Wie ist der metrische Raum definiert?

Modell metrischerRaum

benutzt X,d **mit**

X : Menge;

$d : X \times X \to \mathbb{R}$;

$\forall x,y$ **mit** $x,y \in X$ **gilt** $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

$\forall x,y$ **mit** $x,y \in X$ **gilt** $d(x,y) = d(y,x)$;

$\forall x,y,z$ **mit** $x,y,z \in X$ **gilt** $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

$\square$

Definiere folgende Begriffe:

(a) Grenzwert

(b) Kugel

(c) beschränkt

(d) Cauchyfolge

(a) Grenzwert(a **mit** a : Folge) := A **mit** $A \in X; \forall \varepsilon$ **mit** $\varepsilon > 0$ **gilt** $\exists N$ **mit** $N \in \mathbb{N}$; $\forall n$ **mit** $\mathbb{N}_{\geq N}$ **gilt** $d(a_n, A) < \varepsilon$ $\square$

(b) $B(r,x$ **mit** $r \in \mathbb{R}_{>0};\ x \in X) := \{y$ **mit** $d(y,x) < r\}$;

(c) beschränkt := M **mit** $M \subseteq X$; $\exists R,x$ **mit** $M \subseteq B_R(x)$ $\square$ $\square$;

(d) Cauchyfolge := a **mit** a : Folge; $\forall \varepsilon$ **mit** $\epsilon > 0$ **gilt** $\exists N$ **mit** $N \in \mathbb{N}$; $\forall n,m \in \mathbb{N}_{\geq N}$ **gilt** $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ $\square$ $\square$;

Definiere diskrete Metrik. Welche Mengen sind mit der diskreten Metrik zusammen ein Generator für einen metrischen Raum?

$$\text{diskreteMetrik} := x,y \ \textbf{mit} \ x,y \in X \to \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\forall X \ \textbf{mit} \ X : \text{Menge} \ \textbf{gilt} \ (X, \text{diskreteMetrik}(X)) : \text{Gen}(\text{metrischerRaum});$$

Sind i.A. alle Cauchyfolgen konvergent?

Wann ist ein Raum vollständig?

Gebe ein Beispiel für nicht vollständige Räume an. Wieso ist dieser nicht vollständig?

Im allgemeinen sind Cauchyfolgen **nicht** konvergent.

vollständig $:= M$ **mit** M : metrischerRaum; $\forall a$ **mit** $a : M.$Cauchyfolge **gilt** $a : M.$konvergent $\Box$ $M\mathbb{R}^* := metrischerRaum(\mathbb{R}^*, A1.d|_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*})$ Ist nicht vollständig, da $a := (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge und divergent in $M\mathbb{R}^*$ ist.

Wie ist der normierte Raum definiert?

Was ist ein Banachraum?

Modell normierterRaum

benutzt V,Norm **mit**

V : Vektorraum;

$V.K$ = A1.reellerKörper;

$X := V.X$;

$0_V := V.0$;

Norm : $X \to \mathbb{R}$;

$\forall x$ **mit** $||x|| = 0$ **gilt** $x = 0_V$;

$\forall \lambda, x$ **mit** $\lambda \in \mathbb{R}$; $x \in X$ **gilt** $||\lambda \odot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

$\forall x, y$ **mit** $x, y \in X$ **gilt** $||x \oplus y|| \leq ||x|| + ||y||$;

$\Box$

Banachraum := R **mit** R : normierterRaum; R.M : vollständig $\Box$;

Wie ist der Skalarproduktraum definiert?
Was ist ein Hilbertraum?

