α

Лекция 1

«Комплексные числа»

Содержание лекции:

В данной лекции рассматривается множество комплексных чисел. В качестве введения кратко приводится история комплексных чисел и мотивация для их рассмотрения. Далее дается определение комплексных чисел, операций введенных для них и доказываются свойства этих операций. Также рассматриваются различные формы представления комплексных чисел и возможности, которые они предоставляют. Итогом лекции должно стать сформированное представление о структуре множества комплексных чисел и о базовых методах работы с ними.

Ключевые слова:
Комплексное число, поле, мнимая часть, вещественная часть, модуль комплексного числа, аргумент комплексного числа, сопряженное комплексное число, алгебраическая форма, тригонометрическая форма, показательная форма, тождество Эйлера, возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня из комплексного числа

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Комплексные числа. Основные понятия

С зари математики и на протяжении всей истории человек пытался понять, достаточно ли ему тех "инструментов" (в данном случае математических) для описания всего того, что есть вокруг него. Историю развития математики можно сравнить с постепенным изучением математики ребенком. Сначала мы изучаем только натуральные числа, чтобы научиться считать яблоки и конфеты. Затем начинаем понимать, что есть число, обозначающее отсутствие чего-то - ноль, а также отрицательные числа, которые вместе образуют множество целых чисел. И этого оказалось недостаточно - появились рациональные числа, а за ними и все множество вещественных чисел. Оказалось ли этого достаточно? До определенной поры - да, но как всегда не без подводных камней.

1.1.1 История комплексных чисел

Комплексные числа впервые появились при решении кубических уравнений. Рассмотрим следующий пример, уже ставший классическим.

$$x^3 = 15x + 4$$

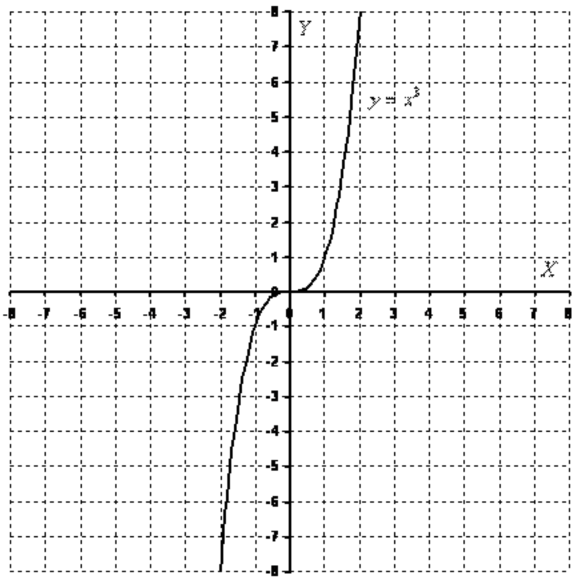

Рис. 1.1: Кубическая парабола

Если подходить к решению уравнения чисто геометрически, то будет очевидно, что уравнение всегда имеет хотя бы одно решение. Более того, это справедливо для любого уравнения вида:

$$x^3 = kx + b$$

При любых значениях k и b найдется такой x, что это равенство будет справедливо.

Для решения кубических уравнений еще в XIV веке были известны формулы Кардано, которые утверждают, что для таких уравнений решение ищется в виде:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\Phi}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\Phi}},$$

где $\Phi = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{3}\right)^2$.

Для рассматриваемого нами примера получаем следующее:

$$\Phi = -121$$

Следовательно корень будет определяться выражением

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Формулы оказались неверными!? Если из геометрических соображений имеем, что всегда имеется хотя бы один вещественный корень для любых коэффициентов, то соответственно либо формулы неверны, либо не хватает еще чего-то, чтобы описать решение.

