



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет о практическом задании по курсу “Оптимальное
управление”

«Решение линейной задачи быстродействия»

Студент 315 группы
Е. В. Гуров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{X}_0 - начальное множество значений фазового вектора, \mathcal{X}_1 - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстрогодействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества \mathcal{X}_0 , может попасть в некоторую точку множества \mathcal{X}_1 .

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \quad p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{X}_0 = x_0;$$

$$\mathcal{X}_1 = (\text{квадрат со стороной } r_1 > 0, \text{ с центром в точке } x_1) + \\ (\text{эллипсоид с матрицей конфигурации } Q = Q^T > 0 \text{ и центром в нуле}).$$

Теоретическая часть

Принцип максимума Понтрягина:

Основным утверждением, которым мы будем пользоваться при поиске оптимального управления, является принцип максимума Понтрягина для линейной задачи быстрогодействия (см.[1]). Он дает необходимые условия оптимальности для пары (u, x) - управления и соответствующей ему траектории системы.

Теорема. (Принцип максимума Понтрягина)

Пусть дана линейная задача быстрогодействия:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \quad x(t_1) \in \mathcal{X}_1$$

$$t_1 - t_0 \rightarrow \min$$

Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ - оптимальная пара. Тогда существует $\psi(t) \in \mathbb{R}^2$ - сопряженная переменная, являющаяся решением сопряженной задачи:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t), \quad \psi(t) \neq 0$$

и при этом выполнено:

- 1) Принцип максимума: $\langle \psi(t), B(t)u^*(t) \rangle = \rho(B(t)\mathcal{P}(t), \psi(t))$
- 2) Условие трансверсальности на левом конце: $\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\mathcal{X}_0, \psi(t_0))$
- 3) Условие трансверсальности на правом конце: $\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(\mathcal{X}_1, -\psi(t_1))$.

Вычисление опорных функций для множества начальных состояний, целевого множества и множества допустимых управлений:

Перечислим свойства, необходимые для вычисления требуемых опорных функций.

Свойство 1° (положительная однородность по первому аргументу):

$$\rho(\alpha X, \psi) = \alpha \cdot \rho(X, \psi), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in \mathbb{E}^n$$

Свойство 2° (аддитивность по первому аргументу):

$$\rho(X_1 + X_2, \psi) = \rho(X_1, \psi) + \rho(X_2, \psi)$$

Свойство 3° (опорная функция линейно преобразованного множества):

пусть D - квадратная матрица n - го порядка, тогда

$$\rho(DX, \psi) = \rho(X, D^T \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

Свойство 4° (совпадение опорных функций множества и его наименьшей выпуклой оболочки):

$$\rho(X, \psi) = \rho(\text{conv}(X), \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

Перейдем теперь к подсчету функций множеств, фигурирующих в Принципе максимума.

Множество \mathcal{X}_0 :

Опорная функция множества начальных состояний, состоящего из единственной точки x_0 находится очевидно.

$$\rho(\mathcal{X}_0, \psi) = \langle x_0, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Множество \mathcal{P} :

Пользуясь свойством 4, немедленно получаем опорную функцию множества допустимых управлений.

$$\rho(\mathcal{P}, \psi) = \rho(\text{conv}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}), \psi) = \rho(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \psi) = \max_i \langle p_i, \psi \rangle, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

В формулировке Принципа максимума Понтрягина фигурирует опорная функция множества $B\mathcal{P}$. Для перехода к опорной функции такого множества воспользуемся свойством 3 и получим:

$$\rho(B\mathcal{P}, \psi) = \rho(\mathcal{P}, B^T \psi) = \max_i \langle B^T p_i, \psi \rangle, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Множество \mathcal{X}_1 :

Пользуясь свойствами 1, 2, 3 найдем опорную функцию целевого множества.

