Конспект лекций по математическому анализу

Шишминцев Дмитрий Владимирович

24 января 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Основы анализа

1.1 Множества

Определение 1. Множество - совокупность элементов одной природы и некоторым общим свойством позволяющим объеденить их в одно целое.

Обозначения:
- A, B, C - множества, a, b, c - элементы множества
- $\forall$ - квантор общности (для каждого)
- $\exists$ - найдется
- $\mathbb{X}/\mathbb{E}/\mathbb{U}$ - универсальные множества
- $\emptyset$ - пустое множество
- ! - единственность
- $\rightarrow$ - следовательно

Операции над множествами:
- $A \cap B$ - объединение множеств (коммутативно и ассоциативно)
- $A \cup B$ - пересечение множеств (коммутативно и ассоциативно)
- $A \backslash B$ - разность множеств
- $\bar{A}$ - отрицание
- $A \Delta B$ - симметрическая разность $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$
- $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ - декартово произведение

1.2 Отображения (функция)

Определение 2. правило по которому $\forall x \in D \exists ! y \in V$

$F : D$ (область определения) $\rightarrow$ (правило перевода) V (область значений)
Вариативности функциональных отображений:
- Сюръекция ($\forall y \in V : \exists x \in D$) - каждый элемент в области значений функции имеет прообраз в области определения
- Инъекция ($\forall y \in V : \exists ! x \in D$) - каждый элемент в области определения функции имеет образ в области значений. Не каждый образ имеет прообраз.

- Биекция ($\forall F : A \to B \exists ! F^{-1} : B \to A$) - функция яаляется и сюръекцией и биекцией.

1.3 Характеристики множеств

Определение 3. Мощность (кардинальное число) - количество различных элементов множества.

Определение 4. Эквивалентность множеств: множества эквивалентны ($A \sim B$) если они равномощны. $\forall x \in X \exists ! y \in Y$ и $\forall y \in Y \exists ! x \in X$

Определение 5. Счетность множеств: множество счетно (исчислимо), если $A \sim \mathbb{N}$

Определение 6. Мощность континуума: множество эквивалентное множеству точек отрезка $[0, 1]$ имеет мощность континуума.

Теорема 1. Множество всех точек отрезка $[0; 1]$ - несчетно

Теорема 2 (Кантора-Бернштейна)**.** Если $A \sim B'(B' \subset B)$ и $B \sim A'(A' \subset A) \Rightarrow A \sim B$
Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C \Rightarrow A \sim B$

Определение 7 (Сравнение мощностей множеств)**.** $\exists B' \in B : B' \sim A$ и $\nexists A' \in A : A' \sim B \Rightarrow |A| < |B|$

1.4 Множества чисел

- $\mathbb{N}$ - натуральные числа $\{1, 2, 3...\}$
- $\mathbb{Z}$ - целые числа $\{-1, 0, 1, 2..\}$
- $\mathbb{Q}$ - рациональные числа $\{\frac{2}{3}, 0.(3)\}$
- $\mathbb{R}$ - вещественные (действительные числа) $\{\sqrt{2}, \pi, e\}$
- $\mathbb{C}$ - комплексные

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Основные свойства вещественных чисел:

- Транзитивность $(a > b, b > c \to a > c)$
- Ассоциативность $(a + (b + c) = (a + b) + c)$
- Коммутативность $a + b = b + a$
- Дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! c \in \mathbb{R} : a + b = c$
- $\forall a \neq 0 \exists! a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$

Грани множеств:

- $\forall b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leq b$ - верхняя грань
- $\forall d \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to d \leq a$ - нижняя грань

Грани не единственны

Определение 8. Точная верхняя/нижняя грань - минимальный/максимальный элемент множества верхних/нижних граней множеств.

