

# Конспект лекций по математическому анализу, семестр II

Шишминцев Дмитрий Владимирович

14 мая 2023 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1	Лекция 3 .....	2
2	Лекция 4. ....	5
3	Лекция 5 .....	8
4	Лекция 7 .....	10
5	Лекция 8 .....	12
6	Лекция 9 .....	13
7	Лекция 10 .....	15
8	Лекция 12 .....	17

## 1 Лекция 3

**Определение 1** (Определенный интеграл). Рассматриваем функцию  $f(x)$ , которая непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Пусть функция  $f(x) > 0, a < b$ . Разобъем отрезок  $[a, b]$  точками  $x_k, k = 0..n - 1$  на  $n - 1$  частей. Рассмотрим  $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ . Наибольшее значение  $\Delta x$  обозначим за ранг дробления.  $\max \Delta x_i = \lambda (i = 0, \dots, n - 1)$  На каждом частичном отрезке выберем произвольным образом точку  $x_k$  и найдем значение функции  $f(\xi_k)$ . Рассмотрим  $\lim_{\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$

СВОЙСТВА:

- $f(x) > 0, a < b \rightarrow \int_a^b f(x) dx$
- $f(x) > 0, a > b \rightarrow - \int_b^a f(x) dx$
- $f(x) > 0, a = a \rightarrow \int_a^a f(x) dx = 0$

**Определение 2** (Интегральная сумма Римана).  $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

Предел суммы Римана не зависит от выбора точек и разбиения отрезка  $[a, b]$  на маленькие отрезки.

**Теорема 1** (Теорема существования определенного интеграла).  $f(x)$  называется кусочно-непрерывной на  $[a, b]$ , если она имеет конечное количество точек разрыва первого рода.

**Теорема 2** (Достаточное условие интегрируемости функции). Если функция кусочно-непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке существует определенный интеграл

**Определение 3** (Геометрический смысл определенного интеграла). Рассмотрим функцию  $f(x)$ , непрерывную на отрезке  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  - площадь криволинейной трапеции. (площадь под графиком функции) на отрезке  $[a, b]$  ограниченной осью  $O_x$  или  $y = 0$

**Определение 4** (Свойства определенного интеграла).

- $\int_a^a f(x) dx = 0$  - по определению
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  - по определению
- $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$  - По определению, определенный интеграл - предел суммы Римана. Сумму можно разбить, а константу вынести.

- Рассмотрим  $c \in [a, b]$ ,  $f(x)$  - непрерывна, то  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $a < b, x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $a < b, x \in [a, b] : f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- $a < b, x \in [a, b] : f(x) \leq \phi(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$
- $a < b, x \in [a, b] : |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

**Теорема 3** (Оценка определенного интеграла). Если функция  $f(x)$  - непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то справедливо утверждение:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

где  $m$  - наименьшее значение функции на  $[a, b]$ , а  $M$  - наибольшее значение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$f(x)$  - непрерывна  $\Rightarrow \exists \sup, \inf$  по Т. Вейерштрасса.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \Delta x_k, \Delta x_k = b - a$$

, если мы рассмотрим все значения.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \lim_{x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \lim_{x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a)$$

**Теорема 4** (Теорема о среднем).

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:  $f(x)$  - непрерывна  $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} = f(\xi), \xi \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

**Теорема 5** (Об интеграле с переменным верхним пределом (Бароу)).

$f(x)$  - непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^x f(t)dt$  имеет производную которая равна подынтегральной функции  $f(x)$

$$\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \\ \phi(x+\Delta x) &= \phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \Delta\phi(x) = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \\ \text{по теореме о среднем} \quad \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt &= f(\xi)(\Delta x - x) \Rightarrow \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \Rightarrow \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \left( \int_a^x f(t)dt \right)' - \phi(x)' = f(x) \end{aligned}$$

