α

Лекция 2

«Линейный оператор»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Основные понятия

В предыдущей лекции были рассмотрены отображения элементов линейного пространства на поле, над которым оно определено. Однако естественно полагать, что можно строить такие отображения, которые будут возвращать также элементы линейного пространства. Причем пространство не обязательно должно совпадать с исходным. Такие отображения могут обладать рядом свойств и преимущественно мы будем рассматривать, как и раньше, отображения обладающие свойством линейности.

Отображение $\mathcal{A} : X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным, если $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in K$ выполяются следующие свойства

$$\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2), \qquad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x)$$

Такие отображения часто называют линейными операторами. Примечательно, что линейные отображения, определенные на линейных пространствах по сути своей сохраняют линейные свойства структуры. Такие отображения ранее мы называли гомоморфизмами.

Множество линейных операторов действующих их $X(\mathbb{K})$ в $Y(\mathbb{K})$ будем обозначать $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$.

Важно, что пространство из которого происходит отображение не обязательно совпадает с тем пространством, в которое отображение строится. Однако отдельного внимания заслуживают такие отображения, которые "работают" в одном пространстве.

Оператор $\mathcal{A} : X \to X$, отображающий X в себя называют эндоморфизмом.

Если оператор отображает пространство A на себя, т.е. каждый элемент является образом хотя бы какого-то элемента, то такое отображение называют автоморфизмом.

Пример 2.1. Примеры линейных операторов:

1. Нулевой оператор:
$$\mathcal{O} : X \to Y \qquad \mathcal{O}x = 0_Y$$

2. Тождественный оператор:
$$\mathcal{I} : X \to X \qquad \mathcal{I}x = x$$

3. Пусть X разбивается в прямую сумму подпространств $X = X_1 \oplus X_2$. Тогда проектором будем называть оператор:
$$\mathcal{P}_{X_1}^{\parallel X_2} : X \to X, \qquad \mathcal{P}_{X_1}^{\parallel X_2} x = x_1, \qquad x_1 \in X_1$$

4. Пусть P - пространство полиномов степени не выше n, а $\mathcal{D}$ - оператор дифференцирования:
$$\mathcal{D}\colon P \to P, \qquad (\mathcal{D}p)(t) = \frac{dp}{dt}, \qquad p(t) \in P$$
5. Пусть M_n - пространство квадратных матриц n-го порядка, на котором введены оператор симметризации $\mathcal{S}$ и антисимметризации $\mathcal{AS}$
$$\mathcal{S}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) \qquad \mathcal{AS}(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

2.2 Ядро и образ оператора

Аналогично введенному понятию ядра формы можно ввести такой объект как ядро линейного оператора. Существенное отличие заключается в том, что результатом воздействия оператора на элементах ядра линейного оператора будет не ноль действительных чисел, а вообще говоря нулевой элемент пространства, в которое отображает оператор.

> Ядром линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ будем называть подмножество X, определенное как
> $$\ker \mathcal{A} = \{x \in X\colon \quad \mathcal{A}(x) = 0_Y\}$$

Точно также можно показать, что ядро линейного оператора образует не просто подмножество в X, но также обладает структурой линейного подпространства.

Теорема 2.1. *Ядро линейного оператора* $\ker \mathcal{A}$ *является линейным подпространством* $X(\mathbb{K})$.

►

Рассмотрим произвольные элементы $x, x_1, x_2 \in \ker \mathcal{A}$, принадлежащие ядру оператора $\mathcal{A}$. Их принадлежность ядру означает, что
$$\mathcal{A}(x) = 0 \qquad \mathcal{A}(x_1) = 0 \qquad \mathcal{A}(x_2) = 0$$
Рассмотрим сумму элементов x_1 и x_2 после воздействия на них оператором:
$$\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = 0 + 0 = 0$$
Первый переход автоматически следует из линейности оператора. Рассмотрим также умножение элемента $x \in \ker \mathcal{A}$ на произвольный скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$:
$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x) = \alpha \cdot 0 = 0$$
Тем самым мы показали замкнутость этого множества относительно линейных операций. Учитывая также, что нулевой элемент линейного пространства X всегда принадлежит ядру, можно сделать вывод, что ядро линейного оператора является линейным подпространством. ◄

В отличие от линейных форм отображение происходит не просто в поле действительных (комплексных) чисел, а в другое линейное пространство $Y(\mathbb{K})$. Следовательно можно поставить вопрос о структуре множества тех элементов, которые являются результатом линейного преобразования $\mathcal{A}$.

