α

Лекция 4

«Определитель матрицы»

Содержание лекции:

Исторически матрицы появились как инструмент для решения систем линейных алгебраических уравнений. С их помощью можно определить условия существования решения СЛАУ, но также и найти само решение. Для этого нам будет необходимо ввести еще одну характеристику квадратных матриц - определитель. В лекции будут рассмотрены частные случае определителей матриц 2-го и 3-го порядка, чтобы на них понять основные принципы нахождения определителей. После чего появится возможность обобщить это понятие на определитель матрицы произвольного порядка. Вместе с тем будут рассмотрены свойства определителей, основанные в первую очередь на теории перестановок.

Ключевые слова:
система линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов, определитель 2-го порядка, определитель 3-го порядка, правило треугольника, перестановка множества, число инверсий, четность перестановки, транспозиция, определитель n-го порядка, общее правило знаков, определитель транспонированной матрицы, свойство линейности

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

4.1 Начальные сведения

В прошлой лекции внимание было приковано в основном к методам работы с матрицами, однако практически ничего не было сказано про то, откуда и для каких задач они могут использоваться. Необходимо восполнить этот пробел. Для этого сначала рассмотрим несколько частных случаев систем линейных алгебраических уравнений.

4.1.1 Определитель 2-го порядка

Рассмотрим в общем виде систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Попробуем найти решение этой системы. Для этого умножим обе части первого равенства на b_2, второго на b_1 и вычтем одно из другого.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

Теперь первое равенство умножим на $-a_2$, второе на a_1 и сложим.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

Предположим, что $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Сделав некоторое предположение о коэффициентах системы, мы смогли найти решение. Если это предположение не выполняется, то пока что мы останавливаем на этом процесс нахождения решения системы, однако вернемся к нему в следующих разделах.

Можно обратить внимание, что знаменатели решений одинаковые, а числители, хоть и отличаются, имеют ту же самую структуру. Здесь и появляются такие объекты как матрицы. И ведь действительно, мы можем ту же самую систему представить в несколько ином виде:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Умножив матрицу коэффициентов системы на матричный столбец неизвестных, мы получим равенство двух матриц, которое выполняется тогда и только тогда, когда равны соответствующие элементы - тем самым возвращаясь к исходной системе.

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Таким соответствием между матричным уравнением и СЛАУ мы будем пользоватся не раз.

Выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ и матрица коэффициентов очевидно связаны. Это выражение называют **определителем матрицы 2-го порядка** и обозначается следующим образом:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Определитель позволяет компактным способом представить найденное решение системы.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Nota bene Можно заметить, что числитель каждого неизвестного получается заменой одного из столбцов матрицы коэффициентов на матричный столбец свободных членов.

4.1.2 Определитель 3-го порядка

Очевидно, что введение еще одного объекта, который работал бы только для систем из двух уравнений с двумя неизвестными, было бы излишним, если бы его невозможно было обобщить. Посмотрим на систему, состоящую из трех уравнений и теперь уже с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Здесь мы также можем выделить матрицу системы. Обозначим ее для дальнейших рассуждений как матрицу A.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Тогда систему можно представить как матричное уравнение по аналогии с предыдущим примером.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Аналогичным методом попытаемся найти решение в предположении, что оно существует. Для этого исключим y и z, умножив первое уравнение на $b_2c_3 - b_3c_2$, второе на $b_3c_1 - b_1c3$ и третье - на $b_1c_2 - b_2c_1$, после этого сложив уравнения. При этом коэффициенты при y и z обнулятся, чего мы и добивались.

Уравнение по своей структуре станет похоже на то, что мы получали для x в предыдущем примере - линейное уравнение, в котором множитель перед x составлен только из элементов матрицы коэффициентов, а правая часть - аналогичным образом, только заменой всех коэффициентов a_i исходной системы на d_i.

$$(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x = \\ = d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1$$

Как множитель перед x, так и правую часть можно представить как численную характеристику некой матрицы. Это выражение называют **определителем матрицы 3-го порядка**.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

В этих обозначениях можно выразить решение системы. Например для x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Можно также вновь заметить, что решение точно будет существовать, если определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля.

