Конспект лекций по математическому анализу, семестр II

Шишминцев Дмитрий Владимирович

20 апреля 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Лекция 3

Определение 1 (Определенный интеграл)**.** Рассматриваем функцию $f(x)$, которая непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть функция $f(x) > 0, a < b$. Разобъем отрезок $[a, b]$ точками $x_k, k = 0..n-1$ на $n-1$ частей. Рассмотрим $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Наибольшее значение Δx обозначим за ранг дробления. $max \Delta x_i = \lambda(i = 0, ...n-1)$ На каждым частичном отрезке выберем произвольным образом точку x_k и найдем значение функции $f(\xi_k)$. Рассмотрим $\lim_{\lambda \to 0, n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_b^a f(x)dx$

Свойства:

- $f(x) > 0, a < b \to \int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a > b \to -\int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a = a \to \int_b^a f(x)dx = 0$

Определение 2 (Интегральная сумма Римана)**.** $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$
Предел суммы Римана не зависит от выбора точек и разбиения отрезка $[a, b]$ на маленькие отрезки.

Теорема 1 (Теорема существования определенного интеграла)**.** $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она имеет конечное количество точек разрыва первого рода.

Теорема 2 (Достаточное условие интегрируемости функции)**.** Если функция кусочно-непрерына на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует определенный интеграл

Определение 3 (Геометрический смысл определенного интеграла)**.** Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ - площадь криволинейной трапеции. (площадь под графиком функции) на отрезке $[a, b]$ ограниченной осью O_x или $y = 0$

Определение 4 (Свойства определенного интеграла)**.**

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ - по определению
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ - по определению
- $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$ - По определению, определенный интеграл - предел суммы Римана. Сумму можно разбить, а константу вынести.

- Рассмотрим $c \in [a,b], f(x)$ - непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq \phi(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Теорема 3 (Оценка определенного интеграла)**.** Если функция $f(x)$ - непрерына на отрезке $[a,b]$, то справедливо утверждение:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

где m - наименьшее значение функции на $[a,b]$, а M - наибольшее значение
Доказательство:
$f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow \exists \sup, \inf$ по Т. Вейерштрасса.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\Delta x_k, \Delta x_k = b-a$$

, если мы рассмотрим все значения.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a)$$

Теорема 4 (Теорема о среднем)**.**
Если $f(x)$ непрервна на $[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство: $f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} = f(\xi), \xi \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Теорема 5 (Об интеграле с переменным верхним пределом (Бароу)).
$f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^x f(t)dt$ имеет проивзодную которая равна подынтегральной функции $f(x)$

$$\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' = f(x)$$

Доказательство:
$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \int_x^{\delta x + x} f(t)dt \Rightarrow \Delta\phi(x) = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \int_x^{\Delta x + x} f(t)dt \Rightarrow$ по теореме о среднем $\int_x^{\Delta x + x} f(t)dt = f(\xi)(\Delta x - x) \Rightarrow \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\phi(x)}{x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' - \phi(x)' = f(x)$

2 Лекция 4.

Теорема 6 (дополнительная к формуле Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ - непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке имеет первообразную и имеет неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Доказательство: Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. $\int_a^x f(t)dt = F(x), F'(x) = (\int_a^a f(t)dt)' = f(x)$ по теореме Бароу.
$\phi(x)$ - первообразная $f(x)$, то $F(x) - \phi(x) = C \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

Теорема 7 (Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), a < b$$

Доказательство: $\int_a^x f(t)dt = F(x), f(x) = F'(x)$ - первообразная. Рассмотрим $[a, b]$, пусть $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) = -C$
Пусть $x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \Rightarrow t = x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Замечание: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ (краткая запись)

Методы вычисления определенного интеграла

- Формула замены
- Интегрирование по частям

Теорема 8 (Формула замены)**.** $\int_a^b f(x)dx, f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, положим $\phi(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$и $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b, \exists\phi'(t)$, тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

где $F(x)$- первообразная для функции $(f(\phi(t)) \cdot y'(t))$

Теорема 9 (Формула для интегрирования по частям)**.** Расммотрим $u(x), v(x)$ - которые непрерывны и дифференцируемы на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Применение определенного интеграла. Площадь плоских фигур в декартовой системе координат

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) > 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) < 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b -f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

$f(x)$ меняет знак при переходе через ось $O_x \Rightarrow$

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$f(x), g(x)$ - непрерывны на отрезке $[a, b], f(x) > g(x) \Rightarrow$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$x = x(y), y \in [c, d] \Rightarrow$

$$S = \int_c^d f(y)dy$$

$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$$

В полярной системе координат. $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Рассматривается кривая $r(\phi)$ заданная в полярной системе координат и ограничена углом α, β.

