α

Лекция 10

«Кривые второго порядка»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

10.1 Линии на плоскости

Рассматривая объекты на плоскости, наиболее пристальное внимание мы обращали на прямую. Нами она определялась как геометрическое место точек, обладающих одним определенным свойством - равноудаленность от двух заданных точек. Это понятие можно обобщить.

> **Линией** на $\mathbb{R}$ будем называть геометрическое место точек, обладающих одинаковым свойством, общим для всех точек линии.

С угла зрения аналитической геометрии одного лишь задания свойства линии недостаточно. Для некоторых объектов хотелось бы иметь аналитические соотношения, которые бы отражали эти свойства.

> Уравнением линии на $\mathbb{R}$ называется такая связь между координатами x и y, что координаты любой точки линии удовлетворяют уравнению этой линии, тогда как координаты любой точки вне линии не удовлетворяют ее уравнению.

Действительно, такие примеры мы уже видели: уравнения отрезка и прямой. Вторая же, в свою очередь, порождает целый "зоопарк" уравнений, которые можно объединить в три группы. Эти три способа характерны в целом для линий.

Способы задания линий:

1. Явное задание линии. Уравнение разрешено относительно одной из координат:
$$y = f(x), \qquad x = g(y)$$
2. Неявное задание линии. Уравнение не разрешено относительно какой-либо из координат:
$$F(x, y) = 0$$
3. Параметрическое задание линии. Каждая координата определяется неким параметром
$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

Неявный способ задания линии позволяет ввести классификацию, основываясь на виде функции.

> Уравнение $F(x, y) = 0$ называется целым алгебраическим уравнением, если левую часть можно представить в виде полинома от двух переменных
> $$F(x, y) = a_1 x^{m_1} y^{n_1} + \ldots + a_k x^{m_k} y^{n_k}, \qquad m_i, n_i \in \mathbb{N}_0$$
> Порядком алгебраического уравнения p называется порядок полинома:
> $$p = \max_{i=1,..,k} \{m_i + n_i\}$$

Некоторые из обсуждаемых в курсе линий могут быть описаны с помощью алгебраических уравнений. Такие линии будем называть *алгебраическими*. Ранее рассмотренная прямая является алгебраической линией 1-го порядка.

Рассмотрим далее **кривые 2-го порядка** - линии, уравнения которых можно представить в виде алгебраического уравнения 2-го порядка.

10.2 Эллипс

Прямая, не грех повторить, определялась как геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных. Небольшая модификация этого геометрического свойства приводит нас к другому типу линии.

> **Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) плоскости есть величина постоянная.

Расположим систему координат таким образом, что ось Ox будет проходить через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а ось Oy через середину отрезка, который они образуют. Длина этого отрезка $|F_1F_2| = 2c$ называется фокусным расстоянием. В соответствии с этим фокусы будут иметь координаты

$$F_1(-c, 0), \qquad F_2(c, 0)$$

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую эллипсу. Для нее справедливо, что

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a = const,$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - фокальные радиусы, проведенные в точку $M(x, y)$. Легко найти модули этих векторов.

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Подставим эти выражения и преобразуем уравнение.

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Введем обозначение $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда становится очевиден смысл введенных параметров a и b - это точки пересечения эллипса с координатными осями.

> Уравнение вида
>
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = a^2 - c^2$$
>
> называют **каноническим уравнением эллипса**, где a и b - большая и малая полуось соответственно.

Покажем, что полученное уравнение соответствует определению.

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 \pm 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x \pm a\right)^2} = |a \pm \varepsilon x|,$$

где величину $\varepsilon = \frac{c}{a}$ назовем эксцентриситетом ээлипса. Сами уравнения

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x$$

называются рациональными уравнениями эллипса. Их прямая подстановка убеждает нас в корректности полученного уравнения.

Частные случаи

1. Окружность. Действительно, при $c = 0$ фокусы "сливаются" в одну точку, а следовательно $r_1 = r_2 = a = R$ - все точки окружности равноудалены от ее центра. Эксцентриситет окружности равен $\varepsilon = 0$, что позволяет характеризовать его как степень отличность эллипса от окружности.