## 2 Лекция 4.

**Теорема 6** (дополнительная к формуле Ньютона-Лейбница). Если  $f(x)$  - непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке имеет первообразную и имеет неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .  $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ ,  $F'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$  по теореме Бароу.  $\phi(x)$  - первообразная  $f(x)$ , то  $F(x) - \phi(x) = C \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

**Теорема 7** (Ньютона-Лейбница). Если  $f(x)$  непрерывна  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), a < b$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:  $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ ,  $f(x) = F'(x)$  - первообразная. Рассмотрим  $[a, b]$ , пусть  $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) = -C$   
Пусть  $x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \Rightarrow t = x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$   
ЗАМЕЧАНИЕ:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$  (краткая запись)

### МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Формула замены
- Интегрирование по частям

**Теорема 8** (Формула замены).  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $f(x)$  - непрерывна на  $[a, b]$ , положим  $\phi(t)$  - непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  и  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$ ,  $\exists \phi'(t)$ , тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

где  $F(x)$ - первообразная для функции  $(f(\phi(t)) \cdot y'(t))$

**Теорема 9** (Формула для интегрирования по частям). Рассмотрим  $u(x), v(x)$  - которые непрерывны и дифференцируемы на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

**Применение определенного интеграла. Площадь плоских фигур в декартовой системе координат**

$f(x)$  - непрерывна на  $[a, b], f(x) > 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$  - непрерывна на  $[a, b], f(x) < 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b -f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

$f(x)$  меняет знак при переходе через ось  $O_x \Rightarrow$

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$f(x), g(x)$  - непрерывны на отрезке  $[a, b], f(x) > g(x) \Rightarrow$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$x = x(y), y \in [c, d] \Rightarrow$

$$S = \int_c^d f(y)dy$$

$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$$

В полярной системе координат.  $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Рассматривается кривая  $r(\phi)$  заданная в полярной системе координат и ограничена углом  $\alpha, \beta$ .

- Разбиваем сектор на  $n$  кусков.  $\alpha = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n = \beta$
- Вводим углы  $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$
- Рассмотрим произвольный  $\Delta\phi_k$ , ограничен кривой  $r = f(\Delta\phi_k)$ ,  $S = \frac{1}{2}r_k^2\Delta\phi_k$
- Таким образом находим все площади  $\Delta S_1; \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$
- Составим сумму  $S = \sum \Delta S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}r_k^2\Delta\phi_k$  - интегральная сумма
- Вводим ранг дробления -  $\lambda = \max \Delta\phi_k$
- $S = \lim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}r_k^2\Delta\phi_k$ . Если предел существует и имеет конечное значение, то:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2(\phi)d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}f^2(\phi)d\phi$$



### 3 Лекция 5

**Определение 5** (Длина дуги). предел длины вписанной кривой при  $n \rightarrow \infty$

#### Вычисление длины дуги

Кривая  $AB$  задана графиком функции  $f(x), x \in [a, b], a < b, f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Рассматривается  $k$  кусочек ломанной.  $l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k - f_{k-1}^2)}$  по теореме Лагранжа  $f_k - f_{k-1} = f'_k(x) \Delta x_k \Rightarrow \sqrt{\Delta x_k^2 + (f'_k)^2 \Delta x_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f'_k)^2} = l_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n01} l_k = \sum_{k=1}^{k=1} \sqrt{1 + (f'_k)^2} \Delta x_k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=1} \sqrt{1 + (f'_k)^2} \Delta x_k \Rightarrow$

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'_k)^2} dx$$

Если кривая задана в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_1} \sqrt{(\phi'_t)^2 + (\xi'_t)^2}$$

Кривая задана в полярной системе координат  $r = r(\phi)$  Рассмотрим  $[\alpha, \beta]$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot r \sin \phi \end{cases} L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

$$x'_\phi = r'(\phi) \cdot \cos \phi + r(\phi) \cdot (-\sin \phi) \quad y'_\phi = r'(\phi) \cdot \sin \phi + r(\phi) \cdot \cos \phi \quad (x'_\phi)^2 + (y'_\phi)^2 = (r'_\phi)^2 + r_\phi^2 \Rightarrow L \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'_\phi)^2 + r_\phi^2} d\phi$$