Свойство точной верхней грани:

Если $b = \sup A$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \epsilon$

▶ Допустим обратное. Тогда $a \leq b - \epsilon$ А это невозможно т.к b является наименьшей верхней гранью. ◀

Свойство нижней верхней грани:

Если $d = \inf A$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a < d + \epsilon$

▶ Док-во аналогично свойству точной верхней грани. ◀

Теорема 3 (Принцип вложенных отрезков)**.** Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \to [a_{n+1}, b_{n+1} \subset [a_n, b_n]]$ тогда $\exists! c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to c \in [a_n, b_n]$

▶ Пусть длина отрезка - $d(n) = b_n - a_n . \forall k \in \mathbb{N} \to d(1) > d(k)$. Пусть $c := \sup a_n \Rightarrow \forall n \to a_n \leq c \leq b_n . \forall n \to c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$. Единственность точки следует из стремления длин отрезков к нулю. ◀

1.5 Метод математической индукции

Для обоснования ММИ используем свойство натуральных чисел: $\forall A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \exists a' \in A : \forall a \in A \to a' \leq a$. Метод математической индукции для док-ва утверждения на множестве A состоит из шагов:

- База индукции - проверяем справедливость на a'

- Индукционное предположение - проверяем для произвольного элемента $a_k \in A$
- Индукционный шаг - доказываем справедливость для $a_{k+1} \in A$

1.6 Бином Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \tag{1.1}$$

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биноминальный коэффициент
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

▶ По методу математической индукции. При $n = 1.1 + x = C_1^0 + C_1^1 x = 1 + x$
При $n = t$ формула так же верна.
При $n = t + 1$
$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) = \binom{t}{0}x^0 + ... + \binom{t}{t}x^t + \binom{t}{0}x + ... + \binom{t}{t}x^{t+1} = \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + ... + \binom{t+1}{t+1}x^{t+1}$ ◀

1.7 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n > 1 + xn \tag{1.2}$$

При $x > -1, x \neq 0, n \geq 2$
Док-во по ММИ.

2 Пределы

2.1 Числовая последовательность и ее свойства

Определение 9 (Числовая последовательность).
$\sqsupset x_n = f(n), f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Операции с числовыми последовательностями выполняются почленно.

Определение 10 (Ограниченность последовательности).
$\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leq A$

Определение 11 (Бесконечно большая последовательность). Последовательность называется бесконечно большой, если множество членов удовлетворяющих условию $|x_n| \leq c$ конечно.
$\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| > c$

Определение 12 (Бесконечно малая последовательность). Последовательность называется бесконечно малой, если множество членов удовлетворяющих условию $|x_n| \geq c$ конечно.
$\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| < c$

Теорема 4 (Ограниченность бесконечно малой последовательности). Если x_n - б.м.п $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| < C, C \in \mathbb{R}_+$

► По определению бесконечно малой последовательности, кол-во элементов $|x_n| \geq C$ конечно. Возьмем $C = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$. Получим $\forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| < C$ ◄

Теорема 5 (Арифметика бесконечно малых последовательностей).

- Если $\{x_n\}$ - б.м.п, то и $\{|x_n|\}$ - б.м.п
- Сумма/разность конечного кол-ва б.м.п - б.м.п
- Произведение б.м.п на ограниченную последовательность - б.м.п ►
  $\{x_n\}-$ б.м.п; $\{y_n\}-$ ограниченная последовательность, C - грань $\{y_n\}$
  $\forall \epsilon > 0 : \exists N : \forall n \in \mathbb{N} => |x_n| < \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$ ◄

2.2 Предел числовой последовательности

Определение 13 (Сходщаяся последовательность)**.** Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если $\forall\epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n - a| < \epsilon$ или же $x_n \in U_\epsilon(a)$

Теорема 6 (О единственности предела последовательности)**.** Если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.

► Предположим обратное
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim_{n\to\infty} x_n = b$
где $a > b, \epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, тогда $\forall n > n(\epsilon) \to a - \epsilon < x_n < b + \epsilon$ Получается, что $a - \epsilon = b + \epsilon = \frac{a+b}{2}$ ◄

2.3 Свойства сходящихся последовательностей

- Предел б.м.п = 0
- Сходящаяся последовательность ограничена
- Не всякая сходящаяся последовательность является ограниченной
- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$
- $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$

Теорема 7. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists n' \in \mathbb{N} : \forall n > n' \to |x_n| > \frac{1}{2}|a|$ при $a > 0$, и $x_n < \frac{1}{2}|a|$ при $a < 0$

► $|x_n - a| < \frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow a - \frac{1}{2}|a| < x_n < a + \frac{1}{2}|a|$ ◄

Теорема 8 (О сравнении пределов)**.** $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$

► $a \leq b$ Предположим обратное, $a > b$. Пусть $\epsilon = \frac{a-b}{2}$ Получаем $x_n > a - \epsilon \to x_n > \frac{a+b}{2}, y_n < b + \epsilon \to y_n < \frac{a+b}{2}$ ◄