- Разбиваем сектор на n кусков. $\alpha = \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n = \beta$
- Вводим углы $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$
- Рассмотрим произвольный $\Delta\phi_k$, ограничен кривой $r = f(\Delta\phi_k)$, $S = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$
- Таким образом находим все площади $\Delta S_1; \Delta S_2, ..., \Delta S_n$
- Составим сумму $S = \sum \Delta S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$ - интегральная сумма
- Вводим ранг дробления - $\lambda = \max \Delta\phi_k$
- $S = \lim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$. Если предел существует и имеет конечное значение, то:

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\phi) d\phi$$

3 Лекция 5

Определение 5 (Длина дуги)**.** предел длины вписанной кривой при $n \to \infty$

Вычисление длины дуги

Кривая AB задана графиком функции $f(x), x \in [a,b], a < b, f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Рассматривается k кусочек ломанной. $l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k - f_{k-1}^2)}$ по теореме Лагранжа $f_k - f_{k-1} = f_k'(x)\Delta x_k \Rightarrow = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k')^2 \Delta x_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f_k')^2} = l_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n01} l_k = \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1+(f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1+(f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow$

$$\int_a^b \sqrt{1+(f_k')^2}dx$$

Если кривая задана в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_{t_1}^{t_1} \sqrt{(\phi_t')^2 + (\xi_t')^2}$$

Кривая задана в полярной системе координат $r = r(\phi)$ Рассмотрим $[\alpha, \beta]$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot r\sin\phi \end{cases} \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$$

$x_\phi' = r'(\phi)\cdot\cos\phi + r(\phi)\cdot(-\sin\phi)$ $y_\phi' = r'(\phi)\cdot\sin\phi + r(\phi)\cdot\cos\phi$ $(x_\phi')^2 + (y_\phi)^2 = (r_\phi')^2 + r_\phi^2 \Rightarrow L \int_\alpha^\beta \sqrt{(r_\phi')^2 + r_\phi^2}d\phi$

Несобственные интегралы

Рассмотрим $y = f(x)$ определена в $x \in (a, +\infty)$ и интегрируема при $x \in (a, A) \subset (a, +\infty)$

Определение 6 (Несобственный интеграл)**.** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ назывеют $\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ и если предел существует и конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случая интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла - площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Вычисление: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to\infty} F(A)$

Определение 7 (Главное значение несобственного интеграла по бесконечному промежутку)**.**

$$\int_{=\infty}^{+\infty} = \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{R} F'(R) - F(-R)$$

Обозначается как:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

В определении главного значения несобственного интеграла имеется ввиду симметричное возрастание модуля переменной x в положительном и отрицательном направлении.

4 Лекция 7

Определение 8. Простая кривая - кривая K, которая распадается на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение $y = f(x)$ или $x = \phi(y)$ причем $f(x), g(x)$ непрерывные функции на $[a, b], [p, q]$ то в этом случае K - кривая простая, замкнутая самонепересекающаяся кривая лежащая на плоскости Oxy разбивает множество точек на два множества, единственным образом

Определение 9. Двойной интеграл

- 1. Разобъем область D сетью простых кривых произвольным образом на ячейки $D_1, D_2, D_3 ... D_n$, площадями $S_1, S_2, S_3..S_n$ с диаметрами $d_1, d_2, d_3, ...d_n$
- 2. Наибольший из диаметров обозначаем через ранг дробления $\max(d_k) = \lambda$
- 3. В каждой ячейке D_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим значения $f(M_k)$
- 4. Умножим $f_k(M_k)$ на соответсвующую площадь S_k ячейки и все это просуммируем $\sum_{k=1}^{n} = f(x_k, y_k)S_k$, то если рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \sigma_k = \lim_{n\to\infty,\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy$

Теорема 10 (О существовании двойного интеграла)**.** Если подынтегральное функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точки области $D(x, y) \to \exists \iint_D f(x, y)dxdy$

Геометрический смысл двойного интеграла

Если $f(x, y) \geq 0$ в каждой точки области D, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = V$$

Объем тела ограниченного снизу области $D(x, y)$ с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz

Свойства двойного интеграла

$C_1, C_2 = const \neq 0$

$f_1(x, y), f_2(x, y)$ - непрерывны в области D

– Аналогичные свойства, как у обычных интегралов
– Если каждая точка в области больше нуля, то и интеграл будет больше нуля.
– Если одна функция больше другой, то ее интеграл тоже будет больше
– Если в каждой точке D справедливо $m \leq f(x, y) \leq M$, то $m \cdot S_d \leq \iint f(x, y)dxdy \leq M \cdot S_D$

  Доказательство: так как $m \leq f(x, y) \leq M \Rightarrow \iint_D mdxdy \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_d Mdxdy \Rightarrow m \iint_D 1dxdy \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \iint_D 1dxdy \Rightarrow$ что и требовалось доказать.

