# Конспект лекций по математическому анализу, семестр II

Шишминцев Дмитрий Владимирович

15 марта 2023 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

## 1 Лекция 3

**Определение 1** (Определенный интеграл)**.** Рассматриваем функцию $f(x)$, которая непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть функция $f(x) > 0, a < b$. Разобъем отрезок $[a, b]$ точками $x_k, k = 0..n-1$ на $n-1$ частей. Рассмотрим $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Наибольшее значение $\Delta x$ обозначим за ранг дробления. $max \Delta x_i = \lambda(i = 0, ...n-1)$ На каждым частичном отрезке выберем произвольным образом точку $x_k$ и найдем значение функции $f(\xi_k)$. Рассмотрим $\lim_{\lambda \to 0, n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_b^a f(x)dx$

Свойства:

- $f(x) > 0, a < b \to \int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a > b \to -\int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a = a \to \int_b^a f(x)dx = 0$

**Определение 2** (Интегральная сумма Римана)**.** $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$
Предел суммы Римана не зависит от выбора точек и разбиения отрезка $[a, b]$ на маленькие отрезки.

**Теорема 1** (Теорема существования определенного интеграла)**.** $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она имеет конечное количество точек разрыва первого рода.

**Теорема 2** (Достаточное условие интегрируемости функции)**.** Если функция кусочно-непрерына на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует определенный интеграл

**Определение 3** (Геометрический смысл определенного интеграла)**.** Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ - площадь криволинейной трапеции. (площадь под графиком функции) на отрезке $[a, b]$ ограниченной осью $O_x$ или $y = 0$

**Определение 4** (Свойства определенного интеграла)**.**

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ - по определению
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ - по определению
- $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$ - По определению, определенный интеграл - предел суммы Римана. Сумму можно разбить, а константу вынести.

- Рассмотрим $c \in [a,b], f(x)$ - непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq \phi(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

**Теорема 3** (Оценка определенного интеграла)**.** Если функция $f(x)$ - непрерына на отрезке $[a,b]$, то справедливо утверждение:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

где $m$ - наименьшее значение функции на $[a,b]$, а $M$ - наибольшее значение
Доказательство:
$f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow \exists \sup, \inf$ по Т. Вейерштрасса.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\Delta x_k, \Delta x_k = b-a$$

, если мы рассмотрим все значения.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a)$$

**Теорема 4** (Теорема о среднем)**.**
Если $f(x)$ непрервна на $[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство: $f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} = f(\xi), \xi \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

**Теорема 5** (Об интеграле с переменным верхним пределом (Бароу)).
$f(x)$ - непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \int_a^x f(t)dt$ имеет проивзодную которая равна подынтегральной функции $f(x)$

$$\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' = f(x)$$

Доказательство:
$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \int_x^{\delta x + x} f(t)dt \Rightarrow \Delta\phi(x) = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \int_x^{\Delta x + x} f(t)dt \Rightarrow$ по теореме о среднем $\int_x^{\Delta x + x} f(t)dt = f(\xi)(\Delta x - x) \Rightarrow \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi(x)}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' - \phi(x)' = f(x)$

## 2 Лекция 4.

**Теорема 6** (дополнительная к формуле Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ - непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке имеет первообразную и имеет неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Доказательство: Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. $\int_a^x f(t)dt = F(x), F'(x) = (\int_a^a f(t)dt)' = f(x)$ по теореме Бароу.
$\phi(x)$ - первообразная $f(x)$, то $F(x) - \phi(x) = C \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

**Теорема 7** (Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ непрерывна $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), a < b$$

Доказательство: $\int_a^x f(t)dt = F(x), f(x) = F'(x)$ - первообразная. Рассмотрим $[a, b]$, пусть $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) = -C$
Пусть $x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \Rightarrow t = x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Замечание: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ (краткая запись)

Методы вычисления определенного интеграла
- Формула замены
- Интегрирование по частям

**Теорема 8** (Формула замены)**.** $\int_a^b f(x)dx, f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, положим $\phi(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$и $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b, \exists \phi'(t)$, тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

где $F(x)$- первообразная для функции $(f(\phi(t)) \cdot y'(t))$

**Теорема 9** (Формула для интегрирования по частям)**.** Расммотрим $u(x), v(x)$ - которые непрерывны и дифференцируемы на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

**Применение определенного интеграла. Площадь плоских фигур в декартовой системе координат**

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) > 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) < 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b -f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

$f(x)$ меняет знак при переходе через ось $O_x \Rightarrow$

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$f(x), g(x)$ - непрерывны на отрезке $[a, b], f(x) > g(x) \Rightarrow$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$x = x(y), y \in [c, d] \Rightarrow$

$$S = \int_c^d f(y)dy$$

$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$$

В полярной системе координат. $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Рассматривается кривая $r(\phi)$ заданная в полярной системе координат и ограничена углом $\alpha, \beta$.

- Разбиваем сектор на $n$ кусков. $\alpha = \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n = \beta$
- Вводим углы $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$
- Рассмотрим произвольный $\Delta\phi_k$, ограничен кривой $r = f(\Delta\phi_k)$, $S = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$
- Таким образом находим все площади $\Delta S_1; \Delta S_2, ..., \Delta S_n$
- Составим сумму $S = \sum \Delta S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$ - интегральная сумма
- Вводим ранг дробления - $\lambda = \max \Delta\phi_k$
- $S = \lim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$. Если предел существует и имеет конечное значение, то:

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\phi) d\phi$$

## 3 Лекция 5

**Определение 5** (Длина дуги)**.** предел длины вписанной кривой при $n \to \infty$

### Вычисление длины дуги

Кривая $AB$ задана графиком функции $f(x), x \in [a,b], a < b, f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Рассматривается $k$ кусочек ломанной. $l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k - f_{k-1}^2)}$ по теореме Лагранжа $f_k - f_{k-1} = f_k'(x)\Delta x_k \Rightarrow = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k')^2 \Delta x_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f_k')^2} = l_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n01} l_k = \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1 + (f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1 + (f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow$

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f_k')^2} dx$$

Если кривая задана в параметрическом виде

$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_1} \sqrt{(\phi_t')^2 + (\xi_t')^2}$

Кривая задана в полярной системе координат $r = r(\phi)$ Рассмотрим $[\alpha, \beta]$

$\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot r \sin\phi \end{cases} \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$

$x_\phi' = r'(\phi) \cdot \cos\phi + r(\phi) \cdot (-\sin\phi)$ $y_\phi' = r'(\phi) \cdot \sin\phi + r(\phi) \cdot \cos\phi$ $(x_\phi')^2 + (y_\phi)^2 = (r_\phi')^2 + r_\phi^2 \Rightarrow L \int_\alpha^\beta \sqrt{(r_\phi')^2 + r_\phi^2} d\phi$

### Несобственные интегралы

Рассмотрим $y = f(x)$ определена в $x \in (a, +\infty)$ и интегрируема при $x \in (a, A) \subset (a, +\infty)$

**Определение 6** (Несобственный интеграл)**.** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ называеют $\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ и если предел существует и конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случая интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла - площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Вычисление: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to\infty} F(A)$

**Определение 7** (Главное значение несобственного интеграла по бесконечному промежутку)**.**

$$\int_{=\infty}^{+\infty} = \lim_{R\to\infty} \int_{_R}^{R} F'(R) - F(-R)$$

Обозначается как:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

В определении главного значения несобственного интеграла имеется ввиду симметричное возрастание модуля переменной $x$ в положительном и отрицательном направлении.