Билеты по математическому анализу для коллоквиума 14 ноября. Часть II

Шишминцев Дмитрий Владимирович

12 ноября 2022 г.

Содержание

1 Свойства точных граней множества

Свойство точной верхней грани: Если $b = supA$, то $\forall\epsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \epsilon$

► Допустим обратное, пусть найдется $\epsilon > 0 : \forall a \in A \rightarrow b - a \geqslant \epsilon$. Но тогда $b' = b - \epsilon$ является верхней гранью множества A, которая будет меньше, чем b, а это невозможно, поскольку b - наименьшая из верхних граней множества A согласно свойству полноты множества вещественных чисел ?? ◄

Свойство точной нижней грани: Если $b = infA$, то $\forall\epsilon > 0 \exists a \in A : a < d + \epsilon$

► Допустим обратное, пусть найдется $\epsilon > 0 : \forall a \in A \rightarrow a - d \geqslant \epsilon$. Но тогда $d' = d + \epsilon$ является нижней гранью множества A, которая будет меньше, чем d, а это невозможно, поскольку d - наибольшая из нижних граней множества A согласно свойству полноты множества вещественных чисел ?? ◄

2 Принцип вложенных отрезков

Теорема: Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (система вложенных отрезков), тогда $\exists! c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow c \in [a_n, b_n]$

► Обозначим длину отрезка $[a_n, b_n]$ за $d(n) = b_n a_n$ Тогда, по скольку $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, то $\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow d(1) > d(k)$ Пусть число $c := sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, тогда по определению супремума $\forall n \rightarrow a_n \leqslant c$ и $c \leqslant b_n$, иначе, если бы $\exists k \in \mathbb{N} : b_k < c$, то нашлось бы число $a_m : b_k < a_m$, что противоречит вложенности отрезков. Итак, $\forall n \rightarrow c \leqslant b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$. Единственность точки c следует из стремления длин отрезков к нулю. ◄

3 Теоремы о бесконечно больших и бесконечно малых последовательностях

Теорема 4 (ограниченность б.м.п): Если $\{x_n\}$ - б.м.п $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |x_n| < C$, где $C \in \mathbb{R}_+$

► Пусть $\{x_n\}$ - б.м.п, тогда по определению $\forall\epsilon \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \rightarrow |x_n| < \epsilon$. Следовательно $x_{n'} \geqslant \epsilon$, где $n' = 1, n(\epsilon)$. Предположим $C = max\{|x_1|, ..., |x_{n'}|\}$, тогда с учетом свойства транзитивности, получаем что $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |x_n| < C$ ◄

Теорема 5: Если $\{x_n\}$ - б.м.п и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.б.п и наоборот, если $\{x_n\}$ - б.б.п и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.м.п

► Пусть $\{x_n\}$ - б.б.п, тогда лишь конечное количество членов удовлетворяет неравенству $|x_n| \geqslant \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| \leqslant \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$ неравенству $|\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\epsilon}$ удовлетворяет бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}$, а значит $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.б.п. Пусть $\{x_n\}$ - б.м.п, тогда лишь конечное количество членов удовлетворяет неравенству $|x_n| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| \geqslant \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$ неравенству $|\frac{1}{x_n}| < \frac{1}{\epsilon}$ удовлетворяет бесконечное количество членов последовательности $\{x_n\}$, а значит $\{\frac{1}{x_n}\}$ - б.м.п.◄

Теорема 6 (арифметика бесконечно малых последовательностей): 1: Если $\{x_n\}$ - б.м.п, то и $\{x_n\}$ - б.м.п. 2: Алгебраическая сумма конечного б.м.п - б.м.п

► 1: Очевидно. 2: Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - б.м.п, тогда получаем, что $\forall\epsilon > 0 \exists n_1 = n_1(\frac{\epsilon}{2})$ и $n_2 = n_2(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbb{N} : \forall n > max\{n_1, n_2\} \rightarrow |x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ◄

Теорема 7 (арифметика бесконечно малых последовательностей): Произведение б.м.п на ограниченную последовательность - б.м.п

