Билеты по математическому анализу для коллоквиума 14 ноября. Часть I

Шишминцев Дмитрий Владимирович

11 ноября 2022 г.

Содержание

1 Множества и операции над ними

(Условно) Множество - совокупность некоторых объектов определенных по одному признаку.
$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$ - элемент a не принадлежит множеству A
$A \subset B$ - множество A является подмножеством B

Равенство множеств: Множества равны если каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$

Операции над множествами:

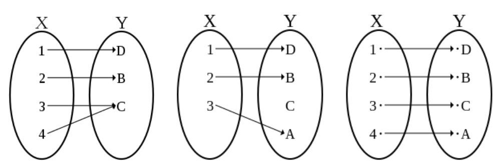
- Пересечение множеств: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$ - коммутативно и ассоциативно
- Объединение множеств: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$ - коммутативно и ассоциативно
- Разность множеств: $A \backslash B = \{x | x \in A и x \notin B\}$
- Симметричная разность: $A \triangle B = (A \backslash B) \cap (B \backslash A)$
- Декартово произведение множеств: $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$

2 Отображения и функции

Отображение (функция) - правило по которому $\forall x \in A \exists! y \in B$

Варианты функциональных отображений $F : X \to Y$

- Функция F сюръективна, если $\forall y \in Y \exists x \in X : y = F(x)$ - каждый элемент множества Y является прообразом хотя бы одного элемента множества X
- Функция F инъективна, если $\forall x \in X \exists y \in Y : y = F(x)$ - разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y
- Функция F биективна, если она сюръективна и инъективна одновременна



3 Эквивалентность, счетность, мощность континума

Мощность множества: $|A|$ - число элементов входящих в множество A
Эквивалентность множеств: множества эквивалентны ($A \sim B$) если $|A| = |B|$
Счетность множество: бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами
Мощность континуума: мощность множества всех вещественных чисел

4 Теорема Кантора-Бернштейна и сравнение мощности множеств

Теорема Кантора-Бернштейна

1. Если $A \sim B'$ (где $B' \subset B$) и $B \sim A'$ (где $A' \subset A$) $\to A \sim B$
2. Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C$, то $A \sim B$

Сравнение мощностей множеств: Если множества A и B неэквивалентны, но $\exists B' \subset B : B' \sim A$ и $\nexists A' \subset A : A' \sim B$, то будем считать, что $|A| < |B|$

5 Множество вещественных чисел и его аксиоматика

Вещественные числа $\mathbb{R}$: бесконечные десятичные дроби вида $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 ....$, где выбран определенный знак: $+$ или -, $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а все десятичные символы $a_1, a_2 ...$ - цифры от 0 до 9, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \to a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
Аксиоматика:

1. Линейность: если $x \neq y$, то $x > y$ или $x < y$
2. Транзитивность: $\exists \{>, =\} b, b\{>, =\} c \to a\{>, =\} c$
3. Ассоциативность: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a+b)+c = a+(b+c), a(bc) = (ab)c$
4. Коммутативность: $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a+b = b+a, a \cdot b = b \cdot a$
5. Дистрибутивность: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

6 Ограниченность множества и его точные грани

Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ называется:

1. Ограниченным сверху, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leqslant b$
2. Ограниченным снизу, если $\exists d \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to d \leqslant a$
3. Ограниченным, если $\exists c \in \mathbb{R} : c > 0$ и $\forall a \in A \to |a| \leqslant c$

Верхняя и нижняя грань не единственны.
Свойство точной верхней грани: Если $b = supA$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \epsilon$
Свойство точной нижней грани: Если $d = infA$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a < d + \epsilon$

7 Метод математической индукции

Математическая индукция - метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Для обоснования метода математической индукции используется свойство натуральных чисел: $\forall A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \exists a' \in A : \forall a \in A \to a' \leqslant a$

Метод математической индукции состоит из следующих шагов:

1. База индукции: проверяем справедливость утверждения для a'
2. Индукционное предположение: предполагаем справедливость для произвольного элемента $a_k \in A$
3. Индукционный шаг: доказываем справедливость утверждения для $a_{k+1} \in A$

8 Бином Ньютона

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, где $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биноминальный коэффициент, $n, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

9 Числовая последовательность и ее ограниченность

Числовая последовательность: функция определенная на множестве $\mathbb{N}$ и принимающая числовые значения. $\exists x_n = f(n)$, где $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, тогда $\{x_n\}$ - последовательность
Ограниченность последовательности: последовательность называется ограниченной с обеих сторон, если $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leqslant A$

10 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности и их связь

Бесконечно большая последовательность: $\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| > c$
Бесконечно малая последовательность: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n| < \epsilon$
Связь: если $\{x_n\}$ - б.м.п. и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.б.п и наоборот,
если $\{x_n\}$ - б.б.п. и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.м.п и наоборот,

11 Сходимость и расходимость последовательностей

Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если:
$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n - a| < \epsilon$
Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если:
$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to x_n \in \mathbb{U}_\epsilon(a)$
Последовательности не являющиеся сходящими, принято называть расходящимися.
Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если: $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\} : a_n$ является б.м.п, где $a_n := x_n - a$
Если $\{x_n\}$ сходиться, то она имеет единственный предел.

