1 定义

1. 常用集合
    - 整数集：$\mathbf{Z}$
    - 自然数集：$\mathbf{N}$
    - 正整数集：$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$
    - 有理数集：$\mathbf{Q}$
    - 正有理数集：$\mathbf{Q}_+$ 或 $\mathbf{Q}^*$
    - 实数集：$\mathbf{R}$
    - 正实数集：$\mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{R}^*$
    - 复数集：$\mathbf{C}$
    - n 维实数集：$\mathbf{R}^n$
    - 在某集合 I 上连续的函数的集合：C_I
    - 在某集合 I 上 n 阶可导的函数的集合：D_I^n
    - 在某集合 I 上 n 阶导数连续的函数的集合：$C_I^{(n)}$
    - 在某集合 I 上 Riemann 可积的函数的集合：R_I

2. 邻域
    对于实数 a,a 的**邻域** $N(a)$ 为以 a 为元素之一的一个开区间。
    以 a 为右端点的一个开区间 $N_-(a)$ 称为 a 的**左邻域**。
    以 a 为左端点的一个开区间 $N_+(a)$ 称为 a 的**右邻域**。
    对于 n 维实数集 $\mathbf{R}^n$ 来说，点 P_0 的邻域为

    $$N(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n|\rho(P,P_0)<\delta\}$$

3. 去心邻域
    对于实数 a,a 的**去心邻域** $\mathring{N}(a)$ 为 a 的邻域去除 a 这个点。
    对于 n 维实数集 $\mathbf{R}^n$ 来说，点 P_0 的去心邻域为

    $$\mathring{N}(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n|0<\rho(P,P_0)<\delta\}$$

4. 集合的界
    设 $A\subset\mathbf{R}$,$A\neq\varnothing$, 若 $\exists L\in\mathbf{R}$, 使得 $\forall x\in A$, 都有 $x\leq L$(或 $x\geq L$), 则称数集 A **有上 (下) 界**，并称 L 为 A 的一个**上界（下界）**，若数集 A 既有上界又有下界，则称 A **有界**，否则称 A **无界**。
    Remark
    集合的界不一定唯一。比如说，对于闭区间 $[0,1]$, 它的上界是区间 $[1,+\infty)$.

5. 集合的确界
    设 $A\in\mathbf{R}$,$A\neq\varnothing$, 如果存在数 β(或 α) 满足下列条件：
    - $\forall x\in A$, 有 $x\leq\beta$(或 $x\geq\alpha$)
    - $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A$, 使 $x_0>\beta-\varepsilon$(或 $x_0<\alpha+\varepsilon$)

则称 β 为数集 A 的**上确界** (或 α 为 A 的**下确界**)，记为 $\beta = \sup A$(或 $\alpha = \inf A$).

Remark

集合的确界不一定在集合之内能被取到。比如说，开区间 $(0,1)$ 的上确界是 1，却不在集合之内。

与集合的上下确界对应的，集合的**最大值**、**最小值**，分别记作 $\max A$,$\min A$.

6. 映射

   设 A, B 是两个非空的集合，若存在一个对应法则 f, 使得对于每个 $x \in A$, 按照 f, 在 B 中有唯一的一个元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**。记作 $f : A \to B$.

   称 y 为 x 在映射 f 下的**像**，x 为 y 在映射 f 下的一个**原像**，集合 A 为映射 f 的**定义域**。对于任意 A 的非空子集 X, 集合 $\{y|y = f(x), x \in X\}$ 称为 A 在映射 f 下的**像**，记作 $f(X)$. 集合 $f(A)$ 称为映射 f 的**值域**。

   设有映射 $f : A \to B$:

   - 若 $B = f(A)$, 则称 f 是 A 到 B 的**满射**
   - 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 A 到 B 的**单射**
   - 若 f 既是满射又是单射，则称 f 是 A 到 B 的**一一映射**

   设有一一映射 $f : A \to B$, 则我们定义以下映射：它将每个 $y \in B$ 对应于 $x \in A$, 其中 x 满足 $f(x) = y$, 则称该映射为 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}.

   Remark

   - 映射的定义域只需要是非空集合，不一定是数集。
   - 原像不一定唯一。

7. 函数

   设 $A \in \mathbf{R}^m$,$B \in \mathbf{R}^n$, 则称映射 $f : A \to B$ 为定义在 A 上的 **m 元 n 维函数**，通常简记为 $y = f(x), x \in A$.

   称 $x(x \in A)$ 为函数的**自变量**，$y(y \in f(A))$ 为函数的因变量，$f(x)$ 为函数 f 在 x 处的**函数值**，A 为函数的**定义域**，$f(A)$ 为函数的**值域**。

   特别地，当 $m = n = 1$ 时，称 f 为**一元函数**，简称为**函数**；当 $m = 1$ 时，称 f 为 n **元向量函数**。

8. 函数的性质

   - 有界性

     设函数 f 的定义域为 D, 集合 $X \in D$, 若 $\exists L \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in X$, 都有

     $$f(x) \leq (\geq) L,$$

     则称函数 f 在 X 上**有上 (下) 界**，并称 L 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**上 (下) 界**。

     若函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称函数 f 在 X 上**有界**，否则，称 f 在 X 上**无界**。

     Remark

     函数的有界和函数值有限并不完全一致。存在一个处处有限 (即每一点上都有定义) 的函数，但它无界：

     $$f(x) = \begin{cases} q & x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$

其中 $(p,q)=1$ 代表 p 和 q 互质。再举一例：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$$

- 单调性
  设函数 f 的定义域为 D, 集合 $I\in D$, 若 $\forall x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时，总有
  $$f(x_1)\leq f(x_2)(\text{或}f(x_1)\geq f(x_2)),$$
  则称函数 f 在 I 上是**单调增加 (或单调减少)** 的。
  若 $\forall x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时，总有
  $$f(x_1)<f(x_2)(\text{或}f(x_1)>f(x_2)),$$
  则称函数 f 在 I 上是**严格单调增加 (或严格单调减少)** 的。
- 凹凸性
  设函数 f 的定义域为 D, 集合 $I\in D$, 若 $\forall x_1,x_2\in I$,$\forall\lambda\in[0,1]$, 总有
  $$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)(\text{或}f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)),$$
  则称 f 在 I 上**上凸（或下凸)**。
  若 $\forall x_1,x_2\in I$,$\forall\lambda\in[0,1]$, 总有
  $$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)(\text{或}f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)),$$
  则称 f 在 I 上**严格上凸（或严格下凸)**。
- 奇偶性
  - 一元函数
    设函数 f 的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x\in D$, 有
    $$f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x)),$$
    则称 $f(x)$ 是**偶函数 (奇函数)**。
  - 多元函数
    设函数 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 的定义域 D 关于 x_i 轴对称，若 $\forall M\in D$, 有
    $$\begin{gathered}f(x_1,x_2,\dots,-x_i,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)\\(f(x_1,x_2,\dots,-x_i,\dots,x_n)=-f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n))\end{gathered}$$
    则称 $f(x)$ 是关于 x_i 的**偶函数 (奇函数)**。
- 周期性
  设函数 f 的定义域为 D, 若 $\exists T\in\mathbf{R}$, 使 $\forall x\in D$, 有 $x+T\in D$, 且
  $$f(x+T)=f(x),$$
  则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**。
  Remark
  存在没有最小正周期的函数：
  $$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}.$$
  一切有理数都是它的周期。

9. 基本初等函数

   幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**。

10. 初等函数

    由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所得到的函数称为**初等函数**。

    Remark

    一般来说，分段点处有定义且间断的分段函数都不是初等函数。

11. 数列的极限

    - 设 $\{a_n\}$ 为一数列，a 为一常数，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,$ 使得 $n>N$ 时，恒有
    $$|a_n-a|<\varepsilon,$$
    则称数列 $\{a_n\}$ **以 a 为极限**，数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a, 记为
    $$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$
    - 设 $\{a_n\}$ 为一数列，如果 $\forall G>0,\exists N\in N^*,$ 使得 $n>N$ 时，恒有
    $$a_n>G,$$
    则称数列 $\{a_n\}$ **以正无穷为极限**，数列 $\{a_n\}$ **趋于正无穷**, 记为
    $$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty.$$
    - 设 $\{a_n\}$ 为一数列，如果 $\forall G>0,\exists N\in N^*,$ 使得 $n>N$ 时，恒有
    $$a_n<-G,$$
    则称数列 $\{a_n\}$ **以负无穷为极限**，数列 $\{a_n\}$ **趋于负无穷**, 记为
    $$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty.$$

    Remark

    - 在用定义证明数列极限的时候，注意要将 N 取为正整数（通常情况下是取整后 +2）。
    - 尽管数列的极限是在 n 趋于正无穷时的极限，但在极限记号中仍记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 而非 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$.
    - 数列极限为正负无穷的时候，极限不存在，数列不收敛。

12. 函数的极限

    - 设函数 f 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to x_0$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**极限**。记为
    $$\lim_{x\to x_0}f(x)=a.$$
    - 设函数 f 在 x_0 的某左邻域 $N_-(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to x_0^-$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**左极限**。记为
    $$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a.$$

- 设函数 f 在 x_0 的某右邻域 $N_+(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,$ 使 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon,$ 则称当 $x \to x_0^+$ 时，函数 f **以** a **为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**右极限**。记为
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a.$$
- 设函数 f 在 $x \geq \alpha(\alpha \in \mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使 $x > X$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon,$ 则称当 $x \to +\infty$ 时，函数 f **以** a **为极限**，a 为 $x \to +\infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a.$$
- 设函数 f 在 $x \leq \alpha(\alpha \in \mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon,$ 则称当 $x \to -\infty$ 时，函数 f **以** a **为极限**，a 为 $x \to -\infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a.$$
- 设函数 f 在 $|x| \geq \alpha(\alpha \in \mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon,$ 则称当 $x \to \infty$ 时，函数 f **以** a **为极限**，a 为 $x \to \infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

类似地可以定义**以无穷、正无穷、负无穷为极限**。

Remark

- 函数在某点处的极限 (左极限、右极限) 与函数在该点处的函数值无关，甚至函数在该点处可以没有定义。可以从定义中的 “去心邻域”、“$0 < |x - x_0|$” 看出。
- 极限为无穷、正无穷、负无穷时，极限不存在。
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a.$
- 在求极限时，一定要分清极限变量和其他变量。lim 符号下面的变量，一定不会在最终结果 (即不带 lim 符号的函数) 中出现。
- 一个比较常见的求左右极限的题目，是求含有 $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ 和 $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ 的极限.

13. 无穷小量

若 $\lim X = 0,$ 则称 X 是该极限过程中的**无穷小量**。

设 X 和 Y 是同一极限过程中的两个无穷小量, 且 $Y \neq 0.$

- 若 $\lim \dfrac{X}{Y} = 0,$ 则称 X 是 Y 的**高阶无穷小**, 记为 $X = o(Y).$
- 若 $\lim \dfrac{X}{Y} = c \neq 0,$ 则称 X 与 Y 是**同阶无穷小**，记为 $X = O(Y).$
- 若 $\lim \dfrac{X}{Y} = 1,$ 则称 X 与 Y 是**等价无穷小**，记为 $X \sim Y.$
- 若 $\lim \dfrac{X}{Y^k} = c \neq 0,$ 则称 X 是 Y 的 k **阶无穷小**.

Remark

这里的等号 “=” 都不是一般意义上的等号。更多意义上，这个等号可以理解成语言中的 “是”。$X = o(Y)$ 即为 “X 是 Y 的高阶无穷小”。这样的话，一些诸如 $o(x) + o(x) = o(x)$ 的公式才能理解得通。

14. 无穷大量
设函数 f 在 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义，若 $\forall G>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>G$, 则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**。
Remark

- 若 f 为正无穷大量或负无穷大量, 则其一定为无穷大量。
- 若 $\forall G>0,\exists\delta>0$, 存在 $0<|x-x_0|<\delta$, 使 $|f(x)|>G$, 则是 f 不一定是无穷大量。例如：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$\forall G>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{2[\frac{G}{2\pi}+1]\pi}$, 则取 $x=\dfrac{1}{G}<\delta$, 那么 $|f(x)|>G$, 但是若取 $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2[\frac{G}{2\pi}+1]\pi}$, 那么 $|f(x)|=0$. 故它是无穷大量。

15. 连续
设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在并且等于 $f(x_0)$, 即
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$
则称函数 f **在点** x_0 **处连续**，并称 x_0 为 f 的**连续点**。
若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 f **在** x_0 **处左连续**。
若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 f **在** x_0 **处右连续**。
若 $\forall x\in(a,b)$, 函数 f 在点 x 处连续，则称 f **在开区间** (a,b) **内连续**。记作 $f\in C_{(a,b)}$.
若 f 在开区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称 f **在闭区间** $[a,b]$ **内连续**。记作 $f\in C_{[a,b]}$.
Remark

- 连续要求函数值存在。$f\in C_{[a,b]}$ 就代表 f 在闭区间 $[a,b]$ 内处处有定义。
- 函数在某点连续的等价定义为：$\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$.
- 集合 C_I 是所有在集合 I 上连续的函数的集合。是一个“函数的集合”。

16. 间断点
设函数 f 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果 f 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 f 的**间断点**。

- 第一类间断点
若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但函数 f 在 x_0 处间断，则称 x_0 为**第一类间断点**。
  - 可去间断点
  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, 则称 x_0 为**可去间断点**。
  Remark
  如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处。
  - 跳跃间断点
  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, 则称 x_0 为**跳跃间断点**。
  Remark
  如：$f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 处。
- 第二类间断点
若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为**第二类间断点**。

- 无穷间断点
  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, 则称 x_0 为**无穷间断点**。
  Remark
  如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处。
- 震荡间断点
  若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在且函数值在 x 趋近 x_0 时在某个区间内来回震荡，则称 x_0 为**震荡间断点**。
  即存在两个极限为 x_0 的数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$, 且 $a_n\neq x_0, b_n\neq x_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=b$，且 $a\neq b$.
  Remark
  如：$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处。

Remark

- 间断点并不要求函数在该点处有定义。事实上，无论函数在该点处有无定义，该点都可以是间断点。
- 存在在实数集上处处间断的函数。如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

- 存在在有理数点间断，无理数点连续的函数。如：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbf{N}, (p,q)=1\\ 0 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}.$$

  其中 $(p,q)=1$ 表示 p 和 q 互质。该函数在闭区间 $[0,1]$ 内的有理数点间断，无理数点连续。证明如下：
  注意到 $\forall x_0\in[0,1]$, 在 x_0 的任意邻域 $N(x_0)$ 中的有理数有无穷多个，而 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{q}\geq\varepsilon$ 可得 $q\leq\dfrac{1}{\varepsilon}$, 满足这样条件的有理数至多有 $\dfrac{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-1\right)}{2}$ 个，为有限个。故可以找到一个 δ, 可以把这些有限个点去除后，满足 $f(x)<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$。故该函数在闭区间 $[0,1]$ 内的有理数点间断，无理数点连续。

17. 导数

- 设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某一邻域 $N(x_0)$ 内，$x_0+\Delta x_0\in N(x_0)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

  存在，则称 f **在点** x_0 **处可导**，并称此极限值为 f **在点** x_0 **处的导数**。记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$.
  Remark
  导数的定义还有另一种等价形式：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某一左邻域 $N_-(x_0)$ 内且 $f(x_0)$ 有定义，$x_0+\Delta x_0\in N_-(x_0)$，若左极限
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
存在, 则称此极限为 f **在** x_0 **处的左导数**，并称 f **在** x_0 **处左可导**。记作 $f'_-(x_0)$.
- 设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某一右邻域 $N_+(x_0)$ 内且 $f(x_0)$ 有定义，$x_0+\Delta x_0\in N_+(x_0)$，若右极限
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
存在, 则称此极限为 f **在** x_0 **处的右导数**，并称 f **在** x_0 **处右可导**。记作 $f'_+(x_0)$.

Remark

左导数、右导数和导数的左极限、右极限并不相同。如：
$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\end{cases},$$
它在 0 处的右导数为
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}=0,$$
而它的导数在 0 处的右极限为 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

但是，事实上，有如下定理：

若函数 f 的导数在 x_0 处的左 (右) 极限存在，则 f 在 x_0 处的左 (右) 导数值就等于它的导数在 x_0 处的左 (右) 极限。证明用 Lagrange 中值定理即可。

同时这个定理也说明了，函数的导数未必是连续函数。

- 若函数 f 在开区间 (a,b) 内每一点都可导, 则称函数 f **在区间** (a,b) **内可导**。记作 $f\in D_{(a,b)}$.
- 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内每一点都可导, 则称函数 f **在区间** $[a,b]$ **内可导**。记作 $f\in D_{[a,b]}$.
- 若函数 f 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 是定义在 I 上的一个函数, 称它为 f 在 I 上的**导函数**, 简称为**导数**。记作 $f'(x)$,y',$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

Remark

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 这种记法的优越性在于可以表明对哪一个变量求导。

Remark

值得注意的是，$(f(g(x)))'$ 和 $f'(g(x))$ 不是一个东西。前者代表对 $f(g(x))$ 这个函数求微分的过程，而后者表示函数 f' 与 g 复合之后的函数。

18. 高阶导数

若 f 的 $n-1$ 阶导数在 $x\in I$ 处可导，则称 $f(x)$ **在** x **处** n **阶可导**，其 $n-1$ 阶导数在 $x\in I$ 处的导数称为 f **在** x **处的** n **阶导数**, 记作 $f^{(n)}(x)$,$y^{(n)}$,$\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^{(n)}f(x)}{\mathrm{d}x^n}$.

若 f 在 I 上处处 n 阶可导，则称 $f(x)$ **在** I **上** n **阶可导**，记作 $f\in D_I^n$.$f^{(n)}(x)$ 称为 $f(x)$ **在** I **上的** n **阶导函数**，简称为 n **阶导数**。

若 $f^{(n)}(x)$ 在 I 上连续，则记作 $f\in C_I^{(n)}$.

Remark

由高阶导数的定义可知，若函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则 f 在 x_0 的某邻域内 $n-1$ 阶可导。

19. 微分

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若由自变量的改变量 Δx 得到的相应的函数的改

变量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量，则称函数 $f(x)$ **在点** x_0 **处可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ **在点** x_0 **处的微分**，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0) = A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\,\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0) = A\,\mathrm{d}x$.
若 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都可微，则称 $f(x)$ **在** I **可微**。

Remark
如果题目要求 $\mathrm{d}y$, 一定不要忘了在结果后加 $\mathrm{d}x$.

20. 高阶微分
若函数 $y = f(x)$ 在 I 上 n 阶可导，则定义它在 I 上的 n **阶微分**为

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n.$$

此时，称函数 f 在 I 上 n **阶可微**。

Remark
事实上，由 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 可知，$\mathrm{d}x^2$ 实际代表的是 $(\mathrm{d}x)^2$.

