Гамильтонов формализм для задачи гарантированного синтеза управлений при геометрической неопределенности

студент 4 курса Е. В. Гуров
научный руководитель — академик, д.ф.-м.н., проф. А. Б. Куржанский

Кафедра системного анализа
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Постановка задачи

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t)$$

с непрерывными по t матрицами $A(t), B(t), C(t)$.

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы
- $u \in \mathbb{R}^p$ — управление
- $v \in \mathbb{R}^q$ — некоторое неизвестное внешнее возмущение

При этом достоверно известны "геометрические" ограничения на помеху, а также на управление:

$$v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad u(t) \in \mathcal{P}(t).$$

Здесь $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — заданные многозначные функции с выпуклыми компактными значениями, непрерывно зависящие от времени. Задано также компактное целевое множество $\mathcal{M} \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$.

Задача синтеза управления при неопределенности состоит в отыскании множества разрешимости $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и позиционной стратегии управления $u = \mathcal{U}(t, x)$ таких, что все решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t,x) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

выпущенные из любой начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали бы целевого множества $\mathcal{M}$ в момент времени t_1 при любом внешнем неизвестном возмущени $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$.

Редукция системы

Приведем вначале систему к более простому виду

$$\dot{x} = u + v$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \quad v \in \mathcal{Q}_0(t),$$

где $\mathcal{P}_0(t) = G(t_1, t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0 = G(t_1, t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $G(t, t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения. Для этого сделаем замену $x(t) = G(t_1, t)x(t)$.

Множество разрешимости максиминного типа

Определение

Множеством разрешимости максиминного типа назовем множество

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{ x : \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x \right\},$$

где $d^2(x.\mathcal{M}) = \min_z \{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ и $x(t_1)$ — конец в момент t_1 траектории $x(t)$ упрощенной системы, выпущенной из положения $x(\tau) = x$.

Для $W[t]$ справедливо представление:

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt \right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt, \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

Построение альтернированного интеграла Понтрягина

На первом шаге, начав с момента t_1, найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие вышесказанного будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int\limits_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-} \int\limits_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau.$$

Продолжая последовательную процедуру, имеем

$$W(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, t_1 - \sigma_1, W[t_1 - \sigma_1]) = \left(W[t_1 - \sigma_1] + \int\limits_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau)) d\tau \right) \dot{-}$$

$$\dot{-} \int\limits_{t_1 - \sigma_1 - \sigma_2}^{t_1 - \sigma_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau$$

и, в итоге, получаем

$$W(t, t + \sigma_k, W(t + \sigma_k, t + \sigma_k + \sigma_{k-1}, \ldots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}))) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k).$$

Лемма

Существует хаусдорфов предел $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\left(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})\right) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i : i = 1, \ldots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k.

Важным свойством альтернированного инетграла является следующее:

Теорема

Множество разрешимости $\mathcal{W}[t]$ может быть представлено как

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Альтернированный интеграл второго рода

Определение

Множество разрешимости $W_{-}[\tau]$ минимаксоного типа называется следующая совокупность векторов

$$W_{-}[\tau] = W_{-}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \leq 0 \mid x(\tau) = x\}.$$

Для него аналогичным образом строится альтернированный интеграл второго рода

$$\mathcal{I}_{-}(t, t_1, \mathcal{M}).$$

При этом оказывается, что альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода:

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}_{-}(t, t_1, \mathcal{M}).$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Введем *функцию цены*

$$\mathcal{V} = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t,x) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}},\ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\},$$

где

$$\mathcal{I}(t,x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ — множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t,x) + \mathcal{Q}(t), \quad x(\tau) = x,$$

порожденных заданной стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.
В таком случае для функции $\mathcal{V}(t,x)$ можно составить следующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_{u} \max_{v} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0, \quad u \in \mathcal{P}(t),\ v \in \mathcal{Q}(t),$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}).$$

