



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчет о практическом задании по курсу “Оптимальное  
управление”

## «Решение линейной задачи быстродействия»

*Студент 315 группы*  
Е. В. Гуров

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

# Содержание

<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
Принцип максимума Понтрягина . . . . .	3
Вычисление опранных функций для множества начальных состояний, целевого множе- ства и множества допустимых управлений . . . . .	4
Описание алгоритма работы программы . . . . .	5
Комментарий к численному методу . . . . .	5
Погрешность условия трансверсальности . . . . .	6
Параметры численного метода . . . . .	6
<b>Примеры работы программы для разных параметров задачи.</b>	<b>7</b>
Пример 1 . . . . .	7
Пример 2 . . . . .	8
Пример 3(иллюстрация разрывности времени оптимального быстрогодействия) . . . . .	9
Пример 4(демонстрация улучшения результата, посредством изменения параметров чис- ленного метода) . . . . .	10
<b>Список литературы</b>	<b>11</b>

## Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ . На значения управляющих параметров  $u$  наложено ограничение:  $u \in \mathcal{P}$ . Пусть  $\mathcal{X}_0$  - начальное множество значений фазового вектора,  $\mathcal{X}_1$  - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время  $T > 0$ , за которое траектория системы, выпущенная в момент времени  $t_0$  из некоторой точки множества  $\mathcal{X}_0$ , может попасть в некоторую точку множества  $\mathcal{X}_1$ .

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \quad p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{X}_0 = x_0;$$

$$\mathcal{X}_1 = (\text{квадрат со стороной } r_1 > 0, \text{ с центром в точке } x_1) + \\ (\text{эллипсоид с матрицей конфигурации } Q = Q^T > 0 \text{ и центром в нуле}).$$

## Теоретическая часть

### Принцип максимума Понтрягина

Основным утверждением, которым мы будем пользоваться при поиске оптимального управления, является принцип максимума Понтрягина для линейной задачи быстродействия (см.[1]). Он дает необходимые условия оптимальности для пары  $(u, x)$  - управления и соответствующей ему траектории системы.

Пусть дана линейная задача быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), & t \in [t_0, t_1] \\ x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2 \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \quad x(t_1) \in \mathcal{X}_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим пару

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

где

1.  $u(t) \in \mathcal{P}$ , т.е.  $u(t)$  — допустимое управление, определенное на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , причем в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_1]$  значение  $u(t) \in \mathcal{P}$ .
2.  $x(t)$  — траектория, отвечающая управлению  $u(t)$ , т.е.  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t)$  для почти всех  $t \in [t_0, t_1]$ , и удовлетворяющая краевым условиям  $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$ ,  $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$ .

Будем говорить, что эта пара  $(x(t), u(t))$  удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке  $[t_0, t_1]$ , если существует такая  $\psi(t) \in \mathbb{R}^2$  - сопряженная переменная, являющаяся решением сопряженной задачи:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t), \quad \psi(t) \neq 0$$

что выполнены следующие три условия:

1. Условие максимума:  $\langle \psi(t), B(t)u(t) \rangle = \rho(B(t)P(t), \psi(t))$  для почти всех  $t \in [t_0, t_1]$

2. Условие трансверсальности на левом конце:  $\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\mathcal{X}_0, \psi(t_0))$
3. Условие трансверсальности на правом конце:  $\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(\mathcal{X}_1, -\psi(t_1))$ .

**Теорема 1 (Основная теорема линейной теории быстродействия)** Пусть

1.  $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1 \in \text{conv}(\mathbb{E}^n)$ ,
  2. Пара  $(x(t), u(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , решает линейную задачу быстродействия (1), т.е.
- $$u(t) \in \mathcal{P}, \quad x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \quad x(t_1) \in \mathcal{X}_1, \quad t_1 - t_0 = \min.$$

Тогда пара  $(x(t), u(t))$  удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке  $[t_0, t_1]$ .

