α

Лекция 2

«Полиномы»

Содержание лекции:
Выражения, сходные по виду с квадратными трехчленами, встречаются еще в школе. Оказывается, что все эти выражения, полиномы, обладают интересными алгебраическими свойствами. В этой лекции мы рассмотрим, что такое полином и как его можно определить строго, рассмотрим знакомые операции и их свойства. Такой взгляд на полиномы позволит нам вывести важные утверждения о делимости полиномов, а также даст попытку описать множество корней полиномов.

Ключевые слова:
кольцо, ассоциативное кольцо, коммутативное кольцо, кольцо с единицей, область целостности, делитель нуля, лемма о сокращении в равенстве, одночлен, полином, кольцо полиномов, высший член полинома, степень полинома, делимость полиномов, схема Горнера, теорема Безу, корень полинома, кратность корня, наибольший общий делитель, нормализованный полином, основная теорема алгебры, разложение полинома

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Алгебраическая структура: кольцо

Прежде чем перейти к обсуждению основной темы лекции, необходимо рассмотреть некоторые алгебраические структуры, которые могут быть индуцированы на множествах. Наличие этой структуры позволит элегантно, но в то же время математически строго, вывести массу полезных свойств рассматриваемых объектов.

2.1.1 Кольцо. Основные понятия

> **Кольцом** A называется такое множество, на котором заданы операции "сложения" и "умножения", обладающие следующими свойствами $\forall a, b, c \in A$:

1. **Коммутативность сложения.**

$$a + b = b + a$$

2. **Ассоциативность сложения.**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. **Существование нейтрального элемента относительно сложения.**

$$\exists 0 \in A\colon\ 0 + a = a + 0 = a$$

4. **Существование противоположного элемента.**

$$\forall a \in A,\ \exists b \in A\colon\ a + b = b + a = 0$$

5. **Дистрибутивность.**

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Кольца как алгебраическая структура служат для изучения операций умножения и сложения безотносительно природы объектов. Перечисленные выше свойства определяют кольцо, однако введение дополнительных свойств операций приводит к следующим распространенным видам колец:

> **Ассоциативным** кольцом называют кольцо, для которого выполняется ассоциативность умножения.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in A$$

> **Коммутативным** кольцом называют кольцо, для которого выполняется коммутативность умножения.

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in A$$

> **Кольцом с единицей** называют кольцо, в котором существует мультипликативная единица, т.е. такой элемент, что
>
> $$\exists 1 \in A\colon\ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in A$$

Пример 2.1.

1. Кольцо целых чисел с обычными операциями сложения и умножения.
2. Кольцо рациональных чисел, являющееся полем. Вообще говоря любое поле является кольцом, причем ассоциативным, коммутативным с единицей.
3. Кольцо подмножеств множества X. Операция сложения - симметрическая разность, операция умножения - пересечение. Нулевой элемент - пустое множество, единичный элемент - все множество.

   $$A + B = A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   $$A \cdot B = A \cap B$$

   В качестве противоположного элемента к элементу A выступает сам A, т.к.

   $$A + A = 0$$

Для дальнейшего обсуждения нам необходимо рассмотрение еще одного вида колец - область целостности, но прежде введем такое понятие как делитель нуля.

> Элемент a кольца A называется **делителем** нуля, если существует такое ненулевое $b \in A$, что
>
> $$a \cdot b = 0$$

Имея это определение можно ввести еще один вид кольца

> **Областью целостности** или целостным кольцом называется коммутативное кольцо, не имеющее делителей нуля.

Иными словами, целостное кольцо - это такое кольцо, в котором произведение двух элементов кольца может равняться нулю тогда, когда хотя бы один из элементов равен нулю.

Любое поле является областью целостности, однако обратное неверно.

Лемма 2.1. *В области целостности возможно сокращение в равенстве, т.е. из $ab = ac$ при $a \neq 0$ следует $b = c$.*

►
Равенство $ab = ac$ равносильно равенству $a(b - c) = 0$. Так как $a \neq 0$ и кольцо целостно, должно быть $b - c = 0$, но это и означает, что $b = c$. ◄

2.1.2 Кольцо полиномов

Еще из школьной математики известно понятие полинома или многочлена, а также тесно связанное с ним понятие одночлена - алгебраическое выражение вида ax^m, где a - некоторое число, x - буква, m - целое неотрицательное число. Одночлен ax^0 отождествляется с числом a. Вместе с тем, полиномом $a_0x^n + \ldots + a_n$ называется алгебраическая сумма полиномов.

