Конспект лекций по математическому анализу

Шишминцев Дмитрий Владимирович

13 января 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Основы анализа

1.1 Множества

Определение 1. Множество - совокупность элементов одной природы и некоторым общим свойством позволяющим объеденить их в одно целое.

Обозначения:
- A, B, C - множества, a, b, c - элементы множества
- $\forall$ - квантор общности (для каждого)
- $\exists$ - найдется
- $\mathbb{X}/\mathbb{E}/\mathbb{U}$ - универсальные множества
- $\emptyset$ - пустое множество
- ! - единственность
- $\rightarrow$ - следовательно

Операции над множествами:
- $A \cap B$ - объединение множеств (коммутативно и ассоциативно)
- $A \cup B$ - пересечение множеств (коммутативно и ассоциативно)
- $A \backslash B$ - разность множеств
- $\bar{A}$ - отрицание
- $A \Delta B$ - симметрическая разность $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$
- $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ - декартово произведение

1.2 Отображения (функция)

Определение 2. правило по которому $\forall x \in D \exists! y \in V$

$F : D$ (область определения) $\rightarrow$ (правило перевода) V (область значений)

Вариативности функциональных отображений:
- Сюръекция ($\forall y \in V : \exists x \in D$) - каждый элемент в области значений функции имеет прообраз в области определения
- Инъекция ($\forall y \in V : \exists! x \in D$) - каждый элемент в области определения функции имеет образ в области значений. Не каждый образ имеет прообраз.

- Биекция ($\forall F : A \to B \exists ! F^{-1} : B \to A$) - функция яаляется и сюръекцией и биекцией.

1.3 Характеристики множеств

Определение 3. Мощность (кардинальное число) - количество различных элементов множества.

Определение 4. Эквивалентность множеств: множества эквивалентны ($A \sim B$) если они равномощны. $\forall x \in X \exists ! y \in Y$ и $\forall y \in Y \exists ! x \in X$

Определение 5. Счетность множеств: множество счетно (исчислимо), если $A \sim \mathbb{N}$

Определение 6. Мощность континуума: множество эквивалентное множеству точек отрезка $[0, 1]$ имеет мощность континуума.

Теорема 1. Множество всех точек отрезка $[0; 1]$ - несчетно

Теорема 2 (Кантора-Бернштейна)**.** Если $A \sim B'(B' \subset B)$ и $B \sim A'(A' \subset A) \Rightarrow A \sim B$
Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C \Rightarrow A \sim B$

Определение 7 (Сравнение мощностей множеств)**.** $\exists B' \