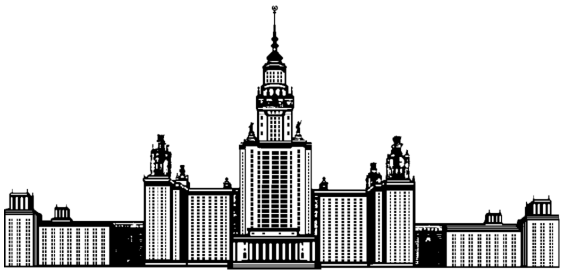


Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по компьютерному практикуму к курсу

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
Е. В. Гуров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2021

Содержание

Задание 1 **3**
Формулировка задания . . . 3
Генератор схемы Бернулли и биномиального распределения . . . 3
Геометрическое распределение . . . 4
Свойство отсутствия памяти . . . 5
Игра в орлянку . . . 5

Задание 2 **7**
Формулировка задания . . . 7
Датчик канторова распределения . . . 7
Проверка корректности датчика и критерий Колмогорова . . . 8
Свойство симметрии и самоподобия . . . 9
Проверка однородности и критерий Смирнова . . . 10
Математическое ожидание и дисперсия . . . 11

Задание 3 **13**
Формулировка задания . . . 13
Датчик экспоненциального распределения . . . 13
Свойство отсутствия памяти . . . 14
Случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ . . . 15
Датчик пуассоновского распределения . . . 16
Датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения . . . 17
Проверка корректности датчика и критерий хи-квадрат Пирсона . . . 18
Датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты . . . 20
Критерий Фишера и t-критерий Стьюдента . . . 21

Задание 4 **23**
Формулировка задания . . . 23
Датчик распределения Коши . . . 23
Метод фон Неймана . . . 24
Сравнение времени работы . . . 27

Задание 5 **28**
Формулировка задания . . . 28
Закон больших чисел и центральная предельная теорема для нормального распределения . . . 28

Список литературы **29**

Задание 1

Формулировка задания

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.

2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.

3. Рассмотреть игру в орлянку - бесконечную последеовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниями 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломанной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1, \ldots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоритическую оценку для $Y(n)$ при $n \longrightarrow \infty$.

Генератор схемы Бернулли и биномиального распределения

Определение 1. *Схемой Бернулли называется эксперимент, в котором проводится, вообще говоря, неограниченное количество испытаний. При этом каждому испытанию присваивается бинарный признак (успех — 1 или неудача — 0), и выполняются следующие требования:*

1. *отсутствие взаимного влияния;*

2. *воспроизводимость;*

3. *испытания проводятся в сходных условиях.*

Определение 2. *Случайная величина X, принимающая значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$, называется случайной величиной с распределением Бернулли(или бернуллиевской случайной величиной).*

Для генератора схемы Бернулли реализуем генератор бернуллиевской случайной величины X. Для этого воспользуемся встроенным в библиотеку Numpy языка Python генератором равномерного распределения. Пусть тогда имеем случайную величину $Y \sim \mathbb{U}([0, 1])$. В таком случае X можно представить в виде: $X = \mathbb{I}(Y < p)$, где $\mathbb{I}()$ — индикаторная функция:

$$X = \mathbb{I}(Y < p) = \begin{cases} 1\ , & Y < p, \\ 0\ , & Y \geq p. \end{cases}$$

Генерация схемы Бернулли в таком случае будет происходить с помощью некоторого количества генераций бернуллиевской случайной величины.

Определение 3. *Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p ($X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$), если*

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Случайную величину X обычно интерпретируют как число успехов в схеме из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом. Поэтому

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

где $Y_i \sim \mathrm{Bern}(p)$, $i = 1, \ldots, n$.

Промоделируем биномиальное распределение с параметрами $n = 50$, $p = 0.3$ с помощью генерации схемы Бернулли с n испытаниями:

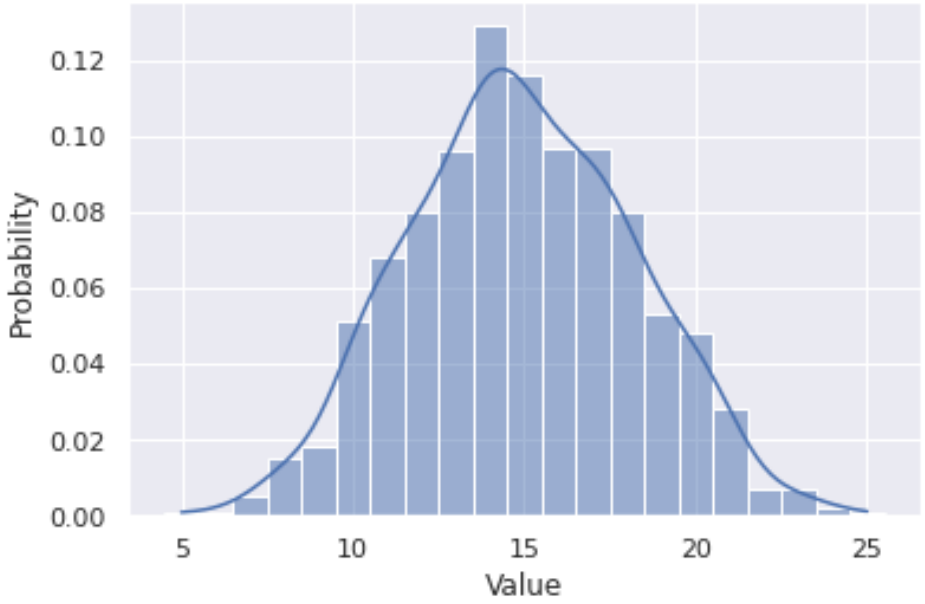


Рис. 1: Гистограмма биномиального распределения с $p = 0.3$, $n = 50$.

Геометрическое распределение

Определение 4. *Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p ($X \sim \mathrm{Geom}(p)$), если*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p = q^k p \ , \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Так же, как и в случае биномиального распределения, проводится некоторое количество испытаний Бернулли с одинаковой вероятностью успеха, до первого успеха. В качестве случайной величины с геометрическим распределением берется, как правило, количество неудач до первого успеха.

Свойство отсутствия памяти

Случайная величина с геометрическим распределением обладает так называемым свойством отсутствия памяти. Неформально оно означает, что в момент проведения очередного испытания Бернулли количество прошлых неудач не влияет на количество будущих. Формально же это свойство можно сформулировать как

Утверждение 1. *Пусть* $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$, *тогда* $\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедливо:*

$$\mathbb{P}(Y > m + n \mid Y \geq m) = \mathbb{P}(Y > n),$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства:

$$\mathbb{P}(Y > m + n \mid Y \geq m) = \frac{\mathbb{P}(Y > m + n, Y \geq m)}{\mathbb{P}(Y \geq m)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y > m + n)}{\mathbb{P}(Y \geq m)} = \frac{\sum\limits_{i=m+n+1}^{\infty} q^i p}{\sum\limits_{i=m}^{\infty} q^i p} = \frac{q^{m+n+1}}{q^m} = q^{n+1}.$$

С другой стороны, правая часть равна:

$$\mathbb{P}(Y > n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} q^i p = p\frac{q^{n+1}}{1-q} = q^{n+1}.$$

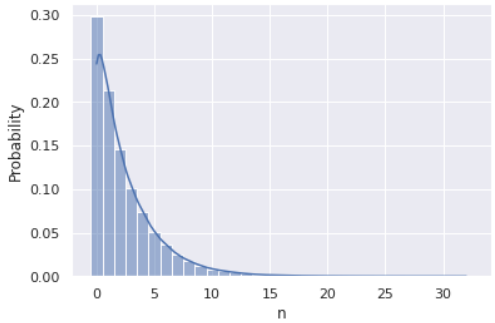
□

Для демонстрации этого свойства в Python сгенерируем массив некоторого достаточного количества геометрических случаных величин. С помощью него построим гистограмму геометрического распределения (Рис. (2a)). Зафиксируем некоторое m, и построим гистаграмму распределения вектора геометрических случайных величин из первоначального набора, значения которых больше либо равны m. В результате увидим, что при достаточно большом количестве чисел в первоначальном наборе гистограммы двух распределений приблизительно совпадают (Рис. (2b)).