Под буквой x, с одной стороны, может подразумеваться произвольное число, а может подразумеваться переменная. В таком случае полином задает функцию от x.

Говоря про полиномы, необходимо рассматривать отдельно формальное равенство полиномов, когда они составлены из одинаковых одночленов, а также тождественное равенство. В этом случае говорится, что полиномы принимают одинаковые значение при каждом x.

Nota bene Очевидно, что формально равные полиномы будут равны тождественно. Верно и обратное утверждение, хоть оно и не очевидно.

Такое определение полиномов дает нам некоторые возможности для обращения с ними, но если есть стремление обрести всю полноту возможностей множества таких объектов, необходимо подойти к вопросу более строго.

Пусть A - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Как обсуждалось ранее, это могут быть целые числа или любое известное поле. Одночленом от буквы x с коэффициентом $a \in A$ будем называть выражение ax^m, где m - целое неотрицательное число. Стоит понимать, что это выражение не является еще полноценно содержательным в силу того, что мы не договорились о том, что есть x. Сейчас это больше напоминает некоторое графическое изображение, картинку, с которой мы как-то умеем взаимодействовать. Как?

Для таких одночленов определяются знакомые операции приведения подобных членов и умножения:

$$ax^m + bx^m = (a+b)x^m$$

$$ax^m \cdot bx^n = abx^{n+m}$$

> **Полиномом** будем называть сумму одночленов. Под суммой мы здесь пока что подразумеваем некую совокупность "картинок" между которыми стоит знак +.

Из определения естественным образом вытекают понятие равенства полиномов и действия с ними:

1. Два полинома считаются равными (формально), если они составлены из одинаковых одночленов.

$$a_0x^n + \ldots + a_n = b_0x^n + \ldots + b_n \iff a_i = b_i,\ i = 0, ..n$$

2. Суммой двух полиномов называется полином, получающийся объединением одночленов, составляющих слагаемые с приведенными подобными членами.

$$(a_0x^n + \ldots + a_n) + (b_0x^n + \ldots b_n) = (a_0 + b_0)x^n + \ldots (a_n + b_n)$$

3. Произведением двух полиномов называется полином, составленный из произведений всех членов первого сомножителя на все члены второго. В этом случае также необходимо сделать приведение подобных членов.

$$(a_0x^n + \ldots + a_n) + (b_0x^m + \ldots b_m) = a_0b_0x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + \ldots + a_nb_m$$

Nota bene Можно заметить, что множество полиномов от буквы x с коэффициентами из кольца A составляет кольцо по отношению к определенным сложению и умножению. Это кольцо будет коммутативно и ассоциативно. Роль нуля играет нулевой полином (нуль кольца A), а единицу - единица кольца A. Таким образом определенное множество называется **кольцом полиномов** от буквы x над кольцом A и обозначается $A[x]$.

В данных определениях есть одно "слабое" место - буква x. В некотором смысле она является посторонней для кольца A как минимум по той причине, что про нее ничего не было сказано. Хотелось бы иметь определение, которое включало бы и само x.

Альтернативное определение

Вместо полиномов рассмотрим бесконечные последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ элементов кольца A, в которых все элементы, начиная с некоторого $n+1$ равны нулю. Ведь действительно, все введенные операции с полиномами затрагивали только сами коэффициенты. Переопределим равенство полиномов и действия над ними с такой точки зрения.

1. **Равенство.**

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) \iff a_i = b_i,\ i = 0, ..n$$

2. **Сумма.**

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

3. **Умножение.**

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m, \ldots)$$

4. **Отождествление с элеменом кольца**. Как ранее имели для комплексных чисел, так и сейчас нам удобно иметь свойство, которое бы связывало новое множество с уже известной структурой, которая собственно и порождает это множество. Поэтому скажем, что последовательность $(a, 0, \ldots)$ отождествляется с элементом кольца $a \in A$.