21. 函数的极值
设函数 f 定义在区间 I 上，$x_0 \in I$，若 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in \mathring{N}(x_0) \subset I$, 恒有 $f(x) < f(x_0)$(或 $f(x) > f(x_0)$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值 (或极小值)**。

Remark
一个函数的极值是一个数。

22. 函数的驻点
函数的导数等于 0 的点称为函数的**驻点**。

Remark
函数的驻点是一个数。

23. 函数的拐点
函数的凹凸性改变的点称为函数的**拐点**。

Remark
函数的拐点是一个点。一个二维坐标。

24. 函数的渐近线
在曲线上一点 M 沿曲线无限远离原点或无限接近间断点时，如果 M 到一条直线的距离无限接近于 0，则称这条直线为这条曲线的**渐近线**。
若渐近线的斜率存在，则称之为**斜渐近线**。特别地，若渐近线的斜率为 0，则称之为**水平渐近线**。
若渐近线的斜率不存在，则称之为**铅直渐近线**。

25. 曲率
函数 $y = f(x)$ 在 (x, y) 处的曲率为

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

函数 $y = f(x)$ 在 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

26. 定积分

设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，任取一组分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$, 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,$d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$. 任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 若极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，且极限值既与分点 x_i 的选取无关，又与 ξ_i 的选取无关，则称此极限值为函数**在区间** $[a,b]$ **上的定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这时也称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**，记作 $f \in R_{[a,b]}$. 称 $f(x)$ 为**被积函数**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**，x 为**积分变量**，$[a,b]$ 为**积分区间**，a 为**积分下限**，b 为**积分上限**。

Remark

- 定积分的结果是个数，与积分变量的选取无关。即：
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$
- 规定 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
  $a = b$ 时，$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- 分点的任取性和 ξ_i 的任意性十分重要。如：
  对于函数
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases},$$
  在 $[0,1]$ 上取分点 $x_i = \dfrac{i}{n}$,$i = 1,2,\ldots n$, 取 ξ_i 是 $[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}]$ 中的任意无理数，则
$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$
  但是如果取 $\xi_i = \dfrac{i}{n}$, 则
$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 1$$
  故 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在。
- 定积分要求函数必须在 $[a,b]$ 内有定义。于是，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域是 $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.
- 按照定积分的定义，f 必然在 $[a,b]$ 内有界。
- 定积分的几何意义是由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 以及 x 轴围成的各块图形面积的代数和（即需要考虑面积的正负）。

27. 原函数

设函数 f 在区间 I 上有定义。若存在 I 上的可微函数 F，使得对于任意 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{或} \,\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则称 F 是 f 在区间 I 上的一个**原函数**。

Remark

原函数指的是一个函数。一个函数的原函数可以有许多个。事实上，若 F 是 f 在区间 I 上的原函数，则 $F+C(C$ 为任意常数$)$ 为 f 在 I 上的所有原函数。

28. 不定积分

函数 f 在区间 I 上的所有原函数的集合称为 f 在 I 上的**不定积分**。记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remark

不定积分是一族函数。他们的差相差一个常数。所以在写不定积分的表达式时，如果等号一端没有积分号，那么一定要加上常数 C. 特别地，$\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int f(x)\,\mathrm{d}x=C$

29. 反常积分

- 无穷区间上的反常积分

  设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall b>a, f\in R_{[a,b]}$, 称极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 f **在无穷区间** $[a,+\infty)$ **上的反常积分**, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. 如果 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。如果 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

  类似地可以定义 $(-\infty,a]$ 上的反常积分。

  定义

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

  其中 c 为任一实数。

  当反常积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛时，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。否则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

  Remark

  - 在 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义中，c 实际上只要存在一个即可，并不需要 $\forall c$.
  - 注意到 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义并不是 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. 事实上，根据我们的定义，诸如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ 并不收敛。
  - 只有在 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都存在的情况下，才成立等式

  $$\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

- 无界函数的反常积分

  设函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义，在 a 的右邻域内无界，且 $\forall\varepsilon>0, f\in R_{[a+\varepsilon,b]}$, 则称 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为无界函数 f **在** $(a,b]$ **上的反常积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

  若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。反之，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

  类似地可以定义无界函数 f 在 $[a,b)$ 上的反常积分。

若函数 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，而在点 c 的邻域内无界，定义无界函数 f 在 $[a,b]$ 上的反常积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。否则，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

Remark

如果换元之后某个两侧都无意义的函数的反常积分的一侧有意义了，则不需要再找一个两个端点之间的数。如：

求 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$
令 $t=\sqrt{x-1}$, 则 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$. 故

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^2+1)}2t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=2\arctan t\big|_0^{+\infty}=\pi\end{aligned}$$

30. 微分方程

称含有未知函数及未知函数的导数 (或微分) 的等式 (或等式组) 为**微分方程 (或微分方程组)**。微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数，称为微分方程的**阶**。
未知函数是一元函数的微分方程，称为**常微分方程**。
设函数 $y=y(x)$ 在区间 I 上有定义。若当 $x\in I$ 时，有

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))=0$$

恒成立，则称 $y=y(x)$ 是微分方程的一个**解**。
含有 n 个独立的任意常数的解称为该方程的**通解**。不含任意常数的解称为该方程的**特解**。
微分方程解的图形称为微分方程的**积分曲线**。
形如 $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$ 的方程称为 n **阶齐次微分方程**。
形如 $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x)$ 的方程称为 n **阶线性微分方程**。

Remark

- 微分方程的通解，不一定是微分方程全部的解。如：$y'=-y^2$ 的通解为 $y=\frac{1}{x+C}$, 而 $y=0$ 也是它的一个解。
- 我们求解微分方程的时候，不一定要将解化成 $y=f(x)$ 的形式。

31. 点集相关知识

设 $E\subset\mathbf{R}^n$, 且 $P\in\mathbf{R}^n$.

- 若 $\exists N(P)$, 使得 $N(P)\subset E$, 则称 P 是 E 的**内点**。
- 若 $\exists N(P)$, 使得 $N(P)\cap E=\varnothing$, 则称 P 是 E 的**外点**。
- 若 $\forall N(P)$,$N(P)$ 中既有 P 的外点，又有 P 的内点，则称 P 是 E 的**边界点**。E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**, 记作 ∂E.

- 若 $\forall \delta > 0, \mathring{N}(P,\delta) \cap E \neq \varnothing$, 则称 P 是 E 的**聚点**。

  Remark

  聚点有如下等价定义：

  - $\forall N(P)$, 存在无穷多个 $N(P)$ 内的点属于 E.
  - 存在点列 $P_n \in E$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

- 若 E 内的点都是它的内点，则称 E 为**开集**。

  Remark

  邻域一定是开集。

- 若 $\forall P_1, P_2 \in E$, 存在以 A 和 B 为端点的曲线 $L \in E$，则称 E 为**连通集**。
- 若 E 为连通的开集，则称 E 为**区域**。
- 若 E 为区域，则 $E \cup \partial E$ 称为**闭区域**。
- 若 $\exists N(0,r)$, 使得 $E \subset N(0,r)$, 则称 E 为**有界集**。
- 记 $d = \sup\{\rho(P_1,P_2) | \forall P_1, P_2 \in E\}$ 为区域 E 的**直径**。

32. 多元函数的极限

设 n 元函数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(M)$ 在点集 E 上有定义。A 是定常数，$M_0(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 为 E 的一个聚点。如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对满足 $0 < \rho(M,M_0) < \delta$ 的点 $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，有 $|f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 当 $M \to M_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{M\to M_0} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A \text{或} \lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(y_1,y_2,\ldots,y_n)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A$$

Remark

- 极限存在则意味着 $M \to M_0$ 可以沿任意路径。如果存在两种不同路径，使极限值不同，则意味着此时极限不存在。
- 判断某二元极限是否存在，还可以令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. 若化简出来的结果，在 $\rho \to 0$ 时的极限值与 θ 无关，则二元极限存在；反之，则不存在。
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不同。
- 对于多元函数的极限，我们有四则运算法则：

  在同一个极限的趋近过程中，若 $\lim f(M)$,$\lim g(M)$ 均存在：

  - $$\lim(f(M) \pm g(M)) = (\lim f(M)) \pm (\lim g(M))$$
  - $$\lim(f(M)g(M)) = (\lim f(M))\,(\lim g(M))$$
  - $\lim g(M) \neq 0$ 时，
    $$\lim \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim f(M)}{\lim g(M)}$$

- 对于多元函数的极限，我们有复合运算法则：

  设 $y = f(g(M))$ 是由 n 元函数 $y = f(N)$ 和 m 元 n 维函数 $u = g(M)$ 复合而成的，若 $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = N_0$, $\lim\limits_{N\to N_0} f(N) = a$, 且在 M_0 的某去心邻域中 $g(M) \neq N_0$, 则

  $$\lim_{M\to M_0} f(g(M)) = \lim_{N\to N_0} f(N) = a.$$

  这个定理有特殊情况 $n = 1$. 如

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{xy} y \\ &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{xy}\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,4)} y\right)\end{aligned}$$

对于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{xy}$, 令 $t(x,y) = xy$, 由多元函数极限的复合运算法则：
由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} t(x,y) = 0$, 故

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{xy} \\ =&\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\end{aligned}$$

同理，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} y = 4$.

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \frac{\sin xy}{x} = 4$.

这个定理还可以推出多元函数极限与一元函数极限的关系：
若 $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, 有 $\lim\limits_{x_i\to y_i} f_i(x_i)$ 存在，则

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(y_1,y_2,\ldots,y_n)} (f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lim_{x_i\to y_i} f_i(x_i)\right)$$

对于二元函数来说，即为
若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ 存在，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x)g(y)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{y\to y_0} g(y))$$

- 对于多元函数极限，我们有夹逼准则：
  若在点 M_0 的某去心邻域内恒有 $g(M) \le f(M) \le h(M)$, 且 $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = \lim\limits_{M\to M_0} h(M) = a$, 则 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ 存在且 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = a$.

33. 多元函数的连续性
    若 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$, 则称 $f(M)$ 在 $M = M_0$ 处**连续**。
    若 $f(M)$ 在 D 内每一点连续，则称 $f(M)$ 在 D 内连续。

34. 偏导数
    设 n 元函数 $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，对于点 $M_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x}$$

    存在，则称其为 $f(M)$ 在点 M_0 处对 x_i 的**偏导数**，记作 $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{M_0}$ 或 $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
    Remark
    由一元函数相关知识，我们可以知道：若函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处存在偏导数 $f_x(x_0, y_0)$, 则将 y 看作常数，关于 x 的一元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $x = x_0$ 处连续。

35. 高阶偏导数
    设函数 $z = f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 对变量 y 的偏导数存在，则称这个偏

导数为 f 在 (x_0,y_0) 处先对变量 x 再对变量 y 的**二阶偏导数**,记为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f_{xy}(x_0,y_0)$. 类似可定义另外三种二阶偏导数，分别记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)|_{(x_0,y_0)}=f_{xx}(x_0,y_0)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)|_{(x_0,y_0)}=f_{xy}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)|_{(x_0,y_0)}=f_{yx}(x_0,y_0)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)|_{(x_0,y_0)}=f_{yy}(x_0,y_0)$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶混合偏导数**
Remark
要注意到二阶偏导数是偏导数的偏导数，有时遇到分段函数需要用定义来求。

36. 全微分
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表示为

$$\Delta z=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

其中 α,β 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，则称函数 f 在点 (x_0,y_0) 处**可微**，并称 $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ 为 f 在 (x_0,y_0) 处的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=\alpha\,\mathrm{d}x+\beta\,\mathrm{d}y$$

如果函数 f 在区域 D 内处处可微，则称 f 为 D 内的**可微函数**。

37. 方向导数
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 在某邻域内有定义，平面上向量 l 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$, 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)}{t}$$

存在，则称此极限为 f 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的**方向导数**，记作 $\frac{\partial z}{\partial l}|_{M_0}$

38. 梯度
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 处可微，称向量 $\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的**梯度**, 记作 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$

39. 多元函数的极值
函数 $f(x,y)$ 在邻域 $N(M_0)$ 内有定义，若 $\forall M\in N(M_0)$ 有 $f(x,y)\geq(\leq)f(x_0,y_0)$, 则称 $f(x,y)$ 在 M_0 处有**极小（大）值** $f(x_0,y_0)$. 其中 $M_0(x_0,y_0)$ 称为该函数的一个**极值点**。

40. 多元函数的驻点
函数 $f(x,y)$ 的**驻点**是使 $f_x=f_y=0$ 的点 $M_0(x_0,y_0)$.

41. 复数
定义 $\mathrm{i}^2=-1$, 定义**复数**为形式为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数。
定义其**实部** $\mathrm{Re}\,z=x$, 其**虚部** $\mathrm{Im}\,z=y$.
定义其**模** $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
定义 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$
由此定义复数的指数形式 $z=|z|e^{\mathrm{i}\theta}$, 其中 θ 称为其**辐角**, 记作 $\mathrm{Arg}\,z$, 一个复数有无穷多个辐角，每个辐角相差 2π. 定义其主辐角为 $\arg z$, 满足 $\arg z\in(-\pi,\pi]$, 且 $\exists k\in\mathbf{Z}, s.t. \arg z=\mathrm{Arg}\,z+2k\pi$.
定义其**共轭**为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$

42. 复变函数的极限
    设复变函数 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 E 上有定义，设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极限 a 和 b, 则称 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处有**极限** $c = a + \mathrm{i}b$.

43. 复变函数的连续
    设复变函数 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 E 上有定义，若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则称 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处**连续**。

44. 复变函数的导数
    设复变函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(z_0)$ 内有定义，若
    $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
    存在且等于 A，则称 $s = f(z)$ 在 z_0 点**可导**，其导数为 A, 记作 $f'(z_0) = A$.

45. 复变函数的微分设复变函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的某邻域 $N(z_0)$ 内有定义，如果在点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处存在一个关于 $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$ 的线性函数 $L\Delta z$, 使 $\forall z_0 + \Delta z \in N(z_0)$, 有
    $$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = L\Delta z + o(|\Delta z|)$$
    其中 L 为与 Δz 无关的复常数，$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(|\Delta z|)$ 是当 $\Delta z \to 0$ 时比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小，则称 $w = f(z)$ 在 z_0 点**可微**。

46. Cauchy-Riemann 条件
    对于复变函数 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, 其在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 点的 Cauchy-Riemann 条件为：
    $$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

47. 解析
    若复变函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处及其某邻域内可导，则称 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处**解析**。
    若 $f(z)$ 在区域 D 内的每个点解析，则称其在 D 内解析。
    若 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。
    Remark

    - 复变函数在某点解析还需要在其邻域内可导，所以在某点解析的条件比可导强；但在区域内解析等价于在区域内可导。
    - 如果 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，则 w 必然可以单独用 z 表示，与 $\bar{z}$ 无关。已知 $f(z)$, 求其含 z 的表达式的方法有三种：
        - 凑

          已知 $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \dfrac{-x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$, 求其含 z 的表达式。
          $$f(z) = \frac{-\bar{z}}{z\bar{z}} = -\frac{1}{z}$$

        - 公式代入
          由于若 $z = x + \mathrm{i}y$, 则 $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$, 故将这个公式代入表达式中，化简即可。
        - 特殊值法（不严谨）
          令 $y = 0$ 后，化简表达式，再将表达式中的所有 x 替换成 z 即可。

48. 调和函数

若 $\varphi(x,y)$ 在 D 有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, 则称 $\varphi(x,y)$ 是 D 内的调和函数。

49. 共轭调和函数

若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内解析，则称 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数。

Remark

但 $u(x,y)$ 不是 $v(x,y)$ 的共轭调和函数。

50. Jacobi 行列式

设 $x_1=x_1(y_1,y_2,\dots,y_n),x_2=x_2(y_1,y_2,\dots,y_n),\dots,x_n=x_n(y_1,y_2,\dots,y_n)$, 则定义其 Jacobi 行列式为

$$J(y_1,y_2,\dots,y_n)=\frac{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

51. 多元数量函数的积分

设 Ω 表示一个有界的几何形体，它是可度量的，f 是定义在其上的数量函数。将 Ω 任意分割为 n 个小部分 $\Delta\Omega_k(k=1,2,\dots,n)$, 其度量仍记为 $\Delta\Omega_k$, 记 $d=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta\Omega_k\text{的直径}\}$，任取点 $M_k\in\Delta\Omega_k$, 作和式

$$\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\Delta\Omega_k$$

如果不论将 Ω 怎样分割，点 $M_k\in\Delta\Omega_k$ 怎样选取，当 $d\to 0$ 时，上述和式都趋于一个常数，则称 f 在 Ω 上**可积**，且称此常数为多元数量函数 f 在 Ω 上的 Riemann 积分，记作

$$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

Ω 称为**积分域**，f 称为**被积函数**，$f(M)\,\mathrm{d}\Omega$ 称为**被积表达式**。

- 二重积分

  若 Ω 是平面上的一块可求面积的有界闭区域，记作 D，则 f 在 D 上的积分称为**二重积分**，记为

  $$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k,\eta_k)\Delta\Omega_k$$

- 三重积分

  若 Ω 是空间中的一块可求体积的有界闭区域，记作 D，则 f 在 D 上的积分称为**三重积分**，记为

  $$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k,\eta_k,\xi_k)\Delta\Omega_k$$

- 第一型曲线积分

  若 Ω 是一条可求长的空间曲线段，记作 L, 则 f 在 L 上的积分称为**第一型曲线积分**（或称为**对弧长的曲线积分**），记为

  $$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

  若 L 为一条闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$.

  Remark

  事实上，定积分是一种特殊的第一型曲线积分，它的 L 为 x 轴上的一个线段。

- 第一型曲面积分

  若 Ω 是一条可求面积的空间曲面，记作 Σ, 则 f 在 Σ 上的积分称为**第一型曲面积分**（或称为**对面积的曲面积分**），记为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta A_k$$

  若 Σ 为一条闭曲面，则记为 $\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A$.

  Remark

  二重积分是一种特殊的第一型曲面积分。

52. 累次积分

称积分

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x_{i_1})}^{\varphi_2(x_{i_1})} \cdots \int_{\psi_1(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n-1}})}^{\psi_2(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n-1}})} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_{i_n}\cdots\mathrm{d}x_{i_2}\right]\mathrm{d}x_{i_1}$$

为按 $x_{i_n}, x_{i_{n-1}}, \dots, x_{i_1}$ 的顺序进行的累次积分。也可写成

$$\int_a^b \mathrm{d}x_{i_1}\int_{\varphi_1(x_{i_1})}^{\varphi_2(x_{i_1})}\mathrm{d}x_{i_2}\cdots\int_{\psi_1(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n-1}})}^{\psi_2(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n-1}})} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_{i_n}$$

Remark

由于累次积分一次只对一个积分变量进行积分，所以可以将无关的变量提出。如：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} x^2 y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} y\,\mathrm{d}y$$

53. 三维空间的表示方法

- 空间直角坐标系
- 柱面坐标系

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{cases},\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

  其中 $0 \le \varphi \le 2\pi, \rho \ge 0$.

  设空间直角坐标系的原点与柱面坐标系原点重合，其内任意一点 Z 在 xOy 平面内的投影为 Z'. 则 ρ 表示 O 到 Z' 的距离，φ 表示 OZ' 与 x 轴的夹角。

- 球面坐标系

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases},\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta = \frac{x^2+y^2}{z} \\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

  其中 $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi, r \ge 0$.