Образом $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ линейного оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ называется подмножество Y, определяемое как

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{y \in Y : \quad \exists x \in X, \quad \mathcal{A}(x) = y\} = \mathcal{A}(X)$$

Покажем, что данное подмножество также обладает структурой линейного подпространства.

Теорема 2.2. *Образ линейного оператора* $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ *является линейным подпространством* $Y(\mathbb{K})$.

►

Пусть $x, x_1, x_2 \in X$ произвольные элементы пространства X, которым соответствуют образы

$$y = \mathcal{A}(x) \qquad y_1 = \mathcal{A}(x_1) \qquad y_2 = \mathcal{A}(x_2)$$

Чтобы показать замкнутость образа оператора необходимо показать, что сумма двух образов также является образом:

$$y_1 + y_2 = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) \in Y$$

Аналогично для умножения на скаляр:

$$\alpha y = \alpha\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha x) \in Y$$

Следовательно образ замкнут относительно линейных операций, индуцированных из Y, а значит является линейным подпространством. ◄

О данных объектах часто можно получить наглядное представление.

Пример 2.2.

1. Рассмотрим пространство векторов на плоскости, а также оператор проектирования на направление, заданное вектором $\vec{a}$. Образом данного оператора будут являться все вектора, которые принадлежат прямой, проходящей через вектор, а ядром - все векторы, которые перпендикулярны данному (включая нулевой вектор).

2. Образом оператора дифференцирования, определенном в пространстве полиномов степени не выше n, являются все полиномы степени не выше $n - 1$, а ядром - полиномы нулевой степени, т.е. просто скаляры.

3. Рассмотрим также пространство квадратных матриц, на которых можно ввести оператор симметризации (антисимметризации). Образом оператора симметризации будут, очевидно, симметричные матрицы того же порядка, а ядром - антисимметричные матрицы.

Из данных примеров можно отметить одну общую особенность - сумма размерностей образа и ядра всегда равна размерности пространства X и это происходит не просто так. Введем несколько предварительных определений.

Рангом линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ называют размерность его образа:

$$\mathrm{rank}\mathcal{A} = \dim \mathrm{Im}\, \mathcal{A}$$

Дефектом линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ называют размерность его ядра:

$$\mathrm{nullity}\mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$$

Теорема 2.3. *(Теорема о ранге и дефекте) Сумма размерностей ядра и образа равна размерности пространства X.*

►

Для начала введем базис ядра оператора:

$$\ker \mathcal{A}: \qquad \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$$

Дополним его соответствующим образом до базиса пространства X:

$$\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$$

Тогда для произвольного элемента $x \in X$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i \qquad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i \mathcal{A}(e_i),$$

учитывая, что оператор переводит базисные векторы ядра в нулевой элемент.

Покажем, что набор векторов

$$\{\mathcal{A}(e_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(e_n)\}$$

образует базис образа оператора. Полнота этого набора следует из того, что результат воздействия оператора на любой x может быть представлен как линейная комбинация этих векторов. Покажем линейную независимость от противного.

Пусть набор векторов $\{\mathcal{A}(e_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(e_n)\}$ является линейно зависимым. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов, что

$$\alpha^{k+1}\mathcal{A}(e_{k+1}) + \ldots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$z = \alpha^{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha^n e_n$$

и применим к ней оператор

$$\mathcal{A}(z) = 0$$

Это означает, что z принадлежит ядру оператора, но в то же время имеет имеет нетривиальное разложение по базисным векторам, которые не принадлежат этому ядру - противоречие. Следовательно, набор $\{\mathcal{A}(e_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(e_n)\}$ является линейно независимым. Из данных рассуждений также следует, что единственный вектор z, который можно представить в виде разложения как по базису $\ker\mathcal{A}$, так и по базису $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - это нулевой вектор.