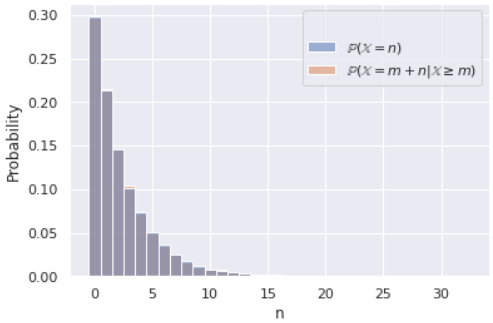
Игра в орлянку

Рассмотрим игру в орлянку. Для этого смоделируем последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, где

$$X_i = \begin{cases} 1\,, & p = \frac{1}{2} \\ -1\,, & p = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$



(a) Гистограмма геометрического распределения при $p = 0.3$



(b) Демонстрация свойства отсутствия памяти

Рис. 2

Тогда необходимая сумма представляется в виде:

$$Y(i) = \frac{X_1 + \cdots + X_i}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где n — общее число генераций.

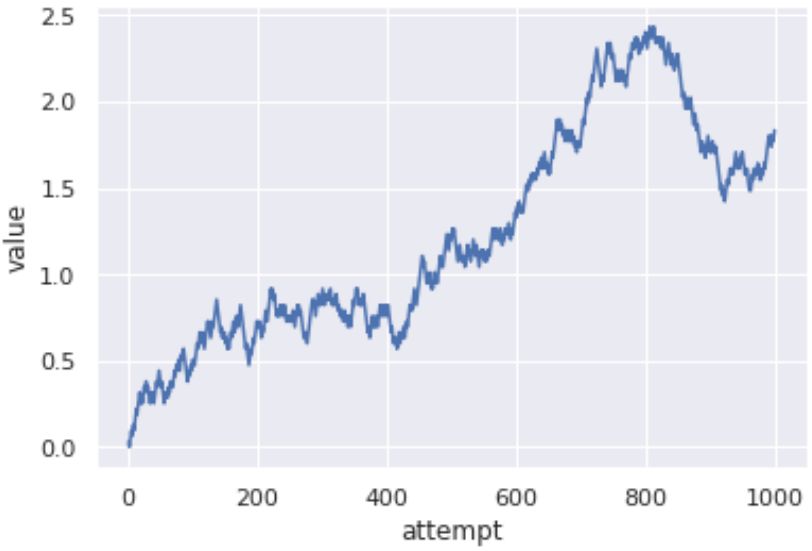


Рис. 3: Траектория суммы Y с $n = 1000$.

Оценим $Y(n)$ при $n \to \infty$. Для этого сформулируем необходимую теорему.

Теорема 1 (Центральная предельная теорема). *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание μ и диспрерсию σ^2. Пусть*

также

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathrm{N}(0,1)$$

по распределению при $n \to \infty$*, где* $\mathrm{N}(0,1)$ *— нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице.*

В случае игры Орлянки:

$$\mu = \mathbb{E}[X_i] = 0, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2] = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

Тогда поолучим, что последовательность случайных величин

$$Y_n = Y(n) = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом получаем, что $Y(n) \to \mathrm{N}(0,1)$.

Задание 2

Формулировка задания

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лесницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.

2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1-X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.

3. Вычислить значение математическое ожидание и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоритические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

Датчик канторова распределения

Распределение, имеющее в качестве функции распределения канторову лестницу — это распределение сосредоточенное на канторовом множестве или канторово распределение. Рассмотрим алгоритм построения канторова множества:
Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим интервал $(1/3, 2/3)$. Оставшееся множество обозначим через C_1. Множество $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2. Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех

четырёх отрезков, получаем C_3. Действуя аналогично далее получаем последовательность вложенных множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$.

Определение 5. *Пересечение*

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$$

называется канторовым множеством.

Из построения ясно, что канторово множество C можно определить как множество иррациональных чисел от нуля до единицы, представимое в троичной системе счисления лишь с помощью нулей и двоек. Это дает способ построения датчика канторова распределения.

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \cdot Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $Y_i \sim \text{Bern}(0.5)$.
Для программной реализации датчика в таком случае можно использовать конечные суммы достаточно большого числа слагаемых. Сгенерируем n канторовых случайных величин и построим функцию распределения получившейся выборки (Рис. (4)). Отметим, что в силу возможности реализации лишь конечных сумм в (1), среди параметров генератора присутствует eps, имеющий смысл минимальной ширины ступеньки в канторовой лестице.

Проверка корректности датчика и критерий Колмогорова

Для проверки корректности построенного датчика воспользуемся критерием Колмогорова. Статистикой критерия является величина

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)|, \tag{2}$$

где $\hat{F}_n(x)$ — это выборочная функция распределения, а $F(x)$ — функция распределения элементов выборки. Теорема Гливенко-Кантели утверждает, что для произвольной функции распределения $F(x)$ имеет место сходимость $D_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. Поэтому в случае, когда гипотеза соответствия верна, значение D_n для выборки достаточно большого размера слабо отклоняется от нуля.

Следующая теорема дает оценку для функции распределения величины $\sqrt{n}D_n$ и позволяет таким образом оценивать вероятность наблюдаемого отклонения эмпирической функции распределения от теоретической.

Теорема 2 (Теорема Колмогорова)**.** *Если функция распределения элементов выборки $F(x)$ непрерывна, то для $x > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \le x) = K(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}.$$