2. Отрезок. Обратный случай. Возьмем $c = a$, тогда расстояние между фокусами непременно должно равняться параметру a. Множество точек, обладающих таким свойством - отрезок, его эксцентриситет равен $\varepsilon = 1$.

Очевидно, что для всякой точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу E справедливы следующие утверждения:

- $M_1(-x, y) \in E$ - осевая симметрия относительно Oy;

- $M_2(x, -y) \in E$ - осевая симметрия относительно Ox;

- $M_3(-x, -y) \in E$ - центральная симметрия относительно O;

Система координат, которая была изначально введена для построения эллипса, называется канонической системой координат. Обобщим, на будущее, это понятие для всех кривых.

> **Канонической системой координат** для произвольной кривой называется такая система координат, оси которой являются осями симметрии кривой, а начало координат - центром симметрии кривой. При этой уравнение кривой в заданной системе координат называется каноническим уравнением данной кривой.

Параметрические уравнения эллипса

Из вида канонического уравнения нетрудно предположить параметрическую форму данной кривой:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Откуда легко следуют параметрические уравнения окружности и даже отрезка (его несложно соотнести с полученным ранее параметрическим уравнением отрезка).

Уравнение касательной к эллипсу

Напомним, что касательной к линии называется прямая, имеющая с ней одну общую точку.

Теорема 10.1. *Уравнение касательной к эллипсу в заданной точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

►
Доказательство произвести самостоятельно, подставляя параметрические уравнения прямой в каноническое уравнение эллипса. ◄

Директрисы эллипса

> **Директрисами эллипса** называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии a/ε.

Теорема 10.2. *(**Директориальное свойство эллипса**) Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε)*
Это означает, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

Оптическое свойство эллипса

Эллипс, в силу своего определения, имеет замечательное свойство, которое наблюдается в явлениях отражения света. Представим, что "внутренняя поверхность" эллипса зеркальна. Допустим в один из фокусов эллипса помещен точечный источник света. Он испускает луч, падающий в некую точку эллипса и отражается от нее. Отраженный луч опустится в точности во второй фокус эллипса. Данный факт доказывается следующей теоремой.

Теорема 10.3. *(**Оптическое свойство эллипса**) Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в этой точке.*

10.3 Гипербола

Если эллипс определялся как геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до фокусов остается постоянной, то почему бы рассмотреть их разность?

> **Гиперболой** называется геометрическое место точек плоскости таких, что модуль разности расстояний от этих точек до двух фиксированных точек плоскости (фокусов) остается постоянным.
>
> $$|r_1 - r_2| = 2a = const, \qquad |F_1F_2| = 2c, \qquad 0 \leq a \leq c, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}$$

В силу того, что определение гиперболы до крайней степени похоже на определение эллипса, вид уравнений, свойства, а также их теоремы и их доказательства будут очень похожи. Поэтому для описания гиперболы ограничимся тезисным описанием.

1. Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2,$$

где a и b - вещественная и мнимая ось соответственно.

2. Рациональные уравнения гиберболы

$$r_1 = |a + \varepsilon x|, \qquad r_2 = |a - \varepsilon x|$$

3. Компоненты связности гиперболы

$$|r_1 - r_2| = 2a > 0, \Longrightarrow \left[\begin{aligned} r_1 > r_2 \\ r_2 > r_1 \end{aligned}\right.$$

Правая ветвь:

$$r_1 > r_2, \qquad x > a, \qquad r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = \varepsilon x - a$$

Левая ветвь:

$$r_2 > r_1, \qquad x < -a, \qquad r_1 = -a - \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x$$

4. Частный случай. Ось Oy. При

$$a = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon = \infty$$

5. Частный случай. Два луча на Ox. При

$$a = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon = 1$$

6. Симметрии. Также наблюдаются осевые и центральная симметрии

7. Параметрические уравнения гиперболы. Определяются схожим образом, но не через тригонометрические синус и косинусс, а гиперболические

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

8. Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

9. Директрисы гиперболы. Аналогично директрисам эллипса - прямые, параллельные мнимой оси и находящиеся на расстоянии a/ε

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \qquad \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

10. Оптическое свойство. Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе в точке M_0

Единственное существенное отличие гиперболы от эллипса заключается в наличии асимптот.

