Билеты по математическому анализу для коллоквиума 14 ноября

Шишминцев Дмитрий Владимирович

8 ноября 2022 г.

Содержание

1 Множества и операции над ними

(Условно) Множество - совокупность некоторых объектов определенных по одному признаку.
$a \in A$ - элемент а принадлежит множеству А
$a \notin A$ - элемент а не принадлежит множеству А
$A \subset B$ - множество А является подмножеством В

Равенство множеств: Множества равны если каждый элемент множества А является элементом множества В и наоборот
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$

Операции над множествами:

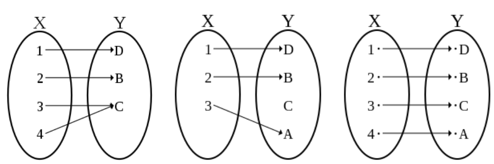
- Пересечение множеств: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$ - коммутативно и ассоциативно
- Объединение множеств: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$ - коммутативно и ассоциативно
- Разность множеств: $A \backslash B = \{x | x \in A \text{и} x \notin B\}$
- Симметричная разность: $A \triangle B = (A \backslash B) \cap (B \backslash A)$
- Декартово произведение множеств: $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$

2 Отображения и функции

Отображение (функция) - правило по которому $\forall x \in A \exists ! y \in B$

Варианты функциональных отображений $F : X \to Y$

- Функция F сюръективна, если $\forall y \in Y \exists x \in X : y = F(x)$ - каждый элемент множества Y является прообразом хотя бы одного элемента множества X
- Функция F инъективна, если $\forall x \in X \exists y \in Y : y = F(x)$ - разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y
- Функция F биективна, если она сюръективна и инъективна одновременна



3 Эквивалентность, счетность, мощность континума

Мощность множества: $|A|$ - число элементов входящих в множество А
Эквивалентность множеств: множества эквивалентны ($A \sim B$) если $|A| = |B|$
Счетность множество: бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами
Мощность континуума: мощность множества всех вещественных чисел

4 Теорема Кантора-Бернштейна и сравнение мощности множеств

Теорема Кантора-Бернштейна

1. Если $A \sim B'$ (где $B' \subset B$) и $B \sim A'$ (где $A' \subset A$) $\to A \sim B$
2. Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C$, то $A \sim B$

Сравнение мощностей множеств: Если множества A и B неэквивалентны, но $\exists B' \subset B : B' \sim A$ и $\nexists A' \subset A : A' \sim B$, то будем считать, что $|A| < |B|$

5 Множество вещественных чисел и его аксиоматика

Вещественные числа $\mathbb{R}$: бесконечные десятичные дроби вида $\pm a_0, a_1a_2a_3....$, где выбран определенный знак: $+$ или -, $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а все десятичные символы $a_1, a_2...$ - цифры от 0 до 9, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \to a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
Аксиоматика:

1. Линейность: если $x \neq y$, то $x > y$ или $x < y$
2. Транзитивность: $\exists \{>, =\}b, b\{>, =\}c \to a\{>, =\}c$
3. Ассоциативность: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) + c = a + (b + c), a(bc) = (ab)c$
4. Коммутативность: $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
5. Дистрибутивность: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

6 Ограниченность множества и его точные грани

Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ называется:

1. Ограниченным сверху, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leqslant b$
2. Ограниченным снизу, если $\exists d \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to d \leqslant a$
3. Ограниченным, если $\exists c \in \mathbb{R} : c > 0$ и $\forall a \in A \to |a| \leqslant c$

Верхняя и нижняя грань не единственны.
Свойство точной верхней грани: Если $b = supA$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \epsilon$
Свойство точной нижней грани: Если $d = infA$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a < d + \epsilon$

7 Метод математической индукции

Математическая индукция - метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Для обоснования метода математической индукции используется свойство натуральных чисел: $\forall A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \exists a' \in A : \forall a \in A \to a' \leqslant a$

Метод математической индукции состоит из следующих шагов:

1. База индукции: проверяем справедливость утверждения для a'
2. Индукционное предположение: предполагаем справедливость для произвольного элемента $a_k \in A$
3. Индукционный шаг: доказываем справедливость утверждения для $a_{k+1} \in A$

8 Бином Ньютона

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, где $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биноминальный коэффициент, $n, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

9 Числовая последовательность и ее ограниченность

Числовая последовательность: функция определенная на множестве $\mathbb{N}$ и принимающая числовые значения. $\exists x_n = f(n)$, где $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, тогда $\{x_n\}$ - последовательность
Ограниченность последовательности: последовательность называется ограниченной с обеих сторон, если $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leqslant A$

10 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности и их связь

Бесконечно большая последовательность: $\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| > c$
Бесконечно малая последовательность: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n| < \epsilon$
Связь: если $\{x_n\}$ - б.м.п. и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.б.п и наоборот,
если $\{x_n\}$ - б.б.п. и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.м.п и наоборот,

11 Сходимость и расходимость последовательностей

Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если:
$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n - a| < \epsilon$
Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если:
$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to x_n \in \mathbb{U}_\epsilon(a)$
Последовательности не являющиеся сходящими, принято называть расходящимися.
Определение - Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если: $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\} : a_n$ является б.м.п, где $a_n := x_n - a$
Если $\{x_n\}$ сходиться, то она имеет единственный предел.