Последовательный максимин

Перейдем к другой интерпретации функции цены $\mathcal{V}(t,x)$. Рассмотрим интервал $\tau \le t \le t_1$ и построим его разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Для данного разбиения рассмотрим рекуррентные соотношения

$$V_k^+(t_1-\sigma_1,x) = \left\{\max_v \min_u d^2(x(t_1),\mathcal{M}) \mid t_1-\sigma_1 \le t \le t_1,\ x(t_1-\sigma_1)=x\right\},$$

$$V_k^+(t_1-\sigma_1-\sigma_2,x) = \left\{\max_v \min_u V_k^+(t_1-\sigma_1, x(t_1-\sigma_1)) \mid \right.$$
$$\left. \mid t_1-\sigma_1-\sigma_2 \le t \le t_1-\sigma_1,\ x(t_1-\sigma_1-\sigma_2)=x\right\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau = t_1 - \sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i$:

$$V_k^+(\tau,x) = \left\{\max_v \min_u V_k^+(\tau+\sigma_k, x(\tau+\sigma_k)) \mid \tau \le t \le \tau+\sigma_k,\ x(\tau)=x\right\},$$

где $v(t)\in\mathcal{Q}(t), u(t)\in\mathcal{P}(t)$ почти всюду на соответствующих интервалах.

Лемма

При

$$\max_{i=1,\dots,k}\{\sigma_i\}, \quad k\to\infty, \quad \sum_{i=1}^{k}\sigma_i = t_1-\tau,$$

существует поточечный предел

$$V^+(\tau,x)=\lim_{k\to\infty}V_k^+(\tau,x),$$

не зависящий от выбора разбиения Σ_k.

Лемма

Справедливо равенство

$$V^+(\tau,x)=d^2(x,\mathcal{I}(\tau,t_1,\mathcal{M})),$$

Последовательный минимакс

Теперь рассмотрим задачу аналогичную предыдущей. Для произвольного Σ_k, построим рекуррентные соотношения

$$V_k^-(t_1-\sigma_1,x)=\left\{\min_u \max_v d^2(x(t_1),\mathcal{M}) \mid t_1-\sigma_1\le t\le t_1,\ x(t_1-\sigma_1)=x\right\},$$

$$V_k^-(t_1-\sigma_1-\sigma_2,x)=\left\{\min_u \max_v V_k^-(t_1-\sigma_1,x(t_1-\sigma_1)) \mid \right.$$
$$\left. \mid t_1-\sigma_1-\sigma_2\le t\le t_1-\sigma_1, x(t_1-\sigma_1-\sigma_2)=x\right\},$$

и так далее. Наконец в точке $\tau=t_1-\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i$:

$$V_k^-(\tau,x)=\left\{\min_u \max_v V_k^-(\tau+\sigma_k,x(\tau+\sigma_k)) \mid \tau\le t\le\tau+\sigma_k,\ x(\tau)=x\right\}.$$

Лемма

При

$$\max_{i=1,\dots,k}\{\sigma_i\},\quad k\to\infty,\quad \sum_{i=1}^{k}\sigma_i = t_1-\tau,$$

существует поточечный предел

$$V^-(\tau,x)=\lim_{k\to\infty}V_k^-(\tau,x),$$

не зависящий от выбора разбиения Σ_k.

Лемма

Справедливо соотношение:

$$V^-(\tau,x)=d^2(x,\mathcal{I}_-(\tau,t_1,\mathcal{M})),$$

Связь с функцией цены

Теорема

Последовательные максимин $V^{+}(\tau, x)$ и минимакс V^{-} равны и совпадают с функцией цены $\mathcal{V}(\tau, x)$:

$$V^{+}(\tau, x) \equiv V^{-}(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}[t]).$$

Эта теорема даёт подход к построению управлений. Получается, что для минимизации функции цены необходимо строить управление, минимизирующее расстояние до множества разрешимости $\mathcal{W}[t]$.