► Пусть $\{x_n\}$ - б.м.п, а $\{y_n\}$ ограничена, тогда $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |y_n| < C$ и $\forall\epsilon > 0 \exists n(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$[где $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{C}$] $: \forall n > n(\epsilon_1) \rightarrow |x_n \cdot y_n| \leqslant |x_n| \cdot C < \frac{\epsilon}{C} \cdot C = \epsilon$ ◄

4 Сходимость и единственность предела сходящейся последовательности

Сходящаяся последовательность:Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся (имеющей предел), если $\forall\epsilon > 0 \exists(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \rightarrow |x_n - a| < \epsilon$ Единственность предела последовательноси: Если $\{x_n\}$ сходится, то она имеет единственный предел

► Предположим обратное

$\begin{cases}\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \to a-\epsilon < x_n < a+\epsilon \\ \lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists n_2 = n_2(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_2 \to b-\epsilon < x_n < b+\epsilon\end{cases}$, где $a > b$, возьмем $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, тогда $\forall n > n(\epsilon) = max\{n_1, n_2\} \to a - \epsilon = \frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2} = b + \epsilon$ ◀

5 Арифметические свойства пределов сходящихся последовательностей

Свойство 1: $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$
Свойство 2: $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$
Свойство 3: Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \to y_n \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, тогда: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow x_n = a + a_n, \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где a_n, β_n - б.м.п
▶ (1) $x_n \pm y_n = (a + a_n) \pm (b + \beta) = (a \pm b) + (a_n \pm \beta_n)$◀
▶ (2) $x_n \cdot y_n = (a + a_n) \cdot (b + \beta) = ab + a\beta_n + ba_n a_n \beta_n$◀
▶ $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a+a_n) - a(b+\beta_n)}{by_n} = \frac{ba_n - a\beta_n}{by_n} = \frac{1}{y_n}(a_n - \frac{a}{b}\beta_n$, а произведение ограниченной на б.м.п есть б.м.п. Тогда $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{1}{y_n}(a_n - \frac{a}{b}\beta_n)$ ◀

6 Теорема о двух миллиционерах

Теорема: Пусть$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ справедливо, что $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

▶ Для каждого $\epsilon > 0$ находим $n(\epsilon)$ такое, что $\forall n > n(\epsilon)$ выполняются неравенства $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ и $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$ тогда для таких n верно $a - \epsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \epsilon$ то есть $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ ◀

7 Теорема Штольца

Теорема: Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: 1)$\forall n \in \mathbb{N} \to y_n \leqslant y_{n+1}$; 2) $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$; 3)$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$, тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

▶ Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \Rightarrow \frac{x_{n_1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l + a_n$, где a_n - б.м.п, а значит $\forall\epsilon > 0 \exists n(\epsilon) : \forall n \geqslant n(\epsilon) \to |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Полагая значение номера равным последовательно $n(\epsilon), n(\epsilon) + 1, ..., n$ получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} x_{n+1} - ly_{n+1} = x_n - ly_n + a_n(y_{n+1} - y_n), \\ ... \\ x_{n(\epsilon)+1} - ly_{n(\epsilon)+1} = x_n(\epsilon) - ly_n(\epsilon) + a_n(\epsilon)(y_{n(\epsilon)+1} - y_n(\epsilon)) \end{cases}$$
сложим полученные равенства, получим $x_{n+1} - ly_{n+1} = x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)} + \sum_{i=n(\epsilon)}^{n} a_i(y_{i+1} - y_i) \to |x_{n+1} - ly_{n+1}| \leqslant |x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}| + |a_{n(\epsilon)}| \cdot |y_{n(\epsilon)+1} - y_{n(\epsilon)}| + ... + |a_n| \cdot |y_{n+1} - y_n|, |x_{n+1} - ly_{n+1}| \leqslant |x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}| + \frac{\epsilon}{2}|y_{n(\epsilon)+1} - y_{n(\epsilon)}| + ... + \frac{\epsilon}{2}|y_{n+1} - y_n|, |\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l| < \frac{|x_{n(\epsilon)} - ly_{n(\epsilon)}|}{y_{n+1}} + \frac{\epsilon}{2}\frac{y_{n+1} - y_{n(\epsilon)}}{y_{n+1}}$ Поскольку $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \exists n_1(\epsilon) : \forall n > n_1 \to \frac{|x_{n(@e)} - ly_{n(\epsilon)}|}{y_{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$ Полагая $n_0 = maxn_1, n(\epsilon)$ получаем, что $\forall n > n_0 \to |\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l| < \epsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} = l$ ◀

