α

Лекция 1

«Пространство линейных форм»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Линейные функции

Во второй части курса "Линейной алгебры" мы будем расширять понятие линейного пространства и связывать с другими известными представлениями о математике. Говоря о линейных пространствах, в первую очередь необходимо помнить, что это множество объектов. Отвлечемся на несколько мгновений от того, что это не просто множество, а на нем еще заданы алгебраические структуры. Какие действия можно производить с элементами любого множества? В средней школе такими множествами выступали числовые множества. После знакомства с операциями, которые можно производить с числами, начиналось изучение различных функций одной переменной и их свойств. Стратегия дальнейших исследований линейных пространств ничем не будет отличаться от этой траектории.

Вспомним основные линейные пространства, с которыми мы работали, и посмотрим на примеры некоторых функций, которые можно определять на этих пространствах.

Пример 1.1. Пространство геометрических векторов $x \in \mathbb{R}^3$. В этом пространстве можно задать, например, функцию, которая просто находит сумму всех координат вектора. Да, конечно, в этом нет какого-либо геометрического смысла, но кто сказал, что он всегда будет?

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

Конечно, можно задать функции такие, что они действительно будут иметь смысл. Например, если взять в качестве функции скалярное произведение вектора x на фиксированный вектор a

$$f(x) = (a \cdot x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Можно взять два фиксированных вектора a и b и составить смешанное произведение с ними

$$f(x) = (a, b, x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Пример 1.2. Рассмотрим также пространство полиномов степени, скажем, не выше 2 - $\mathcal{P}_2$. На этом пространстве также можно определить функцию. Ключевой момент здесь в том, что мы определяем функцию от функции. Для произвольного полинома p можно определить функцию, которая вычисляет значение полинома в заданной точке x_0:

$$f(p) = p(x)\Big|_{x_0}$$

Чтобы пример был еще ясный, возьмем функцию $f(p)$, которая для каждого полинома вычисляет значение в точке $x_0 = 2$. Тогда

$$p_1 = -x^2 + 2x - 1 \qquad f(p_1) = -x^2 + 2x - 1\Big|_{x_0=2} = -1$$

$$p_2 = 2x^2 - 3 \qquad f(p_2) = 2x^2 - 3\Big|_{x_0=2} = 5$$

Можно взять еще более экстравагантный пример и определять значение не самой функции, а значение какой-то производной от полинома в некоторой точке

$$f(p) = \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x_0}$$

или вычисляет определенный интеграл от полинома на заданном промежутке, например, на $[0, 1]$

$$f(p) = \int_0^1 p(x)dx$$

Пример 1.3. Можно также рассмотреть пространство квадратных матриц $M_n(\mathbb{R})$, на котором можно определить функцию, вычисляющую след матрицы A

$$f(A) = \mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Что объединяет приведенные выше примеры? Какая общая черта есть у всех приведенных функций? Почему среди данных примеров будут казаться лишними функции вычисления модуля вектора? Данная функция также однозначно сопоставляет геометрическому вектору действительное число. Сюда также не включен определитель, который точно также ставит в соответствие матрице некое число.

Отличительная особенность приведенных функций заключается в том, что они сами по себе обладают свойством линейности по своему аргументу. Иными словами для них выполняется

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

С подробного изучения таких объектов и продолжится курс.

1.2 Линейные формы

Предпримем попытку формализовать и обобщить приведенные выше примеры.

> Говорят, что отображение ϕ действует из линейного пространства X в линейное пространство Y, если каждому элементу $x \in X$ некоторым образом ставится в соответствие элемент $y \in Y$. При этом пишут
>
> $$\phi\colon\ X \to Y, \qquad \phi(x) = y$$

> Отображение ϕ называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in X$ и $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ имеют место
>
> $$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2), \qquad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$$

Для линейных отображений часто используют обозначение, не использующее скобки

$$\phi(x) = \phi x$$

Пространство Y, вообще говоря, может быть также произвольным линейным пространством, но этот случай мы оставим для будущих рассуждений, а сейчас будет больше интересовать отображение в поле, над которым определено линейное пространство

> Линейной формой f, заданной на пространстве $X(\mathbb{K})$ называется линейное отображение
> $$f\colon\ X(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

Иными словами, линейная форма - это линейная числовая функция векторного аргумента. Для линейных форм также используется обозначение, смысл которого станет более ясным позже.

$$f(x) = (f, x) \in \mathbb{K}$$

В согласии с приведенными выше определениями, для линейных форм выполняются свойства линейности. В сути своей они являются гомоморфизмами, т.е. такими отображениями, которые сохраняют структуру линейного пространства.

