α

Лекция 5

«Решение СЛАУ»

Содержание лекции:
В этой лекции мы наконец придем к венцу обсуждения последних лекций, связанных с матрицами. Однако прежде чем ввести конкретные алгоритмы решения, обучимся еще некоторым инструментам. Прежде всего необходимо закончить обсуждение эффективных способов нахождения определителей, ведь именно их вычисление хотя бы на частных примеров позволяло нам найти решение. После чего мы обратимся к аналогии с обычными линейными уравнениями и выясним, можно ли перенести алгоритм их решения для линейных матричных уравнений. Уже на этом этапе будет известен первый алгоритм решения, но в дополнение сформулируем и докажем теорему, которая помимо второго алгоритма, пусть и родственного первому, даст нам еще и условия существования решения.

Ключевые слова:
алгебраическое дополнение, разложение по строке, минор, ортогональность строк и алгебраических дополнений, определитель треугольной матрицы, определитель произведения матрицы, обратная матрица, обратимая матрица, присоединенная матрица, метод Крамера, совместная система, несовместная система, теорема Крамера

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

5.1 Алгебраические дополнения

Для решения систем линейных алгебраических уравнений порядка большего, чем 2 или 3, необходимо иметь наиболее эффективные инструменты для вычисления определителей. Свойства, рассмотренные в предыдущей лекции, уже дают немало возможностей, но этим определители не ограничиваются, поэтому продолжим изучать свойства определителей и связанные с ними определения.

5.1.1 Разложение по строке

Разложим определитель в сумму n слагаемых следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Мы воспользовались тем, что определитель можно разложить в сумму определителей, предполагая (лишь в своем уме), что каждый элемент выбранной строке можно представить в виде суммы с необходимым количеством нулей. Справедливость разложения в первой строке равенств показывается можно также показать обратным преобразованием. Во второй строке преобразований мы воспользовались тем, что из любой строки можно вынести множитель за знак определителя.

Благодаря тому, что мы можем добавлять к строке другие строки, умноженные на некий коэффициент, элементы столбца, в котором находится единица, можно сделать равными нулю без влияния на значение определителя. Такое свойство рассматривалось нами в предыдущее лекции.

$$= a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

Тогда мы можем получить выражение вида:

$$= a_{i1}A_{i1} + \ldots a_{in}A_{in},$$

где A_{ij} - определители, в которых на (i, j) месте стоит единица, а все остальные элементы в i-ой строке и j-м столбце равны нулю. Такой определитель называется **алгебраическим дополнением**, а само выражение - **разложением по строке**. Естественно можно получить аналогичное разложение и по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Введем еще одно определение, которое будет полезно здесь, но и не только.

> **Минором** M_{ij} порядка $n-1$ называется определитель матрицы исходного определителя посредством вычеркивания i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическое определение и минор схожи в своих определениях. В одном строка и столбец заменяются на нули, в другом - они вообще вычеркиваются. Следующая теорема устанавливает связь между ними.

Теорема 5.1. *Алгебраическое дополнение A_{ij} отличается от минора M_{ij} только на множитель $(-1)^{i+j}$.*

►

Для доказательства рассмотрим сначала алгебраическое дополнение A_{11}.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

По определению этот определитель представляется в виде суммы из $n!$ слагаемых, однако большая часть из них равна нулю. Останутся лишь слагаемые, в которых элемент первой строки берется из первого столбца.

$$A_{11} = \sum (-1)^{N(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i\alpha_i} \ldots a_{k\alpha_l} \ldots a_{n\alpha_n} = M_{11}$$

Однако можно заметить, что эта сумма и есть минор M_{11}, соответствующий алгебраическому дополнению A_{11}. Действительно, множители входящие в каждое слагаемое минора будут идентичны множителям в представлении алгебраического дополнения, а число инверсий каждого слагаемого в миноре не будет отличаться, т.к. число 1, стоящее в начале перестановки, не образует инверсию ни с одним другим индексом. Мы установили, что в данном случае минор и алгебраическое дополнение равны.

Тогда можно увидеть, что в общем случае алгебраическое дополнение от минора может отличаться только знаком. И действительно, в A_{ij} мы имеем 1 на пересечении i-ой строки и j-го столбца. Переставим i-ю строку с первой так, чтобы порядок остальных строк не изменился. Для этого нам потребуется $i-1$ перестановка строк. Аналогично поступим со столбцом. Каждая перестановка даст множитель -1 перед определителем. В совокупности получаем, что этот множитель будет выноситься $(i-1)+(j-1)$ раз, что и приводит нас к появлению множителя

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

◄

Связь между алгебраическим дополнением и минором позволяет раскрыть всю суть разложения по строке.