4.1.3 Общее определение: первая попытка

В данных примерах были показаны определители матриц 2-го и 3-го порядка. Что же они из себя представляют? Оба эти выражения представляют собой **алгебраические суммы произведений** элементов матриц, причем эти произведения составляются по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Иными словами в каждой группе множителей **не повторяются индекс строки и "индекс" столбца** (обозначение буквой a,b или c). Более того можно заметить, что в сумму входят **все возможные** такие произведения.

Также произведения входят со знаком $+$ или $-$. Причем правило выбора знаков можно отразить графически следующим образом.

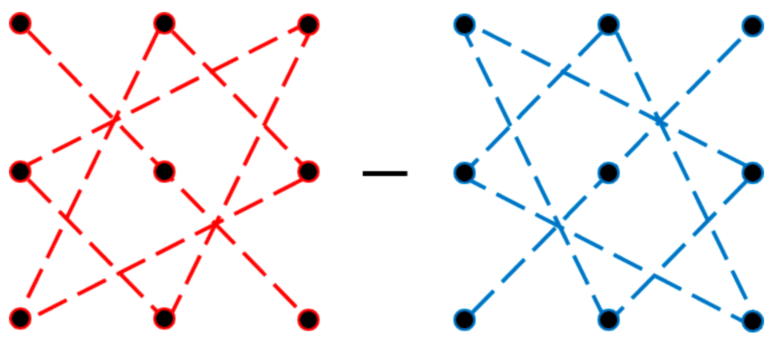

Рис. 4.1: Правило треугольников

В определитель 3-го порядка входят со знаком "$+$" такие произведения, что они либо лежат на главной диагонали, либо образуют треугольник, основание которого параллельно главной диагонали. Но также и со знаком "$-$"входят произведения элементов, лежащих на побочной диагонали, или образующих треугольник, у которого основание параллельно побочной диагонали. Аналогичное правило действует и для определителя 2-го порядка - он равен произведению элементов главной диагонали, из которого вычитается произведение элементов побочной диагонали.

Естественно предположить, что понятие определителя можно обобщить до квадратной матрицы любого порядка.

> **Определителем** квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и снабженных знаками $+$ или $-$ по определенному правилу.
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$
>
> где индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в каждом слагаемом приобретают различные значения из набора чисел $1, 2, \ldots, n$.

Осталось выяснить, в чем заключается это правило выбора знаков. Как мы видели в примерах, знак каким-то интересным образом определяется порядком индексов строк и столбцов. В том определении, которое мы ввели, индексы строк упорядочены для удобства, а индексы столбцов перемешаны так, чтобы они не повторялись в множителях. Для определения знака нам нужно каким-то образом посмотреть на набор индексов столбцов и по нему делать вывод о знаке. И более того, можно высказать предположение, что это правило выбора должно делить все слагаемые (а значит и наборы индексов столбцов) на те, что имеют знак "плюс" и те, что имеют знак "минус". Ответы на эти вопросы дает теория перестановок.

4.1.4 Элементарные сведения теории перестановок

Пусть задано множество из n элементов. Для простоты сразу будем предполагать, что элементы множества - натуральные числа. Нам необходимо говорить о выборках без повторения из этого множества с учетом их порядка.

> **Перестановками** множества называются упорядоченные наборы, состоящие из всех элементов этого множества, отличающихся порядком следования.

Сколько таких упорядоченных наборов можно построить?

Пример 4.1. Пусть $M = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим все возможные упорядоченные наборы элементов этого множества.

$$\begin{matrix} (1,2,3) & (1,3,2) \\ (2,1,3) & (2,3,1) \\ (3,1,2) & (3,2,1) \end{matrix}$$

Теорема 4.1. *Число всех перестановок n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.*

►

В качестве первого элемента перестановки можно взять любой из n элементов. Один из оставшихся $n-1$ элементов можно поставить на второе место. Соответственно на третье место может быть выбран один из $n-2$ элементов и так далее. Итого количество всех возможных наборов будет определяться произведением $n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$.

◄

Наша задача состоит в том, чтобы разбить все $n!$ перестановок на два класса, по которым будет определяться знак слагаемого в определителе.

> Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - некоторая перестановка натуральных чисел. Скажем, что пара $(\alpha_i, \alpha_j), i < j$ образует **инверсию**, если $\alpha_i > \alpha_j$. Число всех пар элементов перестановки, образующих инверсию, называется **числом инверсий** в перестановке и обозначается $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Пример 4.2. Пусть дана перестановка $(3, 2, 1, 4)$. В ней только три инверсии - $(3, 2)$, $(3, 1)$ и $(2, 1)$. Следовательно число инверсий $N(3, 2, 1, 4)$ этой перестановки равно 3.

> Перестановки, содержащие четное число инверсий, называются **четными**, содержащие нечетное число инверсий - **нечетными**.

Одна перестановка от другой может отличаться местами только двух элементов. В таком случае говорят о транспозиции.

> **Транспозицией** называется взаимно однозначное соответствие множества на себя, при котором $n-2$ элемента остаются на местах, а остальные два элемента переставляет местами.

Пример 4.3. Перестановка $(3, 4, 1, 2)$ может быть получена из перестановки $(3, 2, 1, 4)$ из *Пример 4.2* с помощью транспозиции $(4, 2)$, т.е. такого соответствия, которое поменяло бы местами эти два элемента.

Следующая теорема выглядит очень занимательной, потому что утверждение не совсем очевидно с первого взгляда.

Теорема 4.2. *Пусть в некоторой перестановке сделана транспозиция. Она выполняется с помощью нечетного числа транспозиций соседних элементов.*

►

Пусть дана перестановка

$$(\dots, x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, y, \dots)$$

Рассмотрим транспозицию, меняющую местами элементы x и y при помощи последовательных транспозиций соседних элементов. Для этого необходимо переставлять элемент x с каждым своим правым соседом до тех пор, пока он не окажется правее y. Количество таких транспозиций *соседних элементов* будет равно $s + 1$.

$$(\dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, y, x, \dots)$$

Теперь необходимо поставить элемент y на то место, где раньше был x. Поступаем аналогичным образом - меняем местами y с каждым своим левым соседом ровно s раз, пока он не придет на нужное место.

$$(\dots, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, x, \dots)$$

Общая сумма транспозиций соседних элементов равна $2s+1$, что является нечетным числом. ◄

Теорема 4.3. *При транспозиции соседних элементов число инверсий в перестановке меняется на одну единицу.*

►

Рассмотрим перестановки

$$(\dots, a, b, c, d, \dots)$$
$$(\dots, a, c, b, d, \dots)$$

Общее число инверсий в каждой перестановке складывается из

1. числа инверсий в парах, не содержащих элементы b, c,

2. числа инверсий в парах, которые содержат один из b или c,

3. числа инверсий самой пары b, c.

Очевидно, что число инверсий пары b, c равно либо 0, либо 1. Первое слагаемое не зависит от переставляемых элементов, поэтому одинаково и для первой, и для второй перестановки. Аналогично и второе слагаемое тоже одинаково, т.к. b и c расположены одинаково относительно остальных элементов.

Следовательно, изменение числа инверсий зависит только от взаимного расположения элементов b и c. Если они в первой перестановке образуют инверсию, то после транспозиции этой инверсии уже нет - число инверсий уменьшится на 1. И наоборот, если в первой перестановке элементы были в порядке возрастания, то после транспозиции они образуют инверсию - число инверсий увеличится н 1. ◄

Следствия теорем

Очевидные следствия теорем:

1. Если в перестановке сделать транспозицию соседних элементов, то четность перестановки изменится на противоположную, т.к. происходит увеличение/уменьшение только на единицу.

2. Любая транспозиция изменяет четность перестановки на противоположную. Это справедливо в силу того, что любая транспозиция производится с помощью нечетного числа транспозиций соседних элементов (доказано выше).

Следующие утверждения требуют доказательств, но в нашем курсе ограничимся только их формулировками.

1. Число четных перестановок n элементов равно числу нечетных перестановок.

2. Любая перестановка может быть получена из любой другой посредством нескольких транспозиций.

Что мы получили в итоге? Полное количество перестановок множества из n элементов равно $n!$. Все перестановки можно разбить на два равных класса по признаку четности перестановки. А также несколько других утверждений, которые помогут в доказательстве свойств определителя, но уже сейчас мы можем перейти к полному определению.