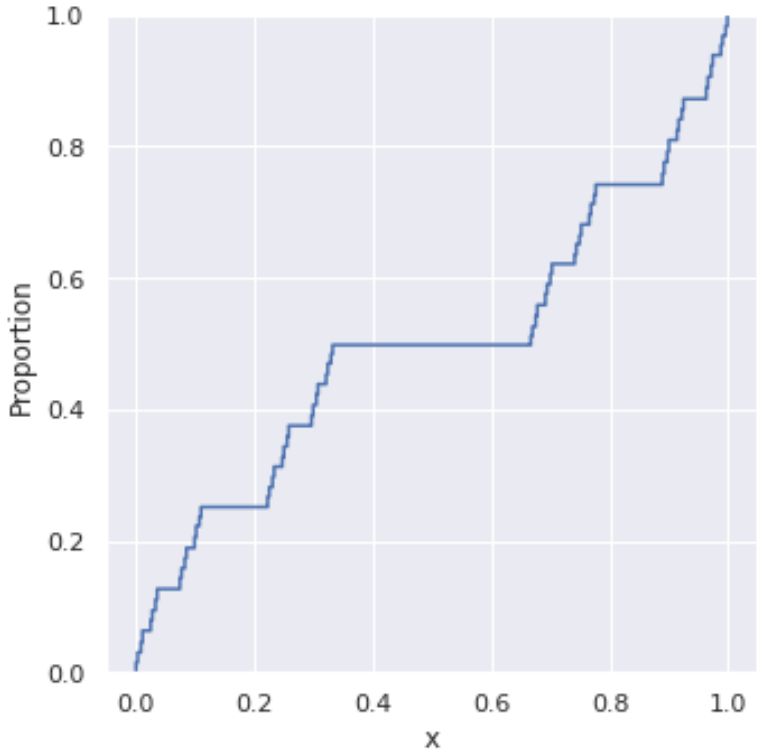


Рис. 4: Эмпирическая функция распределения сгенерированной выборки при $n = 100$

Таким образом проверка соответствия распределения может быть сведена к проверке $K(\sqrt{n}D_n)$, где D_n формируется для конкретной выборки. При заданном уровне значимости α гипотеза соответствия принимается при условии $1 - K(\sqrt{n}D_n) > \alpha$.

Так как функция распределения $F(x)$ непрерывна и неубывает, а $\hat{F}_n(x)$ — кусочно-постоянна, то sup в (2) достигается в одной из точек разрыва функции $\hat{F}_n$. Отсюда получаем формулу для вычисления $D_n(x_1, \ldots, x_n)$ заданной выборки $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$D_n(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}), F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\}.$$

Здесь $x_{(i)}$ — i-ый элемент выборки, сортированной по возрастанию.

Свойство симметрии и самоподобия

Покажем свойство симметрии канторова распределения. Пусть имеется канторова случайная величина $X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Y_i$, где $Y_i \sim \text{Bern}(0.5)$. Рассмотрим случайную

величину $1 - X$:

$$1 - X = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(1 - Y_i)}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Z_i.$$

Здесь $Z_i \sim \text{Bern}(0.5)$, поэтому случайные величины $1 - X$ и X распределены одинаково.

Покажем свойство самоподобия относительно деления на 3. Рассмотрим условное распредление канторовой случайной величины X на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. Это будет соответствовать тому, что $Y_1 = 0$. В таком случае:

$$X = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} Y_{i+1} = \{Y_i = 0\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Y_i = \frac{1}{3} X.$$

Проверка однородности и критерий Смирнова

Пусть даны два набора наблюдений $x_1, \ldots, x_2$ и $y_1, \ldots, y_m$, являющиеся реализациями некоторых наборов случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, относительно которых выполнены следующие утверждения:

1. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют общую функцию распределения $F(x)$.
2. Случайные величины $Y_1, \ldots, Y_m$ независимы и имеют общую функцию распределения $G(x)$.
3. Обе функции F и G неизвестны, но являются непрерывными.
4. Все компоненты случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ независимы.

Определение 6. *Два набора наблюдений, будем называть однородными, если для них выполнено:*

$$G(x) = F(x)$$

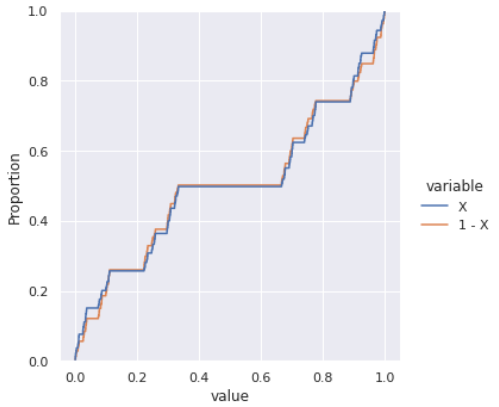
при всех x.

Для проверки гипотезы однородноси против альтернативы неоднородности в случае выполнения твержденииий (1)-(4) можно использовать критерий Смирнова, статистикой которого служит величина

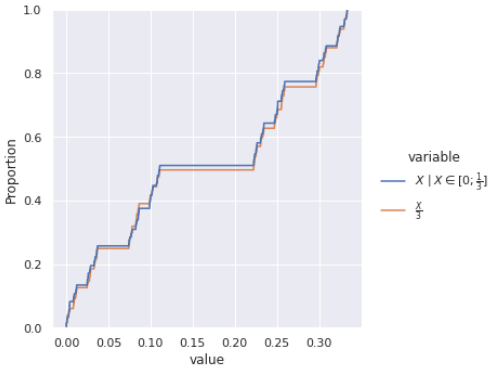
$$D_{n,m} = \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - \hat{G}_m(x) \right|,$$

где $\hat{F}_n(x), \hat{G}_m(x)$ — выборочные функции распределения, то есть $D_{n,m}$ — расстояние в равномерной метрике между эмпирическими функциями выборок.

Следующая теорема аналогично теореме Колмогорова дает оценку для функции распределения статистики $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}$ и позволяет оценивать вероятность конкретного отклонения функций двух выборок.



(a) Эмпирические функции распределения выбокок из X и $1 - X$



(b) Эмпирические функции распределения выбокок из $X|X \in [0; \frac{1}{3}]$ и $\frac{X}{3}$

Рис. 5

Теорема 3 (теорема Смирнова). *Если гипотеза однородности верна, то при выполнении условий (1)-(4), для $x > 0$ имеет место:*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \leq x\right) = K(x),$$

где $K(x)$ — функция распределения Колмогорова из Теоремы 2.

Значения статистики на реализациях $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ можно находить следующим способом:

$$D_{n,m} = \max\left\{D^+_{n,m}, D^-_{n,m}\right\},$$

где

$$D^+_{n,m} = \sup_x(\hat{F}_n(x) - \hat{G}_m(x)) = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{i}{n} - \hat{G}_m(x_{(i)})\right\},$$

$$D^-_{n,m} = \sup_x(\hat{G}_m(x) - \hat{F}_n(x)) = \max_{1\leq j\leq m}\left\{\frac{j}{m} - \hat{F}_n(y_{(j)})\right\}.$$

Применим критерий Смирнова для проверки свойства симметрии. Для этого сформируем две выборки из распределений X и $1 - X$ и применим для них критерий. Получим, что при n = 1000, eps = 0.00001 и уровне значимости $\alpha = 0.05$ гипотеза однородности принимается. Выборочные функции распределения X и $1 - X$ представлены на Рис. (5a). Аналогично поступим для проверки свойства самоподобия. Выборочные функции соответствующих величин представлены на Рис. (5b).

Математическое ожидание и дисперсия

Вычислим математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины. Как упоминалось ранее, F обладает свойством самоподобия, то есть при

$0 < x < \frac{1}{3}$ выполнено соотношение $F(x) = \frac{F(3x)}{2}$, а при $\frac{2}{3} < x < 1$ имеет место равенство $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{F(3x-2)}{2}$. Поэтому

$$\mathbb{E}[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \; dF(x) = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} x \; dF(x) + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x \; dF(x) =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} x \; dF(3x) + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x \; d(\frac{1}{2} + F(3x-2)).$$

Далее введем замену $y = 3x$ в первом интеграле и $y = 3x - 2$ во втором интеграле:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \frac{y}{3} \; dF(y) + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \frac{y+2}{3} \; dF(y) =$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_{0}^{1} y \; dF(y) + \frac{1}{6} \int\limits_{0}^{1} y \; dF(y) + \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{1} dF(y) = \frac{1}{3}\mathbb{E}[\xi] + \frac{1}{3}.$$

Таким образом, получаем $\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{2}$.

