



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа.

Динамические системы и модели биологии.

Студент 315 группы
Е. В. Гуров

Научный руководитель
Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

Динамические системы с дискретным временем	3
Постановка задачи	3
Исследование одношаговой системы	3
Неподвижные точки	3
Исследование характера неподвижных точек	3
Исследование системы на наличие циклов. Построение бифуркационной диаграммы.	4
Зависимость показателя Ляпунова от параметров системы	7
Исследование двухшаговой системы	9
Нахождение неподвижных точек	9
Исследование характера неподвижных точек	9
Нахождение бифуркации Неймарка-Сакера	10
 Динамические системы с непрерывным временем	 12
Постановка задачи	12
Биологическая интерпретация системы	12
Введение новых безразмерных переменных	12
Неподвижные точки преобразованной системы	13
Исследование характера неподвижных точек	16
 Список литературы	 20

Динамические системы с дискретным временем

Постановка задачи

Даны две динамические системы с дискретным временем:

1. Одномерная:

$$u_{t+1} = ru_t e^{-\frac{r}{2}u_t^2}, \quad u_t > 0, \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

2. Двумерная:

$$u_{t+1} = ru_t e^{-\frac{r}{2}u_{t-1}^2}, \quad u_t > 0, \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

- Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость.
- Доказать, что имеется цикл длины 2.
- Найти циклы длины 3 и построить бифуркационную диаграмму в зависимости от значения параметра ($r > 0$).
- Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра ($r > 0$).
- Для системы с запаздыванием построить бифуркационную диаграмму, построить инвариантную кривую в случае существования бифуркации Неймарка-Сакера.

Исследование одношаговой системы

Начнем с того, что исследуем систему (1.1) на наличие и характер неподвижных точек.

Неподвижные точки

Для начала дадим определение неподвижной точки.

Определение 1. Точка $u^* \in \mathbb{R}$ называется неподвижной точкой системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если $u^* = f(u^*)$.

Таким образом для нахождения неподвижных точек нужно решить уравнение:

$$f(u, r) = u, \quad r > 0.$$

Учитывая, что $f(u, r) = ru e^{-\frac{r}{2}u^2}$, получим:

$$ru e^{-\frac{r}{2}u^2} = u, \quad r > 0.$$

Решая это уравнение, с учетом ограничений на u находим две неподвижные точки: $u_1^* = 0$, $u_2^* = \sqrt{\frac{2 \ln r}{r}}$. Первая из них существует всегда, а вторая возникает при $r > 1$.

Исследование характера неподвижных точек

Для начала введем необходимые определения и утверждения.

Определение 2 (Определение устойчивости точки по Ляпунову). Неподвижная точка u^* динамической системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $u_0: \|u_0 - u^*\| < \delta$ выполняется неравенство $\|u_t - u^*\| < \varepsilon$ для всех $t > 0$. В противном случае точка называется неустойчивой.

Определение 3. Если u^* — устойчивая по Ляпунову неподвижная точка системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*$, то u^* называется асимптотически устойчивой по Ляпунову.

Утверждение 1. Пусть u^* — неподвижная точка системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть f обратима в малой окрестности u^* . Тогда u^* асимптотически устойчива, если $|f'_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f'_u(u^*)| > 1$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения можно найти в [1] на странице 83. \square

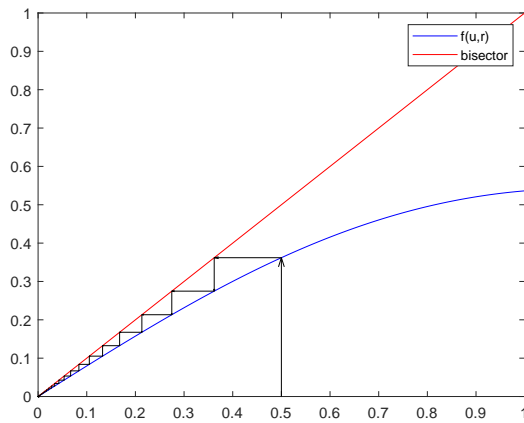
Таким образом, для выяснения характера неподвижных точек данной системы исследуем:

$$|f'_u(u^*, r)| = |re^{-\frac{r}{2}(u^*)^2} - r^2(u^*)^2 e^{-\frac{r}{2}(u^*)^2}| = |re^{-\frac{r}{2}(u^*)^2}(1 - r(u^*)^2)|.$$

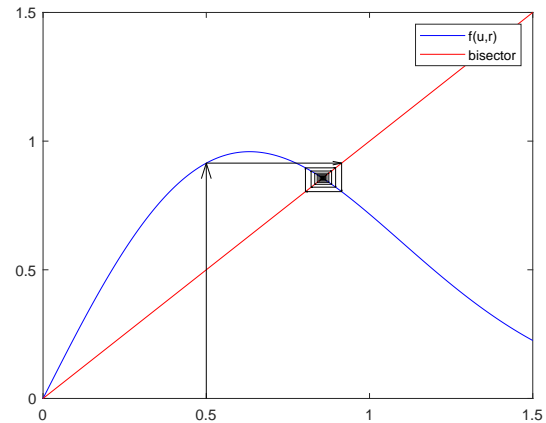
1. $f'_u(u_1^*, r) = r$. Тогда при $0 < r < 1$ точка u_1^* устойчива, при $r > 1$ неустойчива.
2. $f'_u(u_2^*, r) = 1 - 2 \ln r$.

$$|1 - 2 \ln r| < 1 \iff \begin{cases} 1 - 2 \ln r < 1 \\ 1 - 2 \ln r > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln r > 0 \\ \ln r < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} r > 1 \\ r < e \end{cases}$$

То есть точка u_2^* устойчива при $r \in (1; e)$ и неустойчива при $r > e$.



(а) Траектория системы при $r = 0.8$ (точка u_1^* асимптотически устойчива)



(б) Траектория системы при $r = 2.5$ (точка u_1^* неустойчива, точка u_2^* асимптотически устойчива)

Рис. 1: Устойчивость точек при разных значениях параметра r .