#### Несобственные интегралы

Рассмотрим  $y = f(x)$  определена в  $x \in (a, +\infty)$  и интегрируема при  $x \in (a, A) \subset (a, +\infty)$

**Определение 6** (Несобственный интеграл).  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  от функции  $y = f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a, +\infty)$  называют  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$  и если предел существует и конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случае интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла - площадь бесконечной криволинейной трапеции.

$$\text{Вычисление: } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$$

**Определение 7** (Главное значение несобственного интеграла по бесконечному промежутку).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F'(x) - F(-R)$$

Обозначается как:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

В определении главного значения несобственного интеграла имеется ввиду симметричное возрастание модуля переменной  $x$  в положительном и отрицательном направлении.

## 4 Лекция 7

**Определение 8.** Простая кривая - кривая  $K$ , которая распадается на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение  $y = f(x)$  или  $x = \phi(y)$  причем  $f(x), g(x)$  непрерывные функции на  $[a, b], [p, q]$  то в этом случае  $K$  - кривая простая, замкнутая самонепересекающаяся кривая лежащая на плоскости  $Oxy$  разбивает множество точек на два множества, единственным образом

**Определение 9.** Двойной интеграл

- 1. Разобьем область  $D$  сетью простых кривых произвольным образом на ячейки  $D_1, D_2, D_3 \dots D_n$ , площадями  $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$  с диаметрами  $d_1, d_2, d_3, \dots d_n$
- 2. Наибольший из диаметров обозначаем через ранг дробления  $\max(d_k) = \lambda$
- 3. В каждой ячейке  $D_k$  возьмем произвольную точку  $M_k(x_k, y_k)$  и вычислим значения  $f(M_k)$
- 4. Умножим  $f_k(M_k)$  на соответствующую площадь  $S_k$  ячейки и все это просуммируем  $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) S_k$ , то если рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy$

**Теорема 10** (О существовании двойного интеграла). Если подынтегральная функция  $f(x, y)$  непрерывна в каждой точке области  $D(x, y) \rightarrow \exists \iint_D f(x, y) dx dy$

**Геометрический смысл двойного интеграла**

Если  $f(x, y) \geq 0$  в каждой точке области  $D$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V$$

Объем тела ограниченного снизу области  $D(x, y)$  с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны  $Oz$

## Свойства двойного интеграла

$$C_1, C_2 = \text{const} \neq 0$$

$f_1(x, y), f_2(x, y)$  - непрерывны в области  $D$

- Аналогичные свойства, как у обычных интегралов
- Если каждая точка в области больше нуля, то и интеграл будет больше нуля.
- Если одна функция больше другой, то ее интеграл тоже будет больше
- Если в каждой точке  $D$  справедливо  $m \leq f(x, y) \leq M$ , то  $m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S_D$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: так как  $m \leq f(x, y) \leq M \Rightarrow \iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy \Rightarrow m \iint_D 1 dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \iint_D 1 dx dy \Rightarrow$  что и требовалось доказать.

**Теорема 11** (О среднем). Если в каждой точке  $D$   $f(x, y)$  непрерывна, то в области  $D$  найдется точка  $P(\xi, \nu)$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: так как функция непрерывна, то по свойству  $m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S_D : \mid \frac{1}{S_D} \Rightarrow m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \Rightarrow \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \nu) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$

## 5 Лекция 8

### Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

$$D(x, y) = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

Проведем сечение  $ABB_1A_1$ , площадь сечения  $S(y) = \int_a^b f(x, y) dx \Rightarrow V = \int_a^b S(y) dy$  - объем тела.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d S(y) dy = \int_c^d dy (\int_a^b f(x, y) dx) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