  设空间直角坐标系的原点与球面坐标系原点重合，其内任意一点 Z 在 xOy 平面内的投影为 Z'. 则 r 表示 O 到 Z 的距离，θ 表示 OZ 与 z 轴的夹角，φ 表示 OZ' 与 x 轴的夹角。

  Remark

  尤其要注意 θ 的取值范围是 $[0,\pi]$

54. 第二型曲线积分

设 L 是空间中一条有向光滑曲线弧，向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在 L 上有定义。任取分点 $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$,将有向线段 L 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{P_{i-1}P_i}(i=1,2,\ldots,n)$, 其中 $P_0 = A, P_n = B$,$\widehat{P_{i-1}P_i}$ 的长度记作 Δs_i, 令 $d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$, 任取点 $M_i \in \widehat{P_{i-1}P_i}$,$\vec{\boldsymbol{T}}(M_i)$ 为曲线 L 在点 M_i 处与 L 同方向的单位切向量。作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(M_i)\cdot\vec{\boldsymbol{T}}(M_i)\Delta s_i$$

如果无论对 L 如何分割，点 M_i 在 $\widehat{P_{i-1}P_i}$ 上如何选取，当 $d\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(M_i)\cdot\vec{\boldsymbol{T}}(M_i)\Delta s_i$ 趋于同一极限值，则称向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在 L 上**可积**，并称该极限值为向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿有向曲线 L 的**第二型曲线积分**，记为 $\int_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{T}}(M)\,\mathrm{d}s$.

若 L 为有向闭曲线，也可记为 $\oint_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{T}}(M)\,\mathrm{d}s$.

称

$$\int_L \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$$

为第二型曲线积分的向量形式。

若 $\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, 则称

$$\int_L P(M)\,\mathrm{d}x + Q(M)\,\mathrm{d}y + R(M)\,\mathrm{d}z$$

为第二型曲线积分的坐标形式。

55. 第二型曲面积分

设 Σ 是一块光滑的有向曲面，向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)$ 在 Σ 上有定义。将 Σ 任意分成 n 块有向曲面 $\Delta\Sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$,$\Delta\Sigma_i$ 的面积记为 $\Delta A_i(i=1,2,\ldots,n)$. 任取点 $M_i\in\Delta\Sigma_i$,$\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)$ 表示 $\Delta\Sigma_i$ 表示 $\Delta\Sigma_i$ 在点 M_i 处的指定侧的单位法向量，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(M_i)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)\Delta A_i$$

用 d 表示 n 块小曲面 $\Delta\Sigma_i$ 直径的最大值。如果无论 Σ 如何分割，点 M_i 在 $\Delta\Sigma_i$ 上如何选取，当 $d\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=0}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(M_i)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)\Delta A_i$ 趋于同一极限值，则称向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在 Σ 上可积，并称该极限值为向量函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在有向曲面 Σ 上的**第二型曲面积分**, 记为 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)\,\mathrm{d}A$.

若 Σ 为有向闭曲面，也可记为 $\oiint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M)\,\mathrm{d}A$.

称

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

为第二型曲面积分的向量形式。

若 $\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, 则称

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

为第二型曲面积分的坐标形式

56. 散度

设有连续向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subset\mathbf{R}^3)$，点 $M\in\Omega$, 任作包围点 M 的闭曲面 $\Delta\Sigma$ 取外侧，如果当 $d\to 0$ 时，比式

$$\frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

的极限存在，则称此极限值为向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)$ 在点 M 处的**散度**, 记为 $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)$.

57. 环量

平面向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)$ 沿平面闭曲线 L 的第二型曲线积分 $\oint_L\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 称为向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿 L 的**环量**。

58. 环量面密度

设有一向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)$, 点 $M\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$, 在点 M 处取定一个方向 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}$, 以 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}$ 为法向量，使其与 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}$ 符合右手法则。如果当 $\Delta\Sigma$ 在保持 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}$ 为其法向量而任意收缩到点 M 时，

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}=\frac{1}{\Delta A}\oint_{\Delta L}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$$

的极限存在，则称此极限为 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在点 M 沿方向 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}$ 的**环量面密度**，记为 $\mathrm{rot}_{\overrightarrow{\boldsymbol{n}_0}}\vec{\boldsymbol{F}}$

59. 旋度

设有向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subset\mathbf{R}^3)$, 点 $M\in\Omega$, 若存在一个向量，其方向是使 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在点 M 处环量面密度取最大值的方向，其模等于环量面密度的最大值，则称此向量为向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在点 M 处的**旋度**, 记作 $\mathbf{rot}\vec{\boldsymbol{F}}(M)$.

60. 向量微分算子

向量微分算子 ∇ 的定义为

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

61. 复变函数的积分

设复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在分段光滑的有向曲线 L 上有定义，沿着曲线 L 从起点 $z=a$ 到终点 $z=b$ 在 L 上任取分点 $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}$, 将有向曲线 L 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}(k=1,2,\ldots,n)$, 其中 $z_0=a,z_n=b,\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度记作 Δs_k, 令 $d=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 任取点 $\xi_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$, 作和式

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$$

如果无论对 L 如何分割，L 上的点 ξ_k 如何选取，当 $d\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$ 趋于同一极限值，则称复变函数 $f(z)$ 在 L 上**可积**，并称该极限值为复变函数 $f(z)$ 沿有向曲线 L 的**积分**，记为 $\displaystyle\int_L f(z)\,\mathrm{d}z$.

若 L 是有向闭曲线，也可记为 $\displaystyle\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z$.

62. 常数项级数

设 $\{u_n\}$ 是一数列 (若 $\{u_n\}\in\mathbf{R}$, 则 $\{u_n\}$ 是实数列；若 $\{u_n\}\in\mathrm{C}$, 则 $\{u_n\}$ 是复数列)，令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

- 称 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 为以 u_n 为**一般项**（或**通项**）的**常数项级数**, 并记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

- $\forall n \in N^+$, 称 S_n 为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n **部分和**
- 若 $\{S_n\}$ 有极限 $S \in \mathrm{C}$ 或 $\pm\infty$, 则称数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有**和** S, 并记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$
- 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和 $S \in \mathrm{C}$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 不收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 成为**发散**级数。

  Remark

  和为 $\pm\infty$ 的数项级数为发散级数

63. 常数项级数的绝对收敛与条件收敛

    若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**;

    若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**。

64. 正项级数

    一个实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 若满足 $\forall n \in \mathbf{N}_+, a_n \geq 0$, 则称其为**正项级数**。

65. 函数项级数

    设 $u_1(z), u_2(z), \ldots u_n(z), \ldots$ 是定义在区域 D 上的复变函数列，称表达式

    $$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$$

    或

    $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

    为定义在 D 上的**复函数项级数**，简称**函数项级数**。$u_n(z)$ 称为它的**通项**，$S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$ 称为它的**部分和**。

66. 收敛点与收敛域

    若 $z_0 \in D$，且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ 收敛，则称 z_0 为该级数的**收敛点**。由收敛点全体所构成的集合称为该级数的**收敛域**。

    Remark

    如果级数是复数项级数，则不需要讨论收敛域的边界情况。

67. 幂级数

    形如

    $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

    的函数项级数称为**幂级数**。

    称由 $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 定义的函数为级数的**和函数**.

68. 收敛圆与收敛半径

    如果存在一个正数 R, 当 $|z| < R$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；当 $|z| > R$ 时，该幂级数发散，则称 R 为该幂级数的**收敛半径**，圆域 $|z| < R$ 称为该幂级数的**收敛圆**。

    Remark

    收敛圆不包含边界。所以如果题目要求收敛圆，则不需要讨论边界情况。

69. 双边无穷级数

记
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$
为**双边无穷级数**，且当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 均收敛时，级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ **收敛**。

Remark

双边无穷级数的收敛域为一个圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$. 其中 $\dfrac{1}{R_1}$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^n$ 的收敛半径，R_2 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径。

70. 孤立奇点

- 有限点处

  设 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，但在 z_0 的某一邻域 $0 < |z-z_0| < \delta$ 内解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**。

  Remark

  $z=0$ 是 $f(z) = \tan\dfrac{1}{z}$ 的非孤立奇点。

- 无穷远点处

  若存在正数 M, 使得 $f(z)$ 在 $M < |z| < +\infty$ 内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

71. 孤立奇点的分类

- 有限点处
  - ∘ 从双边无穷级数展开式分类

    设 $f(z)$ 在 $0 < |z| < \delta$ 内的双边无穷级数为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

    - ∗ 可去奇点

      若 $\forall n < 0, c_n = 0$, 即其双边无穷级数展开式中无负幂项，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。
    - ∗ m 级极点

      若 $\exists m > 0, c_{-m} \neq 0$ 且 $\forall n > m, c_{-n} = 0$, 即其双边无穷级数展开式中有有限项负幂项，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m **级极点**。
    - ∗ 本性奇点

      若 $\forall m < 0, \exists n < m, c_n \neq 0$, 即其双边无穷级数展开式中有无穷多项负幂项，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。
  - ∘ 从极限分类
    - ∗ 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。
    - ∗ 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**极点**。
    - ∗ 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为无穷, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。

  Remark

  上述两种定义是等价的。

- 无穷远点处

◦ 从双边无穷级数展开式分类

设 $f(z)$ 在 $M < |z| < +\infty$ 内的双边无穷级数为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

∗ 可去奇点

若 $\forall n > 0, c_n = 0$, 即其双边无穷级数展开式中无正幂项，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。

∗ m 级极点

若 $\exists m > 0, c_m \neq 0$ 且 $\forall n > m, c_n = 0$, 即其双边无穷级数展开式中有有限项正幂项，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的 m **级极点**。

∗ 本性奇点

若 $\forall m > 0, \exists n > m, c_n \neq 0$, 即其双边无穷级数展开式中有无穷多项正幂项，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。

◦ 从极限分类

∗ 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c_0$, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。

∗ 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**极点**。

∗ 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在且不为无穷, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。

Remark

上述两种定义是等价的。

72. m 级零点

如果解析函数 $f(z)$ 能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0) \neq 0$,$m \in \mathbf{N}_+$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m **级零点**。

Remark

当 $z \neq z_0$ 时，$\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m}$, 当 $z = z_0$ 时，代入 $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$，得到 $\varphi(z_0)$ 可为任意数。因此，如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^n}$ 存在且不为 0.

73. 留数

• 有限点处

设 z_0 为 $f(z)$ 的有限孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析，L 为包含 z_0 的任意一条逆时针方向的简单闭曲线，称积分 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_L f(z)\,\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**，记作 $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0]$.

Remark

由 Cauchy 积分公式，可得：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{(z - z_0)^n}, z_0\right] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0)$$

故有时定义法加上 Cauchy 积分公式可以很简单地计算留数.

• 无穷远点处

设 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $M < |z| < +\infty$ 内解析，L 为圆环域 $M < |z| < +\infty$ 内绕原点的任何一条顺时针方向的简单闭曲线，称积分 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_L f(z)\,\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在 ∞ 处的**留数**，记作 $\mathrm{Res}\,[f(z), \infty]$

Remark

注意到这里的 L 是顺时针方向。

74. Fourier 级数

    - 三角级数形式
      称形如
      $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
      的级数为 **Fourier 级数**。
    - 复数指数形式
      称形如
      $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{i}n\omega x}$$
      的级数为 **Fourier 级数**。

75. 正弦级数
    称形如
    $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$
    的级数为**正弦级数**。
    Remark
    正弦级数的和函数为奇函数

76. 余弦级数
    称形如
    $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$
    的级数为**余弦级数**。
    Remark
    余弦级数的和函数为偶函数

2 定理

1. 有上（下）界的非空实数集一定有上（下）确界。

2. 数列极限的性质

    - 唯一性
      若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b_1,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b_2$, 则 $b_1=b_2$
    - 有界性
      若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它有界。
    - 保序性
      若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 且 $a<b$, 则 $\exists N\in N^*$, 使 $n>N$ 时，$a_n<b_n$.
      推论
        - 保号性
          若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>(<)0$, 则 $\exists N\in N^*$, 使 $n>N$ 时，$a_n<(>)0$.

◦ 保序性逆定理

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $\exists N \in N^*$, 使 $n > N$ 时，$a_n \le b_n$，则 $a \le b$.

Remark

注意到这里的严格不等号变成了不严格的不等号。注意如下例子:

$$a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$$

a_n 恒小于 b_n, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

3. 数列极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在：

•
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

•
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

• $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 时，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Remark

条件“$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在”十分重要。如

$$\lim_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\cdot 0 = 0$$

显然是错的。

4. 函数在某点处极限存在，当且仅当它在此点处的左极限等于右极限。

Remark

这个定理常被用来证明某点处极限不存在。如：

> 对于符号函数
> $$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$
> 我们有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}(x) = -1, \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}(x) = 1$, 故它在 0 处极限不存在。

5. 函数极限的性质

• 唯一性

在同一个极限的趋近过程中，若 $\lim f(x) = a_1$,$\lim f(x) = a_2$, 则 $a_1 = a_2$

• 局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在 x_0 的某去心邻域内，函数 f 有界。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则存在区间 $(m, +\infty)$, 使函数 f 在其中有界。

- 局部保序性

  若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ 且 $a<b$, 则在 x_0 的某去心邻域内，$f(x)<g(x)$.

  若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$ 且 $a<b$, 则存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$.

  推论

  - 局部保号性

    若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>(<)0$ 且 $a<b$, 则在 x_0 的某去心邻域内，$f(x)>(<)0$.

    若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a>(<)0$ 且 $a<b$, 则存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)>(<)0$.

  - 局部保序性逆定理

    若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ 且在 x_0 的某去心邻域内，$f(x)<g(x)$，则 $a\le b$.

    若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$ 且存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$. 则 $a\le b$.

6. 函数极限的四则运算法则

   在同一个极限的趋近过程中，若 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 均存在：

   - $$\lim(f(x)\pm g(x))=(\lim f(x))\pm(\lim g(x))$$

   - $$\lim(f(x)g(x))=(\lim f(x))\,(\lim g(x))$$

   - $\lim g(x)\ne 0$ 时，
   $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

7. 函数极限的复合运算法则

   设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(u)$,$u=g(x)$ 复合而成的，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(x)=a$, 且在 x_0 的某去心邻域中 $g(x)\ne u_0$, 则

   $$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=a.$$

   Remark

   - 这里“在 x_0 的某去心邻域中 $g(x)\ne u_0$”这个条件是必要的，给出例子：

     $$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\ne 0\end{cases}, g(x)=0$$

     那么 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=0, \lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, 而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

   - 函数极限的复合运算法则正是极限换元法的本质。

8. Heine 定理

   - $\lim\limits_{x\to x_0} = a$ 的充分必要条件是对任何以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}(a_n\ne x_0)$, 相应的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 都收敛于 a, 即对任何数列 $\{a_n\}(a_n\ne x_0)$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x_0$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} = a$ 的充分必要条件是对任何以正无穷为极限的数列 $\{a_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 都收敛于 a, 即对任何数列 $\{a_n\}$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$.

推论

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是对于 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$, 都有 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Remark

- Heine 定理常被用作证明函数极限不存在的方法。如：

  对于极限
  $$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x},$$
  取
  $$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
  $$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$
  则有
  $$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0, \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = 1.$$
  故 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

- 对于推论，事实上，只要子列的下标能“充满”正整数集，命题依然成立。常用的结论是：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是数列 $\{a_{2n}\}$ 和数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的极限存在且均为 a.

9. 夹逼准则

   设函数 f, g, h 满足

   - 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内，有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$
   - $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$

   则 $\lim_{x\to x_0} = a$.

   Remark

   - 这个定理在 $x \to +\infty, -\infty, \infty$ 时均成立
   - 这个定理可以做两件事：证明极限存在和求极限的值
   - 这个定理对于数列依然成立。在处理数列过程中，经常和放缩结合在一起被用来求一些求和的极限。如：

     求
     $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\right)$$

以夹逼准则做法如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\\
\geq&\frac{n^2+n+1}{2n^3-n^2}+\frac{n^2+n+1}{2n^3-n^2}+\cdots+\frac{n^2+1}{2n^3-n^2}\\
=&\frac{n^2+n+1}{2n^2-n},\\
&\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\\
\leq&\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}\\
=&\frac{n^3+2n^2}{2n^3-1}
\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2}{2n^3-1}=\dfrac{1}{2}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\dfrac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\dfrac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\dfrac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\right)$ 存在且等于 $\dfrac{1}{2}$.

10. 单调有界准则

单调有界数列必收敛。

即：若数列 $\{a_n\}$ 单调增加（或单调减少）且有上界（或下界），则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 必存在。

Remark

此定理一般用于与数学归纳法相结合证明递推数列的极限存在。如：

已知实数 $a>0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$,$x_1=\sqrt{a}$. 求证 $\{x_n\}$ 极限存在，并求其极限。

现用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界：

首先,$x_1<x_2$, 设 $x_{n-1}<x_n$, 则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加。

其次,$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$, 设 $x_n<\sqrt{a}+1$, 则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 在等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$ 两边同时取极限，得：

$$A^2=a+A$$

解，得：

$$A=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2},$$

又由极限的保号性：$A\geq 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

11. Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$, 使得 $\forall m,n>N$, 有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

Remark

- 另一种等价形式：
  数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$, 使得 $\forall n>N$,$\forall p\in\mathbf{N}_+$, 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.
- Cauchy 收敛准则与用定义证明极限的不同在于，前者不需要知道极限值，而后者需要。
- Cauchy 收敛准则常用于判断级数的收敛性。如：

> 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛。
> 对于 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 有
> $$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$
> 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则 $\forall n>N$,$\forall p\in\mathbf{N}_+$, 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 根据 Cauchy 收敛准则,$\{a_n\}$ 收敛。

- Cauchy 收敛准则亦可判断数列发散：
  $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件是 $\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N}_+,\exists m,n>N$, 使 $|a_n-a|<\varepsilon_0$.
  如：

> 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 发散。
> 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,$\forall N\in\mathbf{N}_+$, 取 $n>N,m=2n>N$, 有
> $$|a_m-a_m|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$
> 故数列 $\{a_n\}$ 发散。

- 如果我们仅有条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 是不可以得到 $\{a_n\}$ 收敛的。反例如：
  $a_n=\ln n$.

12. 无穷小量的性质

- 有限个无穷小量的和（或积）是无穷小量。
- 无穷小量与有界变量的积是无穷小量。
  Remark
  这条定理常被用于求一些无穷小量与三角函数乘积的极限。如：

> 求极限
> $$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}.$$

由于 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ 为有界变量。故

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

- 若 X 是无穷小量，则 $\frac{1}{X}$ 是无穷大量。
- $\lim X=a$ 的充分必要条件是 $X=a+\alpha$, 其中 α 是无穷小量

  Remark

  这个定理将 “lim” 这个局部的变化与 “=” 这个全局的关系联系在了一起。
- 若 $X_1\sim X_2$,$Y_1\sim Y_2$, 且 $\lim\frac{X_2}{Y_2}$ 存在，则 $\lim\frac{X_1}{Y_1}=\lim\frac{X_2}{Y_2}$.
- 若 $X_1\sim X_2$,$Y_1\sim Y_2$, 且 $\lim X_2Y_2$ 存在，则 $\lim X_1Y_1=\lim X_2Y_2$.