На одном и том же линейном пространстве может быть определено неограниченное количество линейных форм. Можно говорить о том, что они образуют некоторое множество. Изучая любое множество, часто в первую очередь мы договариваемся о том, какие элементы множества будем называть равными

> Линейные формы f и g будем называть равными $f = g$, если
> $$(f, x) = (g, x), \qquad \forall x \in X$$

Иными словами, линейные формы будем называть равными, если их значения совпадают на всех векторах пространства. Самый простой и очевидный выбор линейной формы - та, которая возвращает ноль на любом векторе.

> Линейная форма θ называется нулевой (нуль-формой), если
> $$(\theta, x) = 0$$

Какие действия можно выполнять с линейными формами. Вполне очевидно, что без нарушения свойств линейности форм их можно складывать и умножать на скаляр из поля.

> Суммой линейных f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо
> $$(h, x) = (f, x) + (g, x)$$

> Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l = \alpha f$ такое, что
> $$(l, x) = \alpha(f, x)$$

Построенные таким образом отображения h и l будут также являться линейными формами. Покажем это.

Теорема 1.1. *Отображения h и l - линейные формы над X*

▶

Для доказательства этой теоремы необходимо показать, что для выбранных отображений h и l также выполняются свойства линейности:

$$\begin{gathered} \forall x, x_1, x_2, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2), \qquad h(\alpha x) = \alpha h(x) \\ l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2), \qquad l(\alpha x) = \alpha l(x) \end{gathered}$$

Покажем для отображения h:

$$\begin{gathered} (h, x_1 + x_2) = (f, x_1 + x_2) + g(x_1, x_2) = (f, x_1) + (f, x_2) + (g, x_1) + (g, x_2) = \\ = (f + g, x_1) + (f + g, x_2) = (h, x_1) + (h, x_2) \end{gathered}$$

Докажем второе свойство

$$(h, \alpha x) = (f, \alpha x) + (g, \alpha x) = \alpha(f, x) + \alpha(g, x) = \alpha(h, x)$$

Аналогично и для второго отображения l

$$\begin{gathered} (l, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1) + \alpha(f, x_2) = (l, x_1) + (l, x_2) \\ (l, \beta x) = \alpha(f, \beta x) = \alpha\beta(f, x) = \beta(l, x) \end{gathered}$$

◀

Благодаря доказанным свойствам линейности, наличия нуля в множестве можно утверждать следующее.

Теорема 1.2. *Множество линейных форм на X может быть наделено структурой линейного пространства.*

▶

Для доказательства достаточно проверить выполнение аксиом линейного пространства. ◀

Пространство линейных форм на X называется пространством сопряженным, или двойственным, к X и обозначается X^*.

1.3 Сопряженное пространство

Исследуем пространство линейных форм. Очевидно, что если оно является линейным пространством, то можно предпринять попытку определить базис этого пространства, а также координаты формы в базисе.

Предположим, что в исходном пространстве определен базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. В таком случае можно найти значения линейной формы на базисных векторах.

Коэффициентами ϕ_i линейной формы в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X называются ее значения на базисных векторах:

$$(f, e_i) = \phi_i, \qquad f \leftrightarrow (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

Таким образом линейная форма определяется ее коэффициентами. Эквивалентны ли определения формы самой по себе и заданием коэффициентов?

Теорема 1.3. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

►

Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\phi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall x \in X$:

$$(f, x) = \left(f, \sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n (f, xi^i e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i (f, e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \phi_i$$

◄

Таким образом, определяя коэффициенты линейной формы на базисных векторах пространства X можно найти образ любого элемента x через сумму произведений коэффициентов формы на соответствующие координаты вектора.