Аналитическое выражение для управлений

Вернемся к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v \right) = 0$$

Если решение уравнения удается найти, то гарантирующая стратегия управления находится следующим образом:

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u \right) : u \in \mathcal{P}(t) \right\},$$

если градиент $\partial \mathcal{V} / \partial x$ существует в точке (t, x). Или в общем случае

$$\mathcal{U}_*(t, x) = \left\{ u : \max_v \{ dh_+^2(x, \mathcal{W}[t])/dt : v \in \mathcal{Q}(t) \} \leq 0 \right\}.$$

Эллипсоидальные аппроксимации множества разрешимости

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = u + v$$

с эллипсоидальными ограничениями

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M).$$

Здесь функции $p(t), q(t), P(t), Q(t)$ предполагаются заданными и непрерывными. Вектор m и матрица M фиксированы. Эллипсоиды задаются своим центром и матрицей следующим образом:

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{x : (x - a, Q^{-1}(x - a)) \leq 1\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q > 0$.

Эволюционное уравнение

Теорема

Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению

$$\lim_{\sigma\to 0} \sigma^{-1} h_+ \left(\mathcal{W}[t-\sigma], (\mathcal{W}[t] - \sigma\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma\mathcal{E}(q(t), Q(t))\right) = 0,$$

$$\mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}.$$

и это решение максимально по включению относительно всех других решений этого уравнения.

Будем искать эллипсоидальные решения этого уравнения. С помощью формул внутренней аппроксимации для геометрической суммы и разности эллипсоидов отсюда приходим к дифференциальным уравнениям для центра и матрицы искомой внутренней эллипсоидальной оценки.

Уравнения для внутренней оценки

Эллипсоидозначная функция $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X_-(t))$, определяемая дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x^*} = p(t) + q(t),$$

а также

$$\dot{X_-} = \pi(t)X_- + \pi^{-1}(t)Q(t) -$$
$$-H^{-1}(t)[(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2} +$$
$$+(H(t)X_-(t)H^T(t))^{1/2}(H(t)P(t)H^T(t))^{1/2}]H^{T^{-1}}(t),$$

с краевыми условиями соответственно

$$x(t_1) = m, \quad X_-(t_1) = M.$$

является решением вышеупомянутого эволюционного уравнения.

Эллипсоидальный синтез управлений

Задача минимизации расстояния до множества разрешимости, в случае замены этого множества некоторой его внутренней достаточно хорошей эллипсоидальной оценкой, теперь может быть решена однозначно.
Рассмотрим невырожденный эллипсоид $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$ и вектор $x \notin \mathcal{E}(x^*, Q)$. Тогда градиент

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))/\partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = \frac{x - s^0}{\|x - s^0\|}, \quad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*) + x^*.$$

Здесь множитель лагранжа $\lambda > 0$ — единственный корень уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = ((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - x^*))^{-1} - 1.$$

Выражения для эллипсоидального управления

Лемма

Пусть задан эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$. Тогда минимизатор u^* задачи

$$\min\{(l^0, u) \mid u \in \mathcal{E}(p, P))\} = (l, u^*), \quad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

Отсюда получаем общую формулу для гарантирующей стратегии управления:

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

Численный пример алгоритма

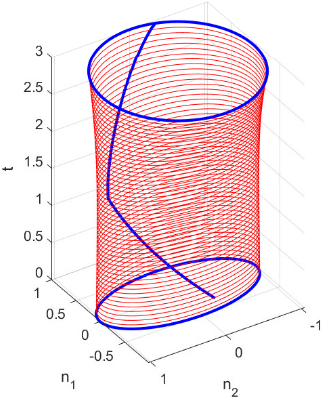
Рассмотрим простой пример:

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x0 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}, v(t) = \begin{bmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}.$$

Видно, что траектория, упираясь в границу эллипсоидальной трубки, дальше идет по этой границе, и в итоге приходит в целевое множество.



Детали численного метода

- Функции $x^*(t), X_-(t)$ для центра и матрицы конфигурации оценки ищутся с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка.
- Управление выбирается не в виде многозначной функции, а однозначно в виде:

$$u(t,x) = \begin{cases} p(t), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases}$$

- Траектория ищется итерационно из разностного уравнения:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = h(u(t_k, x(t_k)) + v(t_k)), \quad h = t_{k+1} - t_k.$$

- Значение лагранжевого множителя λ также ищется итерационно среди $\lambda > 0$ в силу свойств функции f.

Список литературы

Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб., 1980, том 112(154), номер 3(7), 307-330