Исследование системы на наличие циклов. Построение бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, определяемую отображением f :

$$u \mapsto f(u) = f(u, r), \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad f : U \rightarrow U. \quad (1.3)$$

Определение 4. Множество всевозможных состояний u_t называется пространством состояний (или фазовым пространством) системы (1.3).

Определение 5. Множество точек $u_t, t = 0, 1, \dots$, где $u_t = f(u_{t-1})$, называется траекторией (или орбитой) системы (1.3), порожденной отображением f .

Определение 6. Динамическая система $u \mapsto f(u)$ называется топологически эквивалентной в области $U \subset \mathbb{R}$ динамической системе $v \mapsto g(v)$ в области $V \subset \mathbb{R}$, если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(U) = V$, отображающий орбиты первой системы в U на орбиты второй системы в V , сохраняя ориентацию во времени.

Определение 7. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров системы называется бифуркацией.

Определение 8. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связанные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Определение 9. Циклом длины k дискретной динамической системы

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R},$$

называется множество различных точек u_1, u_2, \dots, u_k таких, что

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

Построим бифуркационную диаграмму для системы (1.1). С помощью нее можно определить наличие устойчивых циклов и их длину при разных значениях параметра r . Построим график, на оси абсцисс которого расположим значения параметра r , а на оси ординат точки, в которых система находится последовательно m раз после выполнения n итераций. (в случае наличия предельных циклов эти m состояний будут приблизительно совпадать). Для этого выберем произвольную начальную точку u_0 , и для каждого значения r на некоторой сетке проведем n итераций. После чего проведем еще m итераций, на которых будем отмечать точки в которых оказывается система.

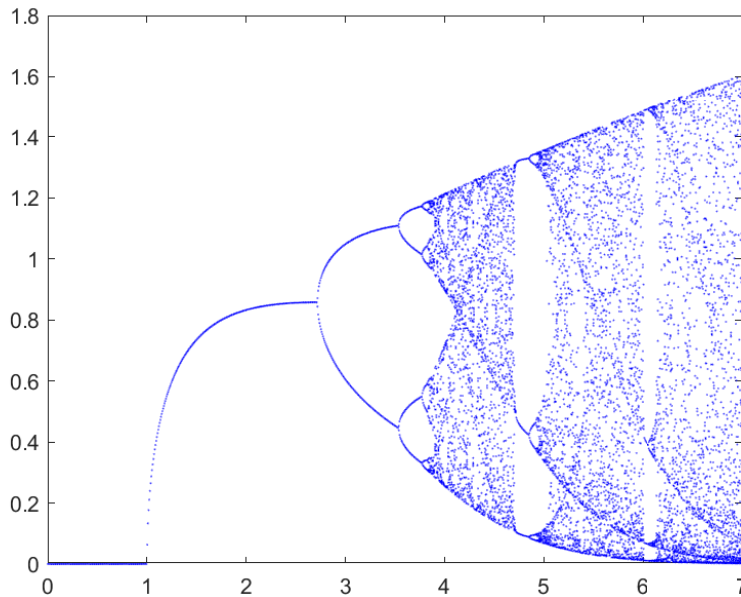


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма для системы (1.1). $n = 1000$, $m = 20$.

Определение 10. Упорядочиванием множества натуральных чисел по Шарковскому назовем упорядочивание натуральных чисел по следующему порядку:

$$\begin{aligned}
& 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ \\
& \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
& \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
& \succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
& \succ \dots \succ \\
& \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}$$

Теорема 1 (А.Н. Шарковский). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k . Тогда система имеет цикл длины t для всех таких t , что $k \succ t$ в смысле порядка по Шарковскому.

Доказательство. Доказательство этого утверждения можно найти в [1] на странице 89. \square

В силу определения цикла, каждая из k точек цикла является неподвижной точкой k -ой итерации отображения

$$f^k(u) = f(f(\dots f(u))) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k.$$

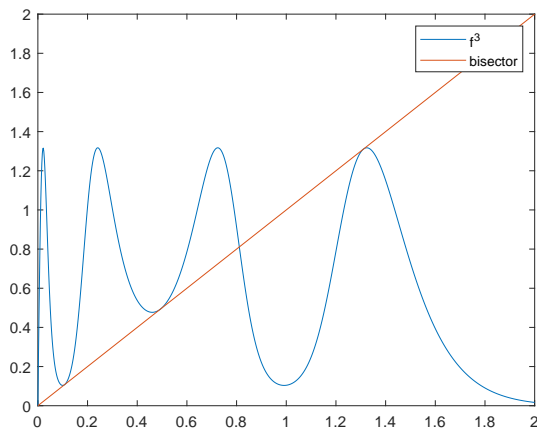
Таким образом, для точного нахождения параметров, при которых возможны циклы длины три, можно решить систему:

$$\begin{cases} f^3(u, r) = u \\ (f^3(u, r))'_u = 1, \end{cases}$$

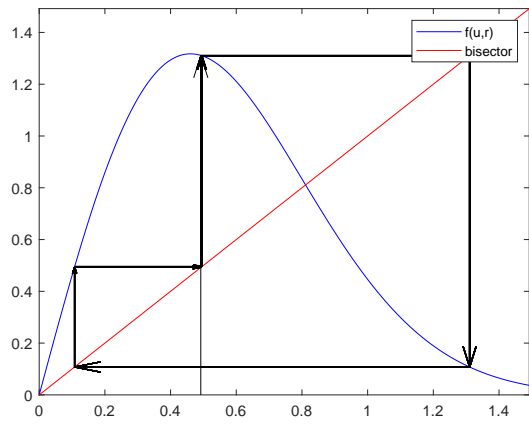
где $f^3 = f \circ f \circ f$.

Таким образом находим значение параметра r , при котором появляется устойчивый цикл длины три и точки этого цикла:

$$r = 4.717, u_1 = 0.107, u_2 = 0.492, u_3 = 1.310$$



(а) График f^3 с тремя точками касания биссектрисы первого координатного угла.



(б) Траектория системы, соответствующая устойчивому циклу длины три.