Теорема 9 (о двух миллиционерах). Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leq y_n \Rightarrow \forall \{z_n\} : \forall n \to x_n \leq z_n \leq y_n$ справедливо, что $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

▶ $a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon \to z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ ◀

2.4 Монотонная последовательность

Определение 14 (Монотонная последовательность). Последовательность называется возрастающей ($\{x_n\} \uparrow$), если $\forall n \in \mathbb{N} \to x_{n+1} \geq x_n$, убывающей, если $x_{n+1} \leq x_n$. В случае выполнения строгого неравенства, называется строго возрастающей/убывающей.

Теорема 10 (Вейерштрасса). Если неубывающая/невозрастающая последовательность ограничена сверху/снизу, то она сходится к $supx_n$

▶ Пусть C - верхняя граница последовательности. Тогда $\exists x_k > C - \epsilon$. Так как последовательность является монотонной, то все члены последовательности начиная с x_k удовлетворяет неравенству $C - \epsilon < x_k \leq C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = C$ ◀

Определение 15 (Эйлерова константа).

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \tag{2.1}$$

Теорема 11 (Теорема Штольца). $\{y_n\}$ - неограниченная неубывающая последовательность. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$, то тогда существует $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

▶ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l + a_n$, где a_n - б.м. $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) : \forall n \geq n(\epsilon) \to |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Домножим на $(y_{n+1} - y_n)$.
$x_{n+1} - l y_{n+1} = x_n - l y_n + a_n(y_{n+1} - y_n)$
Сложим все равенства от$n(\epsilon) + 1$ до $n + 1$
$x_{n+1} - l y_{n+1} = x_{n(\epsilon)} - l y_{n(\epsilon)} + \sum_{i=n(\epsilon)}^{n} a_i(y_{i+1} - y_i)$ Получается, что:
$|x_{n+1} - l y_{n+1}| \leq |x_{n(\epsilon)} - l y_{n(\epsilon)}| + |a_{n(\epsilon)} \cdot |y_{n(\epsilon)} - y_{n(\epsilon)}| \ldots |a_n| \cdot |y_{n+1} - y_n|$

Так как $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$, получается:
$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \leq |x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}| + \frac{\epsilon}{2}|y_{n(\epsilon)} - y_{n(\epsilon)}| \ldots \frac{\epsilon}{2}|y_{n+1} - y_n| \qquad | : (y_{n+1})$
$|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l| < \frac{|x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}|}{y_{n+1}} + \frac{\epsilon}{2}\frac{y_{n+1} - y_{n(\epsilon)}}{y_{n+1}}$.
Так как y_n стремится к $+\infty \Rightarrow \exists n_1(\epsilon) : \forall n > n_1 \to \frac{|x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}|}{y_{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$
Полагая $n_0 = max n_1, n(\epsilon)$ получаем, что $\forall n > n_0 \to |\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l| < \epsilon$, следовательно $\frac{x_n}{y_n} \to l$ при $n \to \infty$

◀

Определение 16. Подпоследовательность - последовательность вида $y_n = x_{k_n}$, где $\{x_n\}$ - некая последователнньость, а $\{k_n\}$ - некая строго возрастающая последовательность натуральных чисел.

Свойства подпоследовательностей:

- Если последовательность сходится к a, то все ее подпоследовательности тоже сходятся к a
- Все подпоследовательности, как и сама последовательность, если они сходятся, то сходятся к одному и тому же пределу.

Определение 17. Точка $a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется предельной точкой последовательности, если $\forall \epsilon > 0 U(a, \epsilon)$ содержится бесконечно много элементов этой последовательности.

Определение 18. Точка $a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется предельной точкой последовательности, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность сходящуюся к a.

Определение 19. Наибольшая предельная точка последовательности называется верхним пределом, а наименьшая - нижний

Теорема 12. У всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы и хотя бы одна предельная точка.