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots a_{in}A_{in} = \\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}\end{aligned}$$

Данная сумма представляет собой сумму из n слагаемый, каждой из которых содержит минор, т.е. определитель $n-1$ порядка. Одно из значительных применений формулы разложения по строке заключается в том, что она позволяет **понизить порядок определителя**, представляя его в виде суммы определителей меньшего порядка. Не составляет трудность и определение знака алгебраического дополнения, ведь индексы, будучи взятыми из одной строки будут по очереди менять четность, а значит знаки будут чередоваться.

Вообще говоря знак, связующий алгебраическое дополнение и минор можно запомнить и визуально - они образуют "шахматный" порядок:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

5.1.2 Замена строки

Пусть в определителе матрицы A выбрана некоторая i-я строка.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а также дано n чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда можно утверждать, что сумма произведений этих чисел на алгебраические дополнения элементов i-ой строки будет равна определителю, в котором произведена замена элементов i-ой строки на числа b_j:

$$b_1A_{i1} + \ldots + b_nA_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

►

Действительно, если мы рассмотрим разложение по этой строке с числами b_j, то получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A'_{i1} + \ldots + b_nA'_{in}$$

Vожно заметить, что алгебраические дополнения не зависят от элементов, для которых они берутся, а значит $A_{ij} = A'_{ij}$ для выбранной i-ой строки. ◀

5.1.3 Ортогональность строк и алгебраических дополнений

Согласно формуле разложения по строке, которая к слову, справедлива и для столбцов, сумма произведений элементов матрицы на алгебраические дополнения к этим же элементам дает определитель. Но что будет, если попытаться умножить элементы одной строки на алгебраические дополнения к другой строке?

Теорема 5.2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.*
▶
Действительно, пусть дан определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тогда по предыдущему свойству при замене элементов i-ой строки на элементы k-ой строки мы получим определитель, который очевидно равен нулю в силу того, что получили две одинаковые строки.

$$a_{k1}A_{i1} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

◀

Формулу разложения по строке и доказанную теорему можно записать вместе компактным образом.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

В этом и есть ортогональность строк и алгебраических дополнений - при совпадение индексов строк мы получаем в результате сам определитель, но если они отличаются - ноль. В таком виде это свойство пригодится далее в лекции.

5.1.4 Определитель треугольной матрицы

Пусть дан определитель верхнетреугольной матрицы.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Для его вычисления воспользуемся разложением по первому столбцу. Очевидно, что все слагаемые кроме одного будут нулевыми.

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Мы снова получили определитель верхнетреугольной матрицы. Итеративно продолжая процесс приходим к тому, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Данное свойство можно было бы доказать и без привлечения формулы разложения по строке, а по определению определителя, но в том случае пришлось бы рассматривать равенство нулю большого количества слагаемых, чтобы упростить сумму из $n!$ слагаемых до одного. Применение разложения по строке(столбцу) значительно упрощает доказательство.

Nota bene Определитель нижнетреугольной матрицы по той же логике также равен произведению диагольных элементов. И более того, определитель диагольной матрицы (которая является верхнетреугольной и нижнетреугольной одновременно) находится тем же самым спобом.

5.1.5 Определитель и произведения

В завершение разговора о свойствах определителя можно выделить еще два, которые связывают определитель и два матричных умножения. Свойство, связанное с определителем произведения матриц мы приведем, но без доказательство, а с умножением матрицы на число обоснуем.

Теорема 5.3. *Пусть даны две квадратные матрицы одного порядка $A, B \in M_n(K)$. Определитель их произведения равен произведению определителей.*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Теорема приводится без доказательств.

В прошлой лекции затрагивались особые матрицы, которые являются делителями нуля. Сейчас можно сформулировать некоторое условие, при котором ненулевая матрица обладает таким свойством.

Пусть две ненулевые матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ в произведении дают нулевую матрицу.

$$A \cdot B = \theta$$

По сформулированной теореме мы можем сказать, что

$$\det A \det B = \det \theta = 0$$

Ведь определитель нулевой матрицы всегда равен нулю. Следовательно, произведение двух ненулевых матриц дает нулевую только в том случае, если определитель хотя бы одной из них равен нулю.