Каков будет базис сопряженного пространства? Можно предположить, что он будет каким-то образом зависеть от базиса исходного пространства. Каким может быть самый простой нетривиальный выбор набора линейных форм? В качестве такого набора можно взять, например, функции, которые бы возвращали координату вектора в заданном базисе.

$$(f^k, x) = \xi^k, \qquad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

Теорема 1.4. *Набор линейных форма $\{f^k\}_{k=1}^n : X \to \mathbb{K}$, действующих на X с базисом $\{e_i\}_{i=1}^k$ образует базис пространства X^*.*

►

Для доказательства того, что выбранный набор является базисом, необходимо показать его полноту и линейную независимость. Покажем сначала полноту:

$$(f, x) = \sum_{i=1}^n \xi^i \phi_i = \sum_{i=1}^n (f^i, x)\phi_i = \left(\sum_{i=1}^n f^i \phi_i, x\right)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n f^i \alpha_i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^n f^i \alpha_i, e_k\right) = 0$$

Учитывая также свойства линейности форм

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f^i, e_k) = 0$$

Обратим внимание на взаимодействие базисных линейных форм и базисных векторов пространства X. Если их индексы совпадают, то образом базисного вектора будет 1, а если отличаются - образ равен нулю. Из этого следует, что для всех $i \neq k$ слагаемые занулятся за счет действия форм на вектор, но останется лишь слагаемое с α_k:

$$\alpha_k(f^k, e_k) = 0$$

Откуда можно сделать вывод, что $\alpha_k = 0$. В силу произвольности выбора e_k данные рассуждения справедливы для всех коэффициентов линейной комбинации, а значит выбранный набор линейных форм является линейно независимым. С учетом его полноты можно сделать окончательный вывод, что данный набор является базисным. ◀

В ходе доказательства теоремы обнаружилось примечательное свойство взаимодействия базисных векторов пространства X и сопряженного к нему.

> Базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^k\}_{k=1}^n$ пространств X и X^* называются сопряженными, если они обладают свойством:
>
> $$(f^k, e_i) = \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases},$$
>
> где δ_i^k называют символом Кронекера.

Теорема 1.5. *Для каждого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X может быть построен сопряженный ему базис пространства X^* и наоборот.*

▶
Доказательство теоремы автоматически следует из теоремы о базисе X^*. ◀

Можно обратить внимание на то, что количество базисных элементов в базисах обоих пространств совпадает.

Nota bene Размерности пространств X и X^* одинаковы, а значит данные пространства изоморфны.

$$\dim X = \dim X^* \qquad \Leftrightarrow \qquad X \simeq X^*$$

Пространство линейных форм само по себе является линейным пространством, а значит и к нему можно построить сопряженное пространство. Таким образом можно ввести второе сопряженное пространство X^{**} - множество линейных форм на X^*:

$$\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}, \qquad \hat{x}(f) = (\hat{x}, f) \in \mathbb{K}$$
$$\hat{x}(f+g) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g), \qquad \hat{x}(\alpha f) = \alpha\hat{x}(f)$$
$$(\hat{x}+\hat{y}, f) = (\hat{x}, f) + (\hat{y}, f), \qquad (\alpha\hat{x}, f) = \alpha(\hat{x}, f)$$

Таким образом можно сказать, что и пространство X является сопряженным к X^*, а следовательно между пространствами X и X^{**} можно также установить изоморфизм.

Изоморфизм двух линейных пространств называется естественным изоморфизмом, если он устанавливается без применения понятия базиса.

Теорема 1.6. *Изоморфизм между X и X^{**} - естественный.*

►

Естественный изоморфизм устанавливается отношением

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \qquad (\hat{x}, f) = (f, x)$$

◄

Рассмотрим еще одно понятие, связанное с линейными формами.