Теорема 11 (О среднем)**.** Если в каждой точке $Df(x, y)$ непрерывна, то в области D найдется точка $P(\xi, \nu)$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$$

Доказательство: так как функция непрерывна, то по свойству $m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \cdot S_D : |\frac{1}{S_D} \Rightarrow m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \Rightarrow \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y)dxdy f(\xi, \nu) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$

5 Лекция 8

Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

$D(x,y) = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$

Проведем сечение ABB_1A_1, площадь сечения $S(y) = \int_a^b f(x,y)dx \Rightarrow V = \int_a^b S(x)dx$ - объем тела.

$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d S(y)dy = \int_c^d dy(\int_a^b f(x,y)dx) = \iint_D f(x,y)dxdy$

Пример:

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y^2)dy = \int_0^1 dx[x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3}|_0^2] =$$

$$= \int_0^1 dx[x^2 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} - (x^2 \cdot 0 + \frac{0}{3})] = \int_0^1 dx(2x^2 + \frac{8}{3}) = \frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

6 Лекция 9

Замена переменных в двойном интеграле

J - якобиан, коэффицент растяжения $J = \lim_{diam S^k \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^k}$

Пусть есть непрерывная функция $x = \phi(u, v); y = \xi(u, v)$ и однозначно отображают D в D^* и эти функции имеют непрерывную частную производную. Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$ и ей соответстует функция $f(\phi(u, v), \xi(u, v))$. Тогда сумма Римана $\sum_D f(x, y)\Delta S = \sum_D f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot J\Delta S$

$$|J| = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$$

Если $\lim_{\alpha \to 0} \sum_D f(x, y)\Delta S = \iint_D f(x, y)dxdy$ - существует конечное значение

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot |J|dudv$$

Двойной интеграл в полярных координатах

$x(r, \phi) = x = r \cdot \cos\phi$
$y(r, \phi) = y = r \cdot \sin\phi$
$r \in [0, +\infty]; \phi \in (0, 2\pi] \Rightarrow$

$$|J| = \begin{bmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & r \cdot (-\sin\phi) \\ \sin\phi & r \cdot \cos\phi \end{bmatrix} = |r \cdot \cos^2\phi + r \cdot \sin^2\phi|$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\phi, r\cos\phi) \cdot rdrdy$$

Тройной интеграл

Определение 10 (Тройной интеграл)**.** Дано материальное тело, представляющее собой пространственную область Ω заполненную массов. Требуется найти массу этой области, при условии что в каждой точке этой области известна плотность. $\phi(P) = \phi(x, y, z)$ Разобъем Ω на неперекрывающиеся кубируемые части: $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$ в соотсветствии с объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. В каждой области выбираем $\forall(\cdot)P_k$ с плотностью $\phi(p_k)$, тогда масса этой области $\Delta m_k \approx \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$, мааса всей области $\Omega m \approx \sum_{k=1}^{n} \phi(P_k) \cdot v_k$. Пусть d наименьший из диаметров частичных областей: $\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$, где сумма не зависит от выбора точки P_k, не зависит от разбиения и если предел конечен, то:

$$\iiint_\Omega \phi(x,y,z)dxdydz = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_l^m f(x,y,z)dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(p)dz$$

тест

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^2}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - aZ_i)^2}{(N-1)\sum_{i=1}^{N} Z_i^2}}$$

$$\sin a = \frac{(h_0 - h) - (h'_0 - h')}{x' - x}$$

$$\epsilon_a = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\%$$

$$\epsilon = \frac{\Delta g}{g} \cdot 100\%$$

$$\Delta_a = 2\sigma, \Delta g = 2\sigma_g$$

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

$$\Delta a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_{m2})^2 + (\Delta x_{m1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i \sin\alpha_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i^2 - \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i)^2}$$

$$d_i = a_i - (A + B\sin\alpha_i)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{D(N-2)}}$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i^2 - \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i)^2$$