Modell Skalarproduktraum

benutzt V,SP **mit**

V : Vektorraum;

$V.K$ = A1.reellerKörper;

$X := V.X$;

$0_V := V.0$;

SP : $X \to \mathbb{R}$;

$\forall x$ **mit** $x \in X$ **gilt** $\langle x,x \rangle \geq 0$;

$\forall x$ **mit** $\langle x,x \rangle = 0$ **gilt** $x = 0_V$;

$\forall x,y$ **mit** $x,y \in X$ **gilt** $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$;

$\forall \lambda,x,y,z$ **mit** $\lambda \in \mathbb{R}$; $x,y,z \in X$ **gilt** $\langle x,(\lambda \odot y) \oplus z \rangle = \lambda \cdot \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$;

$\square$

Hilertraum := H **mit** H : Skalarproduktraum; H.M : vollständig $\square$;

In welchem Raum können Winkel gemessen werden?
Wie hängen Winkel und Skalarprodukt zusammen?
Wie ist die Projektion definiert?
Wie induziert der Skalarproduktraum eine Norm?
Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

In Skalarproduktraum.

$$\cos\sphericalangle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}}$$

$$P(y \textbf{ mit } y \in X;\ y \neq 0_V) := x \textbf{ mit } x \in X \mapsto \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \odot y;$$

$$\mathrm{Norm}(v \textbf{ mit } v \in X) := \sqrt{\langle v,v\rangle};$$

$$\forall x,y \textbf{ mit } x,y \in X \textbf{ gilt } |\langle x,y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||;$$

Definiere StandardSkalarprodukt, p-, Unendlich-, Integral- und Sup-Norm.

StandardSkalarprodukt(x,y **mit** x,y : diskretReellwertig; Def(x) = Def(y)) $:= \sum\limits_{i \in \mathrm{Def}(x)} x_i \cdot y_i$

Potenznorm(p **mit** $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$) $:=$ x **mit** x : diskretReellwertig $\mapsto \left(\sum\limits_{i \in \mathrm{Def(x}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

UnendlichNorm(x **mit** x : diskretReellwertig) $:= \begin{cases} \max\limits_{i \in \mathrm{Def}(x)} |x_i| & \mathrm{Def}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Integralnorm(p,a,b **mit** $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$; $a < b$) $:= f$ **mit** $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}\,[a,b]\,, \mathbb{R})$; f : stetig $\mapsto \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$ Abk. $||f||_{\mathbb{L}^p(\mathbb{I}[a,b])}$

$$\mathrm{SupNorm}(f \ \textbf{mit} \ f : \mathrm{Funktion};\ \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}) := \begin{cases} \sup\limits_{x \in \mathrm{Def}(f)} |f(x)| & \mathrm{Def}(f) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abk. $||f||_\infty$

Wann ist eine Folge in $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ konvergent?

Satz

Sei $N :=$ *NormierterRaum*$(\mathcal{F}(E,\mathbb{R}), ||\cdot||_p)$ *mit einer endlichen Menge* E *und* $p \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 1}$. *Ist* a *eine Folge mit Werten in* $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, *dann ist* a *genau dann* N*.konvergent, wenn für alle* $i \in E$ *die Folge* $(a_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ *A1.konvergent sind. In diesem Fall gilt* N*.Limes*$(a)(i) =$ *A1.Limes*$((a_n(i))_{n\in\mathbb{N}})$ *für jeder* $i \in E$. *AuSSerdem ist* N *ein Banachraum.*

Wie ist gleichmäSSigKonvergent und punktweiseKonvergent definiert?

gleichmäSSigKonvergentGegen(A **mit** A : reellwertig) := a **mit** $a : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathrm{Def}(A), \mathbb{R})$; $(||a_n - A||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$: A1.Nullfolge $\square$;
punktweiseKonvergentGegen(A **mit** A : reellwertig) := a **mit** $a : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathrm{Def}, \mathbb{R})$; $\forall x$ **mit** $x \in \mathrm{Def}(A)$ **gilt** $(|a_n(x) - A(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$: A1.Nullfolge $\square$;

Definiere die Begriffe Umgebung, offen und abgeschlossen.

Umgebung(x **mit** $x \in X$) := U **mit** $U \subseteq X$; $\exists \varepsilon$ **mit** $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ $\square\square$;

offen := U **mit** $U \subseteq X$; $\forall x$ **mit** $x \in U$ **gilt** U : Umgebung(x) $\square$;

abgeschlossen := A **mit** $A \subseteq X$; $X \setminus A$: offen $\square$;

$\forall x, r$ **mit** $x \in X$; $r > 0$ **gilt** $B_r(x)$: offen;

$\forall x, U$ **mit** $U \subseteq X$; $x \in X$ **gilt** U : Umgebung(x) $\Leftrightarrow \exists O$ **mit** $x \in O$; $O \subseteq U$; O : offen $\square$