Рафаэль Бомбелли в попытке выйти из тупика предположил, что с отрицательными под корнем числами можно действовать как и с обычными.
Им было обнаружено, что

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Давайте убедимся в этом, проверив равенство со знаком "+".

$$(2 + \sqrt{-121})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Второе равенство, со знаком "$-$" доказывается аналогично. Тогда для решения исходного уравнения получаем, что

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

Результатом суммы двух таких "странных" корней стало обычное действительное число, которое мы и желали получить.
Такие числа, числа с корнями из отрицательных чисел, с подачи Декарта начали называть мнимыми (лат. imaginarius). Позднее Эйлером было введено специальное обозначение, к которому мы в дальнейшем придем.

$$\sqrt{-1} = i$$

1.1.2 Введение в комплексные числа

Как описать новые числа, обладающие такими свойствами? Вспомним, что рациональные числа, помимо более привычного нам представления в виде обыкновенной дроби, можно определить как упорядоченную пару чисел (m, n), где m - целое число, а n - это натуральное. Используя такое определение достаточно легко ввести все операции с числами, а также обосновать их свойства. Воспользуемся этим же принципом и для нового вида чисел, а операции введем таким образом, чтобы в конечном итоге прийти к особенности, с которой и началась их история.

> **Комплексное число** - упорядоченная пара вещественных чисел (a, b), для которой справедливы следующие свойства:

1. **Равенство двух чисел.** Два комплексных числа будем называть равными тогда, когда равны соответствующие числа в парах с учетом их порядка. Иными словами,

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

2. **Сложение чисел.** Суммой двух комплексных чисел будем называть такое комплексное число, компоненты которого будут определяться суммами соответствующих компонент слагаемых.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3. **Умножение чисел.** Умножение комплексных чисел с одной стороны можно было ввести также как и сложение, как покомпонентную операцию, однако в таком случае мы бы не смогли получить заветные свойства, а в этом основная цель. Умножение комплексных чисел введем несколько нетривиальным образом, смысл которого во всей свой полноте раскроется в дальнейшем.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

4. **Связь с вещественными числами.** Должны ли быть комплексные числа оторваны от остальных? Наверное, нет. Между некоторыми рациональными числами мы можем провести взаимно однозначное соответствие с целыми, точно также и здесь хотелось бы иметь связь между комплексными числами и наиболее близким к ним множеством чисел - вещественными. В связи с этим принимаем, что между комплексными числами, в которых второй элемент пары равен нулю, существует взаимно однозначное соответствие с вещественными числами.

$$(a, 0) \leftrightarrow a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Последний пункт в некотором роде означает, что вещественные числа являются подмножеством комплексных чисел. Это означает, что известные нам операции с вещественными числами и отношение равенства вещественных чисел должны быть согласованы с пп.1-3. Убедимся в этом.

1. **Согласованность равенства.** Равенство двух вещественных чисел в представлении их как комплексных чисел будет всегда справедливо, т.к. очевидно, что $0 = 0$.

$$(a, 0) = (c, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2. **Согласованность сложения.**

$$a + b \leftrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \leftrightarrow a + b$$

   В первом переходе мы воспользовались тем, что каждое число представили в его комплексной форме, а во втором совершили обратное преобразование, т.к. получили снова вещественное число.

3. **Согласованность умножения.** Аналогично и с умножением.

$$a \cdot b \;\leftrightarrow\; (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0) \;\leftrightarrow\; a \cdot b$$

На этом моменте мы можем считать, что как минимум введенные операции для комплексных чисел и опредение равенства не противоречат тому, что мы знаем о вещественных числах.

Nota bene Что будет с комплексным числом (a, b), если его умножить на некоторое действительное число α? Проверим.

$$(a, b)\alpha \leftrightarrow (a, b)(\alpha, 0) = (a\alpha - 0, b\alpha + 0) = (a\alpha, b\alpha)$$

Занимательно, что умножение на действительное число приводит к умножению каждой части комплексного числа на это самое число.

Несколько важных терминов

Вещественной частью комплексного числа называют первый компонент пары $z = (a, b)$. Для нее используют обозначение

$$a = \operatorname{Re} z$$

Мнимой частью комплексного числа называют второй компонент пары $z = (a, b)$. Для нее используют обозначение

$$b = \operatorname{Im} z$$

Мнимым числом называют число с ненулевой мнимой частью.

Чисто мнимым числом называют число с нулевой действительной частью.

Nota bene Существуют ли чисто мнимое число, не являющееся мнимым?

1.2 Свойства операций с комплексными числами

Известно, что для вещественных чисел выполняется ассоциативность, коммутативность, существует "ноль" и "единица". Что можно сказать про комплексные числа?