> **Асимптотой** неограниченной кривой называется прямая линия такая, что расстояние от точки кривой до асимптоты стремится к нулю, когда точка кривой уходит на бесконечность.

Теорема 10.4. *В канонической системе координат асимптотами гиперболы служат прямые*

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

10.4 Парабола

Определим еще одно геометрическое место точек, основное свойство которого схоже с эллипсом и гиперболой.

> **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости таких, что расстояние от этих точек до фиксированной точки плоскости (фокуса) и до фиксированной прямой (директрисы) одинаково.

Получим каноническое уравнение параболы.

Теорема 10.5. *Уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид*

$$y^2 = 2px,$$

где p - расстояние от фокуса до директрисы параболы.

►
Для произвольной точки параболы, расстояние ее до фокуса F равно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Расстояние до директрисы очевидно

$$d = x + p/2$$

Приравнивая $r = d$, получаем утверждение теоремы. ◄

Аналогичным образом и для параболы можно получить уравнение касательной.

Теорема 10.6. *В канонической системе координат уравнение касательной к параболе, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ имеет вид:*

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

►
Доказательство аналогично предыдущим. ◄

Парабола, также как и предыдущие кривые, имеет важное оптическое свойство.

Теорема 10.7. *(**Оптическое свойство параболы**) Касательная к параболе в каждой точке M_0 составляет равные углы с фокальным радиусом точки M_0 и с осью параболы.*

10.5 Полярные уравнения кривых

Ранее были рассмотрены уравнения кривых в ДПСК. Однако, что интересно, в полярных координатах уравнения имеют одинаковый вид. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 10.8. *Уравнение вида*

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi},$$

где p - фокальный параметр, ρ - радиус, а ϕ - полярный угол, описывает эллипс, гиперболу и параболу в зависимости от параметров:

- *Эллипс*

$$\varepsilon \in [0, 1) \qquad p = a - \varepsilon c$$

- *Парабола*

$$\varepsilon = 1 \qquad p = 2c$$

- *Гипербола*

$$\varepsilon \in [0, 1) \qquad p = \pm(\varepsilon c - a)$$

►
Начнем доказательство с эллипса.
Поместим полюс системы координат в фокус F_1. Тогда полярный радиус произвольной точки будет совпадать с первым фокальным радиусом

$$|\vec{r}| = \rho$$

Из уравнения эллипса, а также связи между координатами получаем

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1 - \rho, \qquad r_2 = a - \varepsilon x, \qquad x + c = \rho\cos\phi$$

Соберем воедино

$$\rho + a - \varepsilon(\rho\cos\phi - c) = 2a \qquad \Rightarrow \qquad (1 - \varepsilon\cos\phi)\rho = a - \varepsilon c$$

Откуда следует утверждение теоремы.

$$\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}$$

Гипербола.
Выберем в качестве полюса левую вершину гиперболы. Воспользуемся соотношениями:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \qquad r_1 = \rho, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \qquad x + c = \rho\cos\phi$$

После раскрытия модуля придем к двум уравнениям соответствующим веткам гиперболы:

$$\rho = \frac{\pm(a - \varepsilon c)}{1 - \varepsilon\cos\phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi},$$

где знак "+" соответствует левой ветке параболы $p = a - \varepsilon c$, а "$-$" соответствует правой $p = \varepsilon c - a$.

Парабола.
Логично разместить параболу так, чтобы полюс совпадал с вершиной параболы. Тогда

$$r = d, \qquad r = \rho, \qquad d = \frac{p}{2} + x, x - \qquad \frac{p}{2} = \rho\cos\phi$$

из которых получаем

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\phi},$$

где эксцентриситет ε равен единице, что завершает доказательство теоремы. ◄