α

Лекция 7

«Системы координат»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

7.1 Системы координат на плоскости и в пространстве

Начиная с этой лекции мы подходим максимально близко к изучению аналитической геометрии. Ее цель заключается в описании свойств и соотношений геометрических объектов в виде аналитических выражений. Сами аналитические выражения, отражающие некие геометрические построения, будем записывать либо в векторном виде, либо в координатном. Основам векторной алгебры была посвящена предыдущая лекция и продолжится ее изучение в этой, но в начале сделаем полшага назад и рассмотрим метод координат.

7.1.1 Метод координат

Основной наш фокус будет направлен преимущественно на два геометрических пространства - плоскость или трехмерное пространство как некие "сцены" , на которых будет проходить театр геометрии. Строго говоря, мы будем говорить и еще об одном геометрическом пространстве - прямой, одномерном пространстве, но скорее для того, чтобы ввести некоторые понятия и перенести их на более существенные "сцены".

Чтобы перейти от чисто геометрического описания объектов к координатному, мы должны каким-то образом эти координаты определять. Поэтому введем в геометрическом пространстве непрерывную линию без самопересечений, которую назовем координатной линией. Каждой точке X этой линии поставим в соответствие некоторое число $x \in \mathbb{R}$. Для определения координат нам осталось ответить на два вопроса: откуда считать? и как считать?

Для того чтобы ответить на вопрос "откуда считать?" , зафиксируем некоторую точку O на координатной линии и условимся, что для нее $x = 0$. Такую точку будем называть **началом координат**. В мире есть люди, которые считатают температуру в градусах Цельсия, есть те, кто считает в Фаренгейтах, а есть приверженцы Кельвина. Каждая температурная шкала отличается не только началом отсчета, но и масштабом - величиной, определяющей, что является единицей данной шкалы. Аналогично и здесь, необходимо выбрать отрезок E координатной линии, длину которого мы примем за единицу.

Координатной линией можно выбрать что угодно, но обычно выбирают направленную прямую линию, которую называют координатной осью.

> **Координатной осью** называется ориентируемая прямая, имеющая начало отсчета O и снабженная масштабом E. При этом любой точке X координатной оси ставится во взаимно однозначное соответствие вещественное число x:
>
> $$\forall(\cdot)X \quad \longleftarrow \quad !x \in \mathbb{R}$$

Координатные оси как на плоскости, так и в пространстве, в совокупности образуют систему координат. Кроме того можно расположить их таким образом, что будут совпадать их начала координат.

> **Прямолинейной системой координат** на плоскости (в пространстве) называется система из двух (трех) разнонаправленных коориднатных осей, имеющих общее начало.

В заданной системе координат для любой точки можно определить набор чисел, которые ставятся в соответствие этой точке относительно каждой из координатных осей. Эти числа называются координатами точки.

1. На плоскости каждой точке ставится во взаимно однозначное соответствие пара вещественных чисел.

$$\forall P \quad \longleftrightarrow \quad (x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

2. В пространстве каждой точке ставится во взаимно однозначное соответствие тройка вещественных чисел.

$$\forall P \quad \longleftrightarrow \quad (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

Определить координату точки можно по ее пересечению с линиями или поверхностями уровня.

> **Линией уровня** на плоскости называется любая прямая, параллельная одной из координатных осей.
>
> **Поверхностью уровня** в пространстве называется любая плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей.

Частным случаем прямолинейной системы координат является прямоугольная.

> **Прямоугольной системой координат** (ПСК) называется такая система, в которой угол между каждой парой координатных осей является прямым. Если на координатных осях выбран одинаковый масштаб, то такая система называется декартовой прямоугольной системой координат (ДПСК).

Другой, часто используемой системой координат на плоскости, является полярная система координат. Такая система координат определяется лучом, исходяшим из начала отсчета, а также полярной осью. Для задания любой точки, как и для любой другой системы координат на плоскости, необходимо две координаты: в данном случае радиус r и полярный угол ϕ:

$$\forall P \quad \longleftrightarrow \quad (r, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

Линии уровня радиуса - это концентрические окружности, а линии уровня полярного угла - лучи, исходящие из начала координат.

Между координатами (x, y) в ДПСК и полярными координатами (r, ϕ), имеющими начало координат в общей точке, можно установить соответствие, которое определяется следующими равенствами:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Это напрямую следует из геометрических построений.
Аналогичную систему координат можно построить и в пространстве - она называется сферической.

7.2 Векторы и координаты

Прежде чем приступить к более детальному рассмотрению векторов с помощью метода координат, рассмотрим еще один класс эквивалентности векторов, который будет нам полезен в том числе при рассмотрении векторов в разных системах координат.

7.2.1 Проекция вектора

Понятие проекции, как и многие другие, знакомо еще со школы. Чтобы найти величину проекции мы опускали перпендикуляр на ось и тем самым получали, что хотели. Однако это справедливо в чистом виде, как увидим, только в прямоугольной декартовой системе координат. Если система координат не является прямоугольной, то имеет смысл говорить не только об ортогональных проекциях, но и проекциях параллельных некоторой прямой или плоскости.