1. **Ассоциативность относительно сложения.**

$$((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$$

Доказательство.
Воспользуемся определением сложения для слагаемых в скобках левой части, а затем и также во втором сложении.

$$(a+c,b+d)+(e,f)=((a+c)+e,(b+d)+f)$$

Однако в силу ассоциативности сложения для вещественных чисел можно переставить скобки внутри каждой из сумм, что приводит нас к правой части свойства.

$$(a+(c+e),b+(d+f))=(a,b)+(c+e,d+f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$$

2. **Коммутативность относительно сложения.**

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$$

Доказательство.
Справедливость этого свойства также следует напрямую из аналогичного свойства для вещественных чисел.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$$

3. **Существование нулевого элемента.** Нулевым элементом называют такой элемент, который не изменяет другой при операции сложения. Обозначим его пока что как (α,β).

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)+(\alpha,\beta)=(a,b)$$

Что это за элемент? Воспользуемся определениями сложения и равенства, чтобы выяснить:

$$(a,b)+(\alpha,\beta)=(a+\alpha,b+\beta)=(a,b)\Longleftarrow\begin{cases}a+\alpha=a\\ b+\beta=b\end{cases}$$

Однако, опять же из свойств вещественных чисел, следует, что для любых a и b единственные α и β, которые могут удовлетворять равенствам - это нулевые. Соответственно получаем, что

$$(\alpha,\beta)=(0,0)\leftrightarrow 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что числа с нулевой мнимой частью - это есть вещественные, а значит знакомый вещественный ноль является также нулем и для комплексных чисел.

4. **Существование противоположного элемента.** Противоположным элементом к элементу (a, b) называют такой элемент, который в сумме с (a, b) дает нулевой элемент.

$$\exists\, (\alpha, \beta) : (a, b) + (\alpha, \beta) = (0, 0)$$

Выясним, что это за элемент. Для этого, как в предыдущем свойстве, воспользуемся определениями операций:

$$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta) = (0, 0) \Longleftarrow \begin{cases} a + \alpha = 0 \\ b + \beta = 0 \end{cases}$$

Из этих равенств следует, что $\alpha = -a$ и $\beta = -b$. Следовательно противоположным элементом к (a, b) будем называть элемент $(-a, -b)$. Можно заметить, что он получается путем умножения комплексного числа (a, b) на число -1. Это позволяет определить операцию разности родственную сложению как

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-1)(c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$$

5. **Ассоциативность относительно операции умножения.**

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

Доказательство.
Для доказательства данного свойства запишем следующую цепочку равенств, которая приводит нас к искомому результату. Начнем с правой части равенства.

$$(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) =$$

$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) =$$

$$((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f)$$

Свойство доказано в силу ассоциативности свойства умножения вещественных чисел.

6. **Коммутативность относительно операции умножения.**

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

Доказательство.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b)$$

7. **Дистрибутивность сложения относительно умножения**

$$((a,b)+(c,d))\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$$

Доказательство.

$$((a,b)+(c,d))\cdot(e,f)=(a+c,b+d)\cdot(e,f)$$

$$((a+c)e-(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)=$$

$$=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de)=$$

$$=(ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+be)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$$

8. **Существование единицы.** Единичным элементом, единицей, называют такой элемент, который не меняет комплексное число при умножении на него.

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a,b)$$

Можно предположить, что по аналогии с нулевым элементом, единичным будет $(1,1)$, но можно также предположить, что это будет вещественная единица $1\leftrightarrow(1,0)$. Что из этого правда? Воспользуемся определением произведения двух чисел.

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta,a\beta+b\alpha)=(a,b)$$

Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}a\alpha-b\beta=a\\ a\beta+b\alpha=b\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\alpha=1$ и $\beta=0$ в предположении, что a и b ненулевые. Соответственно единичным элементом множества комплексных чисел является элемент $(1,0)$, который соответствует вещественной единице.

9. **Существование обратного элемента.** Обратный элемент - это такой, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу.

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(1,0)$$

Найдем обратный элемент.