## Вычисление опорных функций для множества начальных состояний, целевого множества и множества допустимых управлений

Перечислим свойства, необходимые для вычисления требуемых опорных функций

**Свойство 1°** (положительная однородность по первому аргументу):

$$\rho(\alpha X, \psi) = \alpha \cdot \rho(X, \psi), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in \mathbb{E}^n$$

**Свойство 2°** (аддитивность по первому аргументу):

$$\rho(X_1 + X_2, \psi) = \rho(X_1, \psi) + \rho(X_2, \psi)$$

**Свойство 3°** (опорная функция линейно преобразованного множества):  
 пусть  $D$  - квадратная матрица  $n$  - го порядка, тогда

$$\rho(DX, \psi) = \rho(X, D^T \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

**Свойство 4°** (совпадение опорных функций множества и его наименьшей выпуклой оболочки):

$$\rho(X, \psi) = \rho(\text{conv}(X), \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

Перейдем теперь к подсчету функций множеств, фигурирующих в Принципе максимума.

**Множество  $\mathcal{X}_0$ :**

Опорная функция множества начальных состояний, состоящего из единственной точки  $x_0$  находится очевидно.

$$\rho(\mathcal{X}_0, \psi) = \langle x_0, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

**Множество  $\mathcal{P}$ :**

Пользуясь свойством 4, немедленно получаем опорную функцию множества допустимых управлений.

$$\rho(\mathcal{P}, \psi) = \rho(\text{conv}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}), \psi) = \rho(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \psi) = \max_i \langle p_i, \psi \rangle, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

В формулировке Принципа максимума Понтрягина фигурирует опорная функция множества  $B\mathcal{P}$ . Для перехода к опорной функции такого множества воспользуемся свойством 3 и получим:

$$\rho(B\mathcal{P}, \psi) = \rho(\mathcal{P}, B^T \psi) = \max_i \langle B^T p_i, \psi \rangle, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

**Множество  $\mathcal{X}_1$ :**

Пользуясь свойствами 1, 2, 3 найдем опорную функцию целевого множества.

1)Опорная функция квадрата:

$$\rho(X_{r_1}, \psi) = \rho(r_1 X_1, \psi) = r_1 \cdot \rho(X_1, \psi) = r_1 \cdot \max_{x \in X_1} \langle x, \psi \rangle = r_1 \cdot \max_{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1} (x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2) = r_1 (|\psi_1| + |\psi_2|)$$

2)Опорная функция эллипса с заданной матрицей конфигурации  $Q = Q^T > 0$  и центром в нуле:

$$\rho(E_Q, \psi) = \rho(Q * B_1, \psi) = \rho(B_1, Q^T \psi) = \rho(B_1, Q \psi) = \|Q \psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

Здесь  $B_1$  - это шар радиуса 1 с центром в точке 0. Опорная функция такого множества представляется в виде:

$$\rho(B_1, \psi) = \max_{x \in B} \langle x, \psi \rangle = \langle \frac{\psi}{\|\psi\|}, \psi \rangle = \|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

3)Множество  $\mathcal{X}_1$  представляет собой сумму трех множеств: точки  $x_1$ , квадрата со стороной  $r_1$  и центром в нуле и эллипса с матрицей конфигурации  $Q = Q^T > 0$  и центром в нуле. Его опорная функция представляется в виде:

$$\rho(\mathcal{X}_1, \psi) = \rho(x_1, \psi) + \rho(X_{r_1}, \psi) + \rho(E_Q, \psi) = \langle x_1, \psi \rangle + r_1 (|\psi_1| + |\psi_2|) + \|Q \psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

## Описание алгоритма работы программы

Алгоритм поиска оптимальных управлений основывается на переборе различных  $u \in \mathcal{P}$ , удовлетворяющих Принципу максимума Понтрягина, то есть потенциально оптимальных. Таким образом ПМП позволяет значительно сузить границы рассматриваемых управлений и уменьшить вычислительную сложность задачи. При этом из принципа максимума следует, что каждой сопряженной переменной соответствует некоторое управление  $u^*$ , потенциально оптимальное. Поэтому, перебирая начальные условия в сопряженной задаче, мы автоматически будем перебирать управления  $u^*$ , и решив для каждого из них систему ОДУ из условия задачи, сможем выбрать оптимальное в смысле времени.