12 Свойства сходящихся последовательностей

Утверждение: Если $\{x_n\}$ - б.м.п, тогда $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Утверждение: Если $\{x_n\}$ сходится, то $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| < C$
Не всякая ограниченная последовательность является сходяшейся
Все члены последовательности с достаточно большими номерами положительны, если ее предел положителен и отрицательны если ее предел отрицателен
Сходящаяся последовательность ограничена

13 Монотонные последовательности и их свойства связанные с пределами

Определение: последовательность элементы которой с увеличением номера не убывают или не возрастают
Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей ($\{x_n\}\uparrow$), если $\forall n \in \mathbb{N} \to x_{n+1} \geqslant x_n$. Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей ($\{x_n\}\downarrow$), если $\forall n \in \mathbb{N} \to x_{n+1} \leqslant x_n$
Для того чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, что бы она была ограничена.

14 Число Д. Непера (число е)

$e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

15 Подпоследовательности и их свойства, предельные точки

Определение: Пусть $\{x_n\}$ - некоторая последовательность и пусть $\{k_n\}$ - некоторая строго возрастающая последовательность состоящая из натуральных чисел. Тогда последовательность $y_n = x_{k_n}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.
$k_n \geqslant n$ всегда, ибо любая последовательность, не совпадающая со своей последовательностью, получается путем некоторого прорежения элементов последовательности.
Свойство: $\sqsupset x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall x_{k_n} \to x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} a$
Свойство: Если все подпоследовательности некоторой последовательности сходятся, то они сходятся к одному и тому же пределу а (к тому же пределу а сходится и сама последовательность)

Определение: Точка $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \epsilon > 0$ в $U(a, \epsilon)$ содержится бесконечно много элементов этой последовательности.
Определение: Точка $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу a. Каждая сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности

16 Верхний и нижний пределы последовательности

Определение: наибольшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется верхним пределом этой последовательности
Определение: наименьшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется нижним пределом этой последовательности
У всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний предел, и, в частности, существует хотя бы одна предельная точка

17 Два определения предела функции

По Гейне: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : (x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq a) \to f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$
По Коши: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \epsilon$
Определения по Гейне и по Коши являются эквивалентными

18 Односторонние пределы функции в точке

По Коши:
Число b называется правым пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x : a < x < a + \delta \to |f(x) - b| < \epsilon$
Число b называется левым пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x : a - \delta < x < a \to |f(x) - b| < \epsilon$

19 Модификации условия Коши сходимости функции

Односторонние пределы по Коши:
$\lim_{x\to a+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - A| < \epsilon$
$\lim_{x\to a-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - A| < \epsilon$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0 \forall x < -N_\epsilon : |f(x) - a| < \epsilon$
$\lim_{x\to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0 \forall x > N_\epsilon : |f(x) - a| < \epsilon$
$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty = \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0 \forall x, |x| > N_\epsilon : |f(x)| > \epsilon$

20 Символы Ландау

"О большое": Символом "О"обозначают любую функцию $f(x) = O(g(x))$, ограниченную относительно функции $g(x)$ при $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$
"о малое": Функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to \alpha$ то есть $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$, если $\exists \mathring{\mathbb{U}}(a) : \alpha(x) = \beta(x)\varphi(x)$ при $x \to a$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x\to a} 0$
Свойства:

1. $o(c \cdot f(x)) = o(f(x)), c \neq 0$
2. $o(f(x)) \pm o(g(x)) = o(f(x))$
3. $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$
4. $o(f(x) + f(x)) = o(f(x))$
5. $O(c \cdot f(x)) = O(f(x)), c \neq 0$

6. $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x))$
7. $O(o(f(x))) = o(f(x))$
8. $O(O(f(x))) = O(f(x))$
9. $o(O(f(x))) = o(f(x))$

21 Эквивалентность функций

Определение: Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{U}(a)$. Тогда функции считаются эквивалентными при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x)}{=} 1$
Список эквивалентных функций при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$
2. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
3. $\operatorname{tg} x \sim x$
4. $\arcsin x \sim x$
5. $\operatorname{arctg} \sim x$
6. $a^{a(x)} - 1 \sim a(x) \ln a$
7. $ln(1 + x) \sim x$
8. $(1 + x)^a - 1 \sim ax$

22 Определение непрерывности функции в точке

Формальное определение: Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел равный частному значению $f(a)$, то есть $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
По Гейне: Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если $\forall \{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$, соответствующая $\{f(x_n)\} \xrightarrow{n \to \infty} f(a)$
По Коши: Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in D(f) : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$

23 Точки разрыва функции и их классификация

Устранимый разрыв: точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если $\exists \lim_{x \to a} f(x)$, но либо $a \notin D(f)$, либо $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$
Разрыв первого рода: точка a называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу пределы $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$
Разрыв второго рода: точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или если хотя бы один из них бесконечен

24 Непрерывность монотонной функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ возрастает (или убывает) на отрезке $[a, b]$, далее предположим $a = f(a), \beta = f(b)$. Тогда для того что бы функция $f(x)$ являлась непрерывной на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, что бы любое число $\gamma : \alpha < \gamma < \beta$, было значением этой функции

25 Локальные свойства непрерывных функций

К локальным свойствам те свойства функции, которые справедливы в сколь угодно малой окрестности фиксированной точки области определения функции. Эти свойства характеризуют поведение функции при стремлении аргумента к исследуемой точке.
Непрерывность функций над арифметическими операциями: пусть на одном и том же множестве заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные в точке a. Тогда функции: $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a
Непрерывность в сложной функции: пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$. Тогда функция $y = f|\varphi(t)|$ непрерывна в точке a

26 Глобальные свойства непрерывных функций

Глобальные свойства связаны со всей областью определения функции.
Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении: $(f \in C[a,b] \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in [a,b](f(c) = 0)$
I теорема Вейерштрасса: Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней и своей нижней граней.
II теорема Вейерштрасса: Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена на этом отрезке.

27 Равномерная непрерывность функции

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1 x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$