$\alpha$

# Лекция 9

## «Прямые и плоскости в пространстве»

**Содержание лекции:**

**Ключевые слова:**

**Авторы курса:**

Свинцов М.В.

**Ссылка на ресурсы:**
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

## 9.1 Плоскость в пространстве

Предыдущая лекция была посвящена рассмотрению точек, прямых и отрезков на плоскости. Рассмотрение объектов аналитической геометрии продолжается рассмотрением этих же объектов, но уже в пространстве $\mathbb{R}^3$. При рассмотрении объемного пространства уже сама плоскость будет предметом нашего изучения.

Как мы увидим, многие уравнения, полученные для прямой на плоскости будут очень схожи с уравнениями для прямой и плоскости в пространстве. Некоторые же из наших рассуждений остаются в силе вне зависимости от пространства - в векторной форме уравнение отрезка, а также задача деления отрезка в некотором отношении остаются справедливы без изменений. Небольшой "модификации" подвергается лишь координатная их форма - добавлением еще одной переменной, соответствующей 3-ей координатной оси объемного пространства.

### 9.1.1 Геометрическое место точек

Как и ранее, пойдем сначала от геометрического, инвариантного, определения точек. Вспомним определение.

> **Плоскостью** в $\mathbb{R}^3$ называется геомерическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек $P_1$ и $P_2$.

Определение в своей сути аналогично уравнению прямой на плоскости, т.к. для любой точки, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$ справедливо, что

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2|,$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиус-векторы точек $P_1$ и $P_2$, от которых равноудалены точки плоскости. Из него мы получили несколько другое уравнение.

$$\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = 0$$

Рассуждения из прошлой лекции для прямой на плоскости также переносятся и на этот случай. Выражение $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/2$ определяет точку, обязательно принадлежащую плоскости, которая является серединой отрезка $P_1P_2$. Соответственно первый множитель скалярного произведения будет определять какой-то вектор, принадлежащий плоскости. В свою очередь, если скалярное произведение равно нулю, то второй множитель должен быть ортогонален любому вектору, принадлежащему плоскости. Любой вектор, ортогональный плоскости, также как и в случае с прямой называют **нормалью** к плоскости.

### 9.1.2 Параметрические уравнения плоскости

Для того чтобы задать уравнение прямой необходимо было определить вектор (направляющий вектор или вектор нормали), а также произвольную точку, принадлежащую этой прямой. Достаточно ли этого для задания плоскости?

Вспомним, что мы исходили из идеи, что прямую можно задать как сумму радиус-вектора опорной точки $\vec{r}_0$ и некоторого вектора $\vec{s}$, умноженного на параметр, который и определяет точку. По сути своей он являлся *базисом* этой прямой.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$

В свою очередь базис плоскости определяется набором из двух неколлинеарных векторов. Следовательно вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ может быть представлен как линейная комбинация этих двух векторов.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

Данный вид уравнений называют **векторным параметрическим уравнением плоскости**.

В декартвой прямоугольной системе координат векторное параметрическое уравнение принимает вид системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{cases}$$

### Общее уравнение плоскости

Уравнение плоскости можно получить также из условия компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Действительно, умножим обе части векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

сначала векторно на $\vec{a}$, а затем скалярно на $\vec{b}$.

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) + \beta(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

В левой части можно увидеть смешанное произведение трех векторов, которое равно нулю в силу того, что в смешанных произведения правой части есть равные векторы. Смешанное произведение равно нулю, а значит векторы компланарны, но это очевидно и в силу самого определения этих векторов.

В координатной форме в ДПСК уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем полученный определитель по первой строке и введем обозначения

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$A = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y$$

$$B = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = a_z b_x - a_x b_z$$

$$C = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

которое также приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D = -Ax_0 - Ay_0 - Az_0$. Данный вид уравнения называют **общим уравнением плоскости**.

### 9.1.3 Нормальное уравнение плоскости

Какой геометрический смысл коэффициентов $A$, $B$ и $C$? Вспомним как мы получили смешанное произведение.

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right) = [(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}] \cdot \vec{b}$$

Однако в силу свойств также справедливо, что

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right) = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$$

Заметим, что результатом векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, перпендикулярный плоскости - нормаль $\vec{n}$ к этой плоскости. Тогда, с одной стороны, имеем **векторное нормальное уравнение плоскости**:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

С другой стороны, в ДПСК компоненты вектора нормали можно найти через определитель

$$\vec{n} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Тогда можно как раз и заметить, что компоненты полученного вектора будут определять коэффициенты $A$, $B$ и $C$ в общем уравнении плоскости.

