α

Лекция 3

«Матрицы»

Содержание лекции:
В этой лекции рассматривается множество объектов, состоящих из чисел, которые упорядочены в виде прямоугольной таблицы. Матрицы бывают разных видов по форме и структуре, а это в некоторых случаях будет влиять на их свойства. Для матриц определены знакомые с детства сложение и умножение, хоть они и не всегда будут интуитивно понятны, а также чуть более специфичные для самих матриц операции. Мы рассмотрим особенности этих операций и тогда сможем понять, какую структуру можно ввести на этом множестве.

Ключевые слова:
матрица, индекс элемента, матричный столбец, матричная строка, квадратная матрица, главная диагональ, побочная диагональ, верхнетреугольная матрица, нижнетреугольная матрица, диагональная матрица, блочная матрица, нулевая матрица, единичная матрица, сложение матриц, умножение на элемент поля, произведение матриц, транспонирование матриц, симметричные матрицы, антисимметричные матрицы, коммутативность матриц, коммутирующие матрицы, нильпотентные матрицы, идемпотентные матрицы.

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

3.1 Матрицы. Основные понятия и виды

Вокруг нас огромное количество информации и каким-то образом эту информацию нужно обрабатывать. Иначе как получать "очень нужную" контекстную рекламу? Как представить весь поток информации, подлежащей обработке? Машина понимает числа, но машине также важен и порядок этих чисел - из только хаоса рождается лишь хаос. Следовательно, должна быть некоторая упорядоченность в данных. Самый простой способ упорядочить численные данные - представить их в виде какой-то таблицы (не обязательно двумерной, но нам хватит и этого пока). Но информацию нужно не только хранить, но еще и уметь что-то делать с ней. Вопрос хранения - не наш вопрос, а наши вопросы - что делать и как делать. Первые ответы на эти вопросы дает матричное исчисление. Естественно, они появились достаточно давно и у них была другая мотивация. К ней мы обязательно вернемся, а в этой лекции рассмотрим матрицы сами по себе.

> **Матрицей** размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица, в которой m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{K}$, а индексы $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. Можно заметить, что элемент a_{ij} стоит на пересечении i-ой строки и j-го столбца - это есть "адрес" элемента в таблице.

3.1.1 Виды матриц по форме

В первую очередь, можно разделять матрицы на виды, опираясь на их форму, иными словами на количество строк и столбцов. Выделяют следующие типы:

1. **Прямоугольные матрицы.** Наиболее общий вид матриц, который не предполагает каких-либо условий на размерность матрицы. Именно так были определены матрицы выше.

2. **Строка.** Строкой называется такая матрица, у которой $n = 1$. Она представлена единственной строкой.

3. **Столбец.** Аналогично столбцом называется такая матрица, у которой $m = 1$.

4. **Квадратные матрицы.** Квадратными матрицами называют такие матрицы, у которых количество строк равно количеству столбцов $m = n$. Это число называется порядком матрицы.

Среди квадратных матриц можно выделить еще несколько видов, опираясь на структуру элементов, которые наполняют матрицу. Многие из этих видов удобнее описывать, используя следующее определение

> **Главной диагональю**, или просто диагональю, квадратной матрицы называется множество элементов, индексы строки и столбца которых совпадают $i = j$.

Здесь и далее иногда в качестве примера будут приводиться матрицы 4-го порядка. Однако определения будут справедливы для матриц любого порядка, если не указано иное. Элементы главной диагонали начинаются в левом верхнем углу и заканчиваются в правом нижнем:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix},$$

Аналогично можно ввести понятие побочной диагонали - в этом случае диагональ представлена множеством элементов, которые взяты начиная с верхнего правого угла матрицы и заканчивая в левом нижнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \mathbf{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

3.1.2 Виды матриц по структуре

1. **Верхнетреугольные матрицы** - такие матрицы, в которых элементы ниже главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix},$$

2. **Нижнетреугольные матрицы** - такие матрицы, в которых элементы выше главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix}$$

3. **Диагольная матрица** - матрица, которая одновременно является нижнетреугольной и верхнетреугольной. Иными словами, это такая матрица, в которой элементы вне главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix}$$

Для прямоугольных матриц, матриц более общего вида, естественно, "в лоб" невозможно ввести подобные определения. Однако способ есть.