Аналогичным способом с использованием свойства самоподобия вычислим дисперсию величины ξ, используя вычисленное значения математического ожидания.

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} x^2 \; dF(x) + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x^2 \; dF(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{y}{3}\right)^2 \; dF(y) + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dF(y) =$$

$$= \frac{1}{9}\mathbb{E}[\xi^2] + \frac{2}{9}\mathbb{E}[\xi] + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}\mathbb{E}[\xi^2] + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}.$$

То есть имеем $\mathbb{E}[\xi^2] = \frac{3}{8}$. Таким образом, получаем значение дисперсии $\mathbb{D}[\xi] = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

На Рис. (6) демонстрируется сходимость выборочного матожидания и выборочной дисперсии к их теоретическим значениям, вычисленным выше, при увеличении размера выборки.

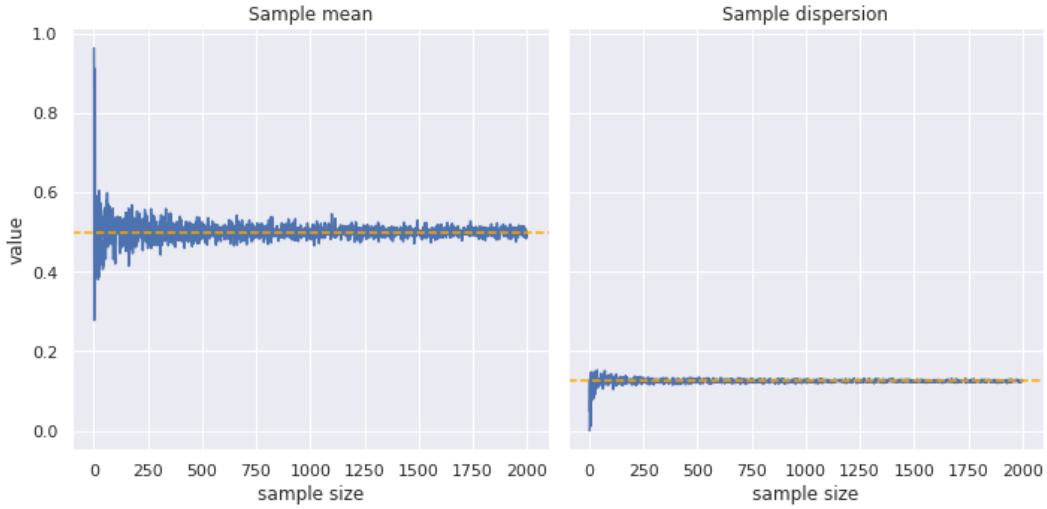


Рис. 6: Сходимость выборочных значений матожидания и дисперсии к теоретическим.

Задание 3

Формулировка задания

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимо экспоненциально распределенные с. в. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.

3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.

4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

Датчик экспоненциального распределения

Определение 7. *Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 4 (Метод обратной функции). *Пусть функция распредления F имеет обратную F^{-1}. Тогда функцией распределения случайной величины*

$$X = F^{-1}(Y),$$

где $Y \sim \mathbb{U}[0,1]$, является F.

Доказательство. Найдем функцию распределения X:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(F^{-1}(Y) < x) = \mathbb{P}(Y < F(x)) = F(x).$$

□

В случае экспоненциального распределения функция распределения (3) удовлетворяет условиям теоремы и обратная к ней легко выражается:

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y).$$

Суперпозиция $F(Y)$,где $Y \sim \mathbb{U}[0,1]$ является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ:

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y) \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

На Рис.(7) приведено сравнение полученной эмпирически, с помощью построенного датчика, плотности экспоненциального распределения и его теоретической плотности, представимой в виде:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

при $\lambda = 0.5$.

Свойство отсутствия памяти

Экспоненциальное распределение, как и его дискретный аналог — геометрическое, обладает свойством отсутствия мапяти, которое в данном случае можно сформулировать как

Утверждение 2. *Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ обладает свойством отсутствия памяти, то есть $\forall s,t \geq 0$ следует, что*

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s). \tag{4}$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t, X \geq t}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(t \geq t)} = \mathbb{P}(X \geq s).$$

Таким образом, получаем:

$$\mathbb{P}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(X \geq s). \tag{5}$$

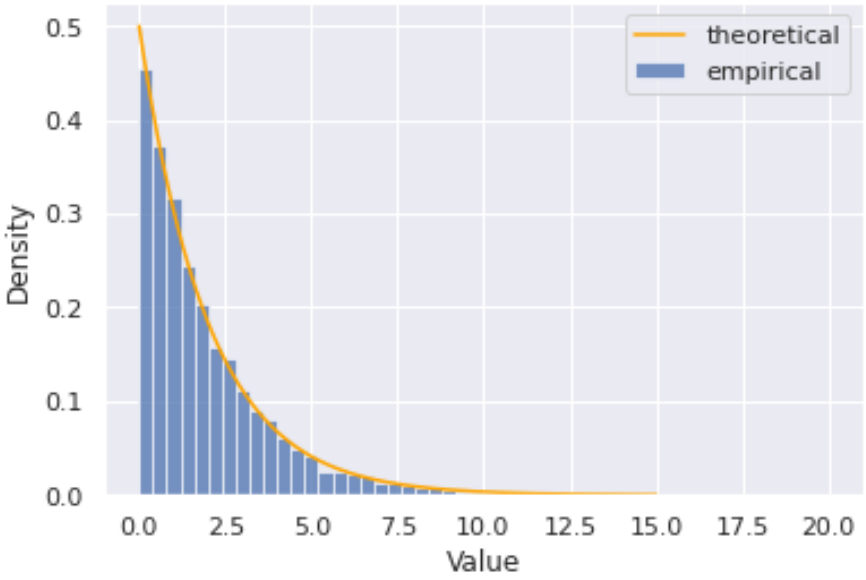


Рис. 7: Эмпирическая и теоретическая плотности экспоненциального распределения при $\lambda = 0.5$.

Для экспоненциально распределенной случайной величины верно, что:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, \quad \mathbb{P}(X \geq s + t) = e^{-\lambda(s+t)}.$$

Следовательно, для (5) выполняется:

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия памяти. □

На Рис.(8), аналогично геометрическому распределению, данное свойство проиллюстрировано эмпирически.

Случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Утверждение 3. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые экспоненциально распределённые случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Тогда случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.*

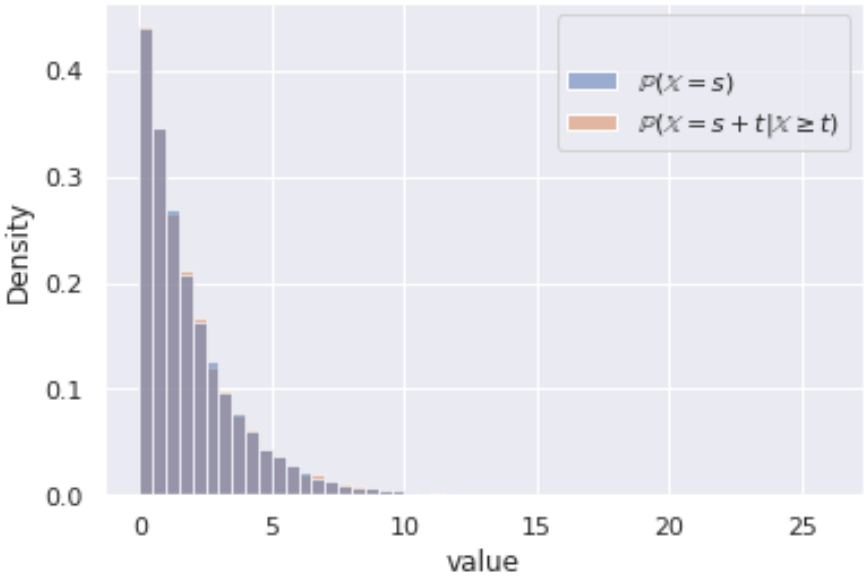


Рис. 8: Эмпирическая иллюстрация свойства отсутствия памяти при t = 2.

Доказательство.

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y > x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > x) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = \{X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ независимы}\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \cdot \mathbb{P}(X_2 > x) \cdot \ldots \mathbb{P}(X_n > x) =$$
$$= 1 - (1 - F_{X_1}(x)) \cdot (1 - F_{X_2}(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - F_{X_n}(x)) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot \cdots \cdot e^{-\lambda_n x} = 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x}.$$

□

Эмпирическая демонстрация этого факта для n = 4, и случайно сгенерированных в интервале от 0 до 0.1 параметров λ_i приведена на Рис.(9).

Датчик пуассоновского распределения

Определение 8. *Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Удобный метод построения датчика пуассоновского распределения даёт следующая

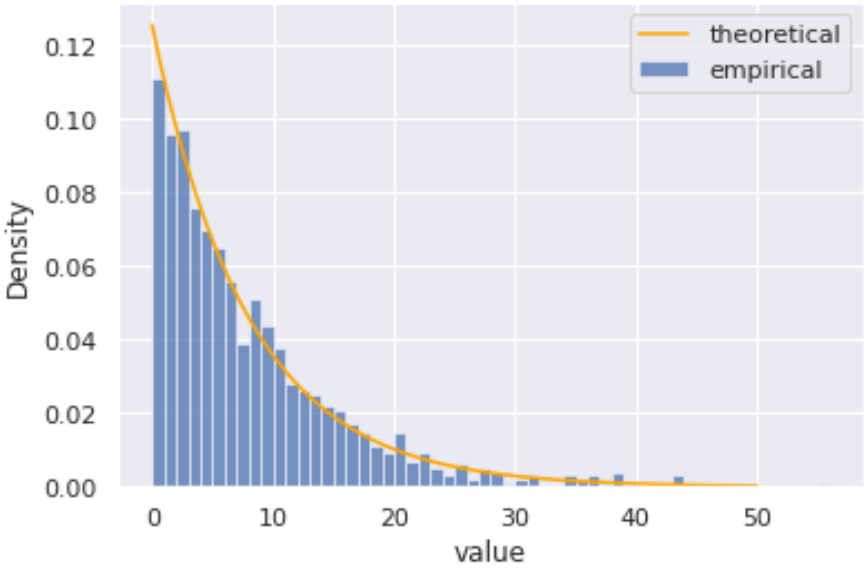


Рис. 9: Расределение $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

Теорема 5. [1] *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \sim Exp(\lambda)$ — независимые одинаково распредленные случайные величины. Тогда случайная величина, определенная следующим образом:*

$$Y = \max(n \mid S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n < 1)$$

имеет распределение Пуассона с параметром λ. При этом полагается $Y = 0$, если таких n не существует.

Таким образом для моделирования случайной величины Пуассона можно последовательно генерировать показательные случайные величины, пока их сумма не станет больше единицы. Количество сгенерированных экспоненциальных величин минус один и будет значением пуассоновской случайной величины. На Рис.(10) изображено сравнение распределения выборки полученной с помощью построенного вышеописанным способом датчика и теоретической функции вероятности.

Датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения

Другой способ моделирования пуассоновской случайной величины основывается на следующей предельной теореме, связывающей распределение Пуассона с биномиальным распределением. Пусть

$$P_n(k) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & k = n+1, n+2, \ldots, \end{cases}$$

[1] Доказательство теоремы можно найти в [2] на стр. 34.

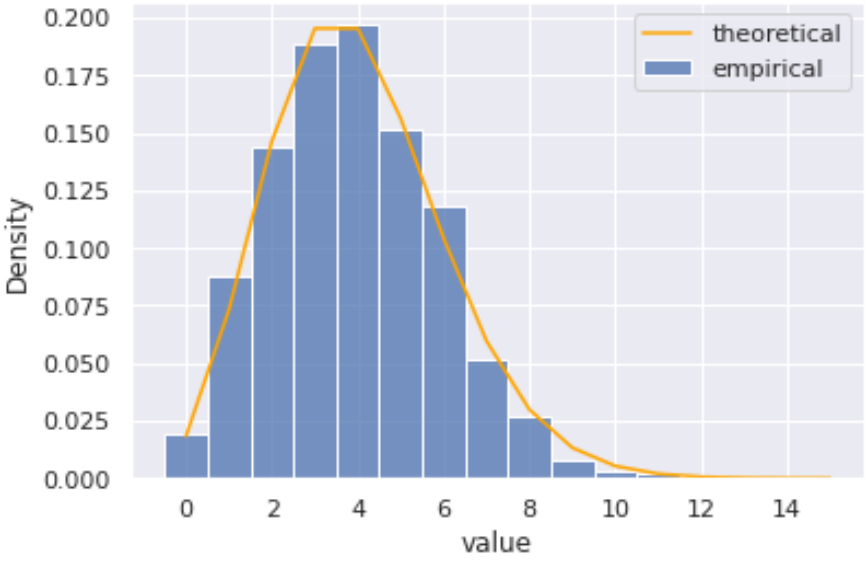


Рис. 10: Эмпирическая и теоретическая плотности распределения Пуассона при $\lambda = 4$.

и пусть p является функцией от n, $p = p(n)$.

Теорема 6 (Пуассона). [2] *Пусть* $p(n) \to 0, n \to \infty$, *причем так, что* $np(n) \to \lambda$, *где* $\lambda > 0$. *Тогда для любого* $k = 0, 1, \ldots$

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом строить датчик распределения Пуассона с параметром λ можно с помощью датчика биномиального распределения при $p = \dfrac{\lambda}{n}$ и больших значениях n. На Рис.(11) проиллюстрировано достаточно хорошее совпадение распределений $\mathrm{Bin}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ и $\mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n = 10000, \lambda = 10$.

Проверка корректности датчика и критерий хи-квадрат Пирсона

Проверим корректность построенного с помощью биномиального распределения датчика. Для этого воспользуемся криетрием хи-квадрат Пирсона, но для начала дадим необходимые определения.

Определение 9. *Пусть случайные величины* $Z_1, \ldots, Z_k$ *распределены по стандартному нормальному закону* $\mathcal{N}(0, 1)$ *и независимы. Тогда распределние случайной величины* $R_k^2 = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ *называют распределением хи-квадрат с* k *степенями свободы(кратко:* $R_k^2 \sim \chi_k^2$*).*

[2] Доказательство этой теоремы можно найти в [3] на стр. 90.