1. Перебираем начальные условия  $\psi(t_0)$  в сопряженной задаче. Для систематизации перебора имеет смысл нормировать начальные условия и выбирать их на единичной окружности, так как  $\text{Argmax}_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \langle u(t), B^T \psi(t) \rangle = \text{Argmax}_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \langle u(t), B^T (\alpha \psi(t)) \rangle, \quad \forall \alpha > 0.$

2. Для выбранного начального условия  $\psi(t_0)$  найдем  $\psi(t)$  - решение сопряженной задачи. В силу стационарности системы  $\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^T} \psi(t_0)$

3. С помощью опорной функции множества допустимых управлений по полученной  $\psi(t)$  из условия максимума найдем  $u^*(t)$  как опорный вектор.

4. Для найденного  $u^*(t)$  с помощью функции ode45 решим систему ОДУ из условия задачи. Окончанием процесса интегрирования будет достижение максимального наперед заданного  $T_{max}$  или целевого множества.

5. Для траекторий, достигших целевого множества, выберем решение с наименьшим временем.

## Комментарий к численному методу

Важно отметить особенность реализации проверки условия попадания фазовой траектории в целевое множество. В основе нее лежит тот факт, что функция, сопряженная к опорной функции выпуклого множества - это характеристическая функция этого множества (см.[2]). Она принимает значение 0 внутри множества и  $+\infty$  вне его.

**Определение 1** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Преобразование Юнга-Фенгеля функции  $f$ , или функцией сопряженной к  $f$ , называется функция, определенная формулой:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x))$$

Отметим, что если  $X$  - линейное нормированное пространство, то сопряженная функция  $f^*$  определяется на сопряженном пространстве  $X^*$  линейных непрерывных функционалов  $x^*$  на  $X$ . В данном случае  $\mathbb{R}^2$  - гильбертово пространство, и  $X$  изоморфно  $X^*$ .

В программной реализации супремум из определения сопряженной функции ищется с помощью matlab-функции “fminunc”, которая минимизирует функцию-аргумент безусловно, то есть на всем пространстве. Для уточнения её работы, квадрат, являющийся слагаемым в целевом множестве, аппроксимируется шаром по норме  $p$ . При достаточно больших  $p$  аппроксимация является довольно точной.

Опорная функция единичного шара по норме  $p$  является сопряженной нормой к  $p$ -норме, то есть  $q$ -нормой, где  $q$  ищется из соотношения:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда опорная функция целевого множества примет вид:

$$\rho(\mathcal{X}_1, \psi) = \langle x_1, \psi \rangle + r_1 \cdot \|\psi\|_q + \|Q\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^2$$

## Погрешность условия трансверсальности

Так как внутри алгоритма условие трансверсальности на правом конце при отборе оптимальных пар не проверяется, оно может не выполняться в точности. Поэтому отметим погрешность этого условия, которую будем считать как абсолютное значение разности:

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle - \rho(\mathcal{X}_1, -\psi(t_1))$$

Здесь  $\psi(t_1)$  - вектор сопряженной переменной в момент попадания фазовой траектории в целевое множество.

## Параметры численного метода

Перечислим параметры программы, которые можно изменять для уточнения конечного результата.

- absTol, relTol - абсолютная и относительная ошибки для решателя ode45.
- pNorm - норма, по которой квадрат, являющийся слагаемым в целевом множестве, аппроксимируется шаром.
- number of iterations - количество фазовых траекторий, которые будут выпущены из множества  $\mathcal{X}_0$ .
- maximum integration time - максимальное время интегрирования для каждой траектории. Если множество не достигнуто имеет смысл увеличить время интегрирования.