  Remark

  等价无穷小不可用于加减，只可用于乘除。如：

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

  显然是错的。
- 设 $m,n\in\mathbf{N}_+$, 有：
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(x^m)+o(x^n)=o(x^l),l=\min(m,n)$
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(cx^n)=o(x^n)$

13. 无穷大量

- 有限个无穷大量之积为无穷大量
- 无穷大量与有界变量之和为无穷大量
- 若 X 是无穷大量，则 $\frac{1}{X}$ 为无穷小量

14. 函数 f 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 f 在点 x_0 处左连续且右连续。

Remark

这给了我们判断函数在某点是否连续的方法。即证明

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

这个方法常用于分段函数在分段点处连续性的判定。

15. 连续函数的四则运算法则

设函数 f 和 g 在点 x_0 处连续，则函数 $f\pm g$,$f\cdot g$,$\frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 处连续。

16. 连续函数的复合运算法则

设函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，$u_0=g(x_0)$, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 处连续。即：

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))=f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

Remark

- 这表明当 f 连续时，极限符号 “lim” 与函数符号 “f” 可以交换次序。

- f 和 g 的连续都必不可少。见如下两个例子：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x=0\end{cases},g(x)=x$$

则 f 在 0 处不连续，g 在 0 处连续，但 $f(g(x))$ 在 0 处不连续。

$$f(x)=x,g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则 f 在 0 处连续，g 在 0 处不连续，但 $f(g(x))$ 在 0 处不连续。

17. 所有初等函数在其定义区间内都是连续的
18. 闭区间上连续函数的性质

- 极值定理

设函数 $f\in C_{[a,b]}$, 则存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$f(\eta)\leq f(x)\leq f(\xi).$$

即 $f(\eta)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

Remark

  - 这个定理表达了，在闭区间上连续的函数可以在这个闭区间内**取到**最小值、最大值。
  - 如果 f 在 $[a,b]$ 上不连续，则有反例如下：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ x & x\neq 1\end{cases},$$

该函数在闭区间 $[0,1]$ 上无最大值。

  - 如果 f 在开区间 (a,b) 上连续，则有反例如下：

$$f(x)=x,$$

该函数在开区间 $(0,1)$ 上连续，却没有最大值和最小值。

  - 注意到 ξ,η 均是属于闭区间 $[a,b]$。这个条件不能加强为开区间 (a,b). 如：

$$f(x)=x,$$

该函数在闭区间 $[0,1]$ 上的最小值、最大值分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 处取到。

- 有界性定理

在闭区间上连续的函数必有界。

- 零点定理
  - 零点存在性定理

若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

Remark

    * 如果 f 在 $[a,b]$ 上不连续，则有反例如下：

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & 0\leq x<\dfrac{1}{2}\\ x+1 & \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases},$$

该函数在闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)\cdot f(1)<0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。

∗ 如果 f 在开区间 (a,b) 上连续，则有反例如下：

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x=0\\ e^x & x\neq 0\end{cases},$$

该函数在闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)\cdot f(1)<0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。

∗ 如果 $f(a)\cdot f(b)\leq 0$, 则有反例如下：

$$f(x)=x,$$

该函数满足 $f\in C_{[0,1]}$, 且 $f(0)\cdot f(1)=0\leq 0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。

∗ 如果 $f(a)\cdot f(b)\leq 0$, 则需要分类讨论，然后证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有零点。

∗ 如果是要求证明函数在某无穷区间（如 $(0,+\infty)$）上有零点，可以求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 再用极限的保号性找到一个函数值大于 0，或小于 0 的数，从而进行零点定理的判定。如：

> 证明任何奇次数的实系数多项式方程必有零点。
> 设 $f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+a_1x+a_0$,
> 不妨设 $a_{2n-1}>0$, 那么由于
>
> $$f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}\left(1+\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_0}{a_{2n-1}}\frac{1}{x^{2n-1}},\right)$$
>
> 故有
>
> $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$$
>
> 由极限的保号性：$\exists x_1>0$, 使得 $f(x_1)>0$;$\exists x_2<0$, 使得 $f(x_2)<0$. 又 $f\in C_{[x_2,x_1]}$, 故根据零点存在性定理，存在 $\xi\in(x_2,x_1)\subset(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=0$.

∘ 零点唯一性定理

若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,f 在 $[a,b]$ 上单调，则在开区间 (a,b) 内存在唯一的 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

- 介值定理

若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x),M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 则 $\forall\mu\in[m,M]$,$\exists\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=\mu$.

推论

若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)\neq f(b)$, 则 $f(x)$ 必可取得介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值。**Remark**

介值定理最常用的结论为：

若 $f\in C_{[a,b]}$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

19. 函数 f 在 x_0 处可导的充要条件是 f 在 x_0 处既左可导，也右可导，且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Remark

此定理常用于判断分段函数在分段点处的可导性。

20. 如果函数 f 在某点处可导，那么 f 在该点处连续。

Remark

- 可导一定连续，但连续不一定可导。如：

$$f(x)=|x|,$$

该函数在 $x=0$ 处连续，但不可导。

- 如果函数 f 在某点处可导，那么 f 不一定在该点的邻域内连续。如：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbf{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbf{Q} \end{cases},$$

  由导数的定义可知，该函数在 $x=0$ 处可导，故其在 $x=0$ 处连续，但它在任何区间内都不连续。

- 如果函数 f 在区间内可导，那么 f 在区间内连续。此定理对开、闭区间同样适用。

21. 函数四则运算的求导法则
    设函数 u,v 在点 x 处可导，则他们的和差积商所产生的函数在点 x 处也可导（商的情况要求分母 $v\neq 0$），且下列公式成立：

    - $(u\pm v)'=u'\pm v'$
    - $(uv)'=u'v+uv'$
    - $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$

    Remark
    在求分段函数在分段点处的导数时，应该用导数的定义来求。

22. 复合函数求导法则
    设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x)\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

    Remark

    - 由此可以推出 $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}$.
    - 对于幂指函数 $y=u^v$, 它的导数可以通过把 y 变成 $e^{u\ln v}$，再用复合函数求导法则求导。

23. 反函数求导法则
    设定义在区间 I 上的单调连续函数 $x=f(y)$ 在点 y 处可导，且 $f'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

    Remark
    此处的 $\dfrac{1}{f'(y)}$ 仍是关于 y 的表达式，需要再将 $y=f^{-1}(x)$ 代入。

24. 隐函数求导法则
    设 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，则有 $F(x,f(x))=0$, 再用复合函数求导法则对 x 求导即可。

    Remark

    - 如果题目要求是算在某点处的导数，则在两边同时求导后，先代入函数值，再移项化简。
    - 隐函数求导法则的常见应用：对数求导法
      对于函数 $y=f(x)$, 两边取对数 $\ln y=\ln f(x)$, 再在两边同时求导，得：

$$\frac{y}{y'}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

      这种方法可以用来算幂次特别复杂的函数的导数。

25. 参数方程求导法则
对于参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定的函数，假设 $x = \varphi(t)$ 与 $y = \psi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 内可导，函数 $x = \varphi(t)$ 具有连续的单调的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Remark

- 若要求二阶导，则
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$
- 对于极坐标方程 $\rho = f(\theta)$, 由于 $x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$,$y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$, 所以转化成参数方程求导。

26. Leibniz 公式
设函数 u, v 都是 n 阶可导函数，则 uv 也是 n 阶可导函数，且有

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

其中 $u^{(0)} = u$.
Remark
这则公式常用在多项式与一个函数的乘积的高阶导数上。由于 n 次多项式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 的大于 n 阶的高阶导数都为 0，故可以将极高阶数的导数运算减少运算量。如：

若 $y = x^2\sin x$, 求 $y^{(30)}$.
由于 $(x^2)' = 2x$,$(x^2)'' = 2$,$(x^2)^{(k)} = 0, k \geq 3$
$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$.
故由 Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} y^{(30)} &= \mathrm{C}_{30}^0 x^2 \sin(x + 15\pi) + \mathrm{C}_{30}^1 2x\sin(x + \frac{29}{2}\pi) + \mathrm{C}_{30}^2 2\sin(x + 14\pi) \\ &= -x^2\sin x + 60x\cos x + 870\sin x \end{aligned}$$

27. 函数微分计算公式
函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处可导。此时，有

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

Remark

- 由此公式可知，自变量 x 本身的微分 $\mathrm{d}x = \Delta x$.
- 这个公式还可以用来算近似值。如：

求 $\ln 1.01$ 的近似值。
设 $f(x)=\ln x$, 那么 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. 故

$$\begin{aligned}\ln 1.01-\ln 1&=\frac{1}{1}\times(1.01-1)+o(1.01-1)\\&\approx 0.01\end{aligned}$$

所以 $\ln 1.01\approx \ln 1+0.01=0.01$.

- 如果给出某个隐函数，要求算 $\mathrm{d}y$, 那么一般不需要先在隐函数两边求导，得出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 再算 $\mathrm{d}y$. 而是直接在隐函数两边求微分。

28. 微分的四则运算法则

- $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}, v\neq 0$

29. 一阶微分形式不变性
设有函数 $y=f(u)$, 则有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

若 u 又是另一个变量 x 的可导函数 $u=g(x)$, 则

$$\mathrm{d}y=f'(u)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $g'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, 故无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分都保持同一形式。这一性质称为一阶微分形式不变性。

Remark

高阶微分没有形式不变性。由高阶微分的定义可知，

$$\mathrm{d}^2y=f''(u)\,\mathrm{d}u^2.$$

而若 u 是中间变量 $u=g(x)$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}\left(f'(u)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)&=\Big(f''(u)\left(g'(x)\right)^2+f'(u)g''(x)\Big)\,\mathrm{d}x^2\\&=f''(u)\,\mathrm{d}g(x)^2+g''(x)\,\mathrm{d}^2g(x)=f''(u)\,\mathrm{d}u^2+g''(x)\,\mathrm{d}^2u.\end{aligned}$$

两者差了一项 $g''(x)\,\mathrm{d}^2u$. 故高阶微分没有形式不变性。

30. Rolle 定理
若函数 $f\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$, 即 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

Remark

从几何角度理解，即：端点值在同一条水平线上的函数在这个区间内一定有水平切线。

31. Lagrange 中值定理
若函数 $f\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b).$$

Remark

- 从几何角度理解，即：函数在区间内一定存在与端点连线平行的切线。
- Lagrange 中值定理真正地将函数值和它的导数值联系在了一起。有许多之前要用导数定义 + 极限保序性才能证明的定理，用 Lagrange 中值定理会方便许多。

32. Cauchy 中值定理
若函数 $f \in C_{[a,b]} \cap D_{(a,b)}$，函数 $g \in C_{[a,b]} \cap D_{(a,b)}$ 且 $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

33. L'Hospital 法则
设 f 在开区间 $(x_0, x_0+\delta)(\delta > 0)$ 内满足下列条件：
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = 0$
- f, g 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(x_0) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

则有
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Remark

- L'Hospital 法则对于 $x \to x_0^+$,$x \to x_0^-$,$x \to x_0$,$x \to +\infty$,$x \to -\infty$,$x \to \infty$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限都成立。
- L'Hospital 法则的条件有一条：f, g 在 x_0 的某邻域内可导。
这说明仅知道 f, g 在 x_0 处可导并不可以使用 L'Hospital 法则。故如果题目只告诉了函数在某一点处的导数值，并没说在该点的某邻域内可导，则不可以用 L'Hospital 法则。而应该用导数的定义或者带 Peano 余项的 Taylor 公式。
- 只有在所求极限分式的分子分母都趋于 0 或无穷大的时候才能用 L'Hospital 法则。如果是非零常数比 0 型等，则不能用 L'Hospital 法则。

34. Taylor 定理
设函数 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$
称此式为带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式。
设函数 f 在 x_0 的某邻域 $N(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间。称此式为带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式。
设函数 f 在 0 处有 n 阶导数，则
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^n\right)$$

称此式为带 Peano 余项的 n 阶 Maclaurin 公式。

设函数 f 在 0 的某邻域 0 内有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x 和 0 之间。称此式为带 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式。

Remark

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式常被用来求极限。
- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式常被用来处理和高阶导数有关的中值定理的证明。有时还需要和介值定理相结合。需要注意的是 ξ 是与 x_0 有关的一个数。如：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续导数。求证：
存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处对 $f(x)$ 进行 2 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}f(x)=&f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&+\frac{f'''(\xi)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\end{aligned}$$

将 a 和 b 分别代入上式：

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

上面两式相减：

$$f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{48}$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数，故由介值定理：$\exists\xi\in(\xi_1.\xi_2)\subset(a.b)$, 使

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=f'''(\xi)$$

代入式子中可得：

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

35. Darboux 定理

若 f 在 $[a,b]$ 上可导，则：

- 若 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.
- 在 (a,b) 内 $f'(x)$ 可取介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值。

Remark

Darboux 定理看似是导数的零点存在性定理和介值定理，但事实上它并没有要求导数的连续性。

36. 函数单调性的判定

设函数 f 在 I 内可导，则 f 在 I 内单调增加 (或单调减少) 的充要条件是：

- $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$(或 $f'(x) \leq 0$)
- $f'(x)$ 在 I 的任意一个部分区间里都不恒等于零

Remark

- 对于为什么是"$\geq$" 而不是 $>$, 参考 $f(x) = x^3$ 在 $(-1, 1)$ 上的性态。
- 如果题目要判断一个函数的单调性，应该对其求导，然后求出其导数为 0 的点和导数不存在的点，再通过导数的正负号判断单调性。

37. 函数极值的判断

设函数 f 在点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$。则当 $f''(x_0) < 0$(或 $f''(x_0) > 0$) 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 (或极小值)。

38. 函数凹凸性的判断

设函数 f 在区间 I 内二阶可导，且 $\forall x > 0, f''(x) \geq 0$(或 $f''(x) \leq 0$), 则 f 在区间 I 上下凸 (或上凸)。

设函数 f 在区间 I 内二阶可导，且 $\forall x > 0, f''(x) > 0$(或 $f''(x) < 0$), 则 f 在区间 I 上严格下凸 (或严格上凸)。

Remark

如果题目要判断一个函数的凹凸性，应该对其求二阶导，然后求出二阶导为 0 的点和二阶导不存在的点，再通过二阶导数的正负号判断凹凸性。

39. 求函数渐近线的方法

曲线 $y = f(x)$ 在右方 (或左方，或左右双方) 以直线 $y = kx + b$ 为渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} (\text{或} k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{或} k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x})$$
$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) (\text{或} b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) \text{或} b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx))$$

函数的铅直渐近线即函数的无穷间断点所在的垂直于 x 轴的直线。

40. 定积分与级数求和

设 $f \in R_{[0,1]}$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

41. 可积的充分条件

- 若 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $f \in R_{[a,b]}$
- 若 f 在 $[a, b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f \in R_{[a,b]}$

  Remark

  若有无限个间断点，则未必可积。如：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

- 若 f 在 $[a, b]$ 上单调且有界，则 $f \in R_{[a,b]}$

- 若 $f \in R_{[a,b]}$, 则 f 改变有限个值以后仍然在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

42. 定积分的性质

- 线性性质
若 $f,g \in R_{[a,b]}$,k_1,k_2 是任意常数，则 $k_1f+k_2g \in R_{[a,b]}$, 且
$$\int_a^b (k_1f+k_2g)\,\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f\,\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$
- 可加性
若 f 在某区间内可积, 则 f 在该区间的任意子区间内也可积，且 $\forall a,b,c$ 在此区间内,
$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x + \int_c^b f\,\mathrm{d}x.$$
Remark
a,b,c 的大小关系没有要求。
- 单调性
若 $f,g \in R_{[a,b]}$, 且 $f(x) \le g(x), x \in [a,b]$, 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
推论
若 $f \in R_{[a,b]}$, 则 $|f(x)| \in R_{[a,b]}$, 且 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$
- 估值定理
若函数 $f \in R_{[a,b]}$, 且 $m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$, 则
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$
Remark
当题目要求估计某定积分的值时，一般用这种方法。
- 积分中值定理
若函数 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$
Remark
  - 事实上，该定理可加强为”$\exists \xi \in (a,b)$”. 对 $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 用 Lagrange 中值定理即可。
  - 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 但不存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得 $f(\xi)(1-(-1)) = 0$.

- 广义积分中值定理
  设函数 $f \in C_{[a,b]}$,$g \in R_{[a,b]}$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得
  $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
  Remark
  - 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：
    设 $g(x)=1$,
    $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
    则 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. 但不存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得
    $$f(\xi)\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
  - 这个定理可以将一些难求积分，甚至求不出来积分的函数提出来。如：

    设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(0)=0$. 求证：
    $\exists \xi \in (-a,a)$, 使得
    $$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}f''(\xi).$$
    由于 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数, 故将其在 $x=0$ 处展开成 1 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：
    $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2$$
    其中 ξ_x 是介于 0 和 x 之间的一个关于 x 的函数。那么
    $$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^a f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^a f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^a \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f''(\xi)}{2}\int_{-a}^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}f''(\xi)\end{aligned}$$
    其中 $\xi \in (-a,a)$.

43. Newton-Leibniz 公式
    设 $f \in R_{[a,b]}$, 且 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则
    $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$
    习惯上常将 $F(b)-F(a)$ 记作 $F(x)|_a^b$.

44. 变上限积分求导定理
    设 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且
    $$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x), x \in [a,b].$$
    Remark

- 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\Phi(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = |x| - 1$ 在 $x = 0$ 处不可导。

- 如果将定积分按 Newton-Leibniz 公式写成原函数之差的形式，可以更好地理解：$(F(x) - F(a))' = f(x)$. 同时，我们按这种方法，利用复合函数求导的方法，可以求出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

- 注意此处的被积表达式中没有 x. 事实上，一般的例如 $\displaystyle\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 的导数不能按照此公式求，而应将其变为 $x\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$ 再来用两函数之积的求导法则求导。如果是一般的 $\displaystyle\int_{a}^{\varphi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 对 x 的导数，则需要用到多元函数的全微分：
记 $F(u,x) = \displaystyle\int_{a}^{u} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u} = f(x,u)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \displaystyle\int_{a}^{u} f_x(x,t)\,\mathrm{d}t$.
故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a}^{\varphi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \int_{a}^{\varphi(x)} f_x(x,t)\,\mathrm{d}t$$

- 有时被积表达式中含有积分上限的不定积分的导数也可以用变量替换来做，如：

已知 $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} tf(x-t)\,\mathrm{d}t$. 求 $g'(x)$.
令 $u = x - t$, 那么 $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$,

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_{x}^{0}(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{x}(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x\int_{0}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_{0}^{x} uf(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

故

$$g'(x) = xf(x) - \int_{0}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u - xf(x) = \int_{0}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$$

- 对于求分段函数的不定积分，常常不用不定积分的公式，而是用此定理来求。如：

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2xe^{x^2} & x \geq 0 \end{cases}$.
求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
令 $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $x \geq 0$ 时，
$F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t^2 = e^u\big|_0^{x^2} = e^{x^2} - 1.$
$x < 0$ 时，
$F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} \mathrm{d}t^2 = u\big|_0^{x^2} = x^2.$

故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = \begin{cases} x^2 + C & x < 0 \\ e^{x^2} - 1 + C & x \geq 0 \end{cases}.$$

当然，如果一定要用不定积分的方法也可以求。如：

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2xe^{x^2} & x \geq 0 \end{cases}$.