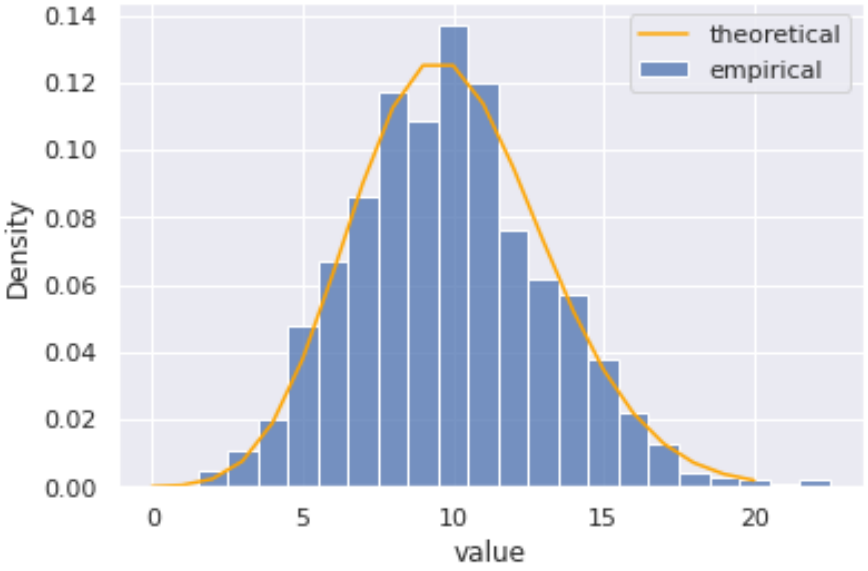


Рис. 11: Демонстрация предельного совпадения биномиального и пуассоновского распределений при $n = 10000, \lambda = 10$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из закона с функцией распределения $F(x)$. Разобьем множество значений X_1 на N промежутков(возможно бесконечных) $\delta_j = (a_j, b_j], \quad j = 1, \ldots, N$. В случае дискретных распределений вместо промежутков значений можно рассматривать отдельные значения. Положим $p_j = \mathbb{P}(X_1 \in \delta_j)$, а случайные величины ν_j — равными количеству элементов выборки в δ_j ($\nu_1 + \cdots + \nu_N = n$). Функция F неизвестна и проверяется гипотеза

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

где F_0 — заданная функция распределения. Если гипотеза верна, то согласно закону больших чисел частоты попадания в промежутки $\hat{p}_j = \dfrac{\nu_j}{n}$ при достаточно больших n должны быть близки к соответствуюшим вероятностям $p_j^0 = F_0(b_j) - F_0(a_j)$. В качетсве меры отклонения от гипотезы H_0 принимается статистика

$$X_n^2 = n \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j^0} (\hat{p}_j - p_j^0)^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(\nu_j - n p_j^0)^2}{n p_j^0},$$

которая по сути является взвешенной суммой квадратов отклонений частот от гипотетических вероятностей. В силу центральной предельной теоремы каждое отклонение асимптотически нормально и имеет порядок малости $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому представляется правдоподобной следующая

Теорема 7. [3] *Если* $0 < p_j^0 < 1, \quad j = 1, \ldots, N$, *то при* $n \to \infty$

$$X_n^2 \xrightarrow{d} \zeta \sim \chi_{N-1}^2.$$

Здесь сходимость понимается в смысле сходимости по распределению. Аналогично теореме Колмогорова, данная теорема позволяет оценивать вероятность отклонения, задаваемого статистикой Пирсона, посчитанного для конкретной выборки и, в зависимости от необходимого уровня значимости, принимать или отвергать гипотезу H_0.

Датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты

Определение 10. *Случайная величина* X *имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами* μ *и* σ^2, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *(*μ *— математическое ожидание* X, σ^2 *— дисперсия* X*), если ее плотность распределения задается формулой*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Определение 11. *Нормальное распределение с параметрами* $a = 0$ *и* $\sigma^2 = 1$ *называется стандартным нормальным распределением, и ее плотность распределения имеет следующий вид:*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Рассмотрим способ точного моделирования, базирующийся на нелинейном преобразовании пары независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин η_1, η_2 в пару независимых $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин X, Y:

$$X = \sqrt{-2\ln\eta_1}\cos(2\pi\eta_2), \quad Y = \sqrt{-2\ln\eta_1}\sin(2\pi\eta_2)$$

Доказательство. Для независимых $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин X и Y плотность вектора (X, Y) служит

$$p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Обозначим через R и Φ полярные координаты точки (X, Y) : $X = R\cos\Phi$, $Y = R\sin\Phi$. Воспользуемся далее формулой преобразования плотности:

$$p_\eta(y) = |J(y)| p_\xi(f^{-1}(y)),$$

[3] Доказательство этой теоремы можно найти в [1] на стр. 274.

где $J(y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_k^{-1}}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_k} & \dots & \frac{\partial f_k^{-1}}{\partial y_k} \end{pmatrix}$ — якобиан f^{-1}.

Находим(в данном случае якобиан замены равен r)

$$p_{(R,\Phi)}(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r, \quad r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Так как она распадается в произведение плотностей

$$p_R(r) = r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{I}_{\{r>0\}} \text{ и } p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{I}_{\{0<\varphi<2\pi\}},$$

то R и Φ независимы. Интегрируя плотности, вычисляем функцию распределения

$$F_R(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}, \quad \text{при } r \geq 0 \text{ и } F_\Phi(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Методом обратной функции (Теорема 4) получаем формулы для моделирования случайных величин R и Φ : $R = \sqrt{-2\ln \eta_1}$, $\Phi = 2\pi\eta_2$, которые остается подставить в формулы замены координат. □

Будем генерировать стандартные номально-распределенные случайные величины с помощью полученных явно их выражений. Сравнение плотности полученной выборки и теоретической плотности приведено на Рис.(12).

Критерий Фишера и t-критерий Стьюдента

Проверим равенство дисперсий и матожиданий пары случайных величин построенных с помощью такого датчика. Для этого воспользуемся критерием Фишера и t-критерием Стьюдента.

Определение 12. *Случайная величина ζ имеет F-распределение(Фишера-Снедекора) с k_1 и k_2 степенями свободы(обозначается $\zeta \sim F_{k_1,k_2}$), если*

$$\zeta = \left(\frac{1}{k_1}\xi\right) \Big/ \left(\frac{1}{k_2}\eta\right),$$

где $\xi \sim \chi^2_{k_1}$, $\eta \sim \chi^2_{k_2}$, ξ и η независимы.

