α

Лекция 1

«Векторная алгебра»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

1.1 Базовые представления о векторах

Как и прежде в первую очередь обратимся к мотивации обсуждения того объекта, который будет находиться в центре внимания.

Математика на первых витках своего развития была необходима в первую очередь для описания явлений, окружающих человека. Если мы говорим о таких понятиях, величинах как длина, площадь, масса, температура, нам достаточно только лишь сказать про их величину. Достаточно ли нам знания лишь величины, если мы говорим про скорость или силу, приложенную к телу? Очевидно, что нет и потому есть необходимость говорить о таких объектах, которые содержат в себе помимо некой величины ещё и направление. Такие величины называются векторными, в отличие от скалярных, где важна только величина.

Как понятие вектора трактуется в школьной математике?

‖ Вектором $\overrightarrow{AB}$ называют направленный отрезок, где A - начало, а B - конец вектора. Для таких векторов справедливы известные операции сложения, вычитания, умножения на число и другие, но является ли это определение полным? Чтобы уверенно ответить на этот вопрос, необходимо договориться о том, какие векторы мы называем равными. Можно утверждать, что два вектора будут называться равными, если они имеют одинаковые начало и конец. С одной стороны, такая формулировка дает представление о равенстве векторов, но ее полнота остается под вопросом. И действительно, мы также можем назвать два вектора равными, если они имеют одинаковую величину и направление вне зависимости от того, исходят они из одного начала или нет. Однако в таком определении не фигурирует тот факт, что отрезки могут быть хоть и равными, но по крайней мере *графически* будут отличаться, если у них разная точка приложения.

1.2 Классы эквивалентности направленных отрезков

В силу обозначенных выше вопросов нам необходимо "развести" смыслы, которые ранее вкладывались нами в понятие вектора. Главный вопрос, с которого начались нестыковки был связан с отношением равенства двух объектов. Если ранее он для нас не был ключевым, то сейчас требует уточнения, т.к. с одной позиции мы векторы считаем равными, но в то же время и не можем это утверждать (при несовпадающих началах).
Чтобы упростить и одновременно усложнить себе задачу, поставим вопрос иным образом. К устранению обсуждаемой проблемы приводит рассмотрение векторов не с точки зрения их полной идентичности как с любыми другими объектами, с которыми мы встречались ранее, а с точки зрения их схожести по некоторым признакам.

Эта интуитивная предпосылка позволяет предположить, что на множестве можно ввести отношение эквивалентности (схожести) по некоторому признаку.

> **Отношением эквивалентности** $\sim$ на множестве M называется отношение, обладающее свойствами:

1. Рефлексивность: $a \sim a, \quad \forall a \in M$;
2. Симметричность: $a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a, \quad \forall a, b \in M$;
3. Транзитивность: $a \sim b,\ b \sim c, \;\Rightarrow a \sim c, \quad \forall a, b, c \in M$

Пример 1.1. Примеры множеств и отношений эквивалентности

1. $M = \mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, а $\sim$ - равенство чисел. Любым образом определенное ранее равенство в рассмотренных множествах является отношением эквивалентности;
2. M - множество натуральных чисел, а отношение эквивалентности - делимость на какое-то число. Например, четность - это отношение эквивалентности, т.к. это отношение делимости на 2;
3. M - множество всех прямых на плоскости (в пространстве), отношением эквивалентности может выступать параллельность;
4. M - множество треугольников, а отношение эквивалентности - их подобие.

Рассматривая некоторое свойство объектов, из всего множества можно выделить только те объекты, которые будут обладать этим свойством. Например среди треугольников можно выделить подмножество правильных треугольников, потому что с точки зрения отношения подобия они будут эквивалентны.

> **Класс эквивалентности** элемента $a \in M$ - это подмножество множества M, в котором все элементы эквивалентны a.

$$[a] = \{x \in M :\ x \sim a\}$$

Понятие класса эквивалентности позволяет сформулировать следующую теорему, которую приводим без доказательства.