> **Проекцией вектора** $\vec{a}$ на ось l, параллельной прямой (или плоскости) γ называется класс эквивалентности $\vec{a}_l^{\|\gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой (плоскости), параллельной γ и проходящей через начало вектора $\vec{a}$, а конец - с точкой пересечения l и прямой (плоскости), параллельной γ и проходящей через конец вектора $\vec{a}$.

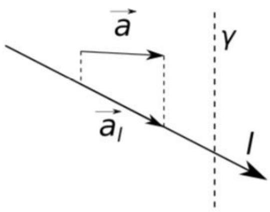

Рис. 7.1: Проекция параллельно прямой

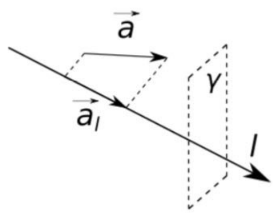

Рис. 7.2: Проекция параллельно плоскости

Из геометрических свойств следует несколько свойств:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\|\gamma} + \vec{b}_l^{\|\gamma}$
2. $(\lambda \vec{a}_l)^{\|\gamma} = \lambda \vec{a}_l^{\|\gamma}$

3. $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma}$

Определение проекции позволяет нам связать вектор с его координатами на оси. И ведь действительно, координатой точки мы называли такое значение на координатной оси, которое получено, если провести через эту точку линию или поверхность уровня. А они, в свою очередь, как раз проводятся параллельно некоторой координатной оси или плоскости, что согласуется с определением проекции.

> Пусть $\vec{e}$ - орт оси l. **Величиной проекции вектора** $\vec{a}$ на ось l называется число $x_a = \mathrm{Pr}_l^{\|\gamma}\,\vec{a}$ такое, что
> $$\vec{a}_l^{\|\gamma} = x_a\vec{e}$$

Nota bene Величины проекций обладают свойством линейности:

$$\mathrm{Pr}_l^{\|\gamma}(\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_2\vec{a}_2) = \lambda_1\mathrm{Pr}_l^{\|\gamma}\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathrm{Pr}_l^{\|\gamma}\vec{a}_n$$

В предыдущей лекции алгебраическим путем мы пришли к тому, что на плоскости (в пространстве) существует набор двух (трех) линейно независимых векторов, по которому существует разложение произвольного вектора и притом единственно. Такой набор мы назвали базисом. Рассматривая в качестве базисов орты осей координат, мы получаем связь между алгебраическими свойствами векторов и методом координат в совокупности с понятием проекции векторов. Сформулируем это в виде следующих утверждений.

Лемма 7.1. *Для любого вектора $\vec{a}$, заданного на l существует единственное представление:*

$$\vec{a} = x_a\vec{e}_1, \quad x_a \in \mathbb{R},\ |\vec{e}_1| = 1$$

Лемма 7.2. *Для любого вектора $\vec{a}$, заданного на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует единственное представление в базисе из двух неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, являющихся ортами координатных осей l_1 и l_2.*

$$\vec{a} = \mathrm{Pr}_{l_1}^{\|l_2}\vec{a}\cdot\vec{e}_1 + \mathrm{Pr}_{l_2}^{\|l_1}\vec{a}\cdot\vec{e}_2, = x_a\vec{e}_1 + y_a\vec{e}_2$$

Лемма 7.3. *В пространстве $\mathbb{R}^3$ базис состоит из трех некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, являющихся ортами координатных осей, и каждый вектор $\vec{a}$ имеет единственное разложение в этом базисе.*

$$\vec{a} = x_a\vec{e}_1 + y_a\vec{e}_2 + z_a\vec{e}_3$$

В декартовой прямоугольной системе координат для базиса приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{i}, \ \ |\vec{i}| = 1\\ \vec{e}_2 &= \vec{j}, \ \ |\vec{j}| = 1,\\ \vec{e}_3 &= \vec{k}, \ \ |\vec{k}| = 1\end{aligned}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты оси Ox, Oy и Oz соответственно.
Важным понятием, имеющим смысл при задании какой-то системы координат, является радиус-вектор.

Радиус-вектором точки A называется вектор, проведенный из начала координат в точку A.

В этом смысле радиус-вектор точки - это направленный отрезок, являющийся представителем свободного вектора (как класса эквивалентности), для которого справедливы все выше перечисленные свойства.

7.3 Произведение векторов

До сих пор мы рассматривали только линейные операции с векторами, но совсем не трогали произведение векторов. И не зря, потому что эта тема - особенное удовольствие, которым мы сейчас насладимся. Дело в том, что два одних и тех же вектора можно умножить двумя разными способами. Они совершенно не похожи друг на друга, начиная с того, что результат произведений - разные объекты. В одном случае, результатом является число - такое произведение будем называть скалярным, а если результат - это вектор, то будем говорить, что было применено векторное произведение.