1) Опорная функция квадрата:

$$\rho(X_{r_1}, \psi) = \rho(r_1 X_1, \psi) = r_1 \cdot \rho(X_1, \psi) = r_1 \cdot \max_{x \in X_1} \langle x, \psi \rangle = r_1 \cdot \max_{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1} (x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2) = r_1 (|\psi_1| + |\psi_2|)$$

2) Опорная функция эллипса с заданной матрицей конфигурации $Q = Q^T > 0$ и центром в нуле:

$$\rho(E_Q, \psi) = \rho(Q * B_1, \psi) = \rho(B_1, Q^T \psi) = \rho(B_1, Q \psi) = \|Q \psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Здесь B_1 - это шар радиуса 1 с центром в точке 0. Опорная функция такого множества представляется в виде:

$$\rho(B_1, \psi) = \max_{x \in B} \langle x, \psi \rangle = \left\langle \frac{\psi}{\|\psi\|}, \psi \right\rangle = \|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

3) Множество \mathcal{X}_1 представляет собой сумму трех множеств: точки x_1 , квадрата со стороной r_1 и центром в нуле и эллипса с матрицей конфигурации $Q = Q^T > 0$ и центром в нуле. Его опорная функция представляется в виде:

$$\rho(\mathcal{X}_1, \psi) = \rho(x_1, \psi) + \rho(X_{r_1}, \psi) + \rho(E_Q, \psi) = \langle x_1, \psi \rangle + r_1(|\psi_1| + |\psi_2|) + \|Q\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Описание алгоритма работы программы:

Алгоритм поиска оптимальных управлений основывается на переборе различных $u \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих Принципу максимума Понтрягина, то есть потенциально оптимальных. Таким образом ПМП позволяет значительно сузить границы рассматриваемых управлений и уменьшить вычислительную сложность задачи. При этом из принципа максимума следует, что каждой сопряженной переменной соответствует некоторое управление u^* , потенциально оптимальное. Поэтому, перебирая начальные условия в сопряженной задаче, мы автоматически будем перебирать управления u^* , и решив для каждого из них систему ОДУ из условия задачи, сможем выбрать оптимальное в смысле времени.

1. Перебираем начальные условия $\psi(t_0)$ в сопряженной задаче. Для систематизации перебора имеет смысл нормировать начальные условия и выбирать их на единичной окружности, так как $\text{Argmax}_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \langle u(t), B^T \psi(t) \rangle = \text{Argmax}_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \langle u(t), B^T(\alpha \psi(t)) \rangle, \quad \forall \alpha > 0$.
2. Для выбранного начального условия $\psi(t_0)$ найдем $\psi(t)$ - решение сопряженной задачи.
3. С помощью опорной функции множества допустимых управлений по полученной $\psi(t)$ из условия максимума найдем $u^*(t)$ как опорный вектор.
4. Для найденного $u^*(t)$ с помощью функции ode45 решим систему ОДУ из условия задачи. Окончанием процесса интегрирования будет достижение максимального наперед заданного T_{max} или целевого множества.
5. Для траекторий, достигших целевого множества, выберем решение с наименьшим временем.

Комментарий к численному методу.

Важно отметить особенность реализации проверки условия попадания фазовой траектории в целевое множество. В основе нее лежит тот факт, что функция, сопряженная к опорной функции выпуклого множества - это характеристическая функция этого множества (см.[2]). Она принимает значение 0 внутри множества и $+\infty$ вне его.

Определение. Пусть задана функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Преобразование Юнга-Фенхеля функции f , или функцией сопряженной к f , называется функция, определенная формулой:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x))$$

Отметим, что если X - линейное нормированное пространство, то сопряженная функция f^* определяется на сопряженном пространстве X^* линейных непрерывных функционалов x^*

на X . В данном случае \mathbb{R}^2 - гильбертово пространство, и X изоморфно X^* .

В программной реализации супремум из определения сопряженной функции ищется с помощью matlab-функции “fminunc”, которая минимизирует функцию-аргумент безусловно, то есть на всем пространстве. Для уточнения её работы, квадрат, являющийся слагаемым в целевом множестве, аппроксимируется шаром по норме p . При достаточно больших p аппроксимация является довольно точной.