## Примеры работы программы для разных параметров задачи.

### Пример 1

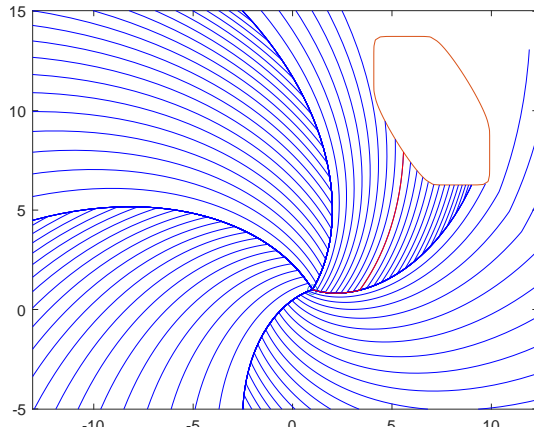
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 3$$

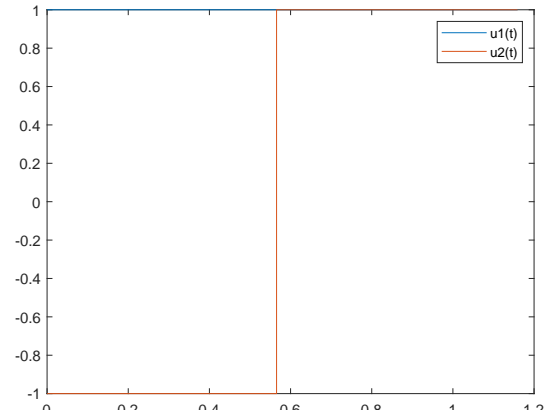
$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations} = 100$$

$$\text{maximum integration time} = 2$$

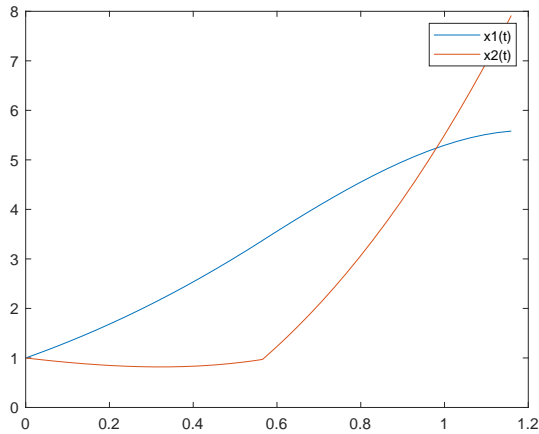
**Результат:** Оптимальное время : 1.159331; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.000059



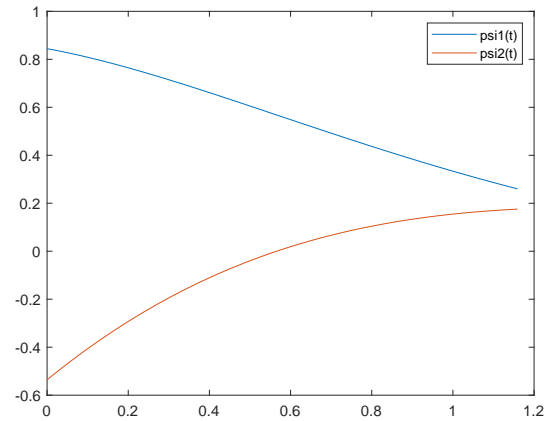
(а) Траектории системы в фазовом пространстве.



(б) Графики компонент оптимального управления  $u(t)$ .



(в) Графики компонент оптимальной траектории  $x(t)$ .



(г) Графики компонент сопряженной переменной  $\psi(t)$ .

## Пример 2

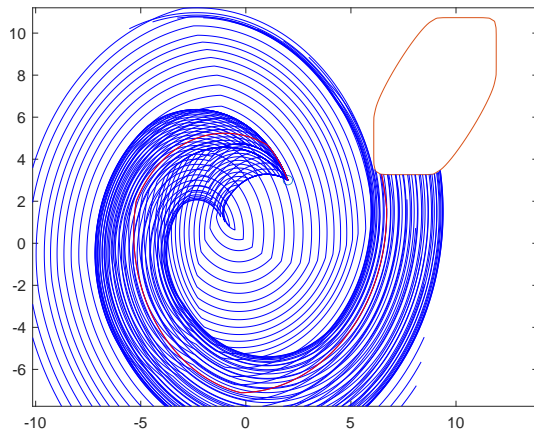
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 3$$