ПРИМЕР:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 dx [x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3}]_0^2 = \\ &= \int_0^1 dx [x^2 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} - (x^2 \cdot 0 + \frac{0}{3})] = \int_0^1 dx (2x^2 + \frac{8}{3}) = \frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

## 6 Лекция 9

### Замена переменных в двойном интеграле

$J$  - якобиан, коэффициент растяжения  $J = \lim_{diam S^k \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^k}$

Пусть есть непрерывная функция  $x = \phi(u, v); y = \xi(u, v)$  и однозначно отображают  $D$  в  $D^*$  и эти функции имеют непрерывную частную производную. Пусть в области  $D$  на плоскости  $Oxy$  задана функция  $z = f(x, y)$  и ей соответствует функция  $f(\phi(u, v), \xi(u, v))$ . Тогда сумма Римана  $\sum_D f(x, y) \Delta S = \sum_D f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot J \Delta S$

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Если  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_D f(x, y) \Delta S = \iint_D f(x, y) dx dy$  - существует конечное значение

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot |J| du dv$$

### Двойной интеграл в полярных координатах

$$x(r, \phi) = x = r \cdot \cos \phi$$

$$y(r, \phi) = y = r \cdot \sin \phi$$

$$r \in [0, +\infty]; \phi \in (0, 2\pi] \Rightarrow$$

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & r \cdot (-\sin \phi) \\ \sin \phi & r \cdot \cos \phi \end{vmatrix} = |r \cdot \cos^2 \phi + r \cdot \sin^2 \phi|$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot r dr d\phi$$

### Тройной интеграл

**Определение 10** (Тройной интеграл). Дано материальное тело, представляющее собой пространственную область  $\Omega$  заполненную массой. Требуется найти массу этой области, при условии что в каждой точке этой области известна плотность.  $\phi(P) = \phi(x, y, z)$  Разобьем  $\Omega$  на неперекрывающиеся куби-

руемые части:  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$  в соответствии с объемами  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ . В каждой области выбираем  $\forall(\cdot)P_k$  с плотностью  $\phi(p_k)$ , тогда масса этой области  $\Delta m_k \approx \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$ , масса всей области  $\Omega m \approx \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot v_k$ . Пусть  $d$  наименьший из диаметров частичных областей:  $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$ , где сумма не зависит от выбора точки  $P_k$ , не зависит от разбиения и если предел конечен, то:

$$\iiint_{\Omega} \phi(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_l^m f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(p) dz$$

## 7 Лекция 10

### Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Область  $G$  ограничена  $z = \phi_1(x, y)$  и  $z = \phi_2(x, y)$  - поверхности, которые однозначно проектируются на одну и ту же область  $D$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f dz$$

Если область  $D(x, y)$  представляет собой криволинейную трапецию, то  $x \in [a, b]; y = \xi_1(x); y = \xi_2(x)$

$$\int_a^b dx \int_{\xi_1(x)}^{\xi_2(x)} dy \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f dz$$

### Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах описывается тремя координатами.  $\rho, \phi, z \Rightarrow P(\rho, \phi, z)$   $\rho$  - полярный радиус,  $\phi$  - полярный угол, для точки  $p'$  - которая является проекцией точки  $p$   $z$  - аппликата точки  $p$ .

Декартовы координаты связаны с цилиндрическими координатами:

$$x = \rho \cdot \cos \phi; \phi \in [0, +\infty]$$

$$y = \rho \cdot \sin \phi; \phi \in [0, 2\pi]$$

$$z = z; z \in [-\infty, +\infty]$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{G^*} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) |J| d\rho d\phi dz$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\phi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\phi} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\phi} & \frac{dz}{dz} \end{bmatrix} = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$$

$d\rho d\phi dz = J \cdot d\rho d\phi dz = dv$  = элемент объема в цилиндрических координатах.