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta,a\beta+b\alpha)=(1,0)$$

Приведем равенство комплексных чисел к равенству вещественных и мнимых частей.

$$\begin{cases}a\alpha-b\beta=1\\ a\beta+b\alpha=0\end{cases}$$

Чтобы в самом начале не делать никаких предположений о числах a и b, которые необходимы для того чтобы выразить например a из второго уравнения, поступим следующим образом. Домножим первое уравнение на a, а второе на b и сложим их.

$$a^2\alpha + b^2\alpha = a$$

Следовательно, вещественная часть обратного комплексного числа равна

$$\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Подставляя его во второе равенство для мнимой части, получаем

$$\beta = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Мы получили общий вид для обратного элемента:

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

Здесь важно сделать несколько замечаний. Во-первых, мы не можем вычислить обратный элемент для нулевого. Это следует напрямую из найденного способа нахождения обратного элемента. Во-вторых, обратный элемент определяется единственным образом. Доказательство единственности обратного элемента встретится не раз, поэтому приведем такое доказательство, которое бы не зависело от природы рассматриваемого множества.

Пусть комплексное число z не является нулевым. Обозначим его обратный элемент как z^{-1}. Предположим, что существует еще некоторое комплексное число w, которое также является обратным. Рассмотрим следующую цепочку равенств

$$w = w \cdot 1 = w(zz^{-1}) = (wz)z^{-1} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$$

Не прибегая к каким-то ограничением кроме отличия от нуля и абстрагируясь от природы элементов мы выяснили, что обратный элемент, если существует, является единственным.

> Множество элементов с введенными операциями сложения и умножения, обладающими рассмотренными свойствами 1-9 называется **полем**.

Мы доказали все эти свойства для комплексных чисел, а следовательно доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. *Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с введенными операциями сложения и умножения образует поле.*

Примеры полей среди числовых множеств известны еще со школы. При доказательстве практически каждого свойства комплексных чисел мы опирались на аналогичные свойства вещественных чисел, которые известны больше интуитивно. И действительно, множество вещественных чисел также образует поле. Аналогично и множество рациональных чисел также является полем, потому что для него справедливы все перечисленные свойства. Однако уже нельзя утверждать, что целые числа образуют поле - в них нельзя ввести обратный элемент такой, чтобы он также принадлежал этому же множеству.

Комплексно сопряженное число

Рассмотрение обратного элемента для $z = (a, b)$ привело нас к следующему числу

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Для самого обратного элемента справедливо, что

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

Домножим обе части этого равенства на $a^2 + b^2$ и по свойству умножения на вещественное число получим

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 + b^2, 0) \leftrightarrow a^2 + b^2$$

> Комплексное число $\bar{z} = (a, -b)$ называют **комплексно сопряженным** числом к числу $z = (a, b)$.

Иными словами, комплексно сопряженное число получается из некоторого комплексного числа заменой его мнимой части на противоположное число. Можно также заметить, что произведение комплексно сопряженных чисел - это всегда вещественное число.

Операция нахождения комплексно сопряженного числа обладает некоторыми свойствами, которые приводим без доказательства

1. Дважды примененная операция сопряжения дает само комплексное число. Это свойство называют идемпотентностью сопряжения.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

2. Сопряженное комплексное число от суммы чисел равно сумме комплексно сопряженных от этих чисел.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

3. Аналогично с умножением.

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

4. Если комплексное число равно ему сопряженному, то оно является вещественным.

$$z = \overline{z} \implies z \in \mathbb{R}$$

Операция комплексного сопряжения позволяет также говорить о делении комплексных чисел. Действительно, мы не можем определить деление комплексных чисел "в лоб". Однако деление на вещественные числа нам отлично знакомо. Для того чтобы разделить комплексное число z на комплексное число w, отличное от нуля, домножим числитель и знаменатель дроби на комплексно сопряженное к w число

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$$

Тогда в числителе получается обычное умножение комплексных чисел, а знаменатель - вещественное число.

1.3 Формы представления комплексного числа

Рассмотрение комплексных чисел как упорядоченной пары вещественных чисел позволило нам доказать массу интересных свойств. Однако работа с ними в таком виде кажется несколько неудобной и, как минимум, непривычной. В зависимости от того, с какой целью используются комплексные числа, гораздо комфортнее выбирать одно или другое представление, лучше раскрывающее сильные стороны этих объектов.

