{36}$$

Более того представляется возможным доказать следующее утверждение(См. [2]), позволяющее строить наиболее "точные"внутренние и внешние оценки для суммы и разности двух эллипсоидов.

Теорема 5.2.

- *Пусть* $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$, *тогда существует значение параметра* $p \in \Pi^+$ *такое, что*

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q(p)) \subseteq \mathcal{E}. \tag{37}$$

- *Пусть* $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}$, *тогда существует матрица* $S \in \Sigma$ *такая, что*

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 + a_2, Q_+[S]) \supseteq \mathcal{E}. \tag{38}$$

- *Пусть* $\mathrm{int}(\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2) \neq \varnothing$ *и* $\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}$, *тогда существует значение параметра* $p \in \Pi^-$ *такое, что*

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q(-p)) \supseteq \mathcal{E}. \tag{39}$$

- *Пусть* $\mathrm{int}(\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2) \neq \varnothing$ *и* $\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$, *тогда существует матрица* $S \in \Sigma$ *такая, что*

$$\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}(a_1 - a_2, Q_-[S]) \subseteq \mathcal{E}. \tag{40}$$

Отправной точкой для построения оценок множества разрешимости является тот факт, что функция $\mathcal{W}[t]$ в условиях невырожденности предположения (2.1) является решением эволюционного уравнения.

Теорема 5.3. *Многозначная функция* $\mathcal{W}[t]$ *удовлетворяет при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h_+ \big(\mathcal{W}[t-\sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma\mathcal{E}(q(t), Q(t))\big) = 0, \quad \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}. \tag{41}$$

и это решение максимально по включению относительно всех других решений этого уравнения.

При этом мы будем заинтересованы именно во внутренних аппроксимациях множества разрешимости, так как построение управления по схеме описанной в следующем разделе, "удерживающее"траекторию внутри такой аппроксимации будет гарантировать попадание в целевое множество. Поэтому будем искать максимальное по включению эллипсоидальное решение (41). В связи с этим справедлива следующая

Теорема 5.4. *Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:*

$$\dot{x^*} = p(t) + q(t), \tag{42}$$

а также

$$\begin{gathered}\dot{X_-} = \pi(t)X_- + \pi^{-1}(t)Q(t)- \\ -H^{-1}(t)[(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2}+ \\ +(H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}]H^{T^{-1}}(t),\end{gathered} \tag{43}$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M.$$

является решением (41)*. Здесь функции $\pi(t) > 0$ и $H(t) = H^T(t) > 0$ выступают в качестве параметров.*

При этом для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ сущетсвуют функции $\pi(t), H(t)$ такие, что

$$\rho(l \mid \mathcal{W}[t]) = \rho(l \mid \mathcal{E}(x^*, X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot)))) \tag{44}$$

что означает, что построенный эллипсоид $\mathcal{E}$ является максимальным по включению решением (41)*.*

6 Эллипсоидальный синтез управлений

Следуя предыдущим разделам, для вычисления стратегии управления требуется найти множество разрешимости $\mathcal{W}[\cdot]$, определить значение функции цены $\mathcal{V}(t,x) = d^2(x(t), \mathcal{W}(t))$ и её градиент, решить задачу (27). Для множеств произвольной формы все эти задачи, вообще говоря, представляют большую сложность. Поэтому основная идея эллипсоидального синтеза состоит в замене $\mathcal{W}[t]$ некоторой его внутренней эллипсоидальной аппроксимацией, и применении вышеописанной схемы к ней. Это даёт:

$$\mathcal{U}_-(t,x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если} x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если} x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases} \tag{45}$$

где $l^0 = l^0(t,x)$ — единичный вектор, максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{E}_-[t]) = (l^0, x) - \rho(l^0 \mid \mathcal{E}_-[t]) = \max\{(l,x) - \rho(l \mid \mathcal{E}_-[t]) \mid \|l\| \le 1\}. \tag{46}$$

Последняя задача теперь может быть решена однозначно. Если

$$s^0 = \mathrm{argmin}\{\|x - s\| : s \in \mathcal{E}_-[t], x = x(t)\}, \tag{47}$$

то можно положить $l^0 = k(x(t) - s^0), k > 0$, так что вектор l^0 будет градиентом функции $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ при фиксированном t.

Лемма 6.1. *Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент*

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))/\partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*. \tag{48}$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*))^{-1} - 1.$$

При этом понятно, что при известных x^*, X параметр λ может быть представлен единственным образом как $\lambda = \lambda(x)$.

Выражение для управления (45) является следствием следующего факта:

Лемма 6.2. *Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи*

$$\min\{l^0, u) \mid u \in mathcalE(p, P))\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

Список литературы

[1] Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, *Матем. сб.*, 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330

[2] Kurzhanki A. B., Vâlyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, *Boston: Birkhäuser*, 1996