Легко заметить, что сохраняются все свойства операций, а также очевидна непротиворечивость последней аксиомы остальным.

Казалось бы мы еще больше усложнили определение полинома, но зачем? Такой подход был мотивирован необходимость заполнить пустоту неопределенности буквы x. И сейчас это возможно сделать. Введем обозначения.

$$\begin{aligned} x &= (0,1,0,\ldots) \\ x^2 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Рассмотрим бесконечную последовательность $(a_0,\ldots,a_n,0)$. В силу введенных операций ее можно представить как конечную сумму бесконечных последовательностей, в которых только один элемент будет ненулевым.

$$(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots) = (a_0,0\ldots) + (0,a_1,0,\ldots) + \ldots + (0,\ldots,a_n,0,\ldots) =$$

Однако если в каждой последовательности "вынести" множитель, то мы получим сумму, которая содержит введенные выше обозначения.

$$= a_0 + a_1(0,1,0,\ldots) + \ldots + a_n(0,\ldots,1,0,\ldots) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

Что мы получили? Начиная с наиболее общего определения кольца, с помощью множества бесконечных последовательностей мы смогли прийти к знакомому нам виду полиномов. Иными словами мы обосновали алгебраическую природу таких объектов.

Несколько важных определений

> Пусть $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ при $a_0 \neq 0$. Одночлен a_0x^n называется **высшим членом** полинома, а показатель n - **степенью полинома**, и обозначается $\deg f = n$.

Считается, что нулевой полином не имеет высшего члена, а его степень равна $-\infty$. Необходимость такого обозначения степени полинома вызвано тем, что определение степеней должно быть согласовано с умножением на нулевой полином. При умножении произвольного полинома степени k на нулевой полином, получается вновь нулевой полином. Однако степени полиномов при умножении складываются. Единственным объектом, обладающим таким свойством, и является $-\infty$.

$$k + (-\infty) = -\infty$$

Теорема 2.1. *Если кольцо A есть область целостности, то кольцо полиномов $A[x]$ тоже область целостности.*

Теорема приводится без доказательства. Смысл, как и для любого целостного кольца, заключается в том, что произведение полиномов будет равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является нулевым.

$$p_1 \cdot p_2 = 0 \iff p_1 = 0 \;\; or \;\; p_2 = 0$$

2.2 Деление полиномов

Множество полиномов не является полем - в нем не существует обратного элемента для каждого элемента множества, который также принадлежал бы этому множеству. Данное ограничение не позволяет нам полноценно ввести операцию деления. Однако, например, в кольце целых чисел мы умеем выполнять операцию целочисленного деления, родственную делению и даже называем ее также. Полиномы также образуют кольцо и следовательно для них можно попытаться ввести деление аналогичное целочисленному.

2.2.1 Общие свойства делимости

> Если для полиномов $f(x)$ и $g(x)$ из $A[x]$ существует такой полином $h(x) \in A[x]$, что
> $$f(x) = g(x)h(x),$$
> то говорят, что **полином** $f(x)$ **делится на полином** $g(x)$.

Наша следующая и, пожалуй, главная задача заключается в выяснении вопроса о делимости $f(x) \in A[x]$ на линейный двухчлен $x - c$ при $c \in A$.

Можно утверждать, что всегда существует деление с остатком.

$$f(x) = (x - c)h(x) + r, \quad r \in A$$

где полином $h(x)$ называется неполным частным, а r - остатком, который в случае деления на линейный двучлен всегда является элементом кольца. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 2.2. *(**О делении с остатком**). Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in A[x]$ и $c \in A$. Найдутся полином $h(x) \in A[x]$ и элемент $r \in A$ такие, что $f(x) = (x-c)h(x)+r$.*

▶
Умножение полиномов приводит к сложению их степеней. Следовательно для получения полинома n-ой степени необходимо искать такой $h(x)$, что $\deg h = n - 1$. Иными словами будем искать h в форме

$$h(x) = b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$$

Подставим в равенство из теоремы определение полиномов $f(x)$ и $h(x)$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - c)(b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}) + r$$

Вспоминая определение равенства двух полиномов, можем записать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &a_0 = b_0 \\ &a_1 = b_1 - cb_0 \\ &a_2 = b_2 - cb_1 \\ &\ldots \\ &a_n = r - cb_{n-1} \end{aligned}$$