## Сферические координаты в тройном интеграле

В сферических координатах положение точки  $p$  описывается с помощью трех координат  $\phi, r, \theta$  где  $r$  - радиус вектор которые соединяет точку  $p$  с началом координат.  $\phi$  - полярный угол, угол между проекцией точки  $p$  на плоскость  $Oxy$  и осью  $Ox$ .  $\theta$  - угол между радиус вектором и положительным направлением  $Oz$ .

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$r \in [0, +\infty]$$

$$\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

Декартовы координаты через сферические:

$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \cdot |J| dr d\phi d\theta$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\phi} & \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} = r^2 \sin \theta \Rightarrow r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$$

- элемент объема в сферических координатах.

## 8 Лекция 12

### Свойства криволинейного интеграла II рода

- Криволинейный интеграл второго рода зависит от пути обхода  

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$
- Если кривая - контур замкнутый  $ABCD A \Rightarrow \oint_{+ABCD A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \oint_{-ABCD A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
- Если кривая описывается  $AB = AC + CB, \Rightarrow \int_{AB} P(x, y)Q(x, y)dy = \int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
- Если кривая  $AB$  - прямолинейный отрезок который перпендикулярен  $Ox \Rightarrow \int_{AB} P(x, y)dx = 0$  так как  $x = const, d(const) = 0$
- Если кривая  $AB$  - прямолинейный отрезок который перпендикулярен  $Oy \Rightarrow \int_{AB} Q(x, y)dy = 0$  так как  $y = const, dy = 0$

### Связь криволинейного интеграла I рода с криволинейным интегралом II рода

Рассмотрим  $\int_{AB} P(x, y)dx$ , где  $P(x, y)$  - непрерывная функция вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой. Кривая  $AB$  будет задаваться в явном виде, то есть  $y = \xi(x), x \in [a, b]$  так как кривая непрерывна и функция  $P(x, y)$  со своими производными непрерывна, следовательно в каждой точке кривой можно построить касательную к кривой.  $\xi'_x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \int_{AB} P(x, y)dx = \int P(x, \xi(x))dx = \int P(x, \xi(x)) \cdot 1dx = [\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = 1 \Rightarrow \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)} \Rightarrow \cos \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}] = \int_a^b P(x, \xi(x)) \cos \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} dx = [\sqrt{y'_x + 1} dx = dl] = \int_L P(x, \xi(x)) \cdot \cos \alpha dl$  - криволинейный интеграл I рода.

Аналогично  $\int_{AB} Q(x, y)dy = [x = \phi(y), y \in [c, d]] = \int Q(\phi(y), y) \cdot \cos \beta \sqrt{1 + (\phi'_y)^2} dy = \int_L Q(x, y) \cdot \cos \beta \cdot dl$

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int P(x, \xi(x)) \cdot \cos \alpha + Q(\phi(y), y) \cdot \cos \beta dl = \\ &= \int_L [P(x, y) \cdot \cos \alpha + Q(x, y) \cdot \cos \beta] dl \end{aligned}$$

**Определение 11** (Формула Остроградского-Грина). Если функции  $P(x, y); Q(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными  $\frac{dP}{dy}; \frac{dQ}{dx}$  на рассматриваемой кривой которая полностью лежит в области  $D(x, y)$  то имеет место формула:

$$\oint_{+ABCD A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx dy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть заданная область  $D(x, y)$  ограничена таким образом:

- Кривыми  $y = \phi(x); y = \xi(x)$
- С боков  $BC \parallel Oy; AD \parallel Oy$

Рассмотрим  $\oint_{+ABCD A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  по кускам  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \oint_{+ABCD A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AB} P(x, y)dx + \\ &+ \int_{BC} P(x, y)dx + \int_{CD} P(x, y)dx + \int_{DA} P(x, y)dx \end{aligned}$$