7.3.1 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем число, определяемое равенством:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \mathrm{Pr}^{\perp}_{\vec{a}} \vec{b}$$

Иными словами, векторным произведением называется такое число, которое получается в результате произведения модуля одного вектора на величину проекции второго на направление первого. Для скалярного произведения существует несколько обозначений.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

При рассмотрении скалярного произведения неизбежно возникает понятие угла между векторами. Ведь действительно, величина проекции зависит не только от модуля другого вектора, но и от того, как он расположен относительно первого.

Углом ϕ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем угол, меньший или равный π между представителями соответствуюших классов эквивалентности, отложенных от одной точки.

Свойства скалярного произведения

1. Симметричность.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

2. Связь с углом между векторами.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$$

3. Ортогональность.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$$

4. Линейность.

$$(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{c}) + \mu(\vec{b}, \vec{c})$$

Скалярное произведение в ДПСК

Декартова прямоугольная система координат характерна тем, что координатные оси попарно образуют прямой угол, а значит и векторы-орты осей также образуют прямой угол. Это замечательное свойство позволяет в достаточно простом виде записать скалярное произведение в координатном виде в ДПСК.

Посмотрим сначала на произведения ортов.

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 & \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}$$

Учитывая это, можно перемножить скалярно векторы в их разложениях по базису:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Мы получили максимально простой, на сколько это возможно, способ вычислить скалярное произведение в ДПСК.

Из определения скалярного произведения следует, что, скалярно умножив вектор сам на себя, мы получим квадрат модуля вектора. Следовательно в ДПСК модуль вектора можно найти как корень из скалярного произведения вектора самого на себя.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

В ДПСК также легко найти угол между векторами:

$$\cos\phi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Практическая ценность такого произведения для геометрических задач кажется очевидной.

7.3.2 Векторное произведение векторов

Перейдем к следующему виду умножения векторов. Однако сначала введем вспомогательное определение.

Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется **правой**, если располагаясь по направлению вектора $\vec{c}$ наблюдатель видит, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит по часовой стрелке.

В качестве некоторого визуального примера и опоры можно всегда представлять тройку векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В силу широкой распространенности ДПСК представить ее себе легко, и в то же время она является правой. Изменение направления любого вектора в правой тройке на противоположное приведет к тому, что тройка станет левой.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi$, где ϕ - угол между векторами;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$;
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образуют правую тройку.

Для векторного произведения используются следующие обозначения:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Nota bene Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах.

Свойства векторного произведения

1. Антикоммутативность.
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
2. Коллинеарность векторов.
$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$
3. Умножение на скаляр.
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$
4. Произведение суммы векторов.
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$
5. Ортогональная компонента
$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_{\perp\vec{b}}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{\perp\vec{a}}),$$
где $\vec{a}_{\perp\vec{b}}$ - компонента вектора a, перпендикулярная вектору $\vec{b}$, и наоборот $\vec{b}_{\perp\vec{a}}$ - компонента вектрора b, перпендикулярная вектору $\vec{a}$.

Векторное произведение в ДПСК

Как и со скалярным произведением, сначала необходимо понять как ведут себя орты ДПСК при векторном произведении.

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} \qquad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} \qquad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

Учитывая эти равенства, а также свойства векторного произведения (в частности антисимметричность), можно записать

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_zb_y-a_yb_z)\vec{k}$$

Но это выражение является разложением следующего определителя по строке:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

7.4 Двойные произведения векторов

Интересную интерпретацию имеют произведения тройки векторов в силу того, что есть два разных вида произведений.

7.4.1 Смешанное произведение векторов

> **Смешанным произведением** трех векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется результат последовательного применения к данной тройке операций векторного и скалярного произведений:
> $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\equiv(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

Выясним геометрический смысл смешанного произведения. Для этого найдем модуль результата:
$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\phi,$$

где ϕ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}\times\vec{c}$. Иными словами, угол между вектором $\vec{a}$ и перпендикуляром к плоскости, образованной векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Произведение модуля вектора $\vec{a}$ на $\cos\phi$ даст высоту h параллелепипеда, построенного на этой тройке векторов. В свою очередь модуль векторного произведения - это площадь S параллелограмма, являющегося основанием того же параллелепипеда. Тогда получаем, что
$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=h\cdot S=V,$$

означающее, что модуль смешанного произведения дает объем параллелипипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1. Компланарность векторов.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны}$$

2. Циклические перестановки.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

3. Нециклические перестановки (в силу антикоммутативности).

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$$

4. Перестановочность умножений.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Смешанное произведение в ДПСК

В силу простоты как скалярного, так и векторого произведения в ДПСК, смешанное произведение также должно иметь простой вид.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Nota bene Условие компланарности через смешанное произведение в ДПСК идентично этому же условию, записанному через матричное уравнение из предыдущей лекции.

7.4.2 Двойное векторное произведение векторов

Двойным векторным произведением называют:

$$\vec{d} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$$

Для него справедливо тождество Бьянки:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$$

В ДПСК также справедливо некоторое упрощение, которое "в народе" называют формулой "бац минус цаб":

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$