Рис. 3: Цикл длины три. $r = 4.717, u_1 = 0.107, u_2 = 0.492, u_3 = 1.310$

По теореме Шарковского наличие при некоторых значениях параметров в системе цикла длины три влечет за собой наличие циклов всех длин, и значит цикла длины два. Для наглядности найдем и изобразим устойчивый цикл длины два, поэтому рассмотрим всё же другое значение параметра r , нежели то, что было использовано для демонстрации цикла длины три.

Установить значения параметра и точки цикла длины два легко, рассмотрев внимательнее бифуркационную диаграмму и построив график $f^2 = f \circ f$. Решим уравнение $f^2(u) = u$. Фиксируем, например, параметр $r = 3.2$ (на бифуркационной диаграмме видно, что в этом случае имеется устойчивый цикл длины два) и найдем точки цикла:

$$u_1 = 0.532, u_2 = 1.082.$$

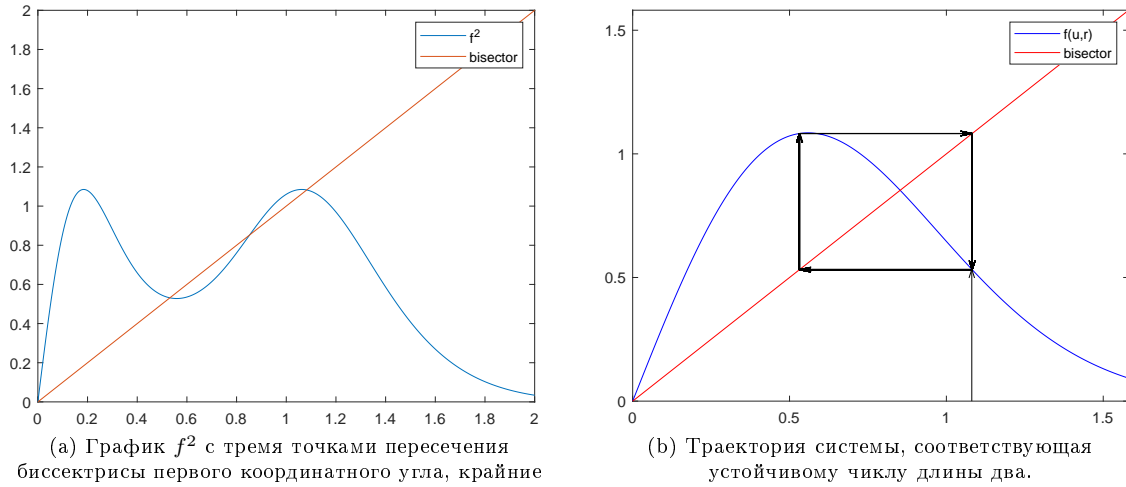


Рис. 4: Цикл длины два. $r = 3.2, u_1 = 0.532, u_2 = 1.082$

Зависимость показателя Ляпунова от параметров системы

Как и ранее, введем для начала необходимые определения:

Определение 11. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Числом Ляпунова траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$l(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(u_1)| \cdot |f'(u_2)| \cdot \dots \cdot |f'(u_n)|)^{\frac{1}{n}},$$

если этот предел существует.

Определение 12. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Число и показатель Ляпунова характеризуют поведение “близких” траекторий при изменении дискретной величины t . Действительно, пусть u_1 и \bar{u}_1 — две достаточно близкие начальные точки

гладкого отображения f . Эти точки порождают две орбиты динамической системы, заданной отображением f :

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots ; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k, \dots$$

Для точек второй итерации u_2 и \bar{u}_2 выполнено:

$$u_2 - \bar{u}_2 = f(u_1) - f(\bar{u}_1) = f'(u_1)(u_1 - \bar{u}_1) + o(|u_1 - \bar{u}_1|).$$

Если $|f'(u_1)| < 1$, то в линейном приближении расстояние между точками u_2 и \bar{u}_2 будет меньше, чем расстояние между начальными точками u_1 и \bar{u}_1 . В противном случае расстояние по сравнению с начальным положением увеличится. Аналогичные рассуждения справедливы для всех итераций t . Число и показатель Ляпунова представляют из себя некоторое среднее значение производной на каждой из итераций, поэтому считаются мерой близости орбит. Если число Ляпунова больше единицы (показатель Ляпунова больше нуля), то близкие орбиты в среднем расходятся, иначе — сходятся.

Построим график зависимости показателя Ляпунова от значения параметра r . Для этого для каждого значения параметра r из некоторой сетки проведем n итераций системы, и на каждой итерации будем вычислять значение производной функции f в полученной точке. Сложим прологарифмированные модули вычисленных значений производных и поделим на n . При достаточно больших n полученное значение можно приближенно считать пределом по n , стоящим в определении показателя Ляпунова.

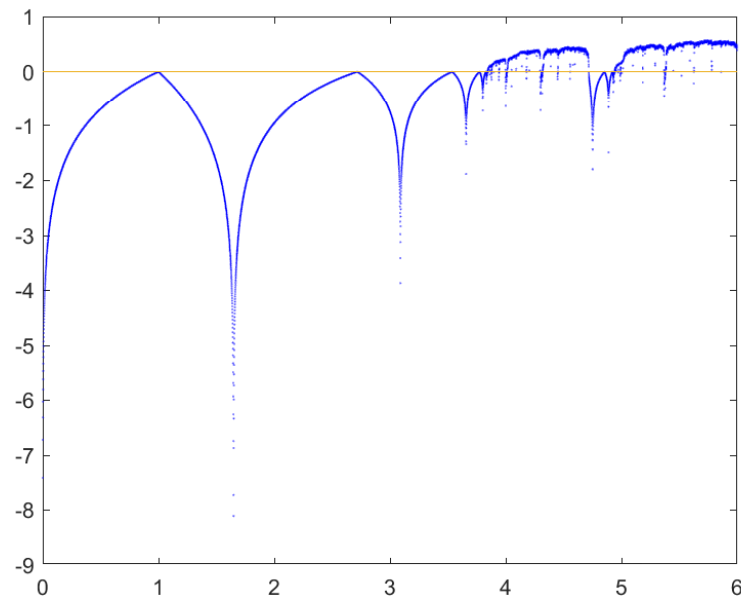


Рис. 5: Зависимость показателя Ляпунова от значения параметра r . (1.1). $n = 1000$

Полезно сравнить бифуркационную диаграмму и график показателя Ляпунова. В точках, где показатель Ляпунова имеет отрицательные значения, на бифуркационной диаграмме четко видны устойчивые неподвижные точки или устойчивые предельные циклы. Где показатель Ляпунова больше нуля наблюдается хаотическое поведение траекторий.