求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

当 $x \geq 0$ 时，

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2 = e^{x^2} + C_1$$

当 $x < 0$ 时，

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C_2$$

又由于 $f(x)$ 的原函数在 $x = 0$ 处可导，故其在 $x = 0$ 处连续。

故

$$\lim_{x\to0^-}(x^2 + C_2) = \lim_{x\to0^+}(e^{x^2} + C_1)$$

故 $C_2 = C_1 - 1$.

故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x^2 + C_2 & x < 0 \\ e^{x^2} + C_2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

- 对于反常积分，这个定理不一定成立。（由于函数不满足条件 $f \in C_{[a,b]}$）.
  此时，应该用函数的定义来做。如：

设 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. 求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x} \\ &= -\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\sin\frac{1}{t}}{x} \\ &= -\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(t^2\sin\frac{1}{t}\bigg|_0^x - \int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

而 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ 且

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{1} = 0$$

故 $f'(0) = 0$.

45. 不定积分的性质

- 线性性质
  $\displaystyle\int (k_1f + k_2g)\,\mathrm{d}x = k_1\int f\,\mathrm{d}x + k_2\int g\,\mathrm{d}x$

46. 弧微分公式
对于曲线上的一个极小的弧，有弧微分公式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

47. 二阶线性微分方程的性质
若 y^* 是某个二阶线性非齐次微分方程的一个特解，y_1,y_2 是其对应的二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解,那么 $y = C_1y_1+C_2y_2$ 是二阶线性齐次微分方程的通解,$y = C_1y_1+C_2y_2+y^*$ 是二阶线性非齐次微分方程的通解。

48. 混合偏导数的性质
设函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 D 内存在偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$, 且它们在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

49. 多元函数的可微性

- 若 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在偏导数，$\alpha = f_x(x_0,y_0), \beta = f_y(x_0,y_0)$, 即

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y$$

  Remark
  这条定理加上可微的定义可以用来判断函数是否可微：
  先算出 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$，再计算

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

  如果结果为 0, 则该函数可微。

- 设 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内处处存在偏导数，且偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微。

50. 方向导数
设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 M_0 处沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_{M_0} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 l 的方向余弦。

51. 梯度与增长速度
函数 f 在 M_0 处的梯度方向是其值增长最快的方向，增长速度为 $\|\nabla f(x_0,y_0)\|$.
增长速度为 0 的方向为与其梯度方向垂直的方向。

52. 多元函数的复合函数微分运算法则

- 设 $u = \varphi(x), v = \psi(y)$ 都在点 x 处可导，而 $z = f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z = f(\varphi(x),\psi(x))$ 在点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- 设 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，而 $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\varphi_1+f_2\psi_1,\frac{\partial z}{\partial y}=f_1\varphi_2+f_2\psi_2$$

Remark

这个定理可以用于化简偏微分方程，如：

已知可微函数 $u(\xi,\eta),\xi=x+ay,\eta=x+by,(a\neq b)$. 问 a,b 为何值时，可使 $u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}=0$ 变换为 $u_{\xi\eta}=0$.
由复合函数微分运算法则，

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi+u_\eta,u_y=au_\xi+bu_\eta\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\
&u_{xy}=au_{\xi\xi}+bu_{\xi\eta}+au_{\eta\xi}+bu_{\eta\eta}=au_{\xi\xi}+(a+b)u_{\xi\eta}+bu_{\eta\eta}\\
&u_{yy}=a^2u_{\xi\xi}+abu_{\xi\eta}+abu_{\eta\xi}+b^2u_{\eta\eta}=a^2u_{\xi\xi}+2abu_{\xi\eta}+b^2u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

代入，化简，整理，得

$$(3a^2+4a+1)u_{\xi\xi}+(6ab+4(a+b)+2)u_{\xi\eta}+(3b^2+4b+1)u_{\eta\eta}=0$$

故

$$\begin{cases}3a^2+4a+1=0\\3b^2+4b+1=0\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\b=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-1\\b=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

53. 多元函数一阶微分形式不变性
无论用复合函数求导法则还是直接求导，若 $\mathrm{d}z=u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y$, 则 $u=z_x,v=z_y$.

54. 隐函数微分法

- 设 $n+1$ 元函数 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$，和点 $M_0(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$ 满足：
  - 在点 M_0 的某邻域内有连续的偏导数
  - $F(M_0)=0$
  - $F_y(M_0)\neq 0$

  则方程 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0$ 在点 $M_0(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$ 的某邻域 $N(M_0,\delta)$ 内唯一确定了一个具有连续偏导数的函数 $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 它满足 $z_{n+1}=f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ 及 $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in N(M_0,\delta),F(x_1,x_2,\ldots,x_n,F(x_1,x_2,\ldots x_n))\equiv 0$, 并且

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y},i=1,2,\ldots,n$$

Remark

求隐函数的微分，有三种方法：

- 直接求偏导数

已知 $z^3-3xyz=a^2$, 求 z_x,z_y.
方程两边对 x 求偏导：

$$3z^2z_x-3y(xz_x+z)=0$$

故

$$z_x=\frac{yz}{z^2-xy}$$

同理

$$z_y=\frac{xz}{z^2-xy}$$

- 求全微分

已知 $z^3-3xyz=a^2$, 求 z_x,z_y.
方程两边同时求全微分:

$$3z^2\,\mathrm{d}z-3(yz\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}y)=0$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{yz}{z^2-xy}\,\mathrm{d}x+\frac{xz}{z^2-xy}\,\mathrm{d}y$$

由一阶微分形式不变性

$$z_x=\frac{yz}{z^2-xy},z_y=\frac{xz}{z^2-xy}$$

- 用隐函数定理

已知 $z^3-3xyz=a^2$, 求 z_x,z_y.
记 $F=z^3-3xyz-a^2$, 故

$$F_x=-3yz,F_y=-3xz,F_z=3z^2-3xy$$

故

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy},z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}$$

- 设 m 个 $n+m$ 元函数 $F_1(x_1,\dots,x_{n+m}),\dots,F_m(x_1,\dots,x_{n+m})$ 满足：
  - 在点 $M_0(y_1,\dots,y_{n+m})$ 的某个邻域内有连续的偏导数
  - $F_i(M_0)=0,i=1,2,\dots,m$
  - $J=\left|\begin{matrix}F_{1x_{n+1}} & F_{2x_{n+1}} & \dots & F_{mx_{n+1}}\\ F_{1x_{n+2}} & F_{2x_{n+2}} & \dots & F_{mx_{n+2}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{1x_{n+m}} & F_{2x_{n+m}} & \dots & F_{mx_{n+m}}\end{matrix}\right|_{M_0}\neq 0$

  则方程组 $\{F_i(x_1,\dots,x_{n+m})=0,i=1,2,\dots,m\}$ 在点 $M_1(y_1,y_2,\dots,y_n)$ 的某个邻域 $N(M_1,\delta)$ 内确定了唯一的一组具有连续偏导数的函数 $\{f_i(x_1,x_2,\dots,x_n),i=n+1,n+2,\dots,n+m\}$, 它们满足 $\{f_i(M_1)=x_i\}$ 及 $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in N(M_1,\delta)$,

$F_i(x_1,\dots,x_n,f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))\equiv 0$, 并且如果记

$$J_i=\left|\begin{matrix} F_{1x_{n+1}} & F_{2x_{n+1}} & \dots & F_{i-1_{x_{n+1}}} & F_{i_{x_i}} & F_{i+1_{x_{n+1}}} & \dots & F_{m_{x_{n+1}}} \\ F_{1x_{n+2}} & F_{2x_{n+2}} & \dots & F_{i-1_{x_{n+2}}} & F_{i_{x_i}} & F_{i+1_{x_{n+2}}} & \dots & F_{m_{x_{n+2}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{1x_{n+m}} & F_{2x_{n+m}} & \dots & F_{i-1_{x_{n+m}}} & F_{i_{x_i}} & F_{i+1_{x_{n+m}}} & \dots & F_{m_{x_{n+m}}} \end{matrix}\right|_{M_0}$$

则

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=-\frac{J_i}{J}, i=1,2,\dots,m$$

Remark

求这种隐函数的微分时，建议采用直接求偏导数法或求全导数法，不建议用隐函数定理。解的时候，需要解一个 m 元一次方程组。如：

已知 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2-v+x=0 \\ u+v^2-y=0 \end{cases}$ 确定，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

由方程组，两边同时全微分：

$$\begin{cases} 2u\,\mathrm{d}u-\mathrm{d}v+\mathrm{d}x=0 \\ \mathrm{d}u+2v\,\mathrm{d}v-\mathrm{d}y=0 \end{cases}$$

将这个看作是关于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的二元一次方程组，解，得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{-2v}{4uv+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4uv+1}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{4uv+1}\,\mathrm{d}x+\frac{2u}{4uv+1}\,\mathrm{d}v \end{cases}$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v}{4uv+1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4uv+1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4uv+1},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{4uv+1}$$

55. 多元函数微分学的几何应用

- 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在 $t=t_0$ 处，切线方程为

$$\frac{x-x(t)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t)}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$$

- 曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处，法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Remark
遇到 $z=f(x,y)$ 型，将其变为 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$，故 $F_z=-1$

56. 多元函数极值

- 若 $z=f(x,y)$ 可微，且其在 $M_0(x_0,y_0)$ 处有极值，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$, 即 $\mathbf{grad}(M_0)=\{0,0\}$
  Remark
  函数的驻点未必是其极值点，且函数的极值点未必是其驻点，也可能是其偏导数不存在的点。
  故若我们要求某一个函数的极值点，则既要找其驻点，也要找其偏导数不存在的点，再讨论。
- 设 $M_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的驻点。该函数在 M_0 的邻域内有二阶连续偏导数。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0), \Delta=AC-B^2$, 则：
  - 若 $\Delta>0$，则 M_0 是其极值点，且
    - 若 $A>0$, 则 M_0 是极小值点
    - 若 $A<0$, 则 M_0 是极大值点
  - $\Delta<0$，则 M_0 非其极值点。
  - $\Delta=0$，无法判断

  Remark
  对于 $\Delta=0$ 的情况，一般来说，若 M_0 是极值点，则可通过将 z 配方来证明；若 M_0 不是极值点，则通过取 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$, 其中 $f(x,f_1(x))\le f(x_0,y_0), f(x,f_2(x))\ge f(x_0,y_0)$ 来证明。

57. 多元函数最值
首先先求其极值，再以边界为条件，求其边界上的条件极值，最后再比较得出最值。

58. 多元函数条件极值
Lagrange 乘数法：
若已知 $\varphi(x,y,z)=0$, 求 $u=f(x,y,z)$ 的极值。
令 $F=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$ 为关于 x,y,z,λ 的四元函数，解关于 x,y,z,λ 的四元方程组：

$$\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_z=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

则若 u 在 (x_0,y_0,z_0) 处取得极值，则 (x_0,y_0,z_0) 必满足上述方程。

59. 复数的基本计算

- 共轭
  - $\overline{\overline{z}}=z$

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

• 模

- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

• 辐角

$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

• 指数

- 若 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta))$
- 若 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

60. 复变函数可导的条件

- 设函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$, 若 $f(z)$ 在点 z_0 处可导，则二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，且满足 Cauchy-Riemann 条件。
- 复变函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点可导，则其在 $z = z_0$ 点连续。

61. 复变函数可微的条件

- 复变函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点可微的充要条件是其在 $z = z_0$ 点可导。
- 在区域 D 上定义的复变函数

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

在 D 内一点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 可微的充分必要条件为二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微且满足 Cauchy-Riemann 条件

- 设在区域 D 上定义的复变函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 的实部、虚部均在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$ 存在一阶连续偏导数，且满足 Cauchy-Riemann 条件，则 $f(z)$ 在 z_0 处可微。
- 若 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 D 内的调和函数。

Remark

这个定理可以用来已知一个解析函数的实部或虚部，求其虚部或实部。需要解一个简单的偏微分方程，需要注意到常数与另一个变量是有关的。一般来说最终结果要化成和 z 有关的表达式。

已知解析函数 $f(z)$ 的实部是 $u = y^3 - 3x^2y$, 求虚部 $v(x,y)$ 和 $f(z)$

由于 $f(z)$ 解析，所以满足 Cauchy-Riemann 方程

$$v_x = -u_y = -3y^2 + 3x^2$$

故

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}x = x^3 - 3y^2x + \varphi(y)$$

又

$$v_y = -6xy + \varphi'(y) = u_x = -6xy$$

故

$$\varphi'(y) = 0$$

故

$$\varphi(y) = C$$

从而

$$v = x^3 - 3y^2x + C, f(z) = y^3 - 3x^2y + \mathrm{i}(x^3 - 3y^2x + C) = \mathrm{i}(z^3 + C)$$

62. 复变函数解析的条件
复变函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析等价于：
   (a) 二元函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在 D 内任意处可微
   (b) 满足 Cauchy-Riemann 方程

63. 多元数量函数积分的性质
   - $\displaystyle\int_D \mathrm{d}\sigma = |D|$
   - 线性性质
   $$\int_\Omega (\alpha f(M) + \beta g(M))\,\mathrm{d}\Omega = \alpha \int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega + \beta \int_\Omega g(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
   - 对区域的可加性
   设 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 且 Ω_1 和 Ω_2 除边界点外无公共部分，则
   $$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
   - 多元数量函数积分不等式
     - 若 $f(M) \le g(M), \forall M \in \Omega$, 则
     $$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega \le \int_\Omega g(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
     - $\displaystyle\left|\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega\right| \le \int_\Omega |f(M)|\,\mathrm{d}\Omega$
     - 若 $M_1 \le f(M) \le M_2, \forall M \in \Omega$, 则
     $$M_1|\Omega| \le \int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega \le M_2|\Omega|$$
   - 多元数量函数积分的中值定理
   设 $f \in C_\Omega$, 则至少存在一点 $M^* \in \Omega$, 使
   $$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega = f(M^*)|\Omega|$$

64. 第二型曲线积分的性质
   - 线性性质
   $$\int_L \left(k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1(M) + k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2(M)\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = k_1 \int_L \vec{\boldsymbol{F}}_1(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} + k_2 \int_L \vec{\boldsymbol{F}}_2(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$$

- 方向性

  若 L^- 表示与曲线 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{L^-} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = -\int_{L} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$$

- 对路径积分的可加性

  设 A, B, C 为曲线弧 L 上的任意三点，则

$$\int_{L(AB)} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_{L(AC)} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} + \int_{L(CB)} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$$

65. 两类曲线积分的关系

对于有向光滑曲线弧 L，它的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

若 $x(t)$ 关于 t 单调递增，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} &= \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}{(\mathrm{d}x)^2}} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\end{aligned}$$

若 $x(t)$ 关于 t 单调递减，则同理可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

故

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

其中依据 $x(t)$ 的单调性确认符号。
同样地，也可以用 $\mathrm{d}s$ 表示 $\mathrm{d}y, \mathrm{d}z$.
故若要将第二型曲线积分化为第一型曲线积分，先将其化为坐标形式，接着用 $\mathrm{d}s$ 表示 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 即可。

66. 第二型曲面积分的性质

- 线性性质

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1(M) + k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2(M)\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = k_1\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}_1(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} + k_2\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}_2(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

- 方向性

  若改变曲面的侧，则第二型曲面积分的值反号。即

$$\iint\limits_{\Sigma^-} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = -\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

- 对积分曲面的可加性

  若把曲面 Σ 分为 Σ_1 和 Σ_2 两块，则

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} + \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

67. 两类曲面积分的关系

设 $\vec{F}(M)=\{P(M),Q(M),R(M)\}$, 且 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 在点 $M(x,y,z)$ 处与 Σ 方向一致的法向量的方向余弦，即 $\vec{n}(M)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_{\Sigma}(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}A\end{aligned}$$

其中如果设 $\Sigma:S(x,y,z)=0$, 则

$$|\cos\alpha|=\frac{|S_x|}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},|\cos\beta|=\frac{|S_y|}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},|\cos\gamma|=\frac{|S_z|}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}$$

68. Green 定理

设 D 是一个平面有界闭区域，其边界 ∂D 为光滑或分段光滑曲线，符号 ∂D^+ 表示区域 D 的边界曲线且取正向。二元函数 P,Q 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Remark

- 若积分曲线的方向并不是正向，则通过 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=-\oint_{L^-}f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 来将其变成正向。
- 若积分曲线不是闭合的，则先通过添加线条的方式使其闭合，再通过第一型曲线积分对路径积分的可加性，把加上的线条再减去。如：

> 求 $\int_C(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$. 其中 $C:A(a,0)\to O(0,0)$ 的上半圆周。
> 取 $C1:C\to O\to C$ 的半圆型弧线段，$C_2:C\to O$ 的直线，
> $D:\left\{(x,y)|\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4},y\ge 0\right\}$, 则
>
> $$\begin{aligned}&\int_C(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y\\=&\int_{C_1}(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y+\int_{C_2}(e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_D(e^x\cos y-e^x\cos y+m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_a^0 0\,\mathrm{d}x\\=&m|D|\\=&\frac{\pi a^2m}{8}\end{aligned}$$

- 不可以忽略 P,Q 在 D 上具有一阶连续偏导数的条件。如果在 D 内出现一阶偏导数不连续的点，则应添加曲线将其去除，然后再求所添加的曲线内的积分。如：

设 L 是包围原点的任一条分段光滑的正向简单闭曲线，计算曲线积分

$$I=\oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

记 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

记 $L_r: x^2+y^2=r^2$, 取顺时针方向，其中 $r>0$ 是一个充分小的数使得 L_r 在 D 内。那么，

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_{L+L_r} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\oint_{L_r^-} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

而由于在 $L+L_r$ 所围成的平面区域内，P 和 Q 的一阶偏导数总是连续的，故

$$\oint_{L+L_r} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

其中 D_1 为 L 和 L_r 所围成的区域。

而

$$\begin{aligned}&\oint_{L_r^-}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_r^-}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}|D_r|\\ =&2\pi\end{aligned}$$

其中 D_r 为 L_r 所围成的区域。

故 $I=2\pi$.