Ядром линейной формы f называется множество векторов пространства X, образом которых является ноль.

$$\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

Можно заметить, что данное множество также обладает структурой линейного пространства. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 1.7. *Ядро линейной формы* $\ker f$ *на пространстве X является линейным подпространством.*

►

Рассмотрим векторы x_1 и x_2, которые принадлежат ядру линейной формы f. Для них справедливо, что

$$(f, x_1 + x_2) = (f, x_1) + (f, x_2) = 0 + 0 = 0$$

а также:

$$(f, \alpha x) = \alpha(f, x) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Множество $\ker f$ замкнуто относительно операций, введенных на X, а следовательно является линейным подпространством. ◄

1.4 Преобразование базисов

Вспомним основные моменты, связанные с преобразованием базиса линейного пространства. Пусть X - линейное пространство и $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ - пара базисов в X

$$\forall x \in X \qquad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \qquad x = \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}^j e_j$$

В силу того, что оба набора являются базисами, каждый из векторов одного набора будет единственный образом выражаться через векторы другого набора:

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^n \tau_j^i e_i$$

Набор коэффициентов $\{\tau^i_j\}$ образует матрицу $T = \left\|\tau^i_j\right\|$, которая называется матрицей перехода от старого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$.

Для удобства можно ввести обозначения

$$E = [e_1, e_2, \ldots, e_n] \qquad \tilde{E} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n]$$

и тогда преобразование базиса можно записаться в матричной форме

$$\tilde{E} = E \cdot T$$

Произвольная матрица не может быть матрицей перехода в следствие того, что не любое преобразование позволяет базис отобразить в набор векторов, который также будет базисом, т.е. быть линейно независимым и полным.

Теорема 1.8. *Матрица перехода невырождена*

$$\det T \neq 0$$

►

К доказательству этого утверждения можно подходить с точки зрения определителей матриц. Естественно, что матрицы, составленные из базисных векторов, являются невырожденными. Как следствие, их определитель не равен нулю. В таком случае воспользуемся следующим свойством

$$\det \tilde{E} = \det E \cdot \det T$$

Откуда сразу следует, что определитель матрицы T не может быть нулевым. ◄

Вследствие невырожденности матрицы перехода, можно утверждать, что всегда существует обратная матрица $T^{-1} = S$. Иными словами, всегда существует обратное линейное преобразование базисов

$$\tilde{E}T^{-1} = E \qquad \text{или} \qquad E = \tilde{E} \cdot S$$

Посмотрим теперь как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X.

Теорема 1.9. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$ - базисы X^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma^l_i f^i$$

где $\left\|\sigma^l_i\right\| = S$ - элементы обратной матрицы перехода.

►

По определению сопряженных базисов имеем

$$(\tilde{f}^l, \tilde{e}_k) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma^l_i f^i, \sum_{i=1}^n \tau^j_k e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^l_i \tau^j_k (f^i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^l_i \tau^j_k \delta^i_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^l_i \tau^i_k = \delta^l_k$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из $\{\sigma_i^l\}$, на матрицу перехода должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы. ◄

Для базисов линейных форм можно ввести аналогичные обозначения

$$F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T \qquad \tilde{F} = \left[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n\right]^T$$

Учитывая это, получаем, что

$$\tilde{F} = S \cdot F$$

Используя данные обозначения, посмотрим как будет выглядеть преобразование координат векторов и линейных форм при преобразованиях базиса. Сформулируем их в виде теорем и докажем

Теорема 1.10. *(О замене координат в X) Преобразование координат вектора X при переходе от базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к базису $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ имеет вид*

$$\tilde{\xi}^k = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j \qquad (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \ldots, \tilde{\xi}^n)^T = S \cdot (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$$

►

$$\tilde{\xi}^k = \left(\tilde{f}^k, x\right) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^k f^i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \xi^j (f^i, e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \xi^j \delta_j^i = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j$$

◄

Теорема 1.11. *(О замене координат в X^*) Преобразование координат формы в X^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\tilde{f}\}_{l=1}^n$ имеет вид*

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \qquad (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \ldots, \tilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \cdot T$$

►

$$\tilde{\eta}_l = (y, \tilde{e}_l) = \left(\sum_{i=1}^n \eta_i f^i, \sum_{j=1}^n \eta_l^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j (f^i, e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i$$

◄

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису также как и базисные векторы, т.е. с использованием матрицы T, называются ковариантными величинами и снабжаются нижними индексами (ковекторы).

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису по обратному закону, т.е. с использованием матрицы S, называются контравариантными величинами и снабжаются верхними индексами (векторы).