Опорная функция единичного шара по норме p является сопряженной нормой к p -норме, то есть q -нормой, где q ищется из соотношения:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда опорная функция целевого множества примет вид:

$$\rho(\mathcal{X}_1, \psi) = \langle x_1, \psi \rangle + r_1 \cdot \|\psi\|_q + \|Q\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Погрешность условия трансверсальности:

Так как внутри алгоритма условие трансверсальности на правом конце при отборе оптимальных пар не проверяется, оно может не выполняться в точности. Поэтому отметим погрешность этого условия, которую будем считать как абсолютное значение разности:

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle - \rho(\mathcal{X}_1, -\psi(t_1))$$

Здесь $\psi(t_1)$ - вектор сопряженной переменной в момент попадания фазовой траектории в целевое множество.

Параметры численного метода:

Перечислим параметры программы, которые можно изменять для уточнения конечного результата.

- absTol, relTol - абсолютная и относительная ошибки для решателя ode45.
- pNorm - норма, по которой квадрат, являющийся слагаемым в целевом множестве, аппроксимируется шаром.
- number of iterations - количество фазовых траекторий, которые будут выпущены из множества \mathcal{X}_0 .
- maximum integration time - максимальное время интегрирования для каждой траектории. Если множество не достигнуто имеет смысл увеличить время интегрирования.

Примеры работы программы для разных параметров задачи.

Пример 1.

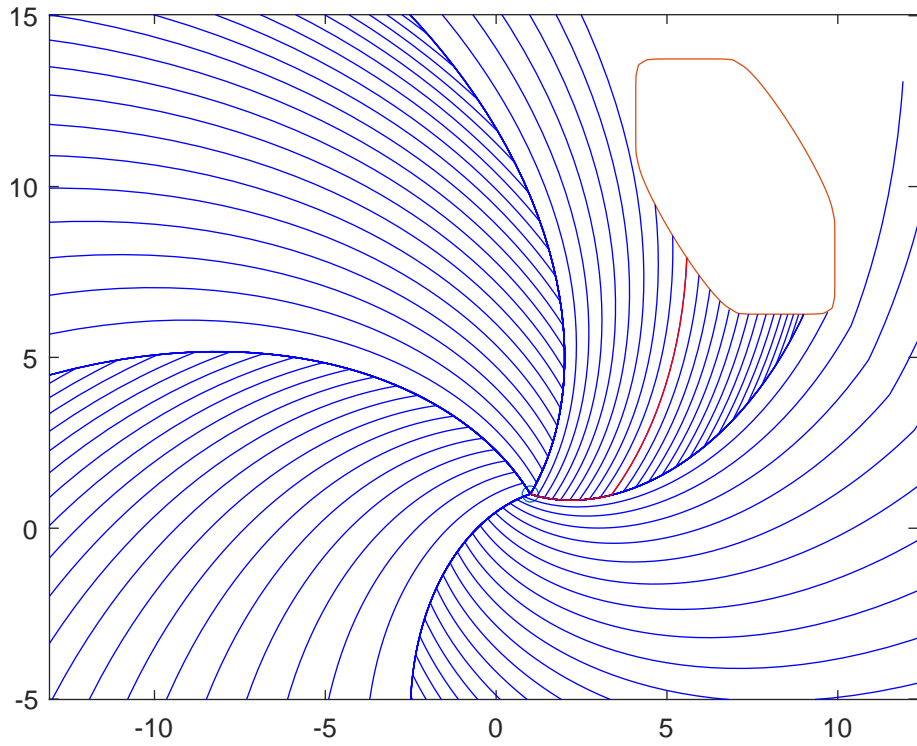
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 3$$