При рассмотрении полученной системы равенств становится очевидно, что схожим итеративным способом можно определить и наоборот - коэффициенты b_i через a_i и b_{i-1}.

$$\begin{aligned} &b_0 = a_0 \\ &b_1 = a_1 + cb_0 \\ &b_2 = a_2 + cb_1 \\ &\ldots = \ldots \\ &b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2} \\ &r = a_n + cb_{n-1} \end{aligned}$$

Таким образом мы увидели, что в общем случае всегда найдутся полином $h(x)$ и остаток r, удовлетворяющие условиям теоремы. И более того они определяются однозначно. ◄

Цепочка равенств имеет не только теоретическое значение, но и вполне практическое. Предложенный метод поиска коэффициентов носит название **"схема Горнера"**.

Nota bene Можно обратить внимание, что $f(c) = r$ для c из условия теоремы. Это очень легко показать

$$\begin{aligned} &f(c) = (c - c)h(x) + r \\ &f(c) = r \end{aligned}$$

Данное замечание позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 2.3. ***(Безу)*** *Для того чтобы полином $f(x) \in A[x]$ делился на $x - c$ необходимо и достаточно, чтобы $f(c) = 0$.*

►

Необходимость.
Пусть $f(x)$ делится на $x - c$, т.е. $f(x) = (x - c)h(x)$. Тогда $f(c) = 0$ по предыдущему замечанию.

Достаточность.
Пусть $f(c) = 0$. Тогда в равенстве $f(x) = (x-c)h(x)+r$ при $x = c$ имеем $r = f(c) = 0$. Следовательно $f(x) = (x - c)h(x)$. ◄

‖ Элемент $c \in A$ называется **корнем полинома** $f(x)$, если $f(c) = 0$.

В таком случае можно переформулировать теорему Безу в терминах корней полинома.

Теорема 2.4. ***(Безу)*** *Для того чтобы полином $f(x) \in A[x]$ делился на $x - c$ необходимо и достаточно, чтобы $c \in A$ являлся корнем полинома.*

2.2.2 Наибольший общий делитель

Прежде более подробного рассмотрения корней полиномов обратим внимание на еще один аспект, имеющий аналог и в знакомых нам числовых множествах - наибольший общий делитель (НОД).

> **Наибольшим общим делителем** двух полиномов f_1, f_2 из кольца $K[x]$ называется полином наибольшей степени среди полиномов с коэффициентами из поля K или любого его расширения, делящий оба полинома f_1 и f_2.

Стоит обратить внимание, что в данном определении недостаточно определения кольца полиномов над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей. Необходимо, чтобы A обязательно являлось полем. В качестве примера рассмотрим следующие полиномы

$$x^2 - 1,\ x^3 - 1$$

Их наибольшими общими делителями будут полиномы, в качестве примеров, $(x-1)$, $sqrt2(x-1)$ и также $(1+i)(x-1)$. Убедимся, что это так. При делении на $x-1$ получим следующие разложения.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогично можем получить и разложения при делении на $\sqrt{2}(x-1)$.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= \sqrt{2}(x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \\ x^3 - 1 &= \sqrt{2}(x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2+x+1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Иными словами, старший коэффициент НОД не играет никакой роли, но при этом в кольце должна присутствовать делимость, или иными словами наличие обратного элемента, т.к. старший коэффициент НОД входит в разложение вместе со своим обратным. Ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, где каждый ненулевой элемент имеет обратимый - это и есть поле.
В данных примерах мы рассмотрели только полиномы, имеющие старший коэффициент равный 1. Такие полиномы называют **нормализованными**. Однако легко показать, что определение НОД справедливо и для ненормализованных полиномов.