### 9.1.4 Уравнение плоскости с прицельным параметром

Предположим, что выбранный нами вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ взят таким образом, что составляет острый угол с радиус-вектором $\vec{r}_0$ опорной точки. Единичный вектор нормали можно выразить как совокупность направляющих косинусов вектора:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) =$$
$$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ - углы меджу вектором и соответственно осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$. Для направляющих косинусов справедливо, что:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$$

Разделим общее уравнение на $|\vec{n}|$ и запишем его, вводя прицельный параметр $p$.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

где прицельный параметр имеет смысл расстояния от начала координат до плоскости. Прицельный параметр как расстояние должен быть всегда положителен, и это действительно так.

$$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{(\vec{r}_0, \vec{n})}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

В данном выражении была использована связь между коэффициентом $D$ и правой частью векторного нормального уравнения. Тогда становится очевидным условие выбора вектора нормали, только острый угол между векторами даст всегда неотрицательное значение.

### 9.1.5 Уравнение плоскости в отрезках

Продолжим изучение общего уравнения, но теперь разделим его на $(-D)$. Тогда уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

назовем уравнением плоскости в отрезках. Коэффициенты в этом уравнении очевидным обрзом выражаются через коэффициенты общего уравнения:

$$a = -\frac{D}{A} \qquad b = -\frac{D}{B} \qquad c = -\frac{D}{C}$$

В ДПСК коэффициенты имеют простую геометрическую интерпретацию, которую показывает следующая лемма.

**Лемма 9.1.** *Если плоскость задана уравнением в отрезках в ДПСК, то числа $a$, $b$ и $c$ по абсолютной величине равны длинам отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Знаки этих чисел зависят от того, на какой полуоси (положительной или отрицательной) лежат соответствующие отрезки.*

### 9.1.6 Уравнение плоскости, проходящей через несколько точек

Вернемся к уравнению, которое определялось условием компланарности трех векторов в векторной форме:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}, \vec{b}) = 0,$$

где $\vec{r}_1$ - радиус вектор опорной точки; и координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Если на плоскости известна не только одна опорная точка $\vec{r}_1$, но также и вторая $\vec{r}_2$, то в качестве одного из векторов плоскости можно взять разность между ними $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Тогда

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{b}) = 0$$

Таким образом получено уравнение плоскости проходящей через две точки, параллельной вектору $\vec{b}$. Если взять еще одну точку $\vec{r}_3$, то и вектор $\vec{b}$ можно представить аналогичным образом, получим уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}) = 0$$

В координатном виде эти уравнения представляются для плоскости, проходяшей через две точки, параллельно вектору:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

и плоскости проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

### 9.1.7 Взаимное расположение плоскостей

Возможные варианты расположения плоскостей в пространстве и их аналитическое описание практически идентичны прямым на плоскости. И ведь действительно, плоскости могут быть параллельно (и совпадать как частный случай), быть ортогональны друг другу или пересекаться.

1. Параллельные плоскости. Очевидно, что параллельные плоскости имеют векторы нормали, отличающиеся только лишь скалярным множителем.

   $$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$$

   В координатах это будет представлено равенствами

   $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

2. Совпадение плоскостей. В этом случае требовалось бы еще и совпадение других параметров уравнения. Например, в векторной форме для плоскостей

   $$(\vec{r}, \vec{n}_1) = (\vec{r}_1, \vec{n}_1) = -D_1 \qquad (\vec{r}, \vec{n}_2) = (\vec{r}_2, \vec{n}_2) = -D_2$$

   помимо выше названного условия потребовалось бы еще и $D_1 = \lambda D_2$, иными словами

   $$(\vec{r}_1, \vec{n}_1) = \lambda(\vec{r}_2, \vec{n}_2)$$

3. Ортогональность плоскостей. Также очевидно, что векторы нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ ортогональных плоскостей также будут ортогональны друг другу, что дает простое условие, определяемое через скалярное произведение:

   $$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \qquad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

   также записанное и в координатной форме.

4. Пересечение плоскостей. Более общий случай пересечения плоскостей под произвольным двугранным углом достигается тогда, когда векторы нормали неколлинеарны. Условие неколлинеарности может быть выражено с помощью векторного произведения:
$$[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \vec{s} \neq \vec{0}$$
Более того известно, что геометрическое место точек пересечения двух плоскостей - это есть прямая, а полученный вектор $\vec{s}$ в таком случае будет являться направляющим вектором прямой. И действительно, вектор $\vec{s}$ по свойствам векторного произведения ортогонален вектору $\vec{n}_1$, следовательно он лежит в плоскости, им образованной, но и для другого вектора $\vec{n}_2$ это также справедливо. Следовательно, можно сделать вывод, что он всегда принадлежит обеим плоскостям, а значит принадлежит прямой, заданной пересечением.

## 9.2 Прямая в пространстве

Рассмотрение взаимного расположения плоскостей позволяет уже определенным образом задать уравнение прямой, однако прямая в пространстве также может быть задана векторными уравнениями и их координатными формами. Разберем их по порядку.