В силу того, что набор образует линейно независимый и полный набор, можно утверждать

$$\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n - k$$

а следовательно

$$\dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = k + (n-k) = n$$

◄

2.3 Матрица оператора

Аналогично тому как формулировалось для линейных форм, линейный оператор можно задать не только естественным образом, но и координатным в некотором фиксированном базисе.

Пусть $\mathcal{A} : X \to Y$, причем $\dim X = n$, $\dim Y = m$, а также $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно.

> Матрицей линейного оператор $\mathcal{A}$ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A = \left\|\alpha_i^j\right\|$, по столбцам которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{g_j\}$
>
> $$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Пример 2.3.

1. Нулевой оператор

$$\mathcal{O} \to \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Тождественный оператор

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Матрица оператора проектирования на X_1, если $X = X_1 \oplus X_2$, заданная в базисе, образованном совокупностью базисов этих подпространств

$$\mathcal{P}_{X_1}^{\parallel X_2} \to P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{X_1}^{\parallel X_2} x = x, \qquad \mathcal{P}_{X_1}^{\parallel X_2} x = 0, \qquad \forall x \in X_1$$

Теорема 2.4. *Задание линейного оператора $\mathcal{A}$ эквивалентно заданию его матрицы A в фиксированной паре базисов.*

▶

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно. Рассмотрим элементы $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \eta^j g_j, \qquad \mathcal{A}(x) = y$$

Рассмотрим действие оператора на элемент x

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^{m} \eta^j g_j$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \alpha_i^j$$

Тем самым мы обеспечили однозначность определения образа элемента, используя лишь коэффициенты матрицы оператора. ◀

2.4 Пространство линейных операторов

Рассмотрим два линейных пространства X и Y и множество всех линейных операторов, которые действуют между ними. Пусть также $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - линейные операторы из X в Y. Рассмотрим несколько свойств и операций, связанных с ними.

> Линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будем считать равными, если
>
> $$\forall x \in X \qquad \mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$$

> Отображение $\mathcal{C} : X \to Y$ называется суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to Y$, если
>
> $$\forall x \in X \qquad \mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$$

Можно задаться вопросом, а будет ли данное отображение линейным.

Теорема 2.5. *Сумма $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ линейных операторов является линейным оператором.*

▶

Для доказательства необходимо рассмотреть линейные свойства суммы линейных операторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) + \mathcal{B}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 + \mathcal{B}x_1 + \mathcal{B}x_2 = \\ = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x_1 + (\mathcal{A} + \mathcal{B})x_2 = \mathcal{C}x_1 + \mathcal{C}x_2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}(\alpha x) = \mathcal{A}(\alpha x) + \alpha\mathcal{B}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x + \alpha\mathcal{B}x = \alpha(\mathcal{A}+\mathcal{B})x = \alpha\mathcal{C}x$$

◄

Аналогично можно рассмотреть и умножение линейного оператора на скаляр.

> Отображение $\mathcal{D}$ называется произведением линейного оператора $\mathcal{A}$ на число λ, если
> $$\forall x \in X \qquad \mathcal{D}x = \lambda\mathcal{A}x$$

И также можно предположить, что полученный оператор будет линейным

Теорема 2.6. *Произведение линейного оператора на скаляр $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$ на скаляр является линейным оператором.*
►
Доказательство аналогично доказательству суммы. ◄

Учитывая рассмотренные понятия равенства, определенных операций над операторами, а также существования нулевого элемента множества, на множестве операторов можно вводить структуру линейного пространства.

Теорема 2.7. *Множество всех линейных операторов, отображающих пространство X в пространство Y является линейным пространством над полем K.*
►
Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. ◄

Nota bene Пространство линейных операторов из X в Y над полем K обозначают $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X,Y)$.
В любом линейном пространстве, в том числе и операторном, можно выбрать базис.