Определение 13. *Пусть случайные величины Z и R_k^2 независимы и распределены согласно законам $\mathcal{N}(0,1)$ и χ_k^2 соответственно. Тогда распределение случайной величины $T_k = Z/\sqrt{R_k^2/k}$ называют распределением Стьюдента с k степенями свободы или t-распределением (кратко $T_k \sim t_k$).*

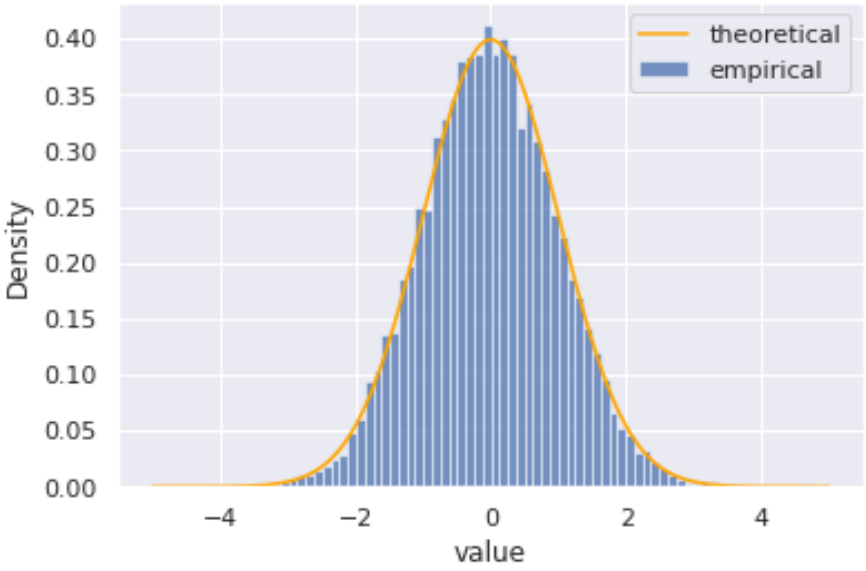


Рис. 12: Демонстрация совпадения сгенерированного стандартного нормального распределения с теоретическим при размере выборки $n = 10000$.

Критерий Фишера по сути может быть сформулирован следующим образом. Если гипотеза $H' : \sigma_1 = \sigma_2$, μ_1 и μ_2 — любые верна, то статистика S_1^2/S_2^2 распределена по закону $F_{n-1,m-1}$. Здесь

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2$$

— несмещенные оценки для дисперсий σ_1^2 и σ_2^2. Это утверждение опирается на определение распределения Фишера и следующую теорему.

Теорема 8. [4] *Для нормальной выборки $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ Выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ и выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$ независимы, причем $nS^2/\theta_2^2 \sim \chi^2_{n-1}$, а $\sqrt{n-1}(\overline{X} - \theta_1)/S \sim t_{n-1}$.*

В силу этой теоремы $(n-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2_{n-1}$, $(m-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2_{m-1}$, и следовательно формулировка критерия Фишера верна. Отметим, что критерий Фишера имеет двустороннюю критическую область, поэтому сравнение статистики для отвержения или принятия гипотезы в этом случае нужно проводить и с $\frac{\alpha}{2}$ - квантилью и с $1 - \frac{\alpha}{2}$ - квантилью распределения Фишера-Снедекора.

Проверим теперь равенство математических ожиданий с помощью критерия Стьюдента. Обозначим неизвестную общую дисперсию через σ^2. Так как распределение

[4] Доказательство этой теоремы можно найти в [1] на стр. 149.

хи-квадрат является частным случаем гамма-распределения ($\chi^2_k \sim \Gamma(k/2, 1/2)$), получаем

$$\sigma^{-2}\left[(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2\right] \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Поскольку математическое ожидание закона χ^2_{n+m-2} равно $n+m-2$, статистика $S^2_{tot} = \left[(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2\right]/(n+m-2)$ несмещенно оценивает σ^2 по объединенной выборке.

При справедливости гипотезы $H'' : \mu_1 = \mu_2$ ввиду независимости выборок имеем: $\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathcal{N}(0, (1/n + 1/m)\sigma^2)$. Отсюда согласно определению закона Стьюдента:

$$T = \left(\overline{X} - \overline{Y}\right) \Bigg/ \left(S_{tot}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right) = \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) \Big/ S_{tot} \sim t_{n+m-2}.$$

Это приводит к критерию Стьдента, позволяющему проверить гипотезу H''. Отметим также, что данный критерий, как и критерий Фишера имеет двустороннюю критическую область.

Задание 4

Формулировка задания

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции normal probabitity plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданях 3 и 4.

Датчик распределения Коши

Определение 14. *Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами a и b, если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{1}{2}.$$

Плотность распределения Коши:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Функция распределения $F_X(x)$ обладает обратной, а значит в данном случае для моделирования распределения можно пользоваться методом обратной функции

(Теорема (4)). Обратная функция для $F_X(x)$ равна $F_X^{-1}(y) = a + b\tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$. Следовательно, в качестве датчика распределения Коши можно построить датчик случайной величины $X = F_X^{-1}(Y)$, где $Y \sim U[0,1]$. На Рис.(13) продемонстрировано совпадение эмпирической и теоретической функций распределения для распределения Коши, полученного построенным датчиком.

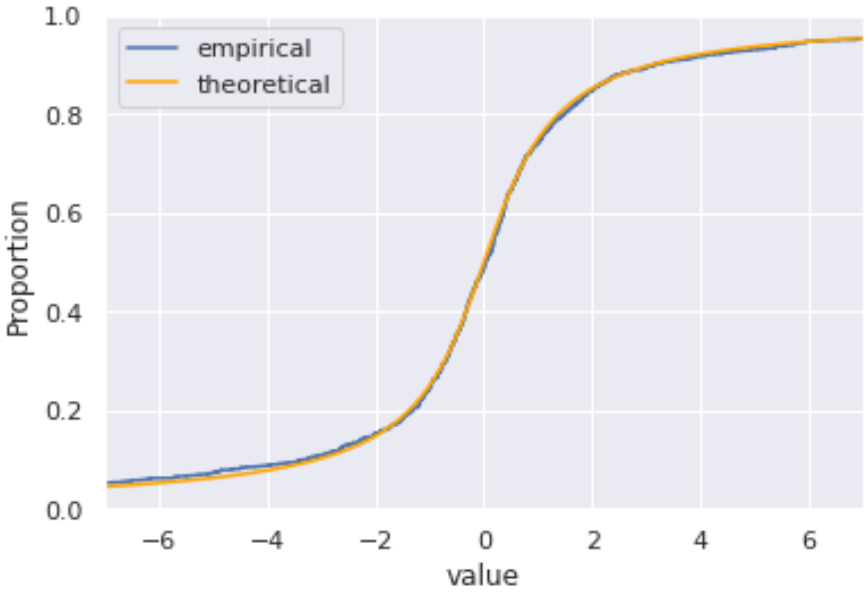


Рис. 13: Демонстрация совпадения эмпирической и теоретической функций распределения для распределения Коши. Размер выборки: $n = 1000$.

Метод фон Неймана

Метод фон Неймана заключается в моделировании нормального распределения путём мажорирования плотностью распределения Коши с параметрами a и b. Для достижения наилучшей оценки, будем подбирать параметры a и b.
Плотность стандартного нормального распределения $p_1(x)$ и плотность распределения Коши $p_2(x)$ выглядят следующим образом:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

При моделировании будем следовать алгоритму:

1. возьмем некоторое число $k > 0$, такое что $p_1(x) \leq k p_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$,

2. рассмотрим значение случайной величины $x = X, X \sim Cauchy(a, b)$,

3. сгенерируем случайную величину $y = Y(x) \sim Bern\left(\frac{p_1(x)}{kp_2(x)}\right)$,

4. если $y = 1$, то x — значение из распределения с плотностью $p_1(x)$, иначе — продолжаем моделирование, начиная с пункта 2).