### 9.2.1 Параметрическое задание прямой

Прямая на плоскости могла быть определена с помощью направляющего вектора $\vec{s}$ и некоторой опорной точки $\vec{r}_0$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$
Данное определение справедливо и для прямой в пространстве. Однако координатная форма уравнения ДПСК требует уже трех уравнений:
$$\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}$$
В этих уравнениях можно исключить параметр $t$. Тогда уравнение примет вид **канонического уравнения** прямой
$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$$
Предполагая, что на прямой заданы две точки (вместо точки и вектора), можно записать **уравнение прямой, проходящей через две точки**. Действительно, фиксируя некоторую точку $\vec{r}_1$, направляющий вектор можно представить как $\vec{s} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ и тогда можно записать векторное и координатные уравнения.
$$\vec{r} = (1 - t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1 \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$
Воспользуемся вновь векторным параметрическим уравнением прямой и умножим обе его части векторно на $\vec{s}$. Тогда
$$[\vec{r} \times \vec{s}] = [\vec{r}_0 \times \vec{s}] = \vec{b}, \qquad (\vec{s}, \vec{b}) = 0$$

### 9.2.2 Прямая как пересечение плоскостей

Ранее мы показали, что если векторы нормали двух плоскостей неколлинеарны, то плоскости пересекаются по некоторой прямой, а направляющий вектор можно задать как их векторное произведение.

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - векторы нормали, задающие плоскости

$$\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n_1}) = D_1 \\ (\vec{r}, \vec{n_2}) = D_2 \end{cases}$$

Умножим слева векторно это равенство на $\vec{r}$, а правую часть преобразуем по формуле "бац минус цаб".

$$[\vec{r} \times \vec{s}] = [\vec{r} \times [\vec{n_1} \times \vec{n}_2]] = \vec{n}_1(\vec{r}, \vec{n}_2) - \vec{n}_2(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_2\vec{n}_1 - D_1\vec{n}_2$$

Таким образом, векторное уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей, можно записать следующим образом:

$$[\vec{r} \times [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2]] = D_2\vec{n}_1 - D_1\vec{n}_2$$

В координатной форме проще отталкиваться от координатных записей самих плоскостей. Точки, принадлежащие прямой, будут являться решением системы общих уравнений плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

### 9.2.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{s}_1 \\ \vec{r} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{s}_2 \end{cases}$$

Возможно несколько случаев:

1. Прямые параллельны. При этом естественно, что их направляющие векторы коллинеарны друг другу:

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \qquad\qquad \vec{s}_1 = \lambda\vec{s}_2$$

2. Прямые совпадают. Совпадение прямых является частным случаем параллельности прямых, при котором точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ принадлежат обеим прямым. Это означает, что вектор $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ должен быть также коллинеарен обоим векторам $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

3. Прямые скрещиваются. В этом случае необходимо должно выполняться условие некомпланарности направляющих векторов и вектора разности $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Это условие можно записать при помощи смешанного произведения

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0$$

4. Прямые пересекаются. Пересекающиеся прямые также как и скрещивающиеся обладают неколлинеарными направляющими векторами, но вместе с тем они должны быть компланарными вместе с вектором разности опорных точек $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Это условие также можно записать через смешанное произведение

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$$

### 9.2.4 Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость задана вектором нормали $\vec{n}$ и радиус-вектором произвольной точки $\vec{r}_1$, а прямая - направляющим вектором $\vec{s}$ и радиус-вектором опорной точки $\vec{r}_2$

$$\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n}) = D \\ \vec{r} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{s} \end{cases}$$

Возможно несколько случаев:

1. Прямая параллельно плоскости. В этом случае необходимым условием является ортогональность направляющего вектора и вектора нормали:

$$(\vec{s}, \vec{n}) = 0$$

2. Прямая принадлежит плоскости. Если прямая принадлежит плоскости, то все ее множество точек удовлетворяет уравнению плоскости. тогда

$$(\vec{r}_2 + t\vec{s}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n}) \qquad (\vec{s}, \vec{n}) = 0$$
$$(\vec{r}_2, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$$
$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{n}) = 0$$

3. Прямая пересекает плоскость. В таком случае направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости должны быть неортогональны друг другу

$$(\vec{s}, \vec{n}) \neq 0$$

Причем точку пересечения можно определить через параметр $t$

$$(\vec{r}_2 + t\vec{s}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$$
$$t(\vec{s}, \vec{n}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{n})$$
$$t = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{n})}{(\vec{s}, \vec{n})}$$

4. Прямая ортогональна плоскости. В этом случае вектор направляющий вектор $\vec{s}$ прямой ортогонален любому вектору плоскости, а значит коллинеарен вектору нормали $\vec{n}$, который задает плоскость

$$\vec{s} \parallel \vec{n} \qquad\qquad \vec{s} = \lambda \vec{n}$$