Теорема 2.5. *Наибольший общий делитель двух полиномов $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x]$ единственен с точностью до множителя из поля $\mathbb{K}$ и делится на любой общий делитель этих полиномов. Коэффициенты нормализованного наибольшего общего делителя полиномов из $\mathbb{K}[x]$ принадлежат полю $\mathbb{K}$.*

Теорему приводим без доказательства, но поясним вторую формулировку примером, потому что она может быть неочевидой. Пусть

$$f_1 = x^4 - 1,\quad f_2 = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Оба полинома имеют рациональные коэффициенты - это важно. Также они оба имеют в качестве одного из своих корней число i. Это означает, что у них есть общий делитель $x - \mathrm{i}$, но это еще не НОД, т.к. общим корнем будет также являться и $-\mathrm{i}$, а сам НОД будет равен

$$(x-i)(x+i) = x^2 + 1$$

Здесь мы и получаем, что не смотря на наличие комплекснозначных корней, входящих как коэффициенты в делители, наибольший общий делитель все равно будет содержать только рациональные коэффициенты. Здесь мы не говорим про принадлежность множеству целых чисел, т.к. оно является кольцом, а минимальное множество обладающее свойствами поля - множество рациональных чисел.

Находить НОД можно тем же способом, что и для целых чисел - алгоритмом Евклида. Выполним цепочку делений с остатком

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_2 q_1 + r_1,\\
f_2 &= r_1 q_2 + r_2,\\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3,\\
\ldots &= \ldots\\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k,\\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1},
\end{aligned}$$

В какой-то момент процесс остановится в силу того, что степень каждого последующего остатка меньше предыдущего. На последнем шаге степени остатков сравняются $\deg r_{k-1} = \deg r_k$.

2.3 Корни полиномов

Перейдем наконец к рассмотрению множества корней полиномов. Главные вопросы, на которые нам хотелось бы ответить - сколько корней имеет полином, а также к какому множеству относятся корни и связаны ли они между собой алгебраически.

2.3.1 Теоремы о количестве корней

Теорема 2.6. *Пусть $f(x) = a_0 x^n + \ldots a_n$ - полином из $A[x]$, где A - область целостности. Тогда число корней $f(x)$ в A не превосходит n.*

►

Применим метод математической индукции. База индукции - полином нулевой степени не имеет корней. Допустим, что для $n \geq 1$ и что теорема выполняется для полиномов степени $n-1$. Покажем, что она справедлива и для полинома $f(x)$ степени n.

Если $f(x)$ не имеет корней в A, то утверждение теоремы верно. Иначе пусть c_1 - один из корней $f(x)$. Тогда его можно представить в виде

$$f(x) = (x - c_1)h(x),\ h(x) = a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} \in A[x]$$

Если $c_2 \neq c_1$ - тоже корень $f(x)$, то

$$0 = f(c_2) = (c_2 - c_1)h(c_2),$$

но $c_2 - c_1 \neq 0$. Следовательно, $h(c_2) = 0$. Этот вывод возможен только если кольцо полиномов определено над целостным кольцом, ведь именно в этом случае среди полиномов отсутствуют делители нуля. Равенство нулю полинома $h(c_2)$ означает, что любой отличный от c_1 корень $f(x)$ будет являться корнем $h(x)$. Так как корней $h(x)$ по предположению индукции не более, чем $n-1$, то получается и для $f(x)$ имеем не более n корней. ◄

Следующая теорема хоть и не является основной, но имеет такое название в силу того, что появилась во времена, когда это направление исследований было главным.

Теорема 2.7. ***(Основная теорема алгебры)****. Любой полином с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказательство теоремы невозможно без привлечения неалгебраических инструментов, поэтому мы также его не приводим. Однако она имеет огромное значение, потому что у нее есть крайне важные следствия.

Теорема 2.8. ***(О разложении на линейные множители)****. В поле комплексных чисел любой полином* $f(x) = a_0 x^n + \dots a_n$ *имеет разложение на линейные множители вида* $a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$*, и такое разложение единственно.*

►

Покажем только существование такого разложения.

В силу основной теоремы алгебры полином $f(x)$ имеет хотя бы один корень c_1. Тогда мы можем сказать, что

$$f(x) = (x - c_1)g(x),$$

где $g(x)$ - полином степень $\deg g = n - 1$. Аналогично и он в силу основной теоремы алгебры имеет хотя бы один корень. Применяя эту теорему необходимое количество раз можно прийти к разложению в формулировке теоремы. ◄

Среди линейных множителей в разложении могут быть равные. Соединив их в виде степеней, получим разложение

$$f(x) = a_0(x - c_1)^{m_1} \dots (x - c_k)^{m_k},$$

где c_i уже являются попарно различными. Показатели m_i называются **кратностями корней**.