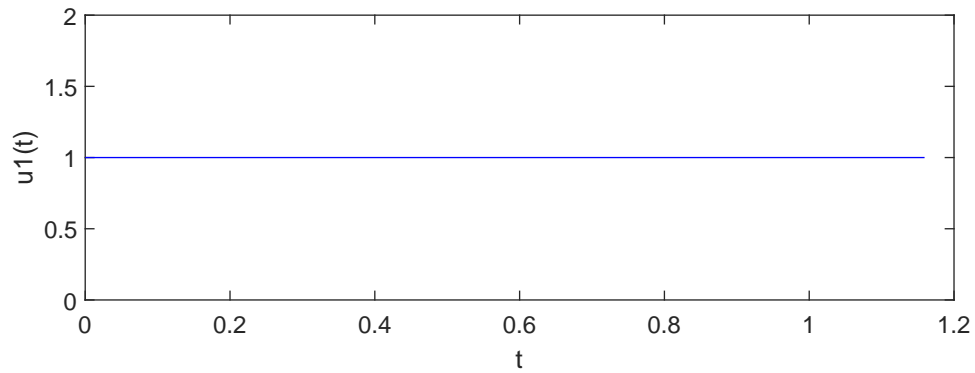
$t_0 = 0$, absTol = 1e-7, relTol = 1e-6, pNorm = 10, number of iterations = 100

maximum integration time = 2

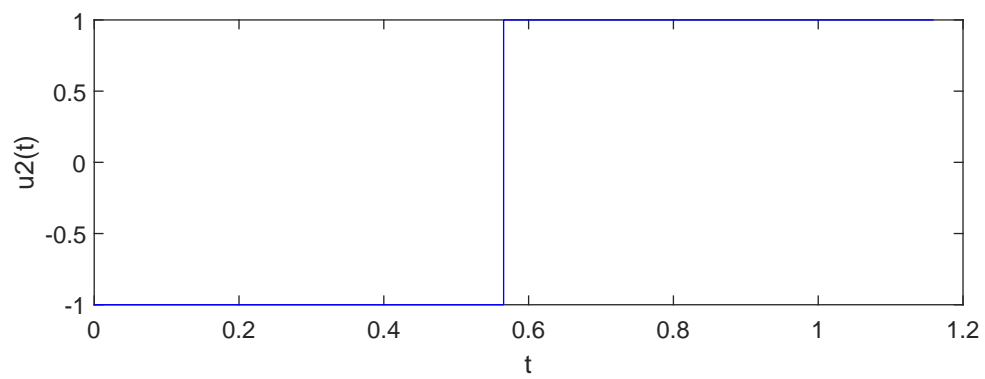
Результат: Оптимальное время : 1.159331; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.000059



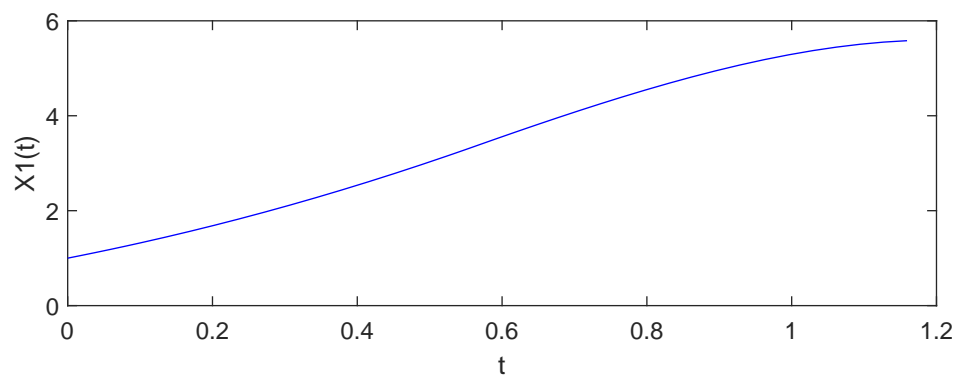
Траектории системы в фазовом пространстве.