1.3.1 Геометрическая интерпретация

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Между множеством комплексных чисел и множеством точек на плоскости существует взаимно однозначное соответствие. В связи с этим можно ввести геометрическую интерпретацию комплексных чисел как векторов на плоскости, где ось абсцисс представляет собой вещественную часть комплексных чисел, а ось ординат образуется чисто мнимыми числами:

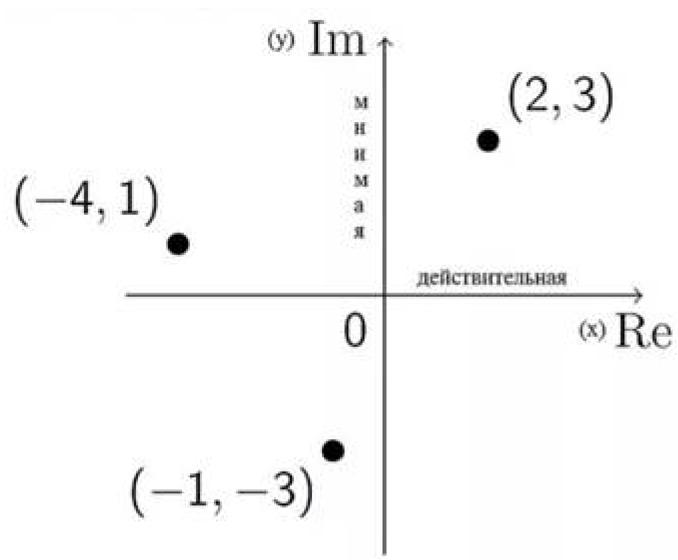

Рис. 1.2: Комплексная плоскость

Такое представление позволяет наглядно увидеть, что представляет собой результат различных операций с комплексными числами. Например, противоположным комплексным числом будет вектор комплексной плоскости симметричный относительно точки отсчета системы координат, а сопряженным комплексным числом - симметричный относительно вещественной оси. Сумма комплексных чисел прекрасным образом согласуется с "правилом параллелограмма" известного из школьной геометрии, а умножение на вещественное число - с масштабированием вектора вдоль прямой, на которой он лежит.

Геометрическое представление помогает приблизиться к пониманию некоторых действий с комплексными числами, но все еще могут оставаться "белые пятна". Какой геометрический смысл заложен в умножении и делении чисел? Как в геометрической интерпретации понять, что есть корень из отрицательного числа? Ответы на эти и другие вопросы позволяют получить другие формы и представления комплексных чисел.

1.3.2 Алгебраическая форма

Из школьной геометрии известно, что любой вектор можно представить в виде разложения по единичным векторам осей i и j в декартовой прямоугольной системе координат, умноженным на соответствующие проекции.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

Мы провели соответствие между векторами такой системы координат и комплексной плоскости с сохранением свойств некоторых операций. Означает ли это, что если, скажем, введем единичные вектора вещественной оси I и мнимой оси i, то комплексное число можно представить аналогичным образом?

$$z = a\mathrm{I} + b\mathrm{i}$$

Чтобы удостовериться в этом, проверим как будет выглядеть произведение двух комплексных чисел в таком представлении

$$z_1z_2 = (a\mathrm{I} + b\mathrm{i})(c\mathrm{I} + d\mathrm{i}) = ac\mathrm{I}^2 + bd\mathrm{i}^2 + \mathrm{iI}(ad + bc)$$

Для продолжения рассуждений, нужно понять, чему равны произведения единичных векторов на себя и друг на друга. Воспользуемся тем, что каждый единичный вектор - это также комплексное число

$$\mathrm{I} = (1, 0) \leftrightarrow 1, \quad \mathrm{i} = (0, 1)$$

Единичный вектор вещественной оси I - это всего лишь обычная вещественная единица, поэтому в дальнейшем *мы будем его вообще опускать*, как и умножение комплексного числа на этот единичный вектор, т.к. это единичный элемент как для вещественных чисел, так и для комплексных. Теперь посмотрим на квадрат "мнимой единицы", т.е. единичного вектора мнимой оси.

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0) \leftrightarrow -1$$

Таким образом мы получили, что квадрат мнимой единицы равен отрицательному числу, или что тоже самое, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, но это и есть тот факт, существование которого пришлось принять Бомбелли для нахождения решения кубического уравнения!

Завершим рассуждение с произведением комплексных чисел, помня о том, что мы договорились опускать I, являющийся вещественной единицей.

$$z_1 z_2 = ac + bd \cdot (-1) + \mathrm{i}(ad + bc) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$$

Полученное комплексное число $(ac - bd, ad + bc)$ - результат, в точности согласующийся с правилом умножения комплексных чисел, который мы ввели в самом начале!