Определитель интересным образом также взаимодействует и с умножением матрицы на число:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \tag{5.1}$$

Иными словами, при умножении матрицы на некоторое число λ определитель увеличивается в λ^n, где n - порядок матрицы. Справедливость этого показывается очень просто - умножение матрицы на число приводит к тому, что все элементы умножаются на него. Однако если мы хотим вынести множитель из определителя, то можем делать только из каждой строки по-отдельности. Вынося множитель λ из всех строк, как раз и получаем это число в степени порядка матрицы.

5.2 Решение СЛАУ

Вспомним как решается обычное линейное уравнение $ax = b$. Известно, что для нахождения его решения мы делим правую часть на коэффициент при неизвестной. Можно это выразить несколько иначе.

$$x = a^{-1}b$$

Можно ли перенести данных подход на решение систем линейных алгебраических уравнений, понимая, что существует соответствие с линейным матричным уравнением?

5.2.1 Обратная матрица

До сих пор говоря об умножении матриц друг на друга мы ничего не сказали о том, существует ли обратный элемент относительно этой операции. Он существует! Но с оговорками и не всегда.

> **Обратной** матрицей $B \in M_n(K)$ к матрице $A \in M_n(K)$ того же порядка называется матрица, которая в произведении с матрицей A дает единичную.
>
> $$AB = E = BA$$
>
> Матрица, для которой существует обратная, называется обратимой. Обратная матрица обычно обозначается A^{-1}.

Nota bene Можно показать (и мы сделаем это), что не всякая матрица является обратимой, даже если она является ненулевой. Отголоски этого можно увидеть ранее при обсуждении делителей нуля. Существование делителей нуля противоречит, по крайней мере интуитивно, наличию обратной матрицы у всякой ненулевой.

При каких условиях матрица является обратимой? Единственна ли обратная матрица, если она существует? Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 5.4. *Любая квадратная матрица имеет обратную матрицу, и при том единственную, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Причем обратную матрицу можно вычислить по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

где A^* - **присоединенная матрица** - матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов транспонированной матрицы A.

▶

Пусть матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \mathbf{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда присоединенная матрица будет выглядеть следующим образом. Шрифтом выделены алгебраические дополнения для соответствующих элементов исходной матрицы.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A_{1j}} & \cdots & \mathbf{A_{ij}} & \cdots & \mathbf{A_{nj}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Заметим, что по определению алгебраические дополнения i-ой строки матрицы A находятся в i-м столбце присоединенной матрицы. Если вспомнить свойства ортогональности строк и алгебраических дополнений, то это определение наталкивает на некоторые размышления о произведении матрицы на присоединенную к ней. Действительно, в результате произведения матриц получится единичная матрица, умноженная на определитель матрицы A.

$$AA^* = \begin{pmatrix} \det A & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

Свойство ортогональности строк и алгебраических дополнений указывает нам на то, что произведение элементов строки матрицы только лишь на соответствующие им алгебраические дополнения будет равно определителю матрицы. В иных случаях - нулю. Мы уже записывали это свойство.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Откуда мы делаем вывод, что обратная матрица действительно находится при помощи присоединенной матрицы, а также, что **неравенство нулю определителя является достаточным условием**, ведь иначе произведение матриц не дало бы единичную.

Теперь покажем единственность обратной матрицы. Для доказательства предположим, что существует некая матрица C также являющаяся обратной.

$$AC = CA = E$$

Умножив равенство $AC = E$ слева на матрицу A^{-1}, проследим за цепочкой равенств

$$\begin{aligned} A^{-1}AC &= A^{-1}E \\ EC &= A^{-1}E \end{aligned}$$

Откуда сразу следует, что $C = A^{-1}$, а значит обратная матрица единственна.

Покажем, наконец, что условие $\det A \neq 0$ является необходимым, т.е. из существования матрицы следует неравенство нулю ее определителя. Предположим, что обратная матрица существует. Из свойства определителя произведения матриц следует

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det E = 1$$

Произведение может быть равно 1, т.е. быть отличным от нуля, только в том случае, если оба множителя отличны от нуля. Следовательно как определитель самой матрицы, так и определитель обратной матрицы являются ненулевыми.

Теорема полностью доказана. ◄

Nota bene На основе последней части доказательства можем сделать вывод, что если обратная матрица существует, то ее определитель является обратным к определителю исходной матрицы.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

5.2.2 Метод Крамера

Мотивацию введения матриц и определителей мы начали с обсуждения существования решения и одного из способов его нахождения. Рассмотрение частных случаев при количестве уравнений и неизвестных $n = 2$ и $n = 3$ навело нас на мысли о том, как обобщить понятие определителя для произвольной матрицы n-го порядка. Был проделан большой путь по выяснению свойств как самих матриц, так и их определителей. Теперь попробуем обобщить саму задачу нахождения решений системы линейных алгебраических уравнений, в которых содержится n уравнений и n неизвестных.