- 有一个推论：

  对于平面闭区域 D,

  $$|D|=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

  这个公式能用来计算由参数方程所给出的平面闭区域的面积。

69. 平面曲线积分与路径无关的条件

    设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面单连通域 G 上有一阶连续偏导数，则以下四个命题相互等价

    - $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内处处连续
    - 对于 G 内任意一条分段光滑的闭曲线 L, 有

      $$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$$

    - 曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关
    - 表达式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即存在二元函数 $u(x,y)$, 使得

      $$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

    Remark

- 如果给定 L 的起点 (x_1,y_1) 和终点 (x_2,y_2)，要求求一个与路径无关的曲线积分，那么选择的路径为 $(x_1,y_1)\to(x_1,y_2)\to(x_2,y_2)$.
- 如果给出 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$, 求 u, 那么如果 $(0,0)$ 在 G 内，就用

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

- 要注意到我们选择的新的曲线必须在 G 内。如果连接起点和和终点的最短水平、竖直线段要经过某个不在这个 G 内的点，那么有两种方法：一是将题目中所给的曲线 L 的方程代入被积表达式，那么有可能化简之后的结果不再出现不在 G 内的点；二是作一条新曲线，绕过那个点。如：

求曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{-\sin y\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+\sin^2 y}$. 其中 $L:A\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 沿曲线 $x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-y^2}$ 到 $B\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的弧段。

令 $P=-\dfrac{\sin y}{x^2+\sin^2 y},Q=\dfrac{x\cos y}{x^2+\sin^2 y}$,

则

$$P_y=\frac{\sin^2 y\cos y-x^2\cos y}{(x^2+\sin^2 y)^2},Q_x=\frac{\sin^2 y\cos y-x^2\cos y}{(x^2+\sin^2 y)^2}$$

所以

$$P_y=Q_x,(x,y)\neq(0,0)$$

不妨取单连通域 $G=\{(x,y)|x\geq 0,(x,y)\neq(0,0)\}$,

那么曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关。

因此

$$\begin{aligned}&\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\=&\int_{(0,-\frac{\pi}{2})}^{(1,-\frac{\pi}{2})}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{(1,-\frac{\pi}{2})}^{(1,\frac{\pi}{2})}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{(1,\frac{\pi}{2})}^{(0,\frac{\pi}{2})}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sin^2 y+1}\,\mathrm{d}y+\int_1^0\frac{-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}y\\=&\pi\end{aligned}$$

70. Gauss 定理

设 Ω 是一个空间闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 是光滑或分片光滑的闭曲面，函数 P,Q,R 在 Ω 上具有一阶连续偏导数。

若规定区域 D 的边界曲线 ∂D 的正向 ∂D^+ 如下：

当沿 ∂D 的正向前进时，区域 D 总在前进方向左侧。

那么，则有

$$\oiint_{\partial\Omega^+}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

71. 散度的计算公式

设向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(M),Q(M),R(M)\}$, 则

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\bigg|_{(x,y,z)=M}$$

72. Stokes 定理

设 Σ 是分片光滑的有向曲面，其边界曲线 $\partial\Sigma$ 为分段光滑的闭曲线，函数 P, Q, R 在 Σ 上有一阶连续偏导数。

若规定有向曲面 Σ 的边界曲线 $\partial\Sigma$ 的正向 $\partial\Sigma^+$ 如下：

$\partial\Sigma^+$ 的这一方向与有向曲面 Σ 被指定的法向量的方向符合右手法则。

那么。则有

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\partial\Sigma^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial R}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

73. 旋度的计算公式

设向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, 则

$$
\mathbf{rot}\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \left.\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\right|_{(x,y,z)=M}
$$

74. 向量微分算子的运算

$$
\begin{aligned}
\nabla u &= \mathbf{grad}u \\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} &= \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}} \\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}} &= \mathbf{rot}\vec{\boldsymbol{F}}
\end{aligned}
$$

75. Cauchy 积分定理

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，L 为 D 内任一条分段光滑的简单闭曲线，则

$$
\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0
$$

76. 复连通域内的 Cauchy 积分定理

设 $L, L_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ 为 $n+1$ 条取逆时针方向的简单闭曲线，$L_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ 完全在 L 内，且 L_k 与 L_j 互不相交也互不包含，D 为由 $L, L_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ 围成的复连通域。如果 $f(z)$ 在 $\overline{D} = D\cup\partial D$ 上解析，则

$$
\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z
$$

Remark

有一个重要结果：

设 L 是任意包含 z_0 的简单闭曲线，取逆时针方向，则

$$
\oint_L \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1, n\in\mathbf{Z} \end{cases}
$$

77. Cauchy 积分公式
设区域 D 的边界 ∂D 时分段光滑的简单闭曲线，$f(z)$ 在 D 及 ∂D 上解析，则 $\forall z_0 \in D$, 有

$$2\pi \mathrm{i} f(z_0) = \oint_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

78. 高阶导数公式
设区域 D 的边界 ∂D 时分段光滑的简单闭曲线，$f(z)$ 在 D 及 ∂D 上解析，且 $f(z)$ 在区域 D 内有任意阶导数，则 $\forall z_0 \in D$, 有

$$\frac{2\pi \mathrm{i}}{n!} f^{(n)}(z_0) = \oint_{\partial D^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

Remark
这表示，解析函数具有任意阶导数。

79. 复级数相关定理
若 $c_n = a_n + \mathrm{i} b_n$, 其中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是实数列，则复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

80. 常数项级数的性质

- 线性性质
  设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，其和分别为 S 和 T, 则 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{C}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n)$ 收敛，且其和为 $\lambda_1 S + \lambda_2 T$
  推论
  $\forall \lambda \in \mathrm{C}, \lambda \neq 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ 有相同的敛散性。
- 删去或添加有限项不影响级数的敛散性
- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，若不改变它的各项次序，任意添加括号后得到的新数列仍收敛，且其和不变。
- 级数收敛的必要条件
  若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$
  Remark
  此定理一般用于证明级数不收敛。即：
  若 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

81. 常数项级数的 Cauchy 收敛准则
级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 使当 $n > \mathbf{N}$ 时，$\forall p \in \mathbf{N}$, 总有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \epsilon$$

82. 绝对收敛定理

    若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。

    Remark

    - 这条定理对复级数也成立，此时应理解成模。
    - 若能用比值判敛法、根植判敛法判断某个级数的绝对级数发散，则该级数发散。

83. 正项级数收敛定理

    正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

84. 正项级数的判敛法

    - 比较判别法

      设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为正项级数，且满足 $\forall n \in N_+, a_n \geq b_n$, 则

      - 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛
      - 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

    - 比较判别法的极限形式

      设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为正项级数，且 $\forall n \in N_+, b_n > 0$, 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda$, 则

      - 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时，
        $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性
      - 当 $\lambda = 0$ 时，
        若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；
        若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散
      - 当 $\lambda = +\infty$ 时，
        若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；
        若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

    Remark

    运用这条定理时，一般是利用等价无穷小来找到 b_n. 如：

    判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性。
    由于 $n \to \infty$ 时，

    $$\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$$

    故

    $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛
故原级数收敛。

- 比值判敛法
  设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，且 $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_n>0$. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, 则
  - 当 $\rho<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛
  - 当 $\rho>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散
- 根值判别法
  设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, 则
  - 当 $\rho<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛
  - 当 $\rho>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

  Remark
  能用比值判别法的级数，都能用根值判别法。但是，有些题用比值判别法比较好做。
- 积分判别法
  设 $f\in C_{[1,+\infty)}$, 且非负递减，$\forall n\in\mathbf{N}_+, a_n=f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是反常积分 $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。
  Remark
  遇到分母上有 ln 的，往往要想到积分判别法。

Remark
用以上判敛法时，都首先需要判断级数为正项级数。

85. 交错级数的判敛法
    设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足条件：
    (a) $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_{n+1}\le a_n$
    (b) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

    则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且 $\forall i\in\mathbf{N}$, 余项 $r_n=\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$ 满足 $|r_i|\le a_{i+1}$.
    Remark
    判断一个正数数列单调下降的方式有三种：
    - 作差法
      若 $\forall n, a_{n+1}-a_n\le 0$, 则其单调下降
    - 比值法
      若 $\forall n, \frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$, 则其单调下降
    - 求导法
      若 $a_n=f(n)$, 则令 $y=f(x)$, 若 $f'(x)\le 0$, 则其单调下降

86. 无穷区间上反常积分的判敛法

- 比较判别法
  设 $f, g \in C_{[a,+\infty)}$, 且 $0 \le f(x) \le g(x), a \le x < +\infty$, 则
  - 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛。
  - 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散。
- 设非负函数 $f \in C_{[a,+\infty)}$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$, 则
  - 当 $p > 1, 0 \le l < +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；
  - 当 $p \le 1, 0 < l \le +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

87. 无界函数反常积分的判敛法

- 比较判别法
  设非负函数 $f, g \in C_{[a,b)}$,$x = b$ 为 f, g 的无穷型间断点，且 $f(x) \le g(x), \forall x \in [a, b)$, 则
  - 当 $\int_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛。
  - 当 $\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散。
- 设非负函数 $f \in C_{[a,b]}$,$x = b$ 为 f 的无穷型间断点，且 $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^p f(x) = l$, 则
  - 当 $p < 1, 0 \le l < +\infty$ 时，$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；
  - 当 $p \ge 1, 0 < l \le +\infty$ 时，$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

88. Abel 定理
    对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 下列命题成立：

- 若该幂级数在 $z = z_0 (z_0 \neq 0)$ 处收敛，则对满足 $|z| < |z_0|$ 的所有 z, 该级数绝对收敛。
- 若该幂级数在 $z = z_0$ 处发散，那么对满足 $|z| > |z_0|$ 的所有 z, 该级数发散。

89. 幂级数的收敛性
    幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛性仅有三种可能

- $\forall z \in \mathrm{C}$, 该幂级数绝对收敛
- 仅在 $z = 0$ 处收敛
- 存在一个正数 R, 当 $|z| < R$ 时，该幂级数绝对收敛；当 $|z| > R$ 时，该幂级数发散

90. 幂级数收敛半径的计算方法
    对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，若 $\forall n \in \mathbf{N}, c_n \neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho$, 则该幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

91. 幂级数的代数运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则在它们公共的收敛圆域 $|z| < R$ 内，有：

- $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{C}$, 幂级数 $\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n z^n$ 收敛，并且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha c_n + \beta \tilde{c}_n)\, z^n$$

- 它们的乘积级数收敛，且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 \tilde{c}_n + c_1 \tilde{c}_{n-1} + \cdots + c_n \tilde{c}_0) z^n$$

Remark

这个定理只保证在它们公共的收敛圆域 $|z| < R$ 内收敛，并不保证它们仅在 $|z| < R$ 内收敛。

92. 幂级数和函数的性质

- 复的幂级数

  设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的和函数为 $S(z)$, 收敛半径 $R > 0$, 则

  - $S(z)$ 在收敛圆 $|z| < R$ 内解析
  - 在收敛圆内幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 可以逐项求导，即当 $|z| < R$ 时，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)'$$

  - 在收敛圆内幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 可以逐项积分，即当 $|z| < R$ 时，

$$\int_L S(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_L z^n\,\mathrm{d}z$$

- 实的幂级数

  设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$, 收敛半径 $R > 0$, 则

  - $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续

    Remark

    如果 $S(R)$ 和 $S(-R)$ 存在，则 $S(x)$ 在 $[-R, R]$ 内连续。
  - $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内有连续的导数，且可以逐项求导，即 $\forall x \in (-R, R)$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$$

  - $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可积，并且可以逐项积分，即 $\forall x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$$

93. 函数展开为幂级数

- 复函数
  设复函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$z_0 \in D$,R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，则当 $|z-z_0|<R$ 时，$f(z)$ 能展成 $z-z_0$ 的幂级数
  $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
- 实函数
  设实函数 $f \in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$，则 f 在 (x_0-R,x_0+R) 内可以展开成 $x-x_0$ 的幂级数
  $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
  的充分必要条件是：
  $\forall x \in (x_0-R,x_0+R)$,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 公式的余项 $R_n(x)\to 0(x\to\infty)$, 且上述展开式唯一。
  Remark
  一般用 Lagrange 余项解决此类问题。

94. 函数展开为双边无穷级数
设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则在此圆环域内，$f(z)$ 能展成双边无穷级数，即有
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$
其中系数
$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi$$
L 为圆环域内绕 z_0 的任何一条逆时针方向的简单闭曲线。且展开式是唯一的。
Remark
   - 这里展开式唯一的意思是，在同一个圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内，如果将 $f(z)$ 均展开成关于 $(z-z_0)$ 的双边无穷级数，那么展开式唯一。两个条件缺一不可。
   - 如果 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则其在 z_0 的去心邻域中的双边无穷级数的系数 c_n, 有 $\forall n<0, c_n=0$, 且此时其双边无穷级数与幂级数相同。

95. 零点的判断方法
如果 $f(z)$ 在 z_0 处解析，那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充分必要条件是
$$f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,\ldots,m-1), f^{(m)}(z_0)=0$$

96. 零点与极点的关系
   - z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点的充分必要条件是 z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点。
   - 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点，$g(z)$ 的 n 级零点，则
     - z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 级零点
     - 若 $m<n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 级极点
     - 若 $m>n$, 则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点

97. 留数的计算方法

- 有限点处
  - 双边无穷级数法
    将 $f(z)$ 在 $0 < |z-z_0| < \delta$ 的圆环域内展开成双边无穷级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$.
  - 若 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$$

  - 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

    Remark
    事实上，若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级格点，则 $\forall n > m$, 有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z)\right)$$

    因此，可以选用适当的 n. 如

    求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^3}, 0\right]$.
    易知 $z=0$ 是 2 级极点。

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{e^z-1}{z^3}, 0\right] =& \frac{1}{3!}\lim_{z \to 0}(e^z-1)^{(3)} \\ =& \frac{1}{6}\end{aligned}$$

  - 若 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$,$P(z)$ 及 $Q(z)$ 都在 z_0 解析，且 $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

- 无穷远点处
  - 双边无穷级数法
    将 $f(z)$ 在 $M < |z| < +\infty$ 的圆环域内展开成双边无穷级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,则 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -c_{-1}$.
  -

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right]$$

98. 留数定理
    设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 外处处解析，L 是 D 内包围所有奇点的一条正向简单闭曲线，那么

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

99. 扩充复平面的留数定理

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内除去有限个孤立奇点外处处解析，那么 $f(z)$ 在所有奇点（包括 ∞ 点）的留数之和必等于零。

Remark

如果运用留数定理时，曲线内的奇点个数较多，可以考虑运用此定理，计算曲线外奇点的留数。

100. 三角函数系的正交性

设 $T=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$, 则

$$\forall f,g\in T, f\neq g, \int_{-\pi}^{\pi} fg\,\mathrm{d}x=0$$

Remark

由这一性质可知，三角函数系中的三角函数都与 1 正交，因此

$$\forall n\in\mathbf{N}_+, \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

101. Fourier 级数的计算方法

- 三角级数形式
  - $f(x)$ 周期为 2π

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

  - $f(x)$ 周期为 $2l$

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x\\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

  Remark

  若 $f(x)$ 是奇函数，则 $a_n=0$; 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $b_n=0$.

- 复数指数形式

  $f(x)$ 周期为 $2l$

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\mathrm{i}n\omega x}\,\mathrm{d}x$$

102. Dirichlet 收敛定理

- $f(x)$ 周期为 2π

  设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

  (a) 连续或只有有限个第一类间断点

  (b) 只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛，其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(-\pi,\pi), x\text{是}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\in(-\pi,\pi), x\text{是}f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} & x=\pm\pi \end{cases}$$

- $f(x)$ 周期为 $2l$

  设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，在 $[-l, l]$ 上满足：

  (a) 连续或只有有限个第一类间断点

  (b) 只有有限个极值点

  则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在区间 $[-l, l]$ 上收敛，其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(-l,l), x\text{是}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\in(-l,l), x\text{是}f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x=\pm l \end{cases}$$

3 公式

1. 常用函数

   - 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

     定义域为 **R**.
     值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

   - 取整函数

$$y=[x]$$

     其中 $[x]$ 表示不超过 $[x]$ 的最大整数。定义域为 **R**.
     值域为 **Z**.
     Remark
     若 x 为大于 0 的小数, 则 $[-x]=-[x]-1$. 如：$[-2.5]=-3$.

   - 幂函数

$$y=x^a, a\neq 0$$

   - 有理函数

$$y=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

   - 指数函数

$$y=a^x, a>0, a\neq 1$$

     定义域为 **R**.
     值域为 $\mathbf{R}_+$.

- 对数函数

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

定义域为 $\mathbf{R}_+$.
值域为 $\mathbf{R}$.

- 三角函数
  - 正弦函数 (sine)

$$y = \sin x$$

定义域为 $\mathbf{R}$.
值域为 $[-1.1]$.

  - 余弦函数 (cosine)

$$y = \cos x$$

定义域为 $\mathbf{R}$.
值域为 $[-1.1]$.

  - 正切函数 (tangent)

$$y = \tan x$$

定义域为 $\left\{x|x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
值域为 $\mathbf{R}$.

  - 余切函数 (cotangent)

$$y = \cot x$$

定义域为 $\{x|x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
值域为 $\mathbf{R}$.

  - 正割函数 (secant)

$$y = \sec x$$

定义域为 $\left\{x|x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

  - 余割函数 (cosecant)

$$y = \csc x$$

定义域为 $\{x|x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- 反三角函数
  - 反正弦函数

$$y = \arcsin x$$

定义域为 $[-1, 1]$.
值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

  - 反余弦函数

$$y = \arccos x$$

定义域为 $[-1, 1]$.
值域为 $[0, \pi]$.

- 反正切函数

$$y = \arctan x$$

定义域为 **R**.
值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

- 双曲三角函数
  - 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

定义域 **R**.
值域 **R**.

  - 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

定义域 **R**.
值域 $[1, +\infty)$.

  - 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

定义域 **R**.
值域 $(-1, 1)$.

- 反双曲三角函数
  - 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

定义域 **R**.
值域 **R**.

  - 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

定义域 $[1, +\infty)$.
值域 **R**.

  - 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

定义域 $(-1, 1)$.
值域 **R**.