Такая форма взаимодействия с комплексными числами сводит все операции с комплексными числами к обычным алгебраическим действиям, учитывая только, что $\mathrm{i}^2 = -1$.

> Форма записи комплексного числа $z = (a, b)$ в виде $z = a + \mathrm{i}b$ называется **алгебраической формой**.

Помня о том, что вещественную часть мы обозначали как $\operatorname{Re} z$, а мнимую - $\operatorname{Im} z$, алгебраическая форма позволяет записать:

$$z = a + \mathrm{i}b = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$$

1.3.3 Тригонометрическая форма

Выполнять операции сложения и сопряжения удобно в рассмотренных ранее формах, но операция умножения чисел не стала более очевидной в геометрической интерпретации. Для этого перейдем к несколько иной форме записи комплексного числа.

Как можно однозначно определить вектор на плоскости? С одной стороны, мы знаем, что это можно сделать с помощью декартовых координат, но точно также однозначно вектор определяют его длина и угол, отсчитываемый от вещественной оси против часовой стрелки. Такие координаты вектора называются полярными.

> **Тригонометрической формой** записи комплексного числа называют представление комплексного числа, аналогичного полярным координатам.

Чтобы получить вид тригонометрической формы, продолжим геометрическую аналогию. Каждый вектор на декартовой плоскости имеет длину. Длина вектора однозначно определяется его координатами как корень из суммы квадратов его координат. Такую характеристику комплексного числа мы уже встречали - она получалась произведением комплексного числа на сопряженное к нему. Действительно

$$z\overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2$$

> **Модулем** комплексного числа $z = a + \mathrm{i}b$ называют

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Следовательно

$$z\overline{z} = |z|^2$$

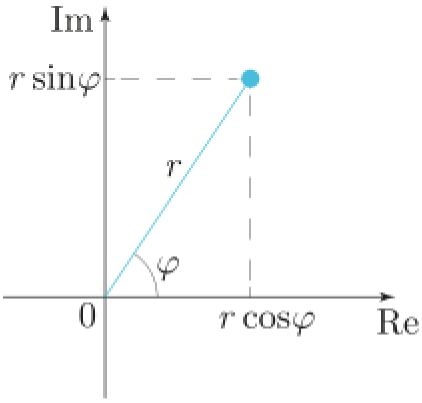

Рис. 1.3: Комплексная плоскость

Характеристика комплексного числа аналогичная полярному углу называется аргументом.

> **Аргументом** $\phi = \mathrm{Arg}z$ комплексного числа $z = a + ib$ назовем угол между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором, проведенным в точку.

Nota bene Важно заметить, что аргумент $\mathrm{Arg}z$ определяется неоднозначным образом, а с точностью до 2π. В связи с этим иногда имеет смысл выделять главную часть аргумента $\arg z$, лежащую в полуинтервале $[0, 2\pi)$.

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Найдем теперь саму тригонометрическую форму. Из геометрического построения для векторов видно, что

$$\begin{cases} a = \mathrm{Re}\, z = r\cos\phi \\ b = \mathrm{Im}\, z = r\sin\phi \end{cases}$$

Учитывая все выше сказанное, тригонометрическую форму можно записать в виде

$$z = a + \mathrm{i}b = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z = r\cos\phi + \mathrm{i}r\sin\phi = r\left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right)$$

Nota bene Два комплексных числа будем называть равными в их тригонометрической форме, если равны их модули, а также **главные части** аргументов. Действительно, два комплексных числа имеющие равные модули, но аргументы отличающиеся лишь на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ будут определять одну и ту же точку на комплексной плоскости.

1.3.4 Показательная форма

Прежде чем перейдем к обсуждению особенностей тригонометрической формы, рассмотрим еще одно представление комплексного числа, родственного к ней.

В XVIII веке Леонард Эйлер предложил ввести экспоненту с мнимым показателем, определенную следующим образом

$$e^{i\phi} = cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$$

С ее помощью можно ввести еще одну форму, которая называется показательной:

$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

Nota bene Благодаря этому представлению можно получить знаменитое тождество Эйлера.