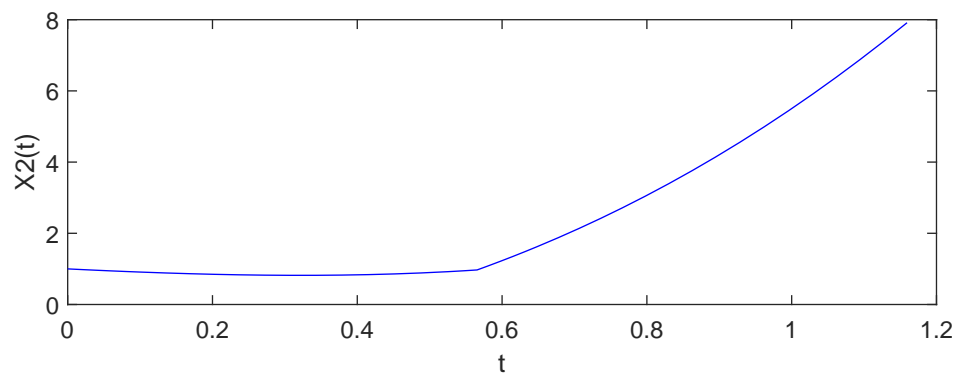
Первая компонента оптимального управления $u_1(t)$.



Вторая компонента оптимального управления $u_2(t)$.



Первая компонента оптимальной траектории $x_1(t)$.



Вторая компонента оптимальной траектории $x_2(t)$.

Пример 2.

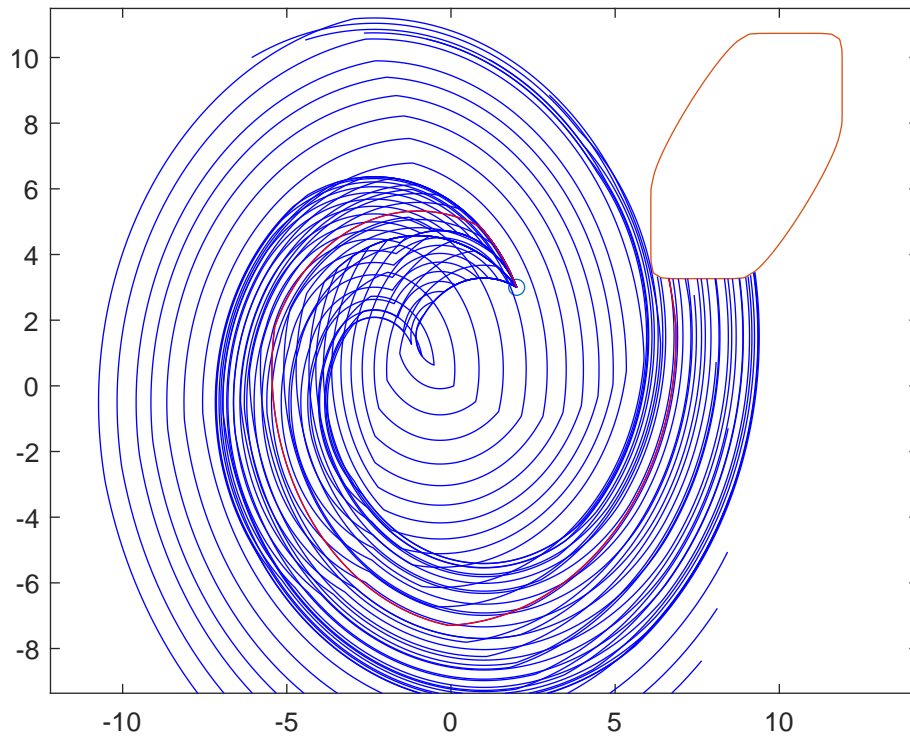
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 3$$

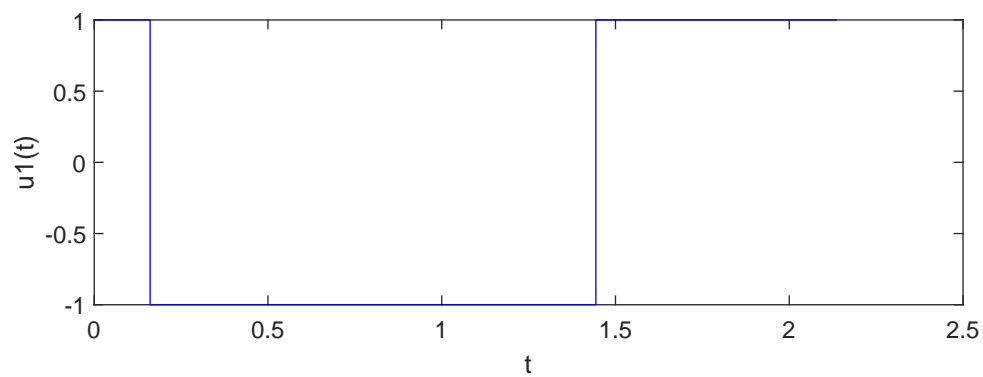
$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations} = 40$$