Исследование двухшаговой системы

Теперь рассмотрим систему с запаздыванием (1.2):

$$u_{t+1} = ru_t e^{-\frac{r}{2}u_{t-1}^2}, \quad u_t > 0, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Система с запаздыванием сводится к многомерной дискретной системе вида:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f_1(u_t, v_t) = ru_t e^{-\frac{r}{2}v_t^2} \\ v_{t+1} = f_2(u_t, v_t) = u_t. \end{cases} \quad (1.4)$$

В дальнейшем мы будем работать именно с ней.

Нахождение неподвижных точек

В случае многомерных систем неподвижная точка определяется следующим образом:

Определение 13. Точка $u^* \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой многомерной дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, если $u^* = f(u^*)$.

В случае системы с запаздыванием, которую мы предварительно свели к многомерной, это означает что точка u^* может считаться устойчивой, если $u^* = f(u^*, u^*, \dots, u^*)$, где $u^* \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда неподвижные точки для соответствующей многомерной системы будут иметь вид $u = \underbrace{(u^*, u^*, \dots, u^*)}_n$.

Таким образом для нахождения неподвижных точек можно аналогично первому пункту решить относительно u уравнение:

$$f_1(u, u) = u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad r > 0,$$

или с учетом конкретной системы

$$ru e^{-\frac{r}{2}u^2} = u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad r > 0.$$

В итоге получим две неподвижные точки многомерной системы (1.4)

$$u_1^* = (0, 0)^T, \quad u_2^* = \left(\sqrt{\frac{2 \ln r}{r}}, \sqrt{\frac{2 \ln r}{r}} \right)^T.$$

Исследование характера неподвижных точек

Для исследования неподвижных точек многомерной системы требуется следующая теорема:

Теорема 2. Пусть задана многомерная динамическая система с дискретным временем:

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{N},$$

где f — гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , u^* — неподвижная точка данной системы. Тогда u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$ в точке u^* удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$. Если модуль хотя бы одного собственного значения больше единицы, то u^* неустойчива.

Выпишем матрицу Якоби для системы (1.4):

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{-\frac{r}{2}v^2(t)} & -r^2 u(t) v(t) e^{-\frac{r}{2}v^2(t)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

1. При $u_1^* = (0, 0)^T$:

$$\mathcal{J}(u_1^*) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{J}(u_1^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - r) \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = r$$

Таким образом по теореме 2 точка $u_1^* = (0, 0)^T$ устойчива при $r < 0$. В остальных случаях точка является неустойчивой.

2. При $u_2^* = \left(\sqrt{\frac{2 \ln r}{r}}, \sqrt{\frac{2 \ln r}{r}} \right)^T$:

$$\mathcal{J}(u_2^*) = \begin{pmatrix} r e^{-\ln r} & -2r \ln r e^{-\ln r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \ln r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathcal{J}(u_2^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \ln r \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + 2 \ln r = \lambda^2 - \lambda + 2 \ln r.$$

$$D = 1 - 8 \ln r \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8 \ln r}}{2}$$

(а) При $1 - 8 \ln r \geq 0 \iff r \leq e^{\frac{1}{8}}$ собственные значения матрицы Якоби действительны. Так как $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8 \ln r}}{2} > \frac{1 - \sqrt{1 - 8 \ln r}}{2} = \lambda_2$ возможно получить границы в которых оба собственных значения по модулю меньше единицы из неравенств:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8 \ln r}}{2} < 1 \\ \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8 \ln r}}{2} > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} r > 1 \\ r > \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Тогда $|\lambda_{1,2}| < 1$ при $r > 1$. То есть для вещественных собственных значений точка u_2^* устойчива при $r \in (1; e^{\frac{1}{8}}]$.

(б) При $1 - 8 \ln r < 0 \iff r > e^{\frac{1}{8}}$ собственные значения комплексные и имеют вид $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{8 \ln r - 1}}{2}$.

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8 \ln r - 1}{4}} = \sqrt{2 \ln r} \leq 1 \iff r \leq \sqrt{e}$$

То есть для комплексных собственных значений точка u_2^* устойчива при $r \in (e^{\frac{1}{8}}; e^{\frac{1}{2}})$.

В итоге получим, что точка u_2^* устойчива при $r \in (1; e^{\frac{1}{2}})$. В остальных случаях точка является неустойчивой.

Нахождение бифуркации Неймарка-Сакера

Бифуркация Неймарка-Сакера это дискретный аналог бифуркации Андронова-Хопфа рождения инвариантной кривой. При переходе через критическое значение параметра, в окрестности неподвижной точки появляется инвариантная кривая (транскритическая бифуркация), либо инвариантная кривая существует “до” бифуркации (субкритическая бифуркация). Стоит отметить, что для появления такой бифуркации существенны условия невырожденности, которые приведены в [1]¹. При нарушении одного из этих условий возможно как отсутствие инвариантной

¹Приложение А.8, стр. 421

кривой, так и появление нескольких кривых.