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Получить его несложно. Рассмотрим число -1 как комплексное. Вещественное число всегда лежит на оси абсцисс. Соответственно главная часть аргумента может быть равно либо 0, либо π для положительных и отрицательных чисел соответственно. Следовательно имеем

$$-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$$

Для получения тождества Эйлера достаточно перенести все слагаемые в одну часть. Это тождество называют одной из самых красивых вещей в математике, т.к. оно отражает глубочайшую связь между различными объектами математики.

- Ноль - нейтральный элемент по сложению.
- Единица - нейтральный элемент по умножению.
- Мнимая единица, отражающая особенность комплексных чисел.
- Число π, показывающее связь между длиной окружности и диаметром.
- Число e, основание натурального логарифма, которое также является одной из основных констант математики

1.4 Применение тригонометрической и показательной формы

1.4.1 Умножение чисел

Как будет выглядеть умножение в тригонометрической форме? В показательной? Рассмотрим произведение двух комплексных чисел в тригонометрической форме.

$$z_1z_2 = r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\sin\phi_2) =$$
$$= r_1r_2\left((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + \mathrm{i}(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)\right)$$

Можно заметить, что вещественная часть - это формула косинуса суммы, а мнимая - синуса суммы. Тогда

$$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 + \phi_2)\right)$$

В таком виде уже можно говорить о геометрической интерпретации. Результатом умножения двух комплексных чисел является такое число, модуль которого равен произведению модулей множителей, а аргумент - сумме аргументов. Грубо говоря, умножение некоторого числа на другое приводит к его повороту и изменению длины в какое-то количество раз. Эта геометрическая интерпретация также отлично согласуется с показательной формой.

$$z_1 z_2 = r_1 e^{\mathrm{i}\phi_1} \cdot r_2 e^{\mathrm{i}\phi_2} = r_1 r_1 e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и деление двух комплексных чисел - модуль результата будет равен отношению модулей, а аргумент результата - разность делимого и делителя.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{\mathrm{i}\phi_1}}{r_2 e^{\mathrm{i}\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}$$

Либо тоже самое в тригонометрической форме.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1-\phi_2))$$

Nota bene Стоит заметить, что число 0 не определяется однозначно ни в показательной, ни в тригонометрической форме.

1.4.2 Комплексно сопряженное число

Комплексно сопряженное число к числу $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, с точки зрения геометрической интерпретации, получается обращением знака аргумента

$$\overline{z} = r(\cos(-\phi) + \mathrm{i}\sin(-\phi))$$

Функция косинуса является четной, а синуса - нечетной. Следовательно

$$\overline{z} = r(\cos\phi - \sin\phi)$$

Мы получили комплексное число, которое отличается от z лишь знаком мнимой части, а это и есть определение сопряженного числа.

1.4.3 Возведение в степень и извлечение корня

Что будет с числом, если возвести его в натуральную степень? Проверим.

$$z^n = (r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi))^n = r^n(\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi))$$

Возведение в степень комплексного числа в натуральную степень приводит к увеличению модуля в ту же самую степень и умножению аргумента на это натуральное число. Это утверждение справедливо напрямую из определения умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.

Здесь все однозначно. Так ли однозначно с извлечением корня?

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)} = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$$

Можно ли сказать, что $\rho = \sqrt[n]{z}$ и $\psi = \frac{\phi}{n}$? Проверим это, применив, обратную операцию - возведение в степень.

$$z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$$

$$z = \left(\sqrt[n]{z}\right)^n = \rho^n\left(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi\right)$$

Сравнивая модули разных представлений комплексных чисел, получаем

$$r = \rho^n \quad \to \quad \rho = \sqrt[n]{r}$$

С аргументом комплексных чисел не все так однозначно в силу того, что он определяется неоднозначным образом. Предположим, что аргумент числа z определяется с точностью до $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\phi + 2\pi k = n\psi \quad \to \quad \psi = \frac{\phi + 2\pi k}{n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)$$

Можно задаться вопросом, а при всех ли k мы получим различные значения углов ψ? На самом деле это так, но с некоторым нюансом. Углы действительно получатся разные для любого k, но главная часть аргумента будет отличаться только для конечного набора значений k.

Действительно, предположим, что $k = n + k'$, для некоторого $k \geq n$, и тогда $k' > 0$. Посмотрим на значение угла в данном случае

$$\psi = \frac{\phi + 2\pi(n + k')}{n} = \frac{\phi + 2\pi k'}{n} + 2\pi$$

В таком случае получаем, что если значения k отличаются в точности на n, то главная часть полученных аргументов будет одинакова. Следовательно они будут определять одни и те же комплексные числа.