$$\text{maximum integration time} = 4$$

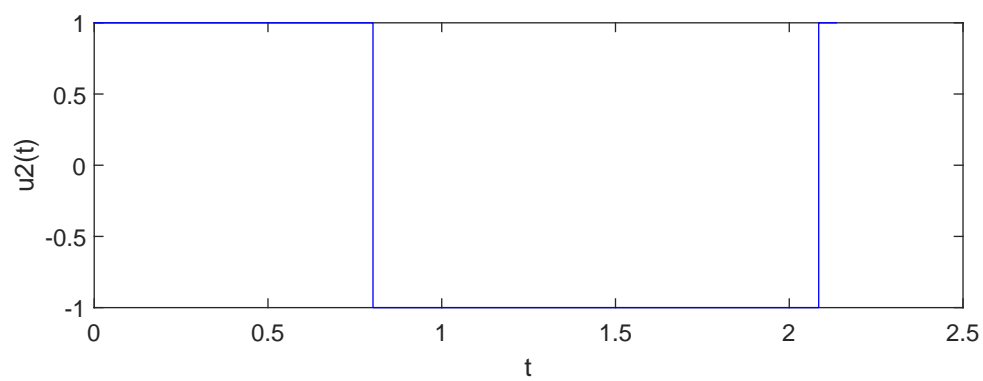
Результат: Оптимальное время : 2.137641; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.572102



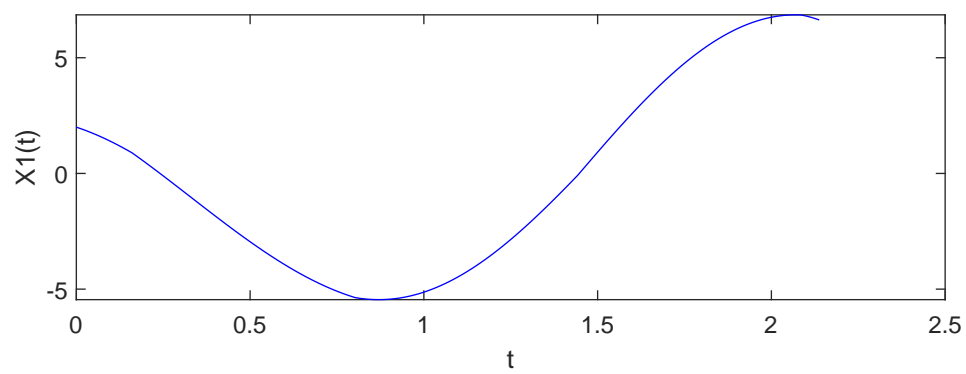
Траектории системы в фазовом пространстве.



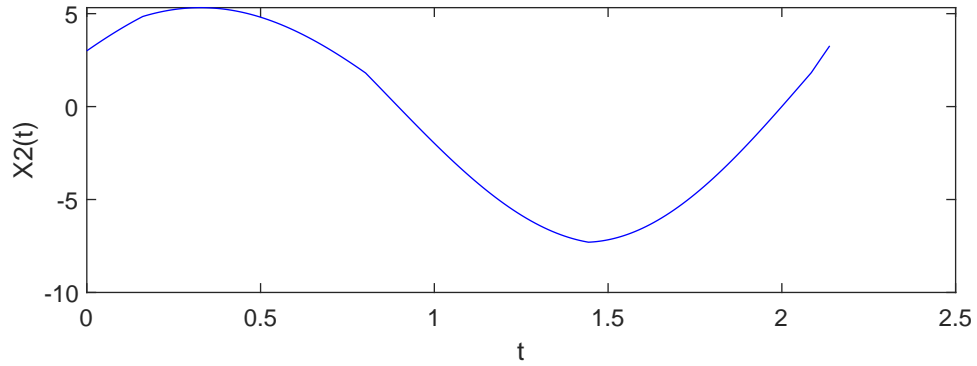
Первая компонента оптимального управления $u_1(t)$.