2. 三角函数有关公式

- 奇偶性

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \csc(-x) &= -\csc x \\ \cos(-x) &= \cos x & \sec(-x) &= \sec x \\ \tan(-x) &= -\tan x & \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

- 两角和（差）公式

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y & \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y & \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} & \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} \end{aligned}$$

- 二倍角公式

$$\begin{aligned}\sin(2x)&=2\sin x\cos x\\\cos(2x)&=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x\\\tan(2x)&=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}\end{aligned}$$

- 积化和差公式

$$\begin{aligned}\sin x\sin y&=-\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))\\\cos x\cos y&=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))\\\sin x\cos y&=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))\end{aligned}$$

- 和差化积公式

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\\sin x-\sin y&=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\\cos x+\cos y&=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\\cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

- 第一类万能公式
  令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则:

$$\begin{aligned}\sin x&=\frac{2t}{1+t^2}\\\cos x&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\\tan x&=\frac{2t}{1-t^2}\\\mathrm{d}x&=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- 第二类万能公式
  令 $t=\tan x$, 则:

$$\begin{aligned}\sin^2x&=\frac{t^2}{1+t^2}\\\cos^2x&=\frac{1}{1+t^2}\\\mathrm{d}x&=\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- 三角函数之间的关系

$$\sin x\csc x=1$$
$$\cos x\sec x=1$$
$$\tan x\cot x=1$$
$$\sin^2x+\cos^2x=1$$
$$\sec^2x-\tan^2x=1$$
$$\csc^2x-\cot^2x=1$$

3. 反三角函数有关公式

- 奇偶性

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= -\arcsin x\\ \arccos(-x) &= \arccos x\\ \arctan(-x) &= -\arctan x\end{aligned}$$

- 反三角函数之间的关系

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\arccos x) = x \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \tan(\arctan x) = x$$

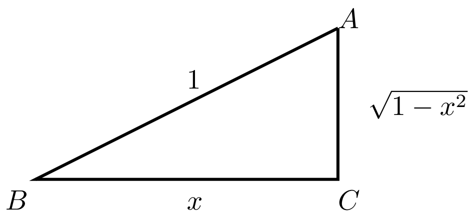
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$$

Remark

这些公式可以借助一个直角三角形来理解（虽然直角三角形的方式只能说明 $\arccos x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时的情况，但事实上，这些结论是对于使等式有意义的所有 x 都成立的）：

（以 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ 为例）



如图所示，设 $B = \arccos x$, 那么由勾股定理，可以显然地得到

$$\sin(\arccos x) = \sin B = \frac{AC}{AB} = \sqrt{1-x^2}$$

4. 有理分式的极限

对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$:

- $m = n$ 时

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}$$
$$= \frac{a_n}{b_n}$$

- $m > n$ 时

同理可得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \infty$$

- $m < n$ 时
  同理可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=0$$

5. 根式之差的极限
   对于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[m]{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}-\sqrt[n]{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0})$:
   常用做法为

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[m]{x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}-\sqrt[n]{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0})\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{1+\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}}-\sqrt[n]{1+\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}}}{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{1+\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}}-1}{\frac{1}{x}}-\frac{\sqrt[n]{1+\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}}-1}{\frac{1}{x}}\\
\xlongequal{\text{等价无穷小}}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}\right)}{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

6. 两个重要极限

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

  Remark
  此极限常被用来将幂指函数的极限转化为一般的分式函数的极限。如：

  > 求极限
  > $$\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{4}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^x$$
  >
  > $$\begin{aligned}
  > &\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{4}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^x\\
  > =&\lim_{x\to0}\left(\left(1+\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)}}\right)^{x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)}\\
  > =&\lim_{x\to0}e^{x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)}
  > \end{aligned}$$
  >
  > 从而转化成求一般的分式函数 $x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)$ 的极限

7. 常见等价无穷小
   $x\to0$ 时：

- $\sin x\sim x$

- $\tan x \sim x$
- $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\arcsin x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $a^x - 1 \sim x\ln a$
- $e^x - 1 \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

  Remark

  这里 α 可以取实数。特别地，比较常用的有 $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$.
- $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$

8. 常见函数的导数

- $(C)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

9. 常用高阶导数

- $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)x^{n-k}, 0 < k \leq n$

- $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = (-1)^k k! \frac{1}{x^{k+1}}$
- $(e^x)^{(k)} = e^x$
- $(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{x^k}$
- $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$
- $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$

10. 常用 Taylor 展开

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$

11. 微分中值定理常见构造函数方法

- $f(\xi) = \xi$, 构造 $g(x) = f(x) - x$
- $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = xf(x)$
- $f(\xi) + f'(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = e^x f(x)$
- $f(\xi) - f'(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = e^{-x} f(x)$

12. 常用积分公式

- $\int k \,\mathrm{d}x = kx + C$
- $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} x^{k+1}, k \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$
- $\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C = -\ln\left|\frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}\right| + C$

- $\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C$

13. 不定积分的积分法

- 第一类换元法

  设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$,$u = \varphi(x)$ 可微，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(x)) \, \mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

  Remark

  对于函数中出现了 $ax^2 + b$ 的形式，一般是变成 $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)^2 + 1$ 的形式以后，再用 $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{b}{a}} \, \mathrm{d}\sqrt{\frac{a}{b}}x$.

- 第二类换元法

  设 $x = \varphi(t)$ 是单调、可导的函数，并且 $\varphi'(t) \neq 0$. 又设 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 有原函数，则有换元公式

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t\right)\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

  Remark

  - 题目中的“单调”，实际上只需要要求 $\varphi(x)$ 是分段单调的即可，即 $\varphi(x)$ 只要存在单调区间即可。然后分段积分再加起来，结果一样符合。（事实上确实存在没有单调区间的函数，只需要在有理数和无理数时取不同值即可。）
  - 在换元时，如果遇到开根号，需要讨论绝对值。
  - 当分母次数远远大于分子时，可以尝试倒代换：$t = \frac{1}{x}$. 此时如果遇到开根号，不需要讨论绝对值。
  - 遇到三角函数的多项式的积分时，可以尝试第一类万能公式代换；
    遇到三角函数的平方的多项式的积分时，可以尝试第二类万能公式代换。
  - 三角换元
    - $x^2 + 1$ 型，可以令 $x = \tan t$
    - $x^2 - 1$ 型，可以令 $x = \sec t$
    - $1 - x^2$ 型，可以令 $x = \sin t$

- 分部积分法

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$$

  Remark

  分部积分法有三种应用方法：

  - 凭空造 x

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x) \, \mathrm{d}x$$

    如：

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - x + C$$

- e^x 分部积分两次. 如：

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}e^x$$
$$= e^x\sin x - \int \cos x \,\mathrm{d}e^x$$
$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$$

故

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x\sin x - e^x\cos x\right) + C$$

- 递推公式，如：

设 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$. 则

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

故

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}$$

类似地，还可以得到：

* 若 $I_n = \int \sin^n x \,\mathrm{d}x$, 则 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \sin^{n-1}x\cos x$.
* 若 $I_n = \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$, 则 $I_n = -\frac{n-1}{n}I_{n-2} + \cos^{n-1}x\sin x$.

14. 定积分的积分法

- 换元法

设函数 $f, g \in C_{[a,b]}$,$x = \varphi(t)$ 满足下列条件：

- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 且当 t 从 α 变到 β 时，对应的 x 从 a 单调地变到 b
- $\varphi' \in C_{[\alpha,\beta]}$(或 $\varphi' \in C_{[\beta,\alpha]}$)

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remark

- 按照积分的定义，d 后面的是积分变量，而积分限是积分变量的取值范围。所以，更严谨的写法为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

- 和不定积分的换元法不一样的是，单调性是需要注意的一个点。如：$\int_0^{10\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$, 我们不能直接令 $t=\sin x$ 算出 $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. 而是应该 $[0,10\pi]$ 划分为多个单调区间以后再换元。
- 定积分换元之后，上下限也要跟着换。切记。
- 通过定积分的换元，我们可以得到：
  * 若 f 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
  * $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$
    如果遇到 tan 的定积分，不妨可以令 $t=\frac{\pi}{4}-x$
  * $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

  和上述方法类似的方法可以解决许多有三角函数的定积分题：

  求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$
  令 $t=-x$:
  $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$$
  故
  $$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$
  而
  $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$
  故
  $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

  在用这类方法的时候，尤其要注意运用 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}(x>0)$ 这个公式。

• 分部积分
$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

Remark

- 由不定积分的分部积分公式，我们可以得到结论：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数} \end{cases}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数} \end{cases}$$
- 遇到两次积分的时候，或者有积不出来的积分的时候，常常要用分部积分。如：

已知 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
由题意：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= x\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=0-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2\\ &=\frac{1}{2}-\frac{e}{2}\end{aligned}$$

15. 有理函数的积分

对于有理函数 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, 其中 $P_n(x)$,$Q_m(x)$ 分别是 n 次、m 次多项式。若 $n<m$, 则称 $R(x)$ 为真分式；若 $n\geq m$, 则称 $R(x)$ 为假分式。

对有理函数的积分 $R(x)=\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$，首先先将假分式转化为真分式 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$。

然后将 $Q(x)$ 因式分解, 得到

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\dots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\dots(x^2+rx+s)^{\mu})$$

其中二次的因式在实数范围内都无法继续因式分解。那么可设

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots\\ &+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\cdots\\ &+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots\\ &+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}\end{aligned}$$

然后通分，通过对比系数，得出常数的值。

接着，积分就转化为了 $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ 和 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ 的不定积分。

对于前者，直接套用幂函数的不定积分即可。对于后者，可以先通过 $Mx+N=\dfrac{M}{2}\,\mathrm{d}(x^2+px+q)+N-\dfrac{Mp}{2}$，变为 $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^k}$ 的积分。而这个可以通过换元法变成 $\dfrac{1}{(t^2+a)^k}$ 的积分。这个可以通过不定积分的分部积分公式得到递推公式。

16. 常见的积不出来的函数

有的函数的不定积分并没有初等表达式。知道这些积分，可以让我们在考试中遇到这种积分，不是去求它的值，而是通过其他方法转化表达式。

- $\int\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\int\sqrt{1-k\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, 0<k<1$

17. 定积分的应用

- 求平面曲线的弧长
  运用弧微分公式 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ 进行定积分
  $$\int_p^q \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}.$$
  需要注意的是定积分的上限一定要大于下限。
  - 直角坐标
    直接将 $y = f(x)$ 代入即可。得到
    $$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
  - 参数方程
    直接将 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 代入即可。得到
    $$s = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
  - 极坐标
    将 $x = \rho(\theta)\cos\theta$,$y = \rho(\theta)\sin\theta$ 代入，化简可得
    $$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$
- 求平面图形面积
  运用面微分公式 $\mathrm{d}A = |y|\,\mathrm{d}x$(与 x 轴围成的面积) 进行定积分。
  - 直角坐标
    求两个函数从 a 到 b 围成的面积：
    $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$
    特别地，求从 a 到 b 时 $f(x)$ 与 x 轴围成的面积：
    $$A = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
  - 参数方程
    直接将 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 代入即可。得到
    $$A = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
    . 如果是构成了封闭图形，则需要用 Green 公式。
    $$A = \int_a^b y\,\mathrm{d}x - \int_c^d x\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t) - \varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$
  - 极坐标
    运用公式 $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 直接代入即可。得到
    $$A = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
- 求体积
  运用体微分公式
  $$\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x,$$

其中 A 为在 x 处的面积。

常通过用平行的平面去截所求图形，若其得到的平面图形是规则的，则可以以此方向来积分。旋转体体积：

处理平面图形绕定轴旋转的题目，有两种方式：

- ◦ 用垂直于定轴的平面去截
  这个常用于定轴为平面图形自变量所在直线的题目。如：$y = f(x)$ 绕 x 轴。或者是在该轴方向函数无多值。
- ◦ 用平行于定轴的平面去截
  这个常用于定轴为平面图形因变量所在直线的题目。如 $y = f(x)$ 绕 x 轴。或者是在该轴方向函数无多值。
  这种方法是将已有的平面图形沿平行于旋转轴的方向切成许多小条，在平面图形旋转的过程中，小条构成了两个圆柱之差，以此来积分。

- 求旋转体面积
  以垂直于旋转轴的面去截旋转体，得到的是类圆台。利用弧微分可以求出类圆台的斜高。

Remark

这些都是微元法的应用。值得指出的是，微元法的思想，即“以直代曲”，“以规则代不规则”，是在等价无穷小的前提下。即在同样的 $\mathrm{d}x$ 下，两个微元之商的极限为 1. 例如求旋转体的面积，为什么不直接是周长 $\mathrm{d}y$ 的积分，而是周长 $\mathrm{d}s$ 的积分呢？这是因为圆台面和圆柱面在它的高 $\mathrm{d}y$ 趋于 0 的情况下，并非等价无穷小。

18. 一阶微分方程的解法

- 可分离变量的一阶微分方程
  形如
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$
  的方程称为可分离变量的一阶微分方程。将其移项为
  $$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$
  后不定积分即可。

  Remark

  - ◦ 当遇到 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$ 或 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 时，不需要加绝对值符号。
  - ◦ 如果化简得到 $f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$, 不能直接得出 $x = y$. 原因是积分出来的是 $F(y) = F(x) + C$. 如：

    解微分方程 $y' \sec^y t \tan x + \sec^x \tan y = 0$

    化简，得：
    $$\sec^2 \cot y\,\mathrm{d}y = -\sec^x \cot x\,\mathrm{d}x$$
    即
    $$\csc 2y\,\mathrm{d}y = -\csc 2x\,\mathrm{d}x$$
    故
    $$\int \csc 2y\,\mathrm{d}y = \int -\csc 2x\,\mathrm{d}x$$
    故
    $$\ln|\tan y| = -\ln|\tan x| + C$$

所以

$$\tan x \tan y = C$$

- 一阶线性微分方程

  形如

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

  的方程称为一阶线性微分方程。它的解为

  $$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

  其中 $-\int P(x)\,\mathrm{d}x, \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ 均指不定积分中的一个原函数。

  Remark

  如果是在指数上的不定积分，即 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $-\int P(x)\,\mathrm{d}x$, 那么遇到一次分式积分时都不需要加绝对值符号。

- 齐次型微分方程

  当 $t \neq 0$ 时，若 $f(tx, ty) = f(x, y)$, 则称 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 为齐次型微分方程。

  解此方程可令 $u = \frac{y}{x}$, 那么 $y' = xu' + u$.

  Remark

  有下面两种题型，可以用类似的方法做：

求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ 的通解。

设 $x = v + v_0$,$y = u + u_0$.

那么 $y + 2 = u + u_0 + 2$,$x + y - 1 = u + v + u_0 + v_0 - 1$. 令

$$\begin{cases} u_0 + 2 = 0 \\ u_0 + v_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $v_0 = 3, u_0 = -2$.

那么 $v = x - 3, u = y + 2$. 那么 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \mathrm{d}u = \mathrm{d}y$. 故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = 2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = 2\left(\frac{\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1}\right)^2$$

令 $w = \frac{u}{v}$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = vw' + w$.

故 $vw' + w = 2\left(\frac{w}{w+1}\right)^2$.

整理，得

$$\left(\frac{2}{w^2+1} + \frac{1}{w}\right)\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

故

$$2\arctan w + \ln w = \ln v + C$$

整理，得

$$Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}} = y+2$$

求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-x-y}{3x+3y-4}$ 的通解。

令 $t = x+y$, 那么 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - 1$,

$$t' - 1 = -\frac{t}{3t-4}$$

整理，得

$$\frac{3t-4}{2t-4}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

故

$$\frac{3}{2}t + \ln(t-2) = x + C$$

整理，得

$$x+y-2 = Ce^{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y}$$

- Bernoulli 方程

  形如

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^k (k \neq 0, 1)$$

  的方程称为 Bernoulli 方程。

  解此方程可令 $z = y^{1-k}$.

19. 高阶微分方程的解法

- $y^{(n)} = f(x)$ 型

  一阶一阶往回积。通解有 n 个常数 C_i.

- $y'' = f(x, y')$ 型

  令 $z = y'$, 方程即为 $z' = f(x, z)$.

- $y'' = f(y, y')$ 型

  令 $z = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则

  $$y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

  故可以转化为 $z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = f(y, z)$. 解出 z 和 y 的关系，再解另一个微分方程。如：

求方程 $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ 的通解

令 $z = y'$, 则 $y'' = z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$

故

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{1-y}z^2 = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{2\,\mathrm{d}y}{y-1}$$

故

$$\ln z = 2\ln(y-1) + C_1$$

即

$$y' = C_1(y-1)^2$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_1\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{1}{1-y} = C_1x + C_2.$$

- 高阶常系数线性微分方程
  对于微分方程
  $$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)$$
  它对应的齐次微分方程的特征方程为 $a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0.$
  对于单根 r_i, 其在通解中对应的项为 Ce^{r_ix}.
  对于 k 重实根 r_j, 其在通解中对应的项为 $(C_0 + C_1x + \cdots + C_kx^k)e^{r_jx}$.
  对于 k 重共轭复根 $\alpha_i + \mathrm{i}\beta_i$, 其在通解中对应的项为 $(C_0+C_1x+\cdots+C_kx^k)e^{\alpha_ix}(C_{k+1}\cos(\beta_ix)+C_{k+2}\sin(\beta_ix))$.
  对于非齐次的微分方程，其特解的形式类似于二阶情况。

- Euler 方程
  对于微分方程
  $$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = f(x),$$
  令 $t = \ln x$. 那么注意到复合函数的求导法则，可以得到关于 $y(t)$ 的一个 n 阶常系数线性微分方程。
  Remark
  - 如果 $t = \ln x$, 由复合函数的求导法则可知，
    $$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{x^n}\left(A_{n,n}\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n} + A_{n,n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + A_{n,1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$
    其中，$A_{n,i}$ 满足 $A_{n+1,i} = -nA_{n,i} + A_{n,i-1}, A_{n,n} = 1, A_{n,1} = -nA_{n,i}$.
  - 严格来说应该令 $t = \ln|x|$, 但在此处只需 $t = \ln x$ 即可。

20. 二阶线性微分方程的解法

- 常系数二阶线性齐次微分方程
  对于微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$, 其对应的特征方程为
  $$ar^2 + br + c = 0$$
  - 若特征方程有两个不等的实数解 r_1, r_2, 则该微分方程的通解为
    $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$.
  - 若特征方程有重根 $r_1 = r_2 = r$, 则该微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$.
  - 若特征方程有一对共轭复根 $r = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$, 则该微分方程的通解为
    $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$.

- 常系数二阶线性非齐次微分方程
  对于微分方程
  $$ay'' + by' + cy = f(x)$$

首先，有定理：
若 y_1, y_2 分别是方程 $ay''+by'+cy=f_1(x), ay''+by'+cy=f_2(x)$ 的解，则 y_1+y_2 是方程 $ay''+by'+cy=f_1(x)+f_2(x)$ 的解。
由此定理可以将复杂的非齐次项转化为我们已知的非齐次项。
其次，有定理：
若 $y=\bar{y}$ 是方程 $ay''+by'+c=0$ 的通解，y^* 是方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 的一个特解，则方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 的通解为 $y=\bar{y}+y^*$.
由此定理，我们只需要求出一个特解即可。下面介绍求特解的方式：

- 对于 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$. 其中 P_m 是关于 x 的 m 次多项式。
  特解 y^* 具有形式 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$. 其中，$k$ 按 α 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$. 而 Q_m 中的每一项的系数需对比系数得出。
- 对于 $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x)$. 其中 P_m, P_n 分别是关于 x 的 m 次、n 次多项式。
  特解 y^* 具有形式 $y^*=x^ke^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$. 其中 R_l, Q_l 分别关于 x 的 l 次多项式。且 $l=\max\{m,n\}$.k 按 $\alpha+\beta\mathrm{i}$(或 $\alpha-\beta\mathrm{i}$) 不是特征根或是特征根分别取 0 或 1. 而 R_l, Q_l 中的每一项的系数需对比系数得出。

对于一般的 $f(x)$, 我们有常数变易法：
设方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 对应的齐次微分方程的通解为 $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$. 那么原方程的特解具有形式 $y^*=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$. 其中 C_1, C_2 满足：

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0\\
C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=0
\end{aligned}
$$

Remark
特别地，对于 $ay''+by'+c=e^{\alpha x}$ 型，可设其特解为 $y^*=A_0x^ke^{\alpha x}$. 其中，k 按 α 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$.
对于 $ay''+by'+c=P_m(x)$ 型，可设其特解为 $y^*=x^k(A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1x+A_0)$. 其中，$k$ 按 0 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$.
对于 $ay''+by'+c=P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x$ 型，可设其特解为 $y^*=x^k(R_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$. 其中，$k$ 按 $\beta\mathrm{i}$ 是其对应的特征方程的非特征根或特征根，依次取
0 或 1.