8 Теорема Вейерштрасса

Теорема: Если неубывающая (невозрастающая) последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то она сходится к $supx_n$

▶ Пусть $\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant x_{n+1}$ и $x_n \leqslant C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \hat{x} := sup_{n\in\mathbb{R}} x_n$ Покажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Действительно, $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant \overline{(x)}$ - согласно определению точки верхней грани. Далее, фиксируем значение $\epsilon > 0$, для которого согласно утверждению $\exists x_\epsilon : \overline{x} - \epsilon > x_\epsilon$, а в силу того, что $\{x_n\} \uparrow$ получаем, что $\forall n > n_\epsilon \to \overline{x} - \epsilon < x_n$, тогда для этих же номеров справедливо $\overline{x} - \epsilon < x_n \leqslant \overline{x} \Rightarrow |x_n - \overline{x}| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$
◀

9 Теорема Больцано-Вейерштрасса без док-ва

Теорема: Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

10 Критерий Коши о фундаментальности последовательности

Теорема: Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, что бы она была фундаментальной.
Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для нее выполняется условие Коши: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > n(\epsilon) \to |x_n - x_m| < \epsilon$

►Необходимость: Пусть $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$ возьмем произвольное $\epsilon > 0$ тогда $\exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n(\epsilon) \to |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, если теперь $n, m > n(\epsilon)$ то $|x_n - x_m| = |x_n - a - (x_n - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ◄

►Достаточность: Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то есть удовлетворяет условию в определении. Покажем что она сходится. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Возьмем $\epsilon = 1$, тогда согласно определению $\forall n > n(1) \to |x_n - x_{n(1)}| < 1 \Rightarrow |x_n| \leqslant |x_{n(1)}| + 1$, так как $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Следовательно $\{x_n\}$ ограничена.
По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$.
Пусть $a := \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$
Покажем что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Согласно определению, имеем что $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, k > n(\epsilon) \to |x_n - x_{k_n}| < \frac{\epsilon}{2}$
Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ ◄

11 Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне

Определение предела функции по Коши и по Гейне являются эквивалентными

► Пусть $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$ по Коши. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$, где $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ и $x_n \neq a$
Из сходимости функции по Коши следует, что $f : \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta) \to \mathbb{R}$. Рассмотрим проивзольную последовательность $\{x_n\} : x_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta)$ и $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
Фиксируем произвольное положительное число ϵ, тогда согласно определению Коши имеем, что $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta) \to f(x) \in \mathbb{U}_\epsilon(\delta)$.
В силу сходимости $x_n \xrightarrow{x\to\infty} a$ для выбранного $\delta = \delta(\epsilon)$.
$\exists n(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n(\delta) \to x_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta)$. Но тогда $\forall n \geqslant n(\delta) \to f(x_n) \in \mathbb{U}_\epsilon(b) \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{x\to\infty} b$
Пусть $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$, где $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ и $x_n \neq a$. Покажем, что $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$.
Допустим противное, то есть что $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta) : f(x) \notin \mathbb{U}_{\epsilon_0}(b)$.
Будем в качестве δ брать $\delta = \frac{1}{n}$, а соответствующее значение x обозначать через x_{n_1} то есть что
$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin \mathbb{U}_{\epsilon_0}(b)$ ◄
Но это означает, что для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеем: $x_n \neq a, x_n \xrightarrow{x\to\infty} a, \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$ то есть b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ согласно определению предела функции в точке по Коши, что противоречит исходному условию.