4.2 Определитель n-го порядка

4.2.1 Общее определение: полная формулировка

Ранее уже было дана незавершенная формулировка определителя. В ней отсутствовало строгое правило выбора знака, но было сказано, что оно должно быть связано с разбиением всех слагаемых на два класса. И в предыдущей подтеме такое разбиение было получение - разбиение на четные и нечетные перестановки. Теперь можно сформулировать полное определение.

> **Определителем** квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Если множители в каждом слагаемом записать в порядке следования строк, тогда номера столбцов образуют перестановки. Слагаемые, соответствующие четным перестановкам берутся со знаком $+$, нечетным - знак $-$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ пробегает все возможные перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$.

4.2.2 Свойства определителя

Общее правило знаков

Пусть дан определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Какой знак будет иметь слагаемое $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\dots a_{\alpha_n\beta_n}$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ - перестановки чисел $1, 2, \dots, n$?

Чтобы выяснить это, обратим внимание на тот факт, что при перемене местами двух множителей, происходит транспозиция в обеих перестановках. Также вспомним, что транспозиция всегда изменяет число инверсий на нечетное число, поэтому суммарное число инверсий в двух перестановках изменяется на четное число.

Предположим, что знак каждого слагаемого определяется следующим выражением $(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$. Тогда поменяем все множители местами так, что индексы строк будут возрастать. Число инверсий индексов строк изменится на некоторое нечетное $2s+1$, а индексов строк - на $2t+1$. Как можно заметить, суммарное число перестановок изменяется на четное число, а следовательно знак не изменится.

$$(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} = (-1)^{N(1,2,\dots,n)+(2s+1)+N(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)+(2t+1)} = (-1)^{N(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}$$

В последнем переходе мы также учли, что число перестановок в строго возрастающей последовательности равно 0, а также, что четное слагаемое в степени -1 не влияет на знак. Полученное в правой части выражение является определением знака в полной формулировке, а значит предположение было верным.

Определитель транспонированной матрицы

Можно утверждать, что определитель не меняется при транспонировании матрицы.

$$\det A = \det A^T$$

Утверждение следует напрямую из предыдущего свойства. Брать произведения элементов по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца - то же самое, что делать это по отношению к транспонированной матрице. И в том, и в другом случае знак перед слагаемым будет определяться как

$$(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$$

Только в одном случае $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - перестановки индексов строк, а $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ - перестановки индексов столбцов, а в случае транспонированной матрицы наоборот. Сами же множители, естественно, остаются теми, какими и были.

Nota bene В определителе строки и столбцы равноправны. Все дальнейшие свойства, сформулированные для строк, справедливы и для столбцов.

Линейность по строкам

К свойствам линейности обычно относят свойства связанные с суммой некоторых объектов и умножением их на число. Рассмотрим эти свойства.

> Если элементы какой-либо строки представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых элементы строки равны первым слагаемым, а во втором - вторым.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_b + \det A_c$$

Легко показать, что это действительно так. В каждом слагаемом будет присутствовать элемент, представленный суммой, а это значит, что всю сумму можно разбить на две. Эти суммы, в свою очередь, равны определителям матриц, у которых строка представлена одними или другими слагаемыми.

$$\det A = \sum (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots(b_{i\alpha_i}+c_{i\alpha_i})\ldots a_{n\alpha_n} =$$
$$= \sum (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots b_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} + \sum (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots c_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} =$$
$$= \det A_b + \det A_c$$

Следующее свойство связано с умножением строки на некоторое число.

> Если все элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство производится аналогично сложению.

Определитель с одинаковыми строками

Пусть дан определитель с двумя одинаковыми строками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{k\alpha_l}\ldots a_{n\alpha_n}$$

Разобьем эту сумму на две, соответствующим четным и нечетным перестановкам.

$$= \sum_{even} a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{k\alpha_l} \dots a_{n\alpha_n} - \sum_{odd} a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{k\alpha_l} \dots a_{n\alpha_n}$$

Если во всех нечетных перестановках сделать одну транспозицию (α_i, α_l), то перестановки станут четными. Тогда получится, что в каждой сумме будут присутствовать одни и те же слагаемые, но только с разными знаками (в силу того, что элементы с этими индексами равны). Следовательно общая сумма будет равна нулю. Кратко это можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ & I & \\ \dots & \dots & \dots \\ & I & \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

где через I обозначена некоторая строка.