Данный алгоритм работает тем быстрее, чем ближе отношение $\frac{p_1(x)}{kp_2(x)}$ к единице, поэтому в качестве k возьмем $k^* = \min\limits_{a,b} \max\limits_{x} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$. Рассмотрим отношение

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} e^{-\frac{x^2}{2}} \left((x-a)^2 + b^2\right).$$

Пусть $a = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(x^2 + b^2\right).$$

Найдем максимум этой функции:

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} x \left(2 - b^2 - x^2\right) = 0,$$

следовательно, точки экстремума:

$$\left[\begin{array}{r} x = 0, |b| > \sqrt{2}, \\ x = \pm\sqrt{2 - b^2}, 0 < |b| \leq \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$k* = \min\left\{ \min_{|b|>\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} b, \min_{0<|b|<\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{b} e^{\frac{b^2}{2}-1} \right\}.$$

Поскольку $k > 0$, то и $b > 0$. Найдем максимум вспомогательной функции

$$h(b) = \frac{e^{\frac{b^2}{2}-1}}{b} :$$

$$h'(b) = \frac{1 - b^2}{b^2} e^{\frac{b^2}{2}-1},$$

следовательно, поскольку $b > 0$, точкой экстремума является $b = 1$.
Получаем оптимум при $a^* = 0$, $b^* = 1$:

$$k^* = \min\left\{\sqrt{\pi}, \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

Докажем, что $a = 0$ — оптимальное значение параметра.

$$k^* = \min_{a,b} \max_x \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} e^{-\frac{x^2}{2}} \left((x-a)^2 + b^2 \right) \right) =$$

$$= \min_a \left\{ \min_{b>\sqrt{2}} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\Big|_{x=0}, \min_{0<b\leq\sqrt{2}} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\Big|_{x=\pm\sqrt{2-b^2}} \right\} >$$

$$> \min_a \left\{ min_{b>\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} \left(a^2 + b^2 \right), \min_{0<b\leq\sqrt{2}} \left(\sqrt{2-b^2} + |a| \right) \right\} \quad (6)$$

Минимум выражения достигается при $a = 0$.

Иллюстрация работы построенного датчика, использующая Python функцию scipy.stats.probplot, представлена на Рис. (14). На оси ординат откладываются точки выборки, на оси абсцисс — квантили стандартного нормального распределения. Прямой линии соответствует "точное"нормальное распределение, наилучшим образом приближающее, в смысле указанных осей, значения выборки. Видно, что полученная с помощью датчика Фон-Неймана выборка следует стандартному нормальному распределению.

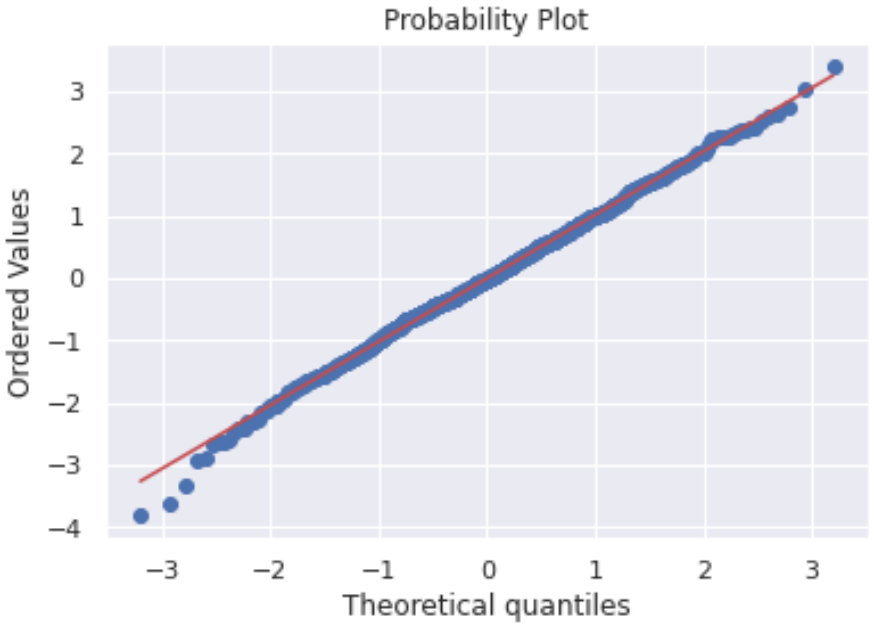


Рис. 14: Демонстрация совпадения построенного с помощью метода Фон-Неймана распределения со стандартным номральным при размере выборки $n = 1000$.

Возьмем далее случайную величину $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ее функция распределения

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Введем замену переменной $s = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$. Тогда

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

где $F(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Таким образом, квантили различных распределений связаны между собой линейно, что означает, что любую нормальную случайную величину $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ можно представить в виде $\xi = \sigma\eta + \mu$, где $\eta \sim N(0,1)$, а прямая в функции probplot будет прямой со сдвигом μ и с коэффициентом наклона σ.

Сравнение времени работы

На Рис. (15) приведен график сравнения скорости работы датчика стандартного нормального распределения с моделированием случайных величин парами и датчика, построенного методом Фон-Неймана.

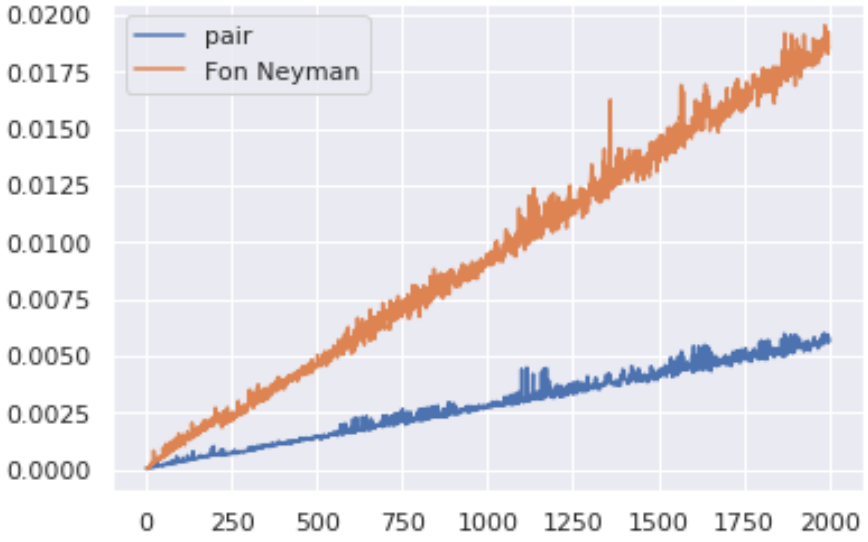


Рис. 15: Зависимость времени моделирования от размера генерируемой выборки.

Задание 5

Формулировка задания

1. Пусть $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т.е. исследовать поведение суммы S_n и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right).$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестными, для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b. Проверить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n. Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

Закон больших чисел и центральная предельная теорема для нормального распределения

Список литературы

[1] Лагутин М. Б. *Наглядная метематическая статистика*, Бином. М.: 2009.

[2] Кропачёва Н. Ю., Тихомиров А. С. *Моделирование случайных величин*, НовГУ им. Ярослава Мудрого. Великий Новгород: 2004.

[3] Ширяев А. Н. *Вероятность*, МЦНМО. М.: 2007.