Блочная матрица - представление матрицы в виде блоков (клеток).

Для наглядности приведем пример. Допустим имеется следующая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 9 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее можно представить в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где блоки соответствуют матрицам

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Выделяя блоки внутри матрицы произвольной размерности, можно по аналогии определить блочно-диагональные матрицы, блочно-треугольные (или квазитреугольные) матрицы и более специфичные.

Отдельного внимания заслуживают следующие матрицы, имеющие важное значение, как мы увидим в дальнейшем.

Нулевой матрицей называют прямоугольную матрицу произвольной размерности, все элементы которой равны нулю.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Единичной матрицей называют диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят единицы.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Множество матриц

Множеством $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ будем обозначать множество всех матриц размерности $m \times n$ над полем $\mathbb{K}$. Аналогично можно ввести обозначение множество квадратных матриц n-го порядка над полем K - $M_n(\mathbb{K})$.

Как в ранее введенных множествах, так и в этом множестве, мы должны дать определение равенства двух элементов

> Две матрицы A и B над одним и тем же полем **равны**, если они имеют одинаковые размерности и соответствующие элементы равны

$$a_{ij} = b_{ij}$$

3.2 Операции с матрицами

Как и с любыми другими объектами линейной алгебры, нам бы хотелось определить операции, которые можно производить с матрицами. Первая операция, с которой мы начнем, уже привычная нам операция - сложение.

3.2.1 Сложение матриц

> **Суммой** двух матриц одинаковой размерности $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ называется матрица $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ того же размера, элементы которой получаются покомпонентным сложением соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, ..m; \; j = 1, ..n$$

Из определения данной операции и свойств поля следуют свойства этой операции:

1. **Ассоциативность сложения матриц**
$$\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K}): \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$
2. **Существование нулевой матрицы**
$$\exists \theta \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}): \quad A + \theta = \theta + A = A$$
3. **Существует противоположный элемент**
$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \ \exists\, (-A) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}):\ A + (-A) = \theta = (-A) + A$$
4. **Коммутативность сложения матриц**
$$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}): \quad A + B = B + A$$

Nota bene Если для множества с определенной для него внутренней операцией (сложение матриц в данном случае) выполняются свойства 1-3, то такие множества являются **группой**. Дополнительно, выполнение свойства 4 означает, что группа называется коммутативной (абелевой). В данном курсе группы не рассматриваются подробно, однако в некоторых темах еще будет отмечено наличие этой структуры как составляющей других, более существенных для нас, структур.

3.2.2 Умножение на элемент поля

Для любой матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и элемента поля $\lambda \in \mathbb{K}$ определена матрица той же размерности $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, элементы которой определяются покомпонентным умножением элементов матрицы A на элемент поля.

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Также как и ранее, из определения и свойств поля следует:

1. **Ассоциативность операции умножения на скаляр.**

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$$

2. **Умножение на единицу из поля $\mathbb{K}$.**

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : \quad 1 \cdot A = A$$

Кроме того, операции сложения матриц и умножения на элемент поля связаны законами дистрибутивности $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

3.2.3 Произведение матриц

С одной стороны, хотелось бы по аналогии со сложением матриц, ввести умножение как покомпонентную операцию, т.е. назвать матрицу C результатом умножения матриц A и B, если

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$$

И такое определение действительно бы дало знакомые нам свойства, но как мы увидим далее на многих примерах, более полезным оказывается иное определение, хоть оно и является менее понятным интуитивно.

> Произведением матриц $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $B \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$ называется матрица $C \in M_{m\times k}(\mathbb{K})$, элементы которой определяются следующим равенством

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \;\; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k$$

Это правило умножения в обиходе называется умножением по правилу "строка на столбец". И действительно, для нахождения элемента c_{ij} искомой матрицы мы фиксируем i-ю строку левой матрицы, j-й столбец правой матрицы, а затем соответствующие элементы перемножаются и полученные результаты складываются.