21. 二重积分的计算方法

- 直角坐标系
  $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
  对于积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 若 D 中 x 的取值范围是 $a\le x\le b$, 且在 D 中任作直线 $x=x_0$, 交 D 的边界依次为 $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)$, 则

$$
\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x
$$

  同样地，可以进行先 y 后 x 的累次积分。
  Remark
  - 当积分区域 D 比较复杂的时候，我们可以利用积分对区域的可加性，将 D 划分为几个比较简单的区域再积分。

- ◦ 由于既可以先 x 后 y 也可以先 y 后 x 进行累次积分，故累次积分中交换积分次序可以处理一些积不出来的积分：

求 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x$
交换积分次序：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \sin x^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 x \sin x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{1 - \cos 1}{2}\end{aligned}$$

- 极坐标系

$$\mathrm{d}\sigma = r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

Remark

- ◦ 用极坐标系计算二重积分时，要么是积分区域由极坐标系表示较简单，要么是被积函数由极坐标表示较简单。
- ◦ 尽管极坐标中 $\theta \in [0, 2\pi)$, 但事实上只需要有一个完整的长度为 2π 的区间都可以作为其取值范围。这个可以用来求积分区域为 $\rho = a\cos\theta$ 型积分，只需将 θ 的范围固定在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 即可。

22. 二重积分的换元法
设函数 f 在有界闭区域 D 上连续，又函数 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ 有一阶连续偏导数，且 Jacobi 行列式 $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 则

$$\iint\limits_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$$

23. 二重积分的对称性

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数，且 D 关于 y 轴对称；
或 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数，且 D 关于 x 轴对称。则

$$\iint\limits_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0$$

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数，且 D 关于 y 轴对称；
或 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数，且 D 关于 x 轴对称。则

$$\iint\limits_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2 \iint\limits_{D_1} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

其中 D_1 为一半区域。

- 若积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Remark

常见应用为 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).$

这一技巧可以简化许多运算。如：

设 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $f(x)>0, x\in[a,b]$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq(b-a)^2$$

由题意可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\\=&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 $D:[a,b]\times[a,b]$

故 D 关于 $y=x$ 对称。

故

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\\=&\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\\geq&\frac{1}{2}\iint\limits_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&(b-a)^2\end{aligned}$$

24. 三重积分的计算方法

- 直角坐标系
  - 细棒法（先一后二）

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

  其中 D 是 Ω 在 xOy 平面上的投影。（即最大的区域）

  - 切片法（先二后一）

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_c^d\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $[c,d]$ 是 Ω 在 z 轴上的投影。（即最长的线段）

- 柱坐标系

$$\mathrm{d}\Omega = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

- 球坐标系

$$\mathrm{d}\Omega = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

25. 三重积分的换元法

设函数 f 在有界闭区域 D 上连续，又函数 $x=\varphi(u,v,w), y=\psi(u,v,w), z=\chi(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数，且 Jacobi 行列式 $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

26. 三重积分的对称性

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 x 是奇函数，且 Ω 关于 yOz 平面对称；
  或 $f(x,y,z)$ 关于 y 是奇函数，且 Ω 关于 xOz 平面对称；
  或 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，且 Ω 关于 xOy 平面对称。则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

  Remark

  - 这一方法可以用来化简。
    有一个常用结论为：
    若积分区域 Ω 至少关于 xOy, yOz, zOx 三个平面中的两个是对称的，则

$$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

    这一方法可以将一些难求的三重积分化为球坐标的三重积分。
  - 若 $f(x,y,z)$ 关于 x 是偶函数，且 Ω 关于 yOz 平面对称；
    或 $f(x,y,z)$ 关于 y 是偶函数，且 Ω 关于 xOz 平面对称；
    或 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，且 Ω 关于 xOy 平面对称。则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

    其中 Ω_1 为一半区域。
  - 若积分区域 Ω 关于 $x=y$ 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

    若积分区域 Ω 关于 $y=z$ 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(x,z,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

    若积分区域 Ω 关于 $z=x$ 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(z,y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Remark
常见推论为，若 Ω 关于 $x=y$ 对称，则

$$\iiint_\Omega f(x,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

这一方法有一常用结论：
若 Ω 关于 $x=y,y=z,z=x$ 三者均对称，则

$$\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega 3x^2+6xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- 由于球坐标中，x,y 和 z 的换算公式不一样，因此可以通过对称性简化计算。如：

设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$, 求三重积分 $\iiint\limits_\Omega e^{|x|}\,\mathrm{d}v$.
由于积分区域的对称性

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega e^{|x|}\,\mathrm{d}v\\=&\iiint_\Omega e^{|z|}\,\mathrm{d}v\\=&8\iiint_{\Omega_1} e^{|z|}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$.
因此

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega e^{|x|}\,\mathrm{d}v\\=&8\iiint_{\Omega_1} e^{|z|}\,\mathrm{d}v\\=&8\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{r\cos\theta}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\=&4\pi\int_0^1 r(e^r-1)\,\mathrm{d}r\\=&2\pi\end{aligned}$$

27. 第一型曲线积分的计算方法

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

- 直角坐标系
对于曲线 $L:y=f(x),a\le x\le b$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Remark
需要注意，积分上限一定要大于等于积分下限。

- 参数方程

  对于曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\alpha\le t\le\beta$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- 极坐标系

  对于曲线 $L:\rho=r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

28. 第一型曲线积分的对称性

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，且 L 关于 y 轴对称；

  或 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，且 L 关于 x 轴对称。则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=0$$

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，且 L 关于 y 轴对称；

  或 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，且 L 关于 x 轴对称。则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

  其中 L_1 为一半曲线。

- 若 L 关于 $y=x$ 对称，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\,\mathrm{d}s$$

29. 第一型曲线积分的几何意义

$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 表示以 L 为准线，$z=f(x,y)$ 为高的柱体的侧面积

30. 第一型曲面积分的计算方法

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

设 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上的投影，则

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Remark

如果给出的 Σ 的形式是 $F(x,y,z)=0$, 则应该用隐函数求导。

31. 第一型曲面积分的对称性

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 x 是奇函数，且 Σ 关于 yOz 平面对称；

  或 $f(x,y,z)$ 关于 y 是奇函数，且 Σ 关于 xOz 平面对称；

  或 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，且 Σ 关于 xOy 平面对称。则

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}A=0$$

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 x 是偶函数，且 Σ 关于 yOz 平面对称；
  或 $f(x,y,z)$ 关于 y 是偶函数，且 Σ 关于 xOz 平面对称；
  或 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，且 Σ 关于 xOy 平面对称。则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A$$

  其中 Σ_1 为一半区域。

- 若积分区域 Σ 关于 $x=y$ 对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)\,\mathrm{d}A$$

  若积分区域 Σ 关于 $y=z$ 对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{\Sigma} f(x,z,y)\,\mathrm{d}A$$

  若积分区域 Σ 关于 $z=x$ 对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{\Sigma} f(z,y,x)\,\mathrm{d}A$$

Remark

此条性质可以解决一些椭球面与球面的问题。如：

求 $\iint\limits_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)\,\mathrm{d}A$. 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

由第一型曲面积分的对称性可知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)\,\mathrm{d}A\\
=&\iint\limits_{\Sigma}(ay^2+bz^2+cx^2)\,\mathrm{d}A\\
=&\iint\limits_{\Sigma}(az^2+bx^2+cy^2)\,\mathrm{d}A\\
=&\frac{1}{3}\left(\iint\limits_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)\,\mathrm{d}A+\iint\limits_{\Sigma}(ay^2+bz^2+cx^2)\,\mathrm{d}A+\iint\limits_{\Sigma}(az^2+bx^2+cy^2)\,\mathrm{d}A\right)\\
=&\frac{a+b+c}{3}\left(\iint\limits_{\Sigma}x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}A\right)\\
=&\frac{a+b+c}{3}\left(\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}A\right)\\
=&\frac{a+b+c}{3}|\Sigma|\\
=&\frac{4\pi}{3}(a+b+c)
\end{aligned}$$

32. 数量函数积分的应用

- 质心

  设 Ω 为一可度量的几何形体，它在点 M 处的密度 $\mu=\mu(M)\in C_\Omega$.
  则其质量为
  $$m=\int_\Omega \mu(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
  其质心为
  $$\bar{x}=\frac{\displaystyle\int_\Omega x\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{m}$$
  $$\bar{y}=\frac{\displaystyle\int_\Omega y\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{m}$$
  $$\bar{z}=\frac{\displaystyle\int_\Omega z\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{m}$$

- 转动惯量

  设 Ω 为一可度量的几何形体，它在点 M 处的密度 $\mu=\mu(M)\in C_\Omega$.
  则其对某个转动轴的转动惯量为
  $$\int_\Omega (\rho(M))^2\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
  其中 $\rho(M)$ 表示点 M 到转动轴的距离。
  特别地，
  其对 x 轴转动惯量为
  $$I_x=\int_\Omega (y^2+z^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
  其对 y 轴转动惯量为
  $$I_y=\int_\Omega (x^2+z^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega$$
  其对 z 轴转动惯量为
  $$I_z=\int_\Omega (x^2+y^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

Remark
这里的数量函数积分，要依据所求物体的形状来确定：

- 所求物体是数轴上的一条线段，用定积分；
- 所求物体是一条曲线，用第一型曲线积分；
- 所求物体是一块平面区域，用二重积分；
- 所求物体是一块曲面，用第一型曲面积分；
- 所求物体是一个三维实心物体，用三重积分。

33. 第二型曲线积分的计算方法
设有向光滑曲线弧 L 的参数方程为
$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$
当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y,z)$ 由 L 起点 A 沿 L 运动到终点 B. 向量函数
$$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

在 L 上连续，则

$$\int_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)\mathrm{d}t$$

特别地，如果给出的是平面上的曲线 $L: y=f(x)$, 则看作参数方程 $x=x, y=f(x)$, 代入后即为

$$\int_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_{x_1}^{x_2} F(x,f(x))(1+f'(x))\,\mathrm{d}x$$

Remark

如果给出的参数方程不是单调地变化，则有两种方法：

- 根据第二型曲线积分对积分曲线的可加性，将其分成若干个单调变化的曲线段，积分后再相加。

  求 $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}x$, 其中 $C: y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

  $$\int_C xy\,\mathrm{d}x = \int_{C_1} xy\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} xy\,\mathrm{d}x$$

  其中 $C_1: y^2=x$ 上从 $(1,-1)$ 到 $(0,0)$ 的一段弧
  $C_2: y^2=x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。
  故

  $$\int_C xy\,\mathrm{d}x = \int_1^0 x\cdot(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

- 对于平面曲线而言，利用 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$ 也可以换另一个单调变化的积分变量。

  求 $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}x$, 其中 $C: y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

  $$\int_C xy\,\mathrm{d}x = \int_C xy\cdot 2y\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 2y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

34. 第二型曲线积分的应用

    - $\displaystyle\int_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 表示变力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿曲线 L 指定方向移动所做的功。
    - $\displaystyle\oint_L \vec{\boldsymbol{F}}(M)\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 表示向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿闭曲线 L 的环量。

35. 第二型曲面积分的计算方法

    设函数 $R(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 $\Sigma: z=z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$ 上连续（其中 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上的投影区域），则有

    - 若 Σ 取的侧满足其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角，则

      $$\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

    - 若 Σ 取的侧满足其法向量与 z 轴正向的夹角为钝角，则

      $$\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

36. 第二型曲面积分的对称性

- 若 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 x 是偶函数，且 Σ 关于 yOz 平面对称；
  或 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 y 是偶函数，且 Σ 关于 xOz 平面对称；
  或 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，且 Σ 关于 xOy 平面对称。则

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = 0$$

- 若 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 x 是奇函数，且 Σ 关于 yOz 平面对称；
  或 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 y 是奇函数，且 Σ 关于 xOz 平面对称；
  或 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，且 Σ 关于 xOy 平面对称。则

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = 2\iint\limits_{\Sigma_1} \vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

  其中 Σ_1 为一半区域。

  Remark

  - 特别要注意的是第二型曲面积分的对称性定理与其他的积分不一样。它是奇函数为 2 倍，偶函数为 0.
  - 这里要求曲面的侧是一致的，如不能在 xOy 平面上方取由外部向内部，下方取由内部向外部。

37. 第二型曲面积分的换元法
设 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$. 则

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -z_x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = -z_y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

若给出的 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$, 则只需要将 $z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}, z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}$ 代入即可。

38. 第二型曲面积分的应用
$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$ 表示在点 M 处流速为 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的流体沿指定侧通过曲面 Σ 时单位时间内的流量。

39. 复变函数积分的方法

- 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$, 则

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_L (u+\mathrm{i}v)\,\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y) = \int_L u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_L v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

- 设 $f(z)=re^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_L (re^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}(\rho e^{\mathrm{i}\theta}) = \int_L re^{\mathrm{i}(\varphi+\theta)}\,\mathrm{d}\rho + \mathrm{i}r\rho e^{\mathrm{i}(\varphi+\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

- 若 $F'(z)=f(z)$, 则

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)-F(z_0)$$

40. 复变函数中的初等函数

- 指数函数

$$w=e^z=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

  满足性质

- $|e^z| = e^x, \operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
- $e^{z+2k\pi\mathrm{i}} = e^z, k \in \mathbf{Z}$
- 处处解析，且 $(e^z)' = e^z$

• 对数函数

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z = \ln|z| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbf{Z}$$

$\operatorname{Ln} z$ 有无穷多个值. 对于每一个 k, 确定一个单值分支，记为 $(\operatorname{Ln} z)_k$. 记 $\ln z = (\operatorname{Ln} z)_0$ 为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值。

满足性质

- $\operatorname{Ln}(z_1z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$
- $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$
- $\operatorname{Ln} z_1^{z_2} = z_2\operatorname{Ln} z_1 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{Ln} z$ 除原点与负实轴外连续
- $\operatorname{Ln} z$ 除原点与负实轴外解析，且 $(\operatorname{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$
- $\operatorname{Ln} z$ 的各分支在除原点与负实轴外的其他点处解析，且与 $\ln z$ 有相同的导数值。

• 幂函数

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

对于不是整数的 α,z^α 有多个值. 记 $e^{\alpha\ln z}$ 为 z^α 的主值。

满足性质

- 若 $\alpha > 0$, 则 z^α 在复平面上解析
- 若 z^α 在绝大多数情况下，在负实轴和原点处不解析
- 对于解析区域，$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$

• 三角函数

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

满足性质

- $\sin z$ 和 $\cos z$ 以 2π 为周期
- $\sin z$ 和 $\cos z$ 在复平面上处处解析，且 $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$

Remark

在实数范围内成立的关于三角函数的等式一般在复数范围内都成立；在实数范围内成立的关于三角函数的不等式一般在复数范围内都不成立。

41. 常见级数

• 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

属于发散级数。

• 几何级数（等比级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$$

其中 $a, q \in \mathrm{C}, a \neq 0$.

- 当 $|q|<1$ 时，级数收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$
- 当 $|q|\geq 1$ 时，级数发散

Remark
注意到 q 为复数。即可以判断如 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ 是发散级数

- p 级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$
其中 $p\in\mathbf{R}$
  - 当 $p>1$ 时，级数收敛
  - 当 $p\leq 1$ 时，级数发散

42. Γ 函数
$$\Gamma(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t & x>0\\ \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} & x<0,x\notin\mathbf{Z}\end{cases}$$
Γ 的性质：
- 对任意定义域内的 x,$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
- $\forall n\in\mathbf{N}_+,\Gamma(n+1)=n!$
- $\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Remark
如果题目遇到求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}t^b\,\mathrm{d}t$ 时，往往通过换元法转化为 Γ 函数。如：

> 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}e^{-ax}\,\mathrm{d}x(a>0)$.
> $$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}e^{-ax}\,\mathrm{d}x\\ \xlongequal{t=ax}&\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{a}t)^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ =&a^{-\frac{3}{2}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ =&a^{-\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})\\ =&a^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\\ =&\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

43. 求幂级数的和函数的方法
- 逐项求导

> 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的和函数。

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 则

$$\begin{aligned}S'(x)=&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\\=&\frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

故 $S(x)-S(0)=\ln(1+x)$. 而 $S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{0}{n+1}=0$, 故

$$S(x)=\ln(1+x)$$

由 $|-x|<1$, 得收敛区间为 $(-1,1)$.
当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ 收敛;
当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 发散。
故收敛域为 $(-1,1]$.

- 逐项积分

求 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$ 的和函数。

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^{2n}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n+1}\right)'+\frac{1}{1-x^2}\\=&\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{1}{1-x^2}\\=&\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{1}{1-x^2}\\=&\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{1-x^2}\\=&\frac{2}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

由 $|x^2|<1$, 得收敛区间为 $(-1,1)$.
当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$ 发散;
当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^{2n+1}$ 发散。
故收敛域为 $(-1,1)$.

44. 将函数展开成幂级数的方法

- 直接展开法
  直接计算 f 的 Taylor 系数，得到它的 Taylor 级数，并求出收敛半径和证明 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$

- 间接展开法

  根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知的函数展开式，利用函数的四则运算，逐项求导、逐项求积分及变量代换等，求得所给函数的 Taylor 级数。

  Remark

  常用技巧：对于函数 $\dfrac{1}{a+bx}$, 将其变形为 $\dfrac{1}{a+bx_0}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a+bx_0}(x-x_0)}$, 将其转化为一个公比为 $-\dfrac{b}{a+bx_0}(x-x_0)$ 的等比级数。

45. 将函数展开成双边无穷级数的方法

一般均用间接展开法。

求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内的双边无穷级数.

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{z(z-i)^2}&=\frac{-1}{z}\left(\frac{1}{z-i}\right)' \\ &=\frac{-1}{z}\left(\frac{i}{1-\frac{z}{i}}\right)'=\frac{-i}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right)' \\ &=\sum_{n=-2}^{\infty}-i^{-n-1}(n+2)z^n \end{aligned}$$

Remark

如果遇到要求在 $k<|z-z_0|<+\infty$ 时展开 $\dfrac{1}{(z-z_0)(az+b)}$ 时，由于等比级数要求公比小于 1，所以不能直接做，需要变形：

$$\frac{1}{(z-z_0)(az+b)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{a(z-z_0)+az_0-b}=\frac{1}{az_0-b}\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1+\frac{a}{az_0-b}(z-z_0)}$$

从而将 $\dfrac{1}{1+\frac{a}{az_0-b}(z-z_0)}$ 展开为等比级数。此时公比 $\left|-\dfrac{a}{az_0-b}(z-z_0)\right|<1.$

46. 用留数计算定积分的方法

- 形如 $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(u,v)$ 是关于 u,v 的有理函数。

$$\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$$

- 有理函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

  若 $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, 且

  (a) $n-m\geq 2$

  (b) $R(z)$ 在实轴无零点

  则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\left[R(z),z_k\right]$$

  其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的所有奇点。

- 形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x(a>0)$ 的积分，其中 $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, 且

  (a) $n-m\geq 1$

(b) $R(z)$ 在实轴无零点

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum \operatorname{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}az}, z_k\right]$$

其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的所有奇点。

Remark

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x\right], \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x\right]$$

47. 函数延拓展开成 Fourier 级数的方法

已知 $y = f(x), x \in [0, l]$, 求其周期为 $2l$ 的 Fourier 级数

- 偶延拓

  令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, l] \\ f(-x) & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

  将 $F(x)$ 在 $[-l, l]$ 上 Fourier 展开即可。其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = 0$$

- 奇延拓

  令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, l] \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

  将 $F(x)$ 在 $[-l, l]$ 上 Fourier 展开即可。其中

$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$