2.3.2 Полиномы с действительными коэффициентами

Предположим, что у нас имеется полином $f(x)$, все коэффициенты которого являются действительными числами. Однако это не исключает того, что корни полинома могут являться комплексными числами. В силу того, что коэффициенты действительные, мы можем сделать некоторые выводы относительно этих корней.
Для этого нам необходима следующая лемма.

Лемма 2.2. *Комплексно сопряженное значение полинома $f(z)$ будет равно значению этого полинома взятого при $\bar{z}$.*

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

►
Рассмотрим сопряжение от произвольного полинома.

$$\overline{f(z)} = \overline{a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n} = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}z} + \ldots + \overline{a_0 z^n}$$

Комплексно сопряжение перестановочно как с операцияей сложения, так и с операцией умножения. Это означает, что можно продолжить равенств, которое приведет к $f(\overline{z})$.

$$\overline{f(z)} = \overline{a_n} + a_{n-1}\overline{z} + \ldots + a_0 \overline{z}^n = f(\overline{z})$$

◄

Благодаря этой лемме мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2.9. *Пусть $f(x)$ - полином с действительными коэффициентами. Если $c_1 \in C$ - корень этого полинома, то $\overline{c_1}$ также является корнем полинома.*
►
Значение полинома с действительными коэффициентами от комплексного числа c_1 в общем случае также будет комплексным числом.

$$f(c_1) = a + \mathrm{i}b$$

Однако если c_1 - корень полинома, то $f(c_1) = a + \mathrm{i}b = 0$, откуда следует, что $a = b = 0$. Вместе с тем согласно доказанной лемме

$$f(\overline{c_1}) = a - \mathrm{i}b,$$

но $a = b = 0$, следовательно $f(\overline{c_1}) = 0$ и $\overline{c_1}$ также является корнем уравнения. ◄

Доказанные в этом разделе теоремы позволяют сделать несколько выводов:

1. Кратность комплексного корня будет совпадать с кратностью комплексно сопряженного корня.

2. Если в разложение полинома с действительными коэффициентами входит $(x - c)$, то также будет входить и $(x - \bar{c})$.

3. Для полинома с действительными коэффициентами имеет место разложение

$$f(x) = a_0(x - t_1)^{m_1} \ldots (x - t_k)^{m_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x_2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

где $p_s^2 - 4q_s < 0$. Это означает, что данный квадратный трехчлен является неразложимым в вещественных числах.

Появление такого квадратного трехчлена обосновано как раз тем, что корни входят как комплексно сопряженные. Рассмотрим произведение линейных множителей с комплексно сопряженными корнями.

$$(x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})x + c\bar{c}$$

Сумма комплексно сопряженных корней, равно как и их произведение, всегда дает вещественные числа, а именно это мы и хотели показать.

Заключение

В данной лекции были рассмотрены полиномы как алгебраические объекты в первую очередь, что позволило прийти как к значительным теоретическим результатам, так и получить вполне практические. Определение, которые мы дали полиномам, основываясь на структуре кольца позволит нам в будущем использовать их с другими кольцами (матриц, операторов), но это было бы невозможно сделать опираясь только на школьные представления о полиномах. Изучение свойств делимости и множества корней позволит использовать разложение полиномов в разных приложениях и не только в линейной алгебре, начиная от несложных геометрических объектов, заканчивая более сложными по структуре полиномами, которые используются в математической и теоретической физике.

Список литературы

1. Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре. Главы 3,6.
   Основной источник для теории

2. Е.М.Карчевский. Лекции по геометрии и алгебре. Глава 1, п.2.
   Чуть более простой подход к полиномам, может быть полезно, если ничего непонятно

3. А.Л.Городенцев. Алгебра (первый семестр).
   Чуть более серъезный подход к полиномам. Здесь наоборот - если кому-то все легко и просто и хочется покопаться еще

4. Ю.Б.Мельников. Многочлены. Раздел электронного учебника для сопровождения практического занятия. Ссылка
   Разобрано буквально несколько практических примеров, но досконально подробно на сколько это вообще можно вообразить.