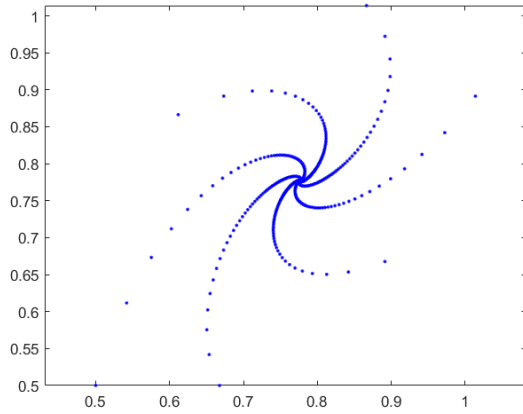
Рассмотрим двумерную динамическую систему с дискретным временем

$$u \mapsto f(u, r), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad r \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.6)$$

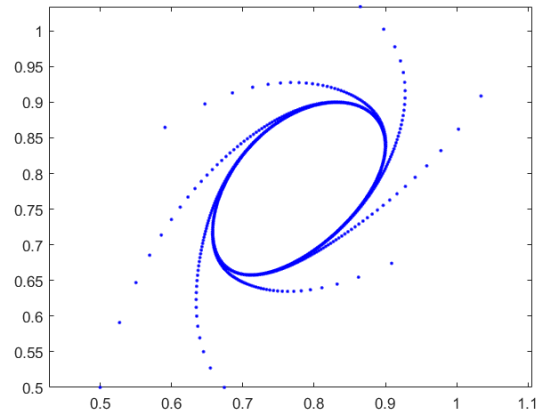
Определение 14. Бифуркация положения равновесия в системе (1.6), соответствующая появлению мультипликаторов $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, называется бифуркацией Неймарка-Сакера или дискретной бифуркацией Хопфа.

В данном определении под мультипликаторами понимаются собственные значения матрицы Якоби дискретной многомерной системы.

В случае данной системы такие собственные значения появляются у матрицы Якоби для точки u_2^* при значении параметра $r = e^{\frac{1}{2}}$. При этом из предыдущего пункта видно, что неподвижная точка при переходе через критическое значение из устойчивой превращается в неустойчивую. В окрестности точки u_2^* появляется устойчивый цикл, то есть устойчивая неподвижная точка сменяется устойчивым предельным циклом малой длины, поэтому система остается в окрестности этой точки. Это так называемая магкая или некатострофическая потеря устойчивости.



(а) Сходимость траектории к неподвижной точке при значении параметра меньшем критического. $r = 1.6287$



(б) Появление устойчивого предельного цикла после прохождения параметром критического значения. $r = 1.6587$

Рис. 6: Иллюстрация появления в окрестности точки u_2^* устойчивого цикла.

Динамические системы с непрерывным временем

Постановка задачи

Дана динамическая система на плоскости с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax(K-x)}{K} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy^2}{1+Ay}, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}_2^+; \quad (2.1)$$

Все параметры считаются положительными.

Необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы.
2. Ввести новые безразмерные переменные, уменьшив число входящих в систему параметров.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла.
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

Биологическая интерпретация системы

Данная система описывает взаимодействие двух популяций, “хищников” и “жертв”. Под x можно понимать численность популяции жертв, а под y — численность хищников.

- Первое слагаемое $\frac{ax(K-x)}{K}$ представляет собой скорость роста популяции жертв в отсутствие хищников с учетом внутривидовой конкуренции. Здесь K — максимальное количество жертв, a — коэффициент, имеющий смысл скорости роста жертв, однако при приближении численности к K рост постепенно замедляется.
- Второе слагаемое $-bxy$ — это уменьшение скорости прироста жертв в зависимости от их числа и числа хищников. Иными словами, сколько хищники могут съесть жертв при определенном числе жертв и хищников.
- Слагаемое $-cy$ отвечает за скорость вымирания хищников в отсутствие жертв.
- Последнее слагаемое $\frac{dxy^2}{1+Ay}$ несет смысл скорости прироста популяции хищников в зависимости от их числа и числа жертв. В некотором смысле представляет собой функцию “полезности” поедания жертв хищниками.

Введение новых безразмерных переменных

Чтобы уменьшить число параметров, входящих в систему сделаем замену переменных:

$$x(t) = pu(\tau), \quad y(t) = qv(\tau), \quad t = \frac{\tau}{T},$$

где p и q пока неизвестные константы. Тогда получим:

$$\dot{x} = p \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = p \cdot \dot{u}(\tau) \cdot T, \quad \dot{y} = q \cdot \frac{dv(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = q \cdot \dot{v}(\tau) \cdot T$$

Здесь и далее под \dot{u} и \dot{v} понимается производная u и v по τ . Подставим теперь новые переменные в систему.

$$\begin{cases} p\dot{u}T = \frac{apu(K-pu)}{K} - bpquv, \\ q\dot{v}T = -cq v + \frac{dpqu^2v^2}{1+Aquv}, \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{u}T = \frac{au(K-pu)}{K} - bquv, \\ \dot{v}T = -cv + \frac{dpquv^2}{1+Aquv}, \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{u}T = u\left(\frac{a(K-pu)}{K} - bqv\right), \\ \dot{v}T = -cv + \frac{dpquv^2}{1+Aquv}. \end{cases}$$

Пусть $T = a, q = \frac{a}{b}$. Тогда для первого уравнения получим:

$$\dot{u}a = u\left(\frac{a(K-pu)}{K} - av\right) \iff \dot{u} = u\left(1 - \frac{p}{K}u - v\right).$$

Преобразуем второе уравнение:

$$\dot{v}T = -cv + \frac{dpquv^2}{1+Aquv} \iff \dot{v}a = -cv + \frac{dp \cdot \frac{a}{b}uv^2}{1+A \cdot \frac{a}{b}v} \iff \dot{v} = -\frac{c}{a}v + \frac{\frac{dp}{aA}uv^2}{\frac{b}{Aa} + v}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{dp}{aA} = 1$, таким образом получим $p = \frac{aA}{d}$, тогда:

$$\dot{v} = -\frac{c}{a}v + \frac{uv^2}{\frac{b}{Aa} + v}.$$

В итоге имеем:

$$q = \frac{a}{b}, \quad p = \frac{aA}{d}, \quad t = \frac{\tau}{a}.$$

То есть приходим к замене:

$$x(t) = \frac{aA}{d}u(\tau), \quad y(t) = \frac{a}{b}v(\tau), \quad t = \frac{\tau}{a},$$

после которой система приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - \frac{aA}{dK}u - v\right), \\ \dot{v} = -\frac{c}{a}v + \frac{uv^2}{\frac{b}{Aa} + v}. \end{cases}$$

Обозначив $\frac{aA}{dK} = \alpha$, $\frac{c}{a} = \beta$, $\frac{b}{Aa} = \gamma$, окончательно, имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = u(\tau)(1 - \alpha u(\tau) - v(\tau)), \\ \dot{v}(\tau) = -\beta v(\tau) + \frac{u(\tau)v^2(\tau)}{\gamma + v(\tau)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Таким образом мы свели исходную систему с шестью параметрами к системе с тремя параметрами. Теперь можем приступить к анализу неподвижных точек.