Теорема 1.1. *(О разбиении множества на классы эквивалентности) Отношение эквивалентности разбивает множество M на классы, то есть на попарно взаимно непересекающиеся подмножества, в сумме дающие все множество M.*
Теперь мы можем уточнить все определения, связанные с векторами.

> **Направленным отрезком**, или **связанным вектором**, $\overrightarrow{AB}$ назовем отрезок, однозначным образом определяемый точками A и B, которые будем называть началом и концом направленного отрезка.

Именно это понятие мы обычно изображаем графически в виде стрелки из одной точки в другую.

1.2.1 Важные вспомогательные определения

Введем несколько определений для направленных отрезков.

> Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть сонаправленными (противоположно направленными), если они лежат на параллельных прямых и расположены по одну и ту же сторону (по разные стороны) от прямой AC.

Сонаправленность векторов будем обозначать как

$$a \uparrow\uparrow b,$$

а противоположно направленные векторы

$$a \uparrow\downarrow b.$$

> Два направденных отрезка будем называть **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых.

> Два направленных отрезка будем называть **компланарными**, если они лежат в параллельных плоскостях.

> **Модулем** направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ будем называть длину отрезка AB.

Эти два понятия позволяют сравнивать величины и направления векторов, а следовательно ведут к понятию эквивалентности векторов.

> Направленные отрезки будем называть эквивалентными, если они сонаправленны и равны их модули.

В соответствии с теоремой, которая была приведена ранее, любое отношение эквивалентности образует разбиение на классы эквивалентности.

> **Свободным вектором**, или просто **вектором** называется класс эквивалентности направленных отрезков.

Иными словами это класс эквивалентности образованный всеми связанными векторами, эквивалентными некоторому одному связанному вектору. Следовательно любой связанный вектор из данного класса эквивалентности можно получить из другого путем параллельного переноса.

Изложенный материал действительно дает несколько более полное и строгое обоснование. Однако как бы это не было странно, на практике все эти тонкости определений векторов и их равенства опускаются, а пользуются привычным лексиконом, употребляемым в школе. Исключения составляют лишь те ситуации, где разница между свободным и связанным векторами становится существенной.

1.3 Действия с векторами

Рассмотрим некоторые уже знакомые действия, которые можно выполнять с векторами.

Сумма векторов

Рассмотрим два вектора a и b. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, а от полученной точки B отложим $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$.

> **Суммой** векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC}$, начало которого является началом вектора AB, а конец - концом вектора BC.

Введенное правило называется правилом треугольника сложения векторов.

Nota bene Можно убедиться, что данное определение не противоречит равенству (эквивалентности) векторов, о котором говорилось ранее. Действительно, если откладывать вектор из другой точки A_1, то результатом будет вектор той же длины и направления с концом в некотором C_1.
Правило треугольника справедливое для суммы двух векторов можно обобщить на правило многоугольника для суммы произвольного количества векторов. Для нахождения суммы из n векторов необходимо последовательно откладывать их от одной точки к другой. Результатом сложения будет являться вектор, который определяется точкой начала первого вектора последовательности и точкой конца последнего.

Свойства суммы векторов

1. Коммутативность сложения

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

2. Ассоциативность сложения

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

3. Наличие нейтрального элемента

$$\exists\, \overrightarrow{0} :\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$$

4. Наличие противоположного элемента

$$\forall\, a\, \exists\, (-\overrightarrow{a}) :\ \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$$

Наличие противоположного элемента позволяет построить вычитание векторов как сумму с противоположным вектором

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

Умножение вектора на скаляр

Произведением вектора $\overrightarrow{a}$ на скаляр λ называется вектор $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ такой, что

1. $\overrightarrow{b} = |\lambda|\overrightarrow{a}$;
2. $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$;
3. $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$;
4. $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;

В случае умножения вектора на скаляр можно также зафиксировать несколько свойств, присущих ему, а также законы дистрибутивности, связывающие сложение и умножение на скаляр

1. Ассоциативность умножения на скаляр
$$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \mu(\lambda\overrightarrow{a})$$
2. Наличие единицы
$$1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$$
3. Дистрибутивность суммы относительно умножения на скаляр
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$$
4. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно суммы
$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$$

В дальнейшем часто будет возникать необходимость в определении вектора, сонаправленного с некоторым $\overrightarrow{a}$ длина которого равна 1.