Definiere die Begriffe stetigIn, stetig und gebe die dazugehörigen Charakterisierungen.

stetigIn$(x, N, M$ **mit** N, M : metrischerRaum$) := f$ **mit** $D := \mathrm{Def}(f)$; $D \subset N.X$; $\mathrm{Bild}(f) \subset M.X$; $x \in D$; $\forall a$ **mit** a : N.Folge; $\mathrm{Bild}(a) \subset D$; $N.\lim a = x$ **gilt** $M.\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$ $\square$;

stetig$(N, M$ **mit** N, M : metrischerRaum$) := f$ **mit** $f : N.X \mapsto M.X$; $\forall x$ **mit** $x \in N.X$ **gilt** f : stetigIn(x, N, M) $\square$;

$\forall f, x, N, M$ **mit** N, M : metrischerRaum **gilt** f : stetig$(x, N, M) \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon$ **mit** $\varepsilon > 0$ **gilt** $\exists \delta$ **mit** $\delta > 0$; $\forall y$ **mit** $y \in N.B_\delta(x)$ **gilt** $f(y) \in M.B_\varepsilon(f(x))$ $\square$;

$\forall f, N, M, x$ **mit** N, M : metrischerRaum; $f : N.X \mapsto M.X$; $x \in N.X$ **gilt** f : stetigIn$(x, N, M) \Leftrightarrow \forall U$ **mit** $U : M.$Umgebung$(f(x))$ **gilt** $f^{-1}(U)$: $N.$Umgebung(x);

$\forall f, N, M$ **mit** N, M : metrischerRaum; $f : N.X \to M.X$ **gilt** $f \in C^0(N, M) \Leftrightarrow \forall U$ **mit** $U : M.$offen **gilt** $f^{-1}(U) : N.$offen;

$\forall f, N, M$ **mit** N, M : metrischerRaum; $f : N.X \to M.X$ **gilt** $f \in C^0(N, M) \Leftrightarrow \forall U$ **mit** $U : M.$abgeschlossen **gilt** $f^{-1}(U) : N.$abgeschlossen;

Wie ist der topologische Raum definiert?

Modell topologischerRaum

benutzt X,τ **mit**

X : Menge;

$\tau \subseteq \mathrm{Pot}(X)$;

offen := U **mit** $U \in \tau$ $\square$;

$\emptyset$: offen;

X : offen;

$\forall \mathcal{M}$ **mit** $\subseteq \tau$; $\mathcal{M}$: endlich **gilt** $\bigcap \mathcal{M}$: offen;

$\forall \mathcal{M}$ **mit** $\subseteq \tau$ **gilt** $\bigcap \mathcal{M}$: offen;

$\square$

Umgebung(x **mit** $x \in X$) $:= U$ **mit** $U \subseteq X; \exists O$ **mit** $x \in O;\ O \subseteq U;\ O:$ offen

innererPunkt(M **mit** $M \subseteq X$) $:= x$ **mit** $M :$ Umgebung(x);

Inneres(M **mit** $M \subseteq X$) $:= \{x$ **mit** $M :$ Umgebung(x)$\}$;

Häufungspunkt(M **mit** $M \subseteq X$) $:= x$ **mit** $x \in X;\ \forall U$ **mit** $U :$ Umgebung(x) **gilt** $\exists y$ **mit** $y \in M \bigcap U;\ y \neq x$;

isolierterPunkt(M **mit** $M \subseteq X$) $:= x$ **mit** $x \in M; \neg(x :$ Häufungspunkt(M))

Beruhrpunkt(M **mit** $M \subseteq X$) := x **mit** $x \in X$; $\forall U$ **mit** U : Umgebung(x) **gilt** $\exists$
$M \bigcap U$ □□;

Abschluss(M **mit** $M \subseteq X$) := x **mit** x : Beruhrpunkt(M);

Randpunkt(M **mit** $M \subseteq X$) := x **mit** x : Beruhrpunkt(M); x : Berührpunkt($X \setminus M$);

Rand(M **mit** $M \subseteq X$) := x **mit** x : Randpunkt(M);