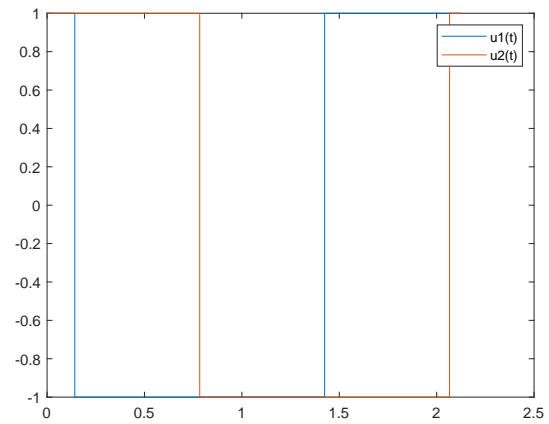
$t_0 = 0$ , absTol = 1e-7, relTol = 1e-7, pNorm = 10, number of iterations = 60

maximum integration time = 4

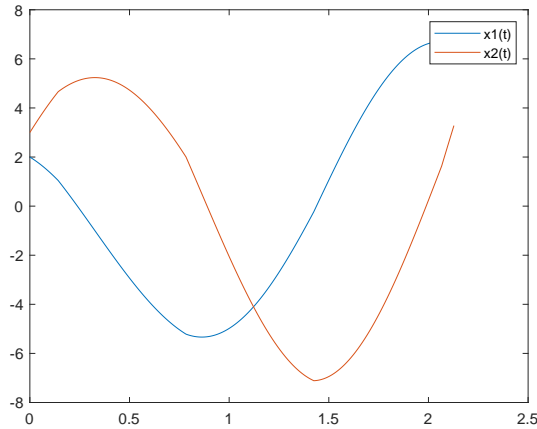
**Результат:** Оптимальное время : 2.127695 ; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.362278



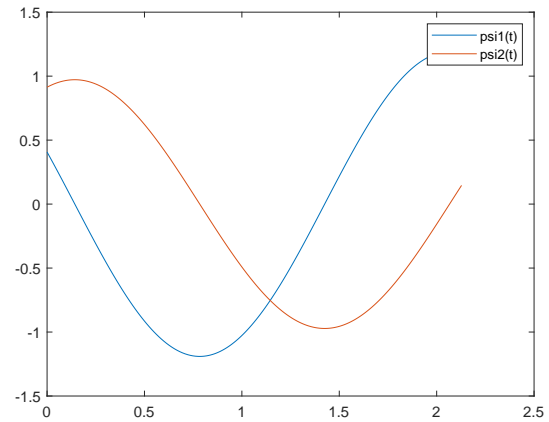
(а) Траектории системы в фазовом пространстве.



(б) Графики компонент оптимального управления  $u(t)$ .



(с) Графики компонент оптимальной траектории  $x(t)$ .



(д) Графики компонент сопряженной переменной  $\psi(t)$ .



### Пример 3(иллюстрация разрывности времени оптимального быстрогодействия)

Данный пример иллюстрирует разрывность времени оптимального быстрогодействия относительно целевого множества.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_1(a) = \begin{bmatrix} -4 \\ -3.4 \end{bmatrix}, x_1(b) = \begin{bmatrix} -4 \\ -3.5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

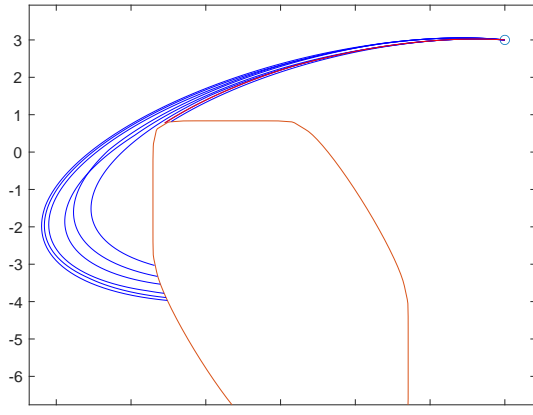
$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 4$$