Неподвижные точки преобразованной системы

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Определение 1. Неподвижной точкой системы (2.3) называется точка $x^* \in \mathbb{X}$, такая что $f(x^*) = 0$.

Таким образом, для поиска неподвижных точек рассмотрим систему:

$$\begin{cases} u(1 - \alpha u - v) = 0, \\ -\beta v + \frac{uv^2}{\gamma + v} = 0. \end{cases}$$

Для первого уравнения:

$$u(1 - \alpha u - v) = 0 \iff \begin{cases} u = 0, \\ 1 - \alpha u - v = 0. \end{cases}$$

1. В первом случае имеем:

$$\begin{cases} u = 0, \\ -\beta v + \frac{uv^2}{\gamma + v} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} u = 0, \\ -\beta v = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} u = 0, \\ v = 0. \end{cases}$$

То есть получаем первую неподвижную точку $u_1^* = (0, 0)^T$, которая существует при любых значениях параметров.

2. Во втором случае имеем:

$$\begin{cases} u = \frac{1-v}{\alpha}, \\ -\beta v + \frac{uv^2}{\gamma + v} = 0. \end{cases}$$

Найдем отсюда v .

$$-\beta v + \frac{\frac{1-v}{\alpha} v^2}{\gamma + v} = v \left(-\beta + \frac{\frac{1-v}{\alpha} v}{\gamma + v} \right) = 0 \iff \begin{cases} v = 0, \\ \frac{\frac{1-v}{\alpha} v}{\gamma + v} = \beta. \end{cases}$$

Таким образом получим две системы:

$$\begin{cases} u = \frac{1-v}{\alpha}, \\ v = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u = \frac{1-v}{\alpha}, \\ \frac{\frac{1-v}{\alpha} v}{\gamma + v} = \beta. \end{cases}$$

Из первой немедленно получаем вторую неподвижную точку $u_2^* = (\frac{1}{\alpha}, 0)^T$, которая также существует при любых положительных значениях параметров. Вторую систему рассмотрим подробнее. Преобразуем второе уравнение:

$$-\beta + \frac{\frac{1-v}{\alpha} v}{\gamma + v} = -\beta + \frac{v - v^2}{\alpha\gamma + \alpha v} = \frac{-\alpha\beta\gamma - \alpha\beta v + v - v^2}{\alpha(\gamma + v)}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{-\alpha\beta\gamma - \alpha\beta v + v - v^2}{\alpha(\gamma + v)} = 0 &\iff \frac{v^2 + v(\alpha\beta - 1) + \alpha\beta\gamma}{\alpha(\gamma + v)} = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} v^2 + v(\alpha\beta - 1) + \alpha\beta\gamma = 0, \\ \alpha(\gamma + v) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Второе неравенство выполнено при любых положительных значениях параметров. Первое равенство в системе представляет из себя квадратное уравнение относительно v . Найдем его корни:

$$D = (\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma \implies v = \frac{1 - \alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2}$$

Таким образом получим еще две неподвижные точки, которые существуют при $D > 0$ и сливаются в одну при $D = 0$.

$$u_3^* = \left(\frac{1 + \alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2\alpha}, \frac{1 - \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \right)^T,$$

$$u_4^* = \left(\frac{1 + \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2\alpha}, \frac{1 - \alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \right)^T.$$

Найдем, условия, при которых $D \geq 0$.

$$D = (\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma \geq 0 \iff (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta + 1 - 4\alpha\beta\gamma \geq 0 \iff \alpha\beta(\alpha\beta - 2 - 4\gamma) \geq -1.$$

Однако при этом из вида $u = \frac{1-v}{\alpha}$ и условия неотрицательности u и v получим, что, чтобы эти точки принадлежали фазовому пространству $\mathbb{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}$, требуется $0 \leq v \leq 1$. Получим условия, при которых это выполнено (учитывая выполнение условия неотрицательности дискриминанта).

Для u_3^* :

- Условие $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \geq 0 &\iff \begin{cases} (1 - \alpha\beta)^2 \geq (\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma, \\ \alpha\beta < 1, \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 4\alpha\beta\gamma \geq 0, \\ \alpha\beta < 1, \end{cases} \iff \alpha\beta < 1. \end{aligned}$$

- Условие $v \leq 1$:

$$\frac{1 - \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \leq 1 \iff -1 - \alpha\beta \leq \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}.$$

Отметим, что второе условие выполняется для любых положительных значений параметров.

Для u_4^* :

- Условие $v \geq 0$:

$$\frac{1 - \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \geq 0 \iff \alpha\beta - 1 \leq \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma},$$

что очевидно выполнено при $\alpha\beta < 1$. Для $\alpha\beta \geq 1$ получим:

$$\alpha\beta - 1 \leq \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma} \iff 4\alpha\beta\gamma \leq 0,$$

Что невозможно при положительных значениях параметров. Таким образом получим так же что $v \geq 0 \iff \alpha\beta < 1$.

- Условие $v \leq 1$:

$$\frac{1 - \alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 + 4\alpha\beta\gamma}}{2} \leq 1 \iff \alpha\beta + 1 \geq \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma} \iff 4\alpha\beta > -4\alpha\beta\gamma,$$

что также выполнено при любых положительных значениях параметров.