Теорема 2.8. *Набор операторов $\{{}^i_j\varepsilon\}$, действующих на произвольный вектор $x \in X$ по правилу*

$$ {}^i_j\varepsilon(x) = \xi^i g_j, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$$

образует базис пространства $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X,Y)$
►
Необходимо показать, что набор операторов $\{{}^i_j\varepsilon\}$ является полным и линейно независимым в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X,Y)$.

Покажем полноту набора. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X,Y)$, тогда

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi^i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\xi^i\sum_{j=1}^{m}\alpha_i^j g_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi^i\alpha_i^j g_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}{}^i_j\varepsilon(x)\alpha_i^j$$

Откуда следует, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}^{i}_{j}\varepsilon \alpha^{j}_{i}$$

Покажем линейную независимость данного набора. Рассмотрим равную нулевому оператору линейную комбинацию базисных операторов $\{{}^{i}_{j}\varepsilon\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}^{i}_{j}\varepsilon \alpha^{j}_{i} = \mathcal{O}$$

Применим эту линейную комбинацию операторов к произвольному базисному элементу e_k пространства X. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}^{i}_{j}\varepsilon(e_k) \alpha^{j}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta^{i}_{k} g_j \alpha^{j}_{i} = \sum_{j=1}^{m} g_j \alpha^{j}_{k} = 0_Y$$

где мы воспользовались свойством символа Кронекера, чтобы "изъять" только нужную координату, в соответствии с договоренностями из прошлой лекции.

Набор $\{g_j\}_{j=1}^{m}$ - базис пространства Y, а значит по определению линейно независим, а значит все коэффициенты, стоящие перед ним равны нулю. В силу произвольности выбора базисного элемента e_k делаем вывод, что вообще все коэффициенты α^{j}_{k} должны быть равны нулю. ◀

В силу того, что между оператором и его матрицей в фиксированное паре базисов пространств X и Y устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет линейную структуру, можно утверждать, что операторное пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. В таком случае можно выбрать изоморфные друг другу базисы. Например, следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} {}^{1}_{1}\varepsilon & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^{1}_{2}\varepsilon & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^{2}_{1}\varepsilon & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ {}^{2}_{2}\varepsilon & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nota bene Размерность линейного пространства $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$ равна

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y) = \dim M_{m\times n} = m \cdot n$$

2.5 Преобразование базиса

Можно задаться вопросом о том, как изменяется матрица линейного оператора при преобразованиях базиса.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y)$, а в пространствах заданы базисы:

$$\begin{array}{lll} X: & \{e_i\}_{i=1}^n, & \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n \\ Y: & \{g_k\}_{k=1}^m, & \{\tilde{g}_l\}_{l=1}^m \end{array}$$

Причем известно, что $T = \left\|\tau_j^i\right\|$ - матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \left\|\sigma_l^k\right\|$ - матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 2.9. *Матрица оператора при замене базисов преобразуется как*

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$

►
Пусть $x \in X$ произвольный элемент пространства X, а y - образ этого элемента. Тогда

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A_\varphi x = y$$

В то же время можно утверждать, что в паре базисов $\{e'\}$ и $\{g'\}$ справедливо

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A'_\varphi x' = y'$$

Однако известно, что при изменении базиса соответствующим образом преобразуются координаты векторов x и y

$$x' = T^{-1} x, \qquad y' = S^{-1} y$$

Подставляя данные преобразования в матричное выражение, получаем

$$A'_\varphi T^{-1} x = S^{-1} y$$

Матрицы перехода всегда обратимы, следовательно можно утверждать, что

$$S A'_\varphi T^{-1} = A_\varphi$$

Или, что тоже самое

$$S^{-1} A_\varphi T = A'_\varphi$$

◄

Nota bene В случае, если $\varphi \in \mathrm{Hom}(X)$ можно считать, что $S = T$, следовательно

$$A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$$

> Преобразование $T^{-1} \cdot A \cdot T$ при условии, что $\det T \neq 0$ называется преобразованием подобия матрицы A с использованием матрицы T.

Таким образом можно сказать, что при замене базиса матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ подвергается преобразованию подобия.