$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations} = 8$$

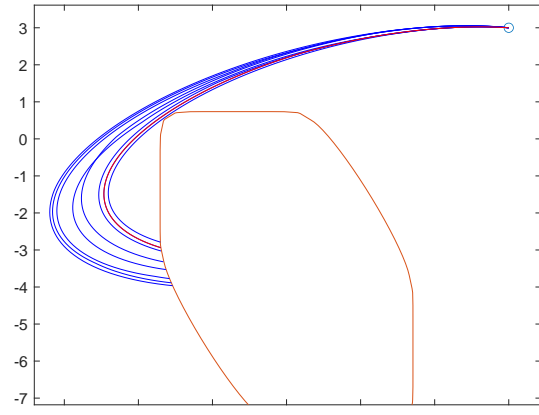
$$\text{maximum integration time} = 3$$

**Результат(а):** Оптимальное время : 0.683896; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.006446

**Результат(б):** Оптимальное время : 1.388466; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.298559



(а) Траектории системы при  $x_1(2) = -3.4$



(б) Траектории системы при  $x_1(2) = -3.5$

Из примера видно, что при незначительном изменении целевого множества, время оптимального быстрогодействия может значительно меняться.

#### Пример 4(демонстрация улучшения результата, посредством изменения параметров численного метода)

Главным параметром, влияющим на точность результата является количество итераций, или иначе, траекторий, выпущенных из множества начальных состояний. Рассмотрим снова систему из Примера 1 с двумя разными значениями number of iterations.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

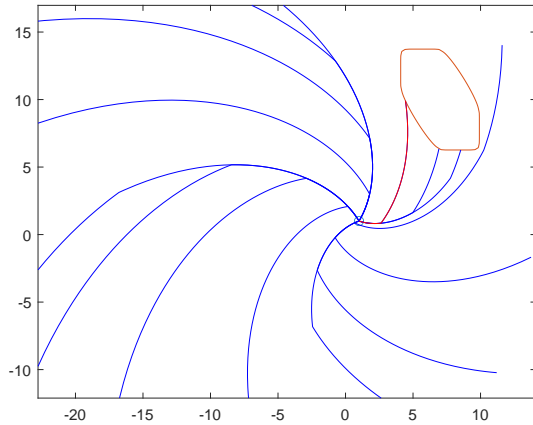
$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_1 = 3$$

$$t_0 = 0, \text{absTol} = 1\text{e-}7, \text{relTol} = 1\text{e-}6, \text{pNorm} = 10, \text{number of iterations(a)} = 20$$

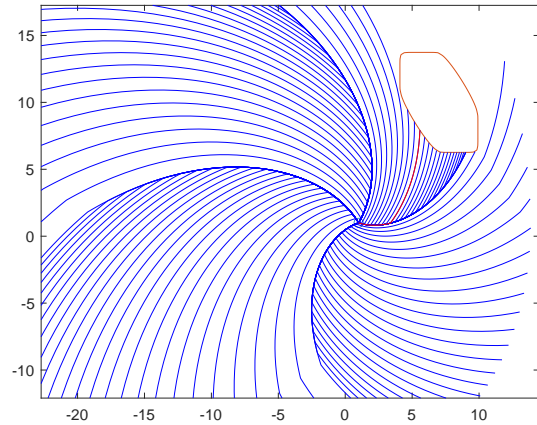
$$\text{number of iterations(b)} = 100, \text{maximum integration time} = 2$$

**Результат(а):** Оптимальное время : 1.197213; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.235911

**Результат(б):** Оптимальное время : 1.159331; ошибка условия трансверсальности на правом конце : 0.000059



(a) Выпущено 20 траекторий



(b) Выпущено 100 траекторий

Из примера видно, что при увеличении итераций оптимальное время быстрогодействия улучшилось, и ошибка условия трансверсальности на правом конце сократилась на несколько порядков.

## Список литературы

- [1] Ю. Н. Киселев, С. Н. Аввакумов, М. В. Орлов *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие* М.: МАКС Пресс, 2007
- [2] А.В. Арутюнов *Лекции по выпуклому и многозначному анализу* М.: Физматлит Москва, 2014