Таким образом, у системы существует четыре положения равновесия:

$$\begin{aligned} u_1^* &= (0, 0)^T, \quad u_2^* = \left(\frac{1}{\alpha}, 0 \right)^T \\ u_3^* &= \left(\frac{1 + \alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2\alpha}, \frac{1 - \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \right)^T, \\ u_4^* &= \left(\frac{1 + \alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2\alpha}, \frac{1 - \alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma}}{2} \right)^T. \end{aligned}$$

Первые два из которых существуют при любых значениях параметров, третье и четвертое появляются при условии $\alpha\beta(\alpha\beta - 2 - 4\gamma) \geq -1$, вместе с условием $\alpha\beta < 1$.

Исследование характера неподвижных точек

Пусть x^* — положение равновесия системы (2.3). Обозначим через $\mathcal{J}(x^*)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(x)$, вычисленную в точке x^* . Пусть n_+, n_0, n_- — число собственных значений $\mathcal{J}(x^*)$ (с учетом их кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

Определение 2. *Положение равновесия динамической системы (2.3) называется гиперболическим, если $n_0 = 0$, т.е. не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+ \cdot n_- \neq 0$.*

Для выяснения характера гиперболических неподвижных точек удобна следующая теорема.

Теорема 1 (А.М. Ляпунов, А.Пуанкаре). *Пусть x^* — гиперболическое положение равновесия системы (2.3). Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия x^* асимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво.*

Выпишем матрицу Якоби для системы (2.2).

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha u - v & -u \\ \frac{v^2}{\gamma + v} & -\beta + \frac{2uv(\gamma + v) - uv^2}{(\gamma + v)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

1. Точка $u_1^* = (0, 0)^T$:

$$\mathcal{J}(u_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{J}(u_1^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-\beta - \lambda) \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\beta.$$

Таким образом точка u_1^* — седло.

2. Точка $u_2^* = (\frac{1}{\alpha}, 0)^T$:

$$\mathcal{J}(u_2^*) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{J}(u_2^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\beta.$$

То есть u_2^* — устойчивый узел.

3. Точка u_3^* в зависимости от значений параметров может быть устойчивым или неустойчивым равновесием. На плоскости параметров $\{\gamma, \alpha\}$ при фиксированном значении β условие смены устойчивости задается равенством:

$$\frac{\beta\gamma}{\gamma + v} - \alpha u = 0,$$

которое назовем уравнением линии нейтральности равновесия u_3^* . При пересечении линии нейтральности в сторону возрастания γ равновесие u_3^* на фазовом портрете системы теряет устойчивость. В зависимости от знака первой ляпуновской величины (см. [1]² на линии нейтральности потеря устойчивости u_3^* сопровождается либо рождением малого устойчивого предельного цикла, либо сжатием в точку и гибелью малого неустойчивого предельного цикла. То есть, наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа рождения в окрестности равновесия замкнутой инвариантной кривой. Подробнее см. [2]³

²Приложение А8, стр.423.

³Глава 3, пункт 3.4.6. Нелинейность размножения хищника и конкуренция жертв.

4. Точка u_4^* при любых значениях параметров — седло. (Аналогично, следуя изложенному в [2])

Построим параметрический портрет системы. Имеется два условия, влияющих на фазовый портрет системы:

1. $\alpha\beta(\alpha\beta - 2 - 4\gamma) = -1 \iff \gamma = \frac{(\alpha\beta-1)^2}{4\alpha\beta}$
2. $\alpha\beta = 1 \iff \alpha = \frac{1}{\beta}$

Зафиксируем параметр β и построим границы областей параметров α и γ , соответствующих топологически эквивалентным фазовым портретам в виде $\gamma = f(\alpha)$.

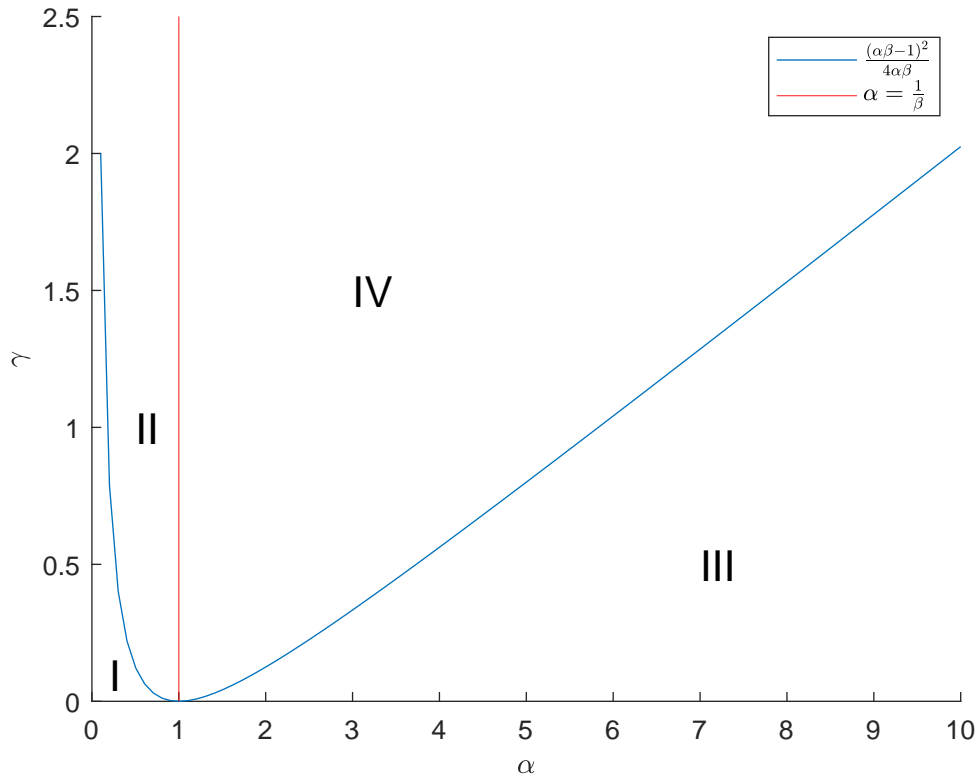
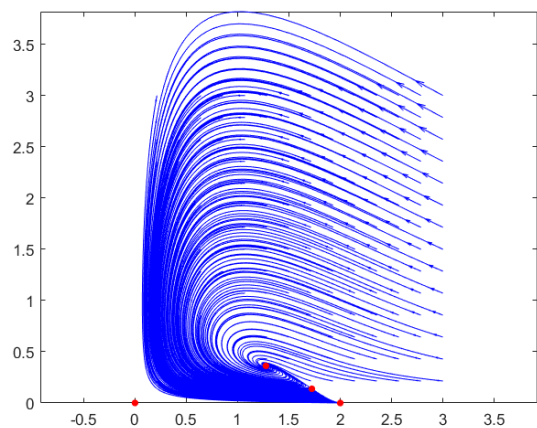
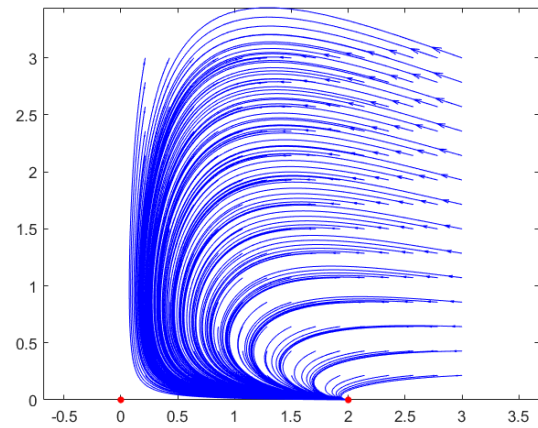