Теорема 13 (теорема Больцано-Вейерштрасса)**.** Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 14 (критерий Коши)**.** Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, что бы она была фундаментальной (выполнялось условие

Коши)

Условие Коши: $\forall\epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, p \in \mathbb{N} : n, m > n(\epsilon) \to |x_n - x_m| < \epsilon$

► Необходимость: $\forall\epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, теперь если $m, m > n(\epsilon)$, то $|x_n - x_m| = |x_n - a = (x_m - a) \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$
Достаточность: $|x_n - x_{n(\epsilon)}| < \epsilon \Rightarrow |x_n| \leq |x_{n(\epsilon)} + \epsilon|$. Из этого следует что последовательность ограничена. По Т. Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. $|x_n - x_{k_n}| < \frac{\epsilon}{2}$, где x_{k_n} - элемент сходящейся подпоследовательности. Переходя к пределу при $k \to \infty$ получаем $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ ◄

3 Предел функции

Определение 20 (предел функции в точке по Гейне).
$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : (x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \neq a) \to f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$

Определение 21 (предел функции в точке по Коши).
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \epsilon$

Теорема 15. Определения по Коши и Гейне являются эквивалентными.

▶ понять и написать док-во◀

Свойства пределов:

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Определение 22 (односторонний предел по Гейне).
$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : (x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n > a) \to f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$
$x_n > a$ для правостороннего и $x_n < a$ для левостороннего

Определение 23 (односторонний предел по Коши).
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) : \delta \to |f(x) - b| < \epsilon$
$\forall x \in (a, a+\delta)$ для правостороннего предела и $\forall x \in (a-\delta, a)$ для левостороннего предела

Теорема 16. Если у функции $f(x)$ правосторонний и левосторонний предел в точке a, то она имеет предел в точке a

Теорема 17 (критерий Коши). Для существования конечного предела функции в точке a необходимо и достаточно что бы выполнялось условие Коши: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \in U(a, \delta) \to |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

▶ Необходимость: Пусть b - предел функции $f(x)$, тогда: $|f(x') - b| < \frac{\epsilon}{2}$ и $f(x'') - b| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') - b - f(x'') + b| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$
Достаточность: Согласно определению по Гейне, возьмем $x_n \in U(a) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Из условия Коши для последовательностей: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\epsilon) \to x_n \in U(a, \delta) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon, \forall n, m \geq n(\epsilon)$. Тогда

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в силу критерия Коши для последовательностей. ◀

Модификация условия Коши:

- Для левостороннего предела: $a - \delta < x', x'' < a$
- Для правостороннего предела: $a < x', x'' < a + \delta$
- Для $x \to \infty : |x'|, |x''| > \delta$
- Для $x \to -\infty : x', x'' < -\delta$
- Для $x \to +\infty : x', x'' > \delta$

Определение 24. Функция называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю

Определение 25. Функция называется бесконечно большой в точке a слева/справа, если ее односторонний предел равен $\pm\infty$

Определение 26. Функция $f(x)$ является в точке a бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. В таком случае это обозначается $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.
$\exists U(a) : f(x) = g(x)c(x)$ при $x \to a$, где $c(x) \to 0$

Определение 27. Симовлом O обозначают любую функцию $f(x) = O(g(x))$ ограниченную относительно $g(x)$
$|f(x)| \leq c|g(x)|$

Свойства для o/O:

- $o(c \cdot f(x)) = o(f(x)), c \neq 0$
- $o(f(x)) \pm o(g(x)) = o(f(x))$
- $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$

Свойства для O:

- $O(o(f(x))) = o(f(x))$
- $O(O(f(x))) = O(f(x))$
- $o(O(f(x))) = o(f(x))$

3.1 Эквивалентность

Определение 28. $f(x) \sim g(x)$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Эквивалентность при $x \to 0$: (при равенстве $+o(x)$)

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $\operatorname{tg} x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\operatorname{arctg} x \sim x$
- $a^{b(x)} - 1 \sim b(x)\ln(a)$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$

Определение 29 (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

► разобрать и написать док-во◄

3.2 Непрерывность функции

Определение 30 (непрерывность по Гейне).

$$\forall \{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \to \infty} a, \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \to \infty} f(a)$$

Определение 31 (непрерывность по Коши).

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in D(f) : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Определение 32 (формальное определение односторонней непрерывности). Функция непрерывна справа/слева если правый/левый предел равен $f(a)$

Теорема 18 (непрерывноть функций над арифметическими операциями). $f(x), g(x)$ - непрерывны в точке a. Тогда $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a.