Перестановка строк

Рассмотрим очевидно равный нулю определитель, в котором равны две строки. Пусть каждая из них представлена в виде некоторых сумм, как было в свойстве линейности. Согласно этому свойству, можно разложить определить сначала на два определителя, воспользовавшись им для одной строки, а затем каждый из них разложить по второй строке.

$$0 = \begin{vmatrix} \dots \\ I + II \\ \dots \\ I + II \\ \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots \\ I \\ \dots \\ I \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ I \\ \dots \\ II \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ II \\ \dots \\ I \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ II \\ \dots \\ II \\ \dots \end{vmatrix}$$

Первый и последний определители равны нулю. Соответственно второй и третий обязательно должны иметь разный знак.

$$\begin{vmatrix} \dots \\ I \\ \dots \\ II \\ \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots \\ II \\ \dots \\ I \\ \dots \end{vmatrix}$$

Пропорциональные строки

Если две строки пропорциональны с некоторым коэффициентом λ, этот общий коэффициент пропорциональности элементов строки можно вынести за знак определителя. Но в таком случае остается определитель с равными строками, который равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Nota bene Добавление к какой-либо строке чисел, пропорциональных другой строке, не меняет определитель.

Показать это легко с помощью разложения определителя в сумму - один из определителей будет содержать пропорциональные строки.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I+\lambda II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

О пользе свойств

Может показаться, что эти свойства - очередные теоретические выкладки, которые полезно бы знать, но что с ними делать еще? Однако нет. Свойства определителя, а в особенности последнее позволяет несколько упростить вычисление определителей. Рассмотрим, например, вычисление определителя 3-го порядка. Да, для него известна формула, которая сама по себе не является сложной, но тяжело запоминаемой - по крайней мере с первой лекции про определители. Свойства, в свою очередь, более интуитивно понятны.

Пример 4.4. Найти значение определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

Базовое правило при вычислении определителей любым способом - чем больше нулей, тем лучше. Как можно получить нули? Сложением и вычитанием строк, умноженных на какие-то коэффициенты. И это крайне приятно делать, если где-то в матрице есть 1, потому что с помощью нее занулять становится очень простой задачей.

Шаг первый.
Заметим, что на пересечении первой строки и первого столбца как раз стоит 1. Зацепимся за нее.

Шаг второй.
Вычтем из второй строки первую, умноженную на 3. Как было сказано, данное преобразование не изменяет определитель.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ -5 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

Шаг третий.

Прибавим к третьей строке также первую, но умноженную уже на 5:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 \end{vmatrix}$$

Здесь можно заметить массу всего интересного. Например, что наличие только одного ненулевого элемента значительно сокращает вычисления - ведь тогда во всей сумме, с помощью которой вычисляет определитель, значительное число слагаемых станет равным 0. Ненулевыми останутся только слагаемые, в которых присутствует $a_{11} = 1$. Можно пойти этим путем, но можно заметить, что 2 и 3 строки пропорциональны друг другу с коэффициентом -2. По свойству пропорциональных строк в определителе делаем вывод, что он равен нулю.

Заключение

В данной лекции, с одной стороны, основываясь на практической мотивации использования матриц, с другой стороны, опираясь на теорию перестановок, было получено общее представление об определителях матриц n-го порядка. Из частного в общее было выведено правило составления самой алгебраической суммы, а также был обоснован выбор знака каждого слагаемого. Такой подход не является единственно верным, и в дальнейшей части курса мы еще раз вернемся к определителям на новом витке, докажем еще несколько свойств и узнаем какие еще смыслы в себе таит эта необычная структура. На текущий момент нам будет достаточно этих определений, чтобы перейти к еще более простому способу вычисления определителей и сполна насладиться их удобством в решении систем линейных алгебраических уравнений.

Список литературы

1. Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре. Глава 4, п.2.
   Основной источник для теории

2. И.В.Белоусов. Матрицы и определители. Глава 4.
   Есть примеры и даже геометрические аналогии

3. З.И.Боревич. Определители и матрицы
   В некоторых местах более подробно расписываются доказательства свойств определителей, но во многом изложение схоже с данной лекцией