Рис. 7: Параметрический портрет системы (2.2) при фиксированном значении параметра $\beta = 1$.

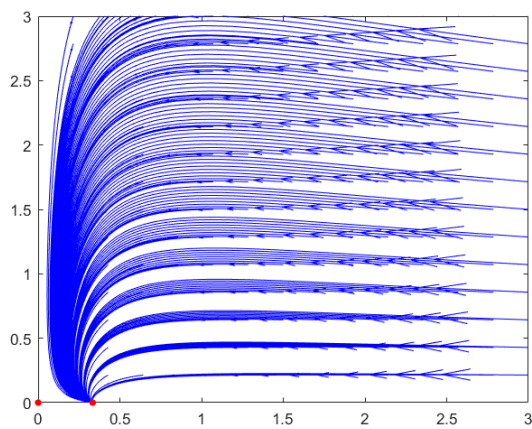
Построим фазовые портреты системы в каждой из областей. Заметим, что у системы как и ожидалось может быть либо две либо четыре неподвижные точки.



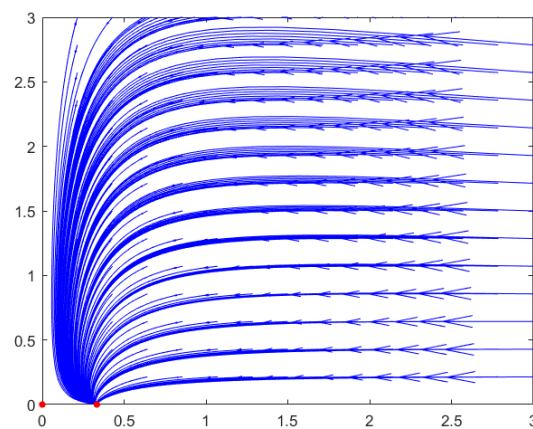
(a) Траектории системы в первой параметрической области.



(b) Траектории системы во второй параметрической области.



(c) Траектории системы в третьей параметрической области.



(d) Траектории системы в четвертой параметрической области.

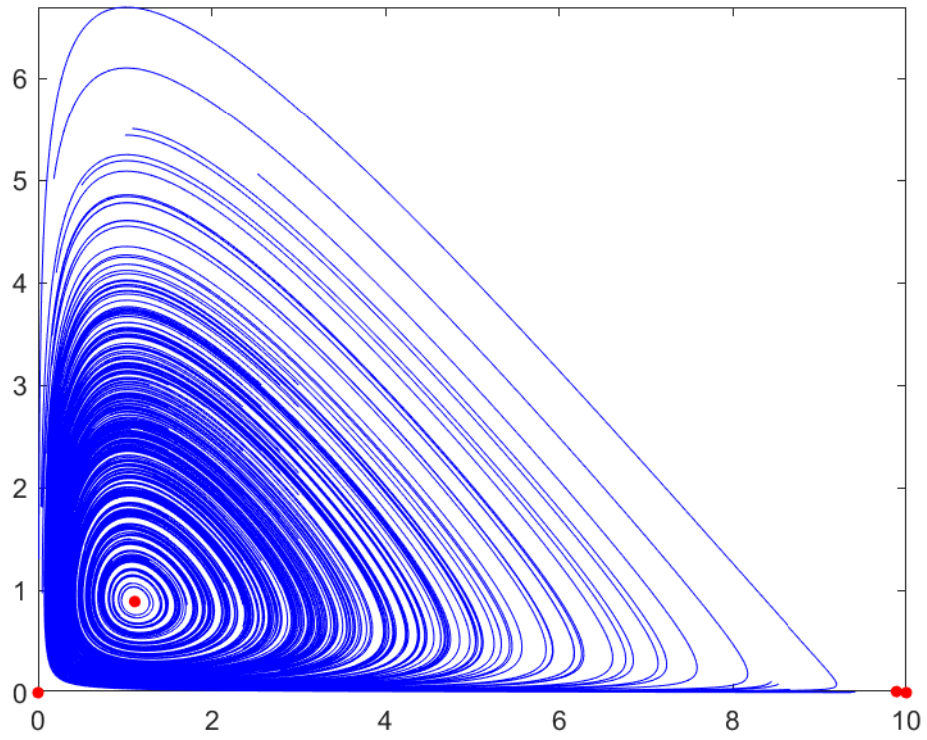


Рис. 8: Появление цикла около неподвижной точки u_3^* . ($\beta = 1, \alpha = 0.1, \gamma = 0.1$).

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*. М.: Физматлит, 2011
- [2] Базыкин А. Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. М.: Институт компьютерных исследований, 2003