По свойствам криволинейного интеграла  $\int_{DA} P(x, y)dx = \int_{BC} P(x, y)dx = 0$  так как  $x = const \Rightarrow dx = 0$

Подставим наши кривые:

$$\int_{AB} P(x, \phi(x))dx + \int_{CD} P(x, \xi(x))dx$$

Так как  $\frac{dP}{dy}$  - непрерывна на  $L$  и в области  $D \Rightarrow P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dP}{dy} dy$

К нашей формуле мы получим такое выражение:

$$P(x, \xi(x)) - P(x, \phi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy} dy$$

$$\int_a^b P(x, \phi(x))dx + \int_b^a P(x, \xi(x))dx = \int_a^b P(x, \phi(x))dx - \int_a^b P(x, \xi(x))dx =$$

$$= \int_a^b [P(x, \phi(x)) - P(x, \xi(x))]dx = - \int_a^b [P(x, \xi(x)) - P(x, \phi(x))]dx$$

Вспомним, что  $P(x, \xi(x)) - P(x, \phi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy} dy \Rightarrow$

$$- \int_a^b 1dx \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy} dy = - \iint_D \frac{dP}{dy} dy dx = \oint_{+ABCD A} P(x, y) dx$$

- малая формула Грина

Аналогичным образом можно доказать (сами!!!)

$$\oint_{+ABCD A} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{dQ}{dx} dx dy$$

Следовательно:

$$\oint_{+ABCD A} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx dy$$

Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ФОРМУЛЫ ОСТРАГРАДСКОГО-ГРИНА: Если  $P(x, y) = -y$ ;  $Q(x, y) = x$

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_L -y dx + x dy = 2S_D$$

Следовательно, через криволинейные интегралы II рода можно считать площади плоских фигур.

## Криволинейные интегралы II рода независимые от пути интегрирования

Рассмотрим функции  $P(x, y)$ ;  $Q(x, y)$  - непрерывны вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой и в области  $D(x, y)$ , кривая целиком лежит в области  $D(x, y)$

Криволинейный интеграл II рода не зависит от пути интегрирования, если результат вычисления криволинейного интеграла по любым кривым соединяющих точки  $A$  и  $B$  один и тот же.

**Теорема 12.** Если в каждой точке области  $D(x, y)$   $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными и выполняется условия Грина ( $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$ ), то выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy \Rightarrow$

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \Rightarrow$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} du(x, y) = u(x, y)$$

Тогда криволинейный интеграл не зависит от контура.

### Приложение криволинейного интеграла II рода

- Если  $f(x, y)$  - линейная плотность, то  $\int_{AB} f(x, y)dl = m$  - масса дуги.
- $\oint_L xdy - ydx = 2S_D$  - площадь плоской фигуры.
- $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , где  $(P, Q) = F$  - силы перемещения точки,  $(dx, dy) = S$  - перемещение кривой  $\Rightarrow \int FdS = W$  - работа по перемещению точки вдоль контура  $AB$
- $f(x, y) = 1 \Rightarrow \int_{AB} 1dl = L$  - длина дуги

$$W_V + W_\omega + \Delta U = 0 \quad (8.1)$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (8.2)$$

$$v = \omega r \quad (8.3)$$

$$v = at; h = \frac{at^2}{2} \quad (8.4)$$

$$v = \frac{2h}{t} \quad (8.5)$$

$$I = mr^2(\frac{gt^2}{2h} - 1) \quad (8.6)$$

$$mgh - mgh_1 = M(\varphi + \varphi_1) \quad (8.7)$$

$$mgh = M\varphi + \frac{mv^2}{2} + \frac{l\omega^2}{2} \quad (8.8)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi + \varphi_1} = \frac{h}{h + h_1} \quad (8.9)$$

$$M\varphi = mgh \frac{h - h_1}{h + h_1} \quad (8.10)$$

$$I = mr^2(\frac{gt^2}{h} \cdot \frac{h_1}{h + h_1} - 1) \quad (8.11)$$