► Так как функции в точке a имеют пределы, соответственно равныы $f(a), g(a)$ то существуют пределы $f(a) \pm g(a)$ и тд. Т.к предел равен значению, то значит по определению эти функции непрерывны в точке a ◄

Теорема 19 (о непрерывности сложной функции)**.** $x = \phi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \phi(a) \Rightarrow y = f(\phi(t))$ непрерывна в точке a

► Пусть $\{t_n\}$ - последовательность значений сложной функции сходящейся к a. Так как $x = \phi(t)$ непрерывна и сходится к $a \Rightarrow$ последовательность аргументов сходится к $b = \phi(t)$ по определению по Гейне. Так как $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \phi(\epsilon)$ и $\{x_n\}$ сходится к $b = \phi(a)$ и является последовательностью значений аргументов, то соотсветствующая последовательность функции $f = [\phi(t)]$ сходится к $f(b) = f[\phi(a)]$ ◄

Теорема 20 (существование односторонних пределов монотонной на отрезке функции)**.** Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то у нее существует правый и левый предел в любой внутренней точке отрезка, так же существует правый предел в точке a и левый предел в точке b.

► Т.к функция монотонна, то $\forall x \in [a; x_n] \to f(x) \leq f(x_0)$. Т.к множество значений функции ограниченой сверху, то по теоереме о точной верхней грани существует $\sup((f(x)) = M \leq f(x_9)) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = x_0 - x_\epsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \to |M - f(x_0)| < \epsilon$ ◄

Теорема 21 (непрерывность монотонной функции)**.** Для того что бы монотонная функция являлась непрерывной на отрезеке $[a, b]$, необходимо и достаточно что бы лбое число $c : f(a) < c < f(b)$ было значением этой функции

Теорема 22 (монотонность и непрерывность обратной функции)**.** Если функция монотонна на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем, то на этом отрезке определена обратная функция которая так же непрерывно возрастает/убывает на данном отрезке.

► Так как функция монотонна и непрерына на отрезке $\Rightarrow$ по теореме непрерывности монотонной функции множеством значений функции является отрезок $[f(a), f(b)] \Rightarrow$ существует обратная функция в силу биективности правила f. ◄

Определение 33 (устранимый разрыв)**.** $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, но $a \notin D(f)$ или $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$. В случае устранимого разрыва функцию можно доопределить не меняя значений функции в других точках

Определение 34 (разрыв первоо рода).

$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$$

Определение 35 (разрыв второго рода). Хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Определение 36 (кусочно-непрерывная функция на отрезке). Функция определена всюду на отрезке и непрерывна во всех внутренних точках, кроме ограниченного числа точек в которых имет разрывы первого рода.

Определение 37 (Ограниченность функции). $\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \to m \leq f(x) \leq M$

4 Дифференциальное исчисление

Пусть $y = f(x)$ задана на (a, b), рассмотрим $x_0 \in (a, b)$ и приращение аргумента $\triangle x$ - произвольное число $x_0 + \triangle x \in (a, b)$

Определение 38 (приращение функции).

$$\triangle y = \triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

Определение 39 (производная). Функция имеет производну в точке, если существует предел

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0)$$

Теорема 23 (о непрерывности функции имеющей производную). Если функция имеет производную в некоторой точке, то функция непрерывна в этой точке.

►По определению производной существует предел. Из его существования следует, что в достаточно малой окрестности справедливо равененство $\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) + a(\triangle x)$, где $a(\triangle x)$ - б.м.ф. при $\triangle x \to 0$. Получаем $\triangle y = f'(x_0)\triangle x + a(\triangle x)\triangle x \Rightarrow \triangle y \xrightarrow{\triangle x \to 0} 0$, следовательно $y = f(x)$ непрерывна в точке. ◄

Определение 40 (односторонние производные). Если существует односторонний предел: $\lim_{\triangle x \to 0+/-} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, то этот предел называют односторонней производной и обозначают $f'_{+/-}(x)$

Теорема 24 (Основные правила дифференцирования).