Вторая компонента оптимального управления $u_2(t)$.



Первая компонента оптимальной траектории $x_1(t)$.



Вторая компонента оптимальной траектории $x_2(t)$.

Пример 3.

Данный пример иллюстрирует разрывность времени оптимального быстрогодействия относительно целевого множества.

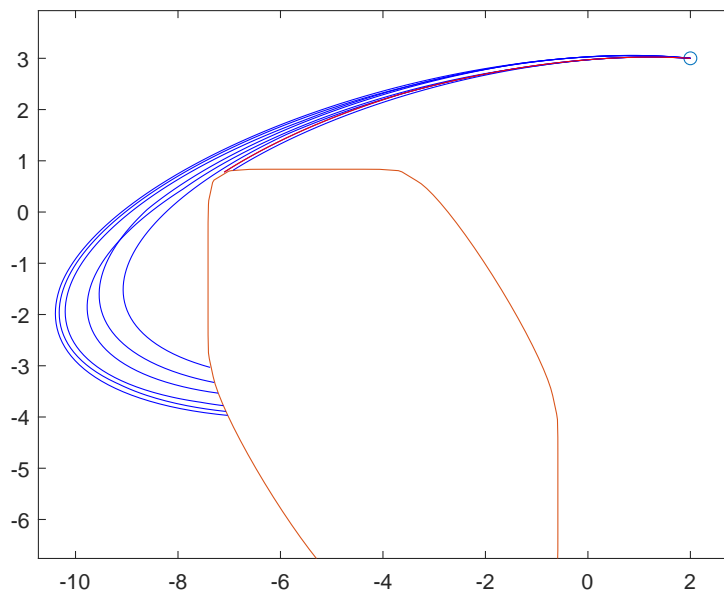
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3.4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 4$$

$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations} = 8$$

$$\text{maximum integration time} = 3$$

Результат: Оптимальное время : 0.683896; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.006446



Траектории системы при $x_1(2) = -3.4$.

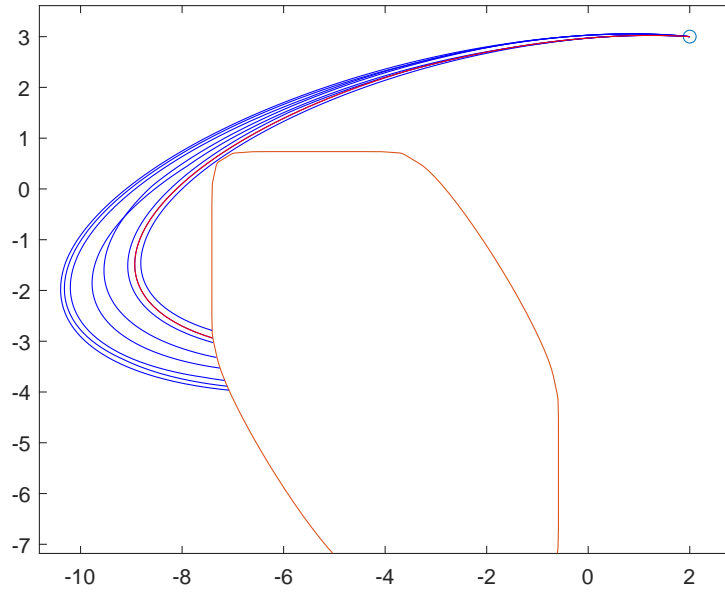
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3.5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 4$$

$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations} = 8$$

$$\text{maximum integration time} = 3$$

Результат: Оптимальное время : 1.388466; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.298559



Траектории системы при $x_1(2) = -3.5$.

Список литературы

- [1] Ю. Н. Киселев, С. Н. Аввакумов, М. В. Орлов Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2007
- [2] А. В. Арутюнов Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит Москва, 2014