Ортом вектора $\overrightarrow{a}$ называется вектор $\overrightarrow{a_0}$ такой, что

$$\overrightarrow{a_0} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}, \quad |\overrightarrow{a_0}| = 1$$

Откуда следует, что

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\overrightarrow{a_0}, \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_0} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$$

1.4 Линейная комбинация векторов

Пусть $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ - набор векторов и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ - набор чисел. Выражение вида

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \ldots \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$$

называется **линейной комбинацией** векторов $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

В связи с этим вспомним несколько определений. Два вектора называют неколлинеарными, если они лежат на непараллельных прямых. Очевидно, что в таком случае один вектор нельзя выразить через другой. Также и с некомпланарностью - ни один вектор $\overrightarrow{a}$ из тройки некомпланарных векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ нельзя выразить через сумму векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ с какими-то коэффициентами. Иными словами, вектор $\overrightarrow{a}$ невозможно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Это должно нас навести на мысль, что векторы могут находить в некотором отношении друг относительно друга.

Набор векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ будем называть **линейно зависимым**, если существует их линейная комбинация, равная нулевому вектору

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \ldots \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0},$$

при условии, что все коэффициенты λ_i являются ненулевыми.

Иными словами, набор векторов будет являться линейно зависимым, если хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Набор векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ будем называть **линейно независимым**, если их линейная комбинация равна нулевому вектору

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \ldots \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0},$$

только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Сформулируем несколько утверждений касательно линейной зависимости векторов.

1. Набор из одного вектора линейно зависим тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;

2. Набор из двух векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны;

3. Набор из трех векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда векторы компланарны;

4. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Следующее определение будет для нас ключевым.

Базисом на плоскости (в пространстве) называется упорядоченный набор линейно независимых векторов такой, что любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

Можно сделать некоторые выводы относительно базисов.

- В пространстве, состоящем из одного лишь нулевого вектора, базиса не существует;

- На прямой линии базисом является любой ненулевой вектор;

- На плоскости базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов;

- В трехмерном пространстве базис - упорядоченная тройка любых некомпланарных векторов.

1.5 Разложение по базису

Рассмотрим трехмерное пространство для общности, однако все нижесказанное будет справедливо и для двумерного пространства (плоскости).

Как было сказано, в трехмерном пространстве можно выбрать набор из трех линейно независимых векторов, являющийся базисом. Пусть набор векторов $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ - некоторый базис трехмерного пространства. Тогда произвольный вектор $\overrightarrow{a}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов.

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

> Коэффициенты a_1, a_2, a_3 называют компонентами вектора или координатами вектора в заданном базисе.

Имеется более компактная запись вектора через его координаты

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Можно утверждать, что в заданном базисе компоненты вектора определяются однозначным образом.