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v}{v^2}$

► понять и написать док-во ◄

Определение 41. Если функция определена в окрестности точки x, то ее приращение можно представить в виде $\triangle y = \triangle f = f(x + \triangle x) - f(x) = A\triangle x + o(\triangle x), \triangle x \to 0$

Теорема 25. Функция дифференцируема в точке только тогда, когда функция имеет в этой точке производную. Если функция дифференцируема, то $\triangle y = f'(x_0) + o(\triangle x), \triangle x \to 0$

Определение 42 (о непрерывном дифференцировании)**.** Функцию, производая которой непрерывна в точке или на промежутке, называют непрерывно дифференцируемой

Определение 43 (Дифференциал)**.** Если функция дифференцируема в точке, то линейную часть ее приращения называют дифференциалом

$$df = f'(x)\triangle x, \triangle x = dx \Rightarrow dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Определение 44 (Геометрический смысл производной)**.** Производная - тангенс касательной к графику функции в точке

Теорема 26. Если функция в некоторой окрестности точки непрерывна и строго монотонна и имеет производную в точке отличную от нуля, то обратная функция имеет в этой точке производную и справедливо: $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

▶ Если функция строко возрастает, то ее приращения $\triangle y, \triangle x$ имеют одинаковые знаки. Переходя к пределу, видим что: $\lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\frac{\triangle y}{\triangle x}} = +\infty$. Для убывающей функции предел равен $-\infty$. ◀

Теорема 27. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0, f(x_0) = y_0$ и функция $z = \phi(y)$ имеет проивзодную в точке y_0. Тогда сложная функция $z = \phi(f(x))$ имеет производную в точке x_0 и справедливо равенство: $z(x_0)' = \phi'(y_0)f'(x_0)$

▶понять и доказать ◀

Теорема 28 (формула Лейбница)**.** Если у функций $u(x), v(x)$ существует в точке x_0 производные порядка $n = 1, 2...$, то в этой точке существует производная порядка n произведения:

$$(u(x_0) \cdot v(x_0))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x_0) \cdot v^{(n-k)}(x_0)$$

►Док-во по ММИ. При $n = 1 \to (u \cdot v)' = u' \cdot vu \cdot v'$
Пусть формула справедлива для $n = m$, тогда для $n = m + 1$ получаем $(uv)^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m} C_{k=0}^{k}(u^{(k)}v^{(m-k)})' = \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}(u^{(k+1)}v^{(m-k)} + u^{(k)}v^{(m-k+1)}) = \sum_{i=1}^{m}(C_{m}^{i-1} + C_{m}^{i})u^{(i)}v^{(m-i+1)} + C_{m}^{m}u^{(m+1)}v^{(0)} + C_{m}^{0}u^{(0)}v^{(m+1)} = \sum_{i=0}^{m+1} C_{i=0}^{i}u^{(i)} \cdot v^{m+1-i}$ ◄

Теорема 29. Если $f'(x_0) > 0$, то функция строго возрастает, а если $f'(x_0) < 0$, то функция убывает.

► Пусть $f'(x) > 0$. Так как $f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, то при достаточно малых x имеем $\frac{\triangle y}{\triangle x} > 0 \Rightarrow \triangle y, \triangle x$ одного знака. ◄

Теорема 30 (теорема Ферма)**.** Если функция имеет производную в точке, то эта точка может быть точкой локального экстремума функции только если $f'(x_0) = 0$

►Очевидно◄

Теорема 31 (теорема Дарбу о промежуточных значениях)**.** $f(x)$ дифференцируема на $[x_1; x_2] \Rightarrow \forall D \in [f'(x_1); f'(x_2)] \exists d \in [x_1; x_2] : D = f'(d)$

Теорема 32 (теорема Ролля)**.** Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

►Очевидно◄

Теорема 33 (теорема Лагранжа о среднем)**.** Для функции существует $\xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

► Подберем число λ, такое что бы $\phi(x) = f(x) - \lambda, \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Rightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. По Т. Ролля существует точка $\xi, \phi'(\xi) = 0$ ◄

Теорема 34 (теорема Коши о среднем)**.** Пусть функции $g(a) \neq g(b)$, их производные не равны нулю одновременно, тогда $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

► $\phi(x) = f(x) - \lambda g(x) \Rightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-b(a)}, \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow$ по Т. Ролля существует $\phi'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0 \Rightarrow \phi'(\xi) = f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0$ ◄

Теорема 35 (следствие из теоремы лагранжа). Если производная функции во всех точках интервала равна нулю, то она постоянна на отрезке

Теорема 36 (правило Лопиталя).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)'}{g(x)'}$$

4.1 Формула Тейлора

Теорема 37 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

Теорема 38 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Определение 45 (формула Маклорена). При $x_0=0$ формула Тейлора принимает следующую запись:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+o(x^n)$$