Nota bene При таком определении произведения мы должны понимать, что произведение матриц существует при определенных ограничениях - размерности умножаемых матриц должны соответствовать друг другу, чтобы оно существовало. Иными словами, для существования произведения двух матриц необходимо, чтобы количество столбцов левой матрицы было равно количеству строк правой матрицы.

Пример 3.1.

1. Произведение матриц размерностей $[2 \times 2]$ на $[2 \times 1]$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_2 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

2. Произведение матриц размерностей $[2 \times 3]$ на $[3 \times 3]$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b_{12}} & b_{13} \\ b_{21} & \mathbf{b_{22}} & b_{23} \\ b_{31} & \mathbf{b_{32}} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{a_{21}b_{12}} + \mathbf{a_{22}b_{22}} + \mathbf{a_{23}b_{32}} & \dots \end{pmatrix}$$

Приблизить к пониманию, зачем именно так определять произведение матриц, может помочь следующий пример. Предположим, что имеется m предприятий, выпускающих n видов изделий. Через a_{ij} обозначим количество изделий j-го вида, выпускаемых i-м предприятием за один год. Эти элементы, очевидно, образуют матрицу. Назовем ее $A = (a_{ij})$.
Введем также матрицу $B = (b_{jk})$, элементы которой обозначают стоимость изделия j-го вида в k-м году. Тогда легко увидеть, что (ik)-й элемент матрицы $A \cdot B$ - стоимость продукции выпущенной i-м предприятием за k-й год, т.к. суммируются прозведения стоимости продукты и его объема выпуска за j-ый год.

$$(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Свойства произведения матриц

1. **Умножение на единичную матрицу.**

$$\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}): \; E_m A = A E_n = A$$

   Можно сказать, что E_m - левая единица, а E_n - правая единица матричного умножения.

2. **Умножение матриц ассоциативно** каждый раз, когда оно определено. То есть если одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$ существует, то существует и другое, и они равны.

$$(AB)C = A(BC)$$

   В частности, это всегда верно для квадратных матриц одного порядка.

Кроме того введение операций сложения и умножения матриц позволяет записать законы дистрибутивности

$$A(B + C) = AB + AC, \;\; (A + B)C = AC + BC;$$

а также связь умножения на скаляр и умножения матриц

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

Все перечисленные выше свойства действительно выполняются для матриц. Удостовериться в этом можно прямой подстановкой.

3.3 Специфика матричных операций

3.3.1 Коммутативность матричного умножения

Очевидно, что в случае матриц общего вида (прямоугольных) из существования произведения матриц AB, где $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $B \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$ не следует существование произведения BA. Обсуждалось, что для существования матричного произведения необходимо соответствие размерностей. Однако дополнительные условие, условие равенства количества строк матрицы A и количества столбцов матрицы B, обеспечивает существование как AB, так и BA. Иными словами необходимо, чтобы $k = m$.

$$\exists\, AB, BA \iff A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$$

Но и здесь есть нюанс. Дело в том, что произведения AB и BA в общем случае не дают матрицы одного и того же порядка, даже если оба произведения существуют. Для матриц A и B, взятых из $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ соответственно, их произведения будут давать матрицы разных порядков.

$$AB \in M_m(\mathbb{K}) \qquad BA \in M_n(\mathbb{K})$$

Результаты произведений - квадратные матрицы, но при $m \neq n$ - квадратные матрицы разных порядков. Следовательно, коммутативность в общем случае не наблюдается.

Ситуация несколько проще в случае произведения квадратных матриц одного порядка $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Можно сразу утверждать, что существует как произведение AB, так и BA. И более того, результат обоих произведений - матрицы одного и того же порядка. По аналогии с предыдущими определениями для других множеств и операций даже с матрицами хотелось бы сказать, что будет выполняться свойство коммутативности произведения матриц:

$$AB = BA$$

Однако это свойство в общем случае **не выполняется** - произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно. В этом, как и при проверке других свойств, можно убедиться прямой подстановкой.

> Квадратные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, для которых выполняется $AB = BA$ называют **коммутирующими**.