Теорема 1.2. *(О единственности разложения). Пусть $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ - базис трехмерного пространства. Разложение произвольного вектора $\overrightarrow{a}$ по базисным векторам единственно.*

Для доказательства предположим, что это не так и существует два различных разложения вектора

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{a} = a_1'\overrightarrow{e_1} + a_2'\overrightarrow{e_2} + a_3'\overrightarrow{e_3}$$

Вычтем два равенства друг из друга.

$$\overrightarrow{0} = (a_1 - a_1')\overrightarrow{e_1} + (a_2 - a_2')\overrightarrow{e_2} + (a_3 - a_3')\overrightarrow{e_3}$$

Набор базисных векторов является по определению линейно независимым. Следовательно их линейная комбинация будет равна нуль-вектору тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. А это и означает, что разложение единственно.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1' \\ a_2 &= a_2' \\ a_3 &= a_3' \end{aligned}$$

Вследствие того, что координаты вектора в некотором базисе определяются однозначно, все операции с векторами можно привести к операциям над их координатами. И действительно, пусть есть векторы $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданные в одном и том же базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Тогда можно утверждать, что

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

так как

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c} &= (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) + (b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) = \\ &= (a_1 + b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 + b_2)\overrightarrow{e_2} + (a_3 + b_3)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

Аналогично умножение вектора на скаляр приводит к тому, что все его координаты умножаются на этот скаляр. Для вектора $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и скаляра λ получаем

$$\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

В терминах координат вектора можно легко сформулировать условие коллинеарности двух векторов. Векторы $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданные в одном и том же базисе, будут коллинеарны, если найдется такое λ, что все отношения соответствующих координат векторов будут ему равны.

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda : \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$$

1.5.1 Переход из одного базиса в другой

Вектор однозначно задается координатами в некотором базисе, но выбор базиса является произвольным при выполнении вышеперечисленных условий. Выясним как преобразуются координаты вектора при переходе в другой базис.

Пусть задан начальный базис $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ и в нем дан некоторый вектор $\overrightarrow{a}$. Также введем новый базис $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}'\}$, который выражается через старый следующим образом

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1}' &= t_{11}\overrightarrow{e_1} + t_{21}\overrightarrow{e_2} + t_{31}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2}' &= t_{12}\overrightarrow{e_1} + t_{22}\overrightarrow{e_2} + t_{32}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3}' &= t_{13}\overrightarrow{e_1} + t_{23}\overrightarrow{e_2} + t_{33}\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

Составим матрицу из коэффициентов разложения нового базиса по старому. Такая матрица называется матрицей перехода

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Теперь скажем, что вектор $\overrightarrow{a}'$ представлен разложением в старом и новом базисе

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = a_1'\overrightarrow{e_1'} + a_2'\overrightarrow{e_2'} + a_3'\overrightarrow{e_3'} =$$

Представим векторы нового базиса в виде их разложения по старому базису

$$= a_1'(t_{11}\overrightarrow{e_1} + t_{21}\overrightarrow{e_2} + t_{31}) + a_2'(t_{12}\overrightarrow{e_1} + t_{22}\overrightarrow{e_2} + t_{32}) + a_3'(t_{13}\overrightarrow{e_1} + t_{23}\overrightarrow{e_2} + t_{33}\overrightarrow{e_3}) =$$

Перегруппируем слагаемые, объединив их по векторам старого базиса

$$= (a_1't_{11} + a_2't_{12} + a_3't_{13})\overrightarrow{e_1} + (a_1't_{21} + a_2't_{22} + a_3't_{23})\overrightarrow{e_2} + (a_1't_{31} + a_2't_{32} + a_3't_{33})\overrightarrow{e_3}$$

Заметим, что в силу единственности разложения необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1't_{11} + a_2't_{12} + a_3't_{13} \\ a_2 &= a_1't_{21} + a_2't_{22} + a_3't_{23} \\ a_3 &= a_1't_{31} + a_2't_{32} + a_3't_{33} \end{aligned}$$

Для более простой и уже привычной нам работы с системы линейных уравнений представим ее в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$$

Иными словами, если координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в разных базисах представить в виде матричных столбцов a и a', то преобразование координат при переходе из нового базиса в старый будет производиться с помощью матрицы перехода.

$$a = Ta'$$

Соответственно, чтобы из координат в старом базисе получить координаты в новом базисе, нужно применить обратное преобразование

$$a' = T^{-1}a$$