Nota bene Не смотря на то, что мы делаем попытку обобщения, все-таки системы могут быть "прямоугольными" , т.е. количество неизвестных может отличаться от количества уравнений. Однако этот случай мы пока что оставляем в стороне и вернемся к нему в другой части курса.
Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и n уравнениями.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Как упоминалось для частных случаев $n = 2, 3$ мы можем представить эту систему уравнений в виде матричного уравнения.

$$Ax = b,$$

где A - матрица, составленная из коэффициентов перед неизвестными, а x и b - матричные столбцы неизвестных и свободных членов:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Договоримся о некоторых понятиях, которые будем использовать для обозначения существования решения.

> Система называется **совместной**, если у нее есть хотя бы одно решение. И обратно, называется **несовместной**, если у системы отсутствуют решения вообще.

Теорема 5.5. ***(Крамера)*** *Если* $\det A \neq 0$, *то система является совместной и существует единственно решение, описываемое формулами*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i - определители, полученные заменой i-го столбца коэффициентов на столбец свободных членов.

►

Покажем для начала, что если определитель матрицы не равен нулю, то решение единственно. Действительно, условие $\det A \neq 0$, позволяет утверждать, что существует обратная матрица A^{-1} и притом единственная. Из этого следует, что при умножении матричного уравнения на обратную матрицу слева, будем иметь

$$x = A^{-1}b$$

В силу единственности обратной матрицы и решение будет единственно.

Nota bene Нахождение обратной матрицы - также один из способов решения СЛАУ.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим i-ю компоненту решения системы.

$$x_i = \left(A^{-1}b\right)_i = \frac{1}{\det A}\left(A^*b\right)_i$$

Она получается путем умножения i-ой строки обратной матрицы на столбец свободных членов, но эта строка состоит из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам i-го столбца матрицы A, деленных на определитель матрицы коэффициентов. Следовательно можно написать, что

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}\right)$$

Сумма, находящаяся в скобках, есть не что иное как определитель, в котором i-ый столбец коэффициентов заменили на столбец свободных членов, а это именно то, что мы назвали Δ_i. Следовательно формулы Крамера доказаны.

Для того чтобы показать, что между матричным уравнением и формулами Крамера есть взаимно однозначное соответствие, осталось доказать обратное утверждение - формулы Крамера влекут за собой матричное уравнение.

Запишем решение системы в виде

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k$$

Умножим это уравнение на выражение Δa_{ji} и просуммируем по индексу i. Иными словами, сложим все x_i, умноженные на Δa_{ji}:

$$\Delta\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k$$

Переставим знаки суммирования в правой части

$$\Delta\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}A_{ki}\right)b_k$$

Выражение, стоящее в правой части в скобках, в соответствии со свойством ортогональности строк и алгебраических дополнений будет равно $\det A = \Delta$, когда $k = j$, и нулю во всех других случаях. Следовательно из всей суммы b_k "выживет" только одно - имеющее индекс j. Тогда получаем

$$\Delta\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \Delta b_j$$

После деления на Δ получаем то самое матричное уравнение, с которого мы начинали.

Теорема полностью доказана. ◄

Заключение

Данная лекция - изюминка на небольшом торте последних лекций, посвященных матрицам. Хоть и не полностью, не со всех сторон, но уже раскрывается мощь матричного аппарата применительно к решению систем линейных алгебраических уравнений. Однако можно обратить внимание, что до самого конца мы ограничивались рассмотрением таких систем уравнений, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных. И это не всегда так. Более того в некотором смысле это лишь редкий случай среди систем общего вида. Такие системы мы тоже научимся исследовать на совместность и находить их решение. Нам все также потребуются матрицы и обнаруженные нами свойства, но всему свое время. Для начала нам придется уйти в "конкретику" - поговорить немного о векторах и геометрии, а только после этого на новом уровне выйти к обсуждению матриц.

Список литературы

1. Д.К. Фаддеев. Лекции по алгебре. Глава 4, параграфы 2,4,5.
   Основной источник для теории

2. И.В. Белоусов. Матрицы и определители. Главы 5-7.1.

3. З.И. Боревич. Определители и матрицы. Параграфы 7,8