Из этого можно сделать вывод, что число корней из комплексного числа всегда конечно и равно n. Их можно получить из формулы, написанной выше, для всех k из множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.4.4 Корни из единицы

Самым важным и наиболее показательным примером, пожалуй, является извлечение корней из единицы, т.к. эти значения являются решениями уравнения

$$x^n - 1 = 0$$

Модуль после извлечения корня не изменяется, но интересно наблюдать за тем, какие будут аргументы. Рассмотрим несколько примеров.

- При $n = 2$.

$$\sqrt{1} = \cos\frac{2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{2}, \quad k \in \{0, 1\}$$

Рассматривая при различных k, получаем

$$\sqrt{1} = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0 = 1, \quad k = 0$$
$$\sqrt{1} = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi = -1, \quad k = 1$$

Следовательно мы получим два комплексных числа являющихся корнями 2-ой степени из единицы. Действительно, при возведении в квадрат каждого из этих чисел мы получаем единицу.

- При $n = 3$.

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi k}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Рассматривая при различных k, получаем

$$z_1 = \sqrt[3]{1} = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0 = 1, \qquad k = 0$$
$$z_2 = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad k = 1$$
$$z_3 = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad k = 2$$

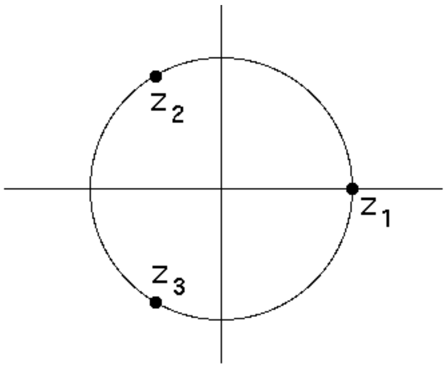

Рис. 1.4: Кубические корни из единицы

Можно увидеть, что корни образуют правильный треугольник с одной из вершин в единице и центром в нуле.

- При $n = 4$.
В данном случае вычисления приведут к следующему множеству корней:

$$\{1, +i, -1, -i\}$$

Эти комплексные числа также образуют правильный многоугольник, но только уже с 4 вершинами - квадрат, одна из вершин которого также лежит в единице.

Замеченная нами особенность не является частным случаем лишь для рассмотренных примеров. Можно утверждать, что для любого n комплексные числа, являющиеся корнями из единицы степени n образуют правильный n-угольник с вершиной в единице и центром в нуле.

Nota bene Также можно заметить, что при четных n корнями всегда будут являться 1 и -1, а все комплексные корни будут входить в множество корней вместе со своими комплексно сопряженными. В случае нечетного n второе утверждение также справедливо, но вещественный корень будет только один - $z = 1$.

Заключение

При первом знакомстве с комплексными числами может показаться некая иррациональность их введения. Они не встречаются в повседневности и иногда кажется, что в даже каких-то неповседневных задачах их можно избежать. При более глубоком рассмотрении комплексных чисел оказывается, что они являются даже более логичными, системными и обоснованными, чем вещественные числа (см.алгебраически замкнутое поле). Естественно одни лишь алгебраические свойства не смогли бы убедить в их огромнейшей ценности для науки, но следствием этих свойств оказалось, что комплексные числа сплошь и рядом применимы во многих областях науки. Электроника, средства связи, но также и разделы фундаментальной науки - квантовая механика, теория поля и другие повсеместно используют их. Иногда в силу красоты и удобства, иногда в силу необходимости. По мере изучения тех или иных объектов математики и их приложений комплексные числа обязательно раскроются во всей своей полноте.

Список литературы

1. Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре. Глава 2.
   Основной источник для теории

2. Н.В.Деменева. Комплексные числа. Учебное пособие.
   Много геометрических построений - полезно тем, у кого визуальное мышление

3. Т.В. Родина. Комплексные числа. Учебное пособие. ИТМО
   Теория снабжена большим количеством примеров. Также рассматривается построение областей на множестве комплексных чисел - не рассматривали, но полезно почитать тем, кто хочет копнуть еще.