Исходя из этого можно сделать вывод относительно множества квадратных матриц n-го порядка с введенными операциями сложения и умножения. Мы показали, что операция сложения ассоциативна, коммутативна, с нулем и противоположным элементом, а также показали, что выполняются законы дистрибутивности. Из этого и наличия операции умножения матриц можно сделать вывод, что множество квадратных матриц образует кольцо. Какое кольцо? Ассоциативность умножения выполняется, также присутствует "единица" множества, роль которой выполняет единичная матрица. Однако в общем случае операция умножения некоммутативна, что позволяет нам сказать, что **множество матриц образует некоммутативное ассоциативное кольцо с единицей**.

3.3.2 Транспонирование матриц

Наиболее специфичная для матриц операция, но в то же самое время и самая простая в понимании и применении - транспонирование.

> **Транспонированной** матрицей $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ к матрице $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ называется такая матрица, (ij)-е элементы которой берутся как (ji)-е элементы матрицы A.

$$A_{ij}^T = a_{ji}$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T, \quad \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3. $(A^T)^T = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $(AB)^T = B^T A^T, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Основываясь на определении операции транспонирования и ее свойствах можно выделить два вида матриц:

1. **Симметричные матрицы**, которые определяются свойством:

   $$A = A^T$$

   Иными словами, элементы стоящие симметрично относительно главной диагонали в таких матрицах равны. Пример на матрице 4-го порядка:

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix}$$

2. **Антисимметричные матрицы**:

   $$A = -A^T$$

   Во многом схожие с симметричными матрицами, однако элементы симметричные относительно главной диагонали будут иметь разные знаки. Занимательно, что в антисимметричных матрицах диагональные элементы всегда равны нулю. Это следует из того, что по определению

   $$a_{ii} = -a_{ii}$$

   Откуда непосредственно следует, что все диагональные элементы должны быть равны нулю:

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & \mathbf{0} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & \mathbf{0} & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Nota bene Произвольную матрицу $A \in M_n(\mathbb{K})$ можно разложить на симметричную A^S и антисимметричную матрицу A_{AS}:

$$A = A^S + A^{AS},$$

где симметричную и антисимметричную часть можно определить из самой матрицы:

$$A^S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \quad A^{AS} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Справедливость разложения, а также свойств симметричности и антисимметричности, подтверждается прямой подстановкой.

Особые виды матриц

Следующий вопрос, которым можно задаться - присутствуют ли в этом кольце делители нуля, иными словами, можно ли считать кольцо матриц областью целостности? Нет, как минимум по той причине, что область целостности - это всегда коммутативное кольцо, но также можно привести простой пример, который демонстрирует наличие делителей нуля.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В этом примере присутствуют два ненулевых множителя, которые в произведении дают ноль - это и есть делители нуля. Позднее мы увидим свойство, по которому можно сделать вывод о том, является ли матрица определителем нуля.

В частности можно привести целый класс матриц, обладающий схожими свойствами.

> **Нильпотентная** матрица - это матрица, которая в некоторой степени дает нулевую матрицу.

$$A \neq \theta \quad A^k = \theta,$$

где k - порядок нильпотентности.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На этом интересные свойства не заканчиваются. Можно ввести, в чем-то схожий с нильпотентными матрицами, еще один вид матриц.

> **Идемпотентными** матрицами называют матрицы, квадрат которых равен самой матрице.

$$A \neq E, \quad A^2 = A,$$

Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Заключение

В этой лекции были сделаны первые шаги в сторону матричного исчисления. Матрицы дают на столько мощный аппарат для описания всевозможных явлений, что их невозможно перечислить даже кратко. Пожалуй, матрицы по праву заслуживают звание одного из центральных объектов линейной алгебры. Возможно, все еще не отпускает мысль: "А зачем?". И действительно, здесь мы лишь описали способы работы с матрицами и то, какие они бывают. Весь остальной курс мы практически всюду будем ими пользоваться и вопрос целесообразности отпадет. А ответ на вопрос "откуда?" появится уже в следующей лекции.

Список литературы

1. Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре. Глава 4, п.1.
   Основной источник для теории

2. И.В.Белоусов. Матрицы и определители.
   Хорошее пособие с доказательством некоторых свойств; снабжено примерами