12 Критерий Коши о сходимости функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{U}(\mathring{a})$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда для существования конечного предела функции в точке a необходимо и достаточно что бы выполнялось условие Коши $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall : x', x'' \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta) \to |f(x') - f(x'') < \epsilon|$

► Необходимость: Пусть $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{\mathbb{R}}(a, \delta) \to |f(x') - b| < \frac{\epsilon}{2}$ и $|f(x'') - b| < \frac{\epsilon}{2}$
Отсюда заключем, что
$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b - f(x'') + b| \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ◄

► Достаточность: Пусть выполняется условие Коши. Покажем $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ Согласно определению предела по Гейне возьмем $x_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a) : x_n \xleftarrow{n\to\infty} a$. Так же возьмем произвольное $\epsilon > 0$ к которому подбираем $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ из определения следует, что найдется $n(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n(\delta) \to x_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a, \delta)$ Тогда из условия Коши имеем
$|f(x_n) - f(x_m) < \epsilon| \forall n, m \geqslant n(\delta)$

Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в силу критерия Коши для последовательностей. Пусть мы имеем, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$

Для завершения доказательства покажем, что $\forall\{x'_n\} : x'_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a), x'_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ предел $\lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ (существующий по уже доказанному) и также равен A

Предположим противное: $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = B \neq A$ для некоторой последовательности $\{x'_n\} : x'_n \in \mathring{\mathbb{U}}(a), x_n \xrightarrow{n\to} a$ Так как $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)...\}$ расходится, то получаем противоречие ◄

13 Непрерывность функций над арифметическими операциями с ними

Теорема: Пусть на одном и том же множестве заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные в точке a. Тогда функция $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a

► Так как непрерывные функции в точке a функции имеют в этой точке пределы, соответственно равные $f(a)$ и $g(a)$, то в силу арифметических свойств предела функции $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и равны соответственно $f(a) \pm g(a), f(a) \cdot g(a), \frac{f(a)}{g(a)}$. Но как раз эти величины равны частным значениям перечисленных функций в точке a. А значит, по определению эти функции непрерывны в точке a. ◄

14 О непрерывности сложной функции

Теорема: Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$. Тогда функция $y = f[\varphi(t)]$ непрерывна в точке a

► Пусть $\{t_n\}$ - произвольная последовательность значений аргумента сложной функции сходящейся в точке a. Так как функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, то определению непрерывности по Гейне соответствующая последовательность значений функции $x_n = \varphi(t_n)$ сходится к числу $b = \varphi(a)$. Далее поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$ и для нее указанная выше последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся к $b = \varphi(a)$ является последовательностью значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = f[\varphi(t_n)]$ сходится к числу $f(b) = f[\varphi(a)]$ ◄

15 Существование односторонних пределов монотонной на отрезке функции

16 Монотонность и непрерывность обратной функции

Теорема: Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем и пусть $a = f(a), \beta = f(b)$. Тогда если множеством значений функции $y = f(x)$ является отрезок $[a, \beta]$ (соответственно отрезок $[\beta, a]$) то на этом последнем отрезке определена обратная для $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$, которая также непрерывно возрастает (убывает) на указанном отрезке.

► Так как $f(x)$ возрастает и непрерывна на $[a, b]$, то в силу необходимости теоремы о непрерывности монотонной функции множеством всех значений этой функции является отрезок $[a, \beta]$. Но тогда на этом отрезке существует возрастающая обратная функция $x = f^{-1}(y)$ в силу биективности правила f, которая следует из возрастания. Непрерывность обратной функции вытекает из того, что $[a, b]$ - множество всех значений обратной функции и достаточности для нее из теоремы о непрерывности монотонной функции. Для убывающей функции доказательство аналогично. ◄

17 О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел

18 Устойчивость знака непрерывной в точке функции

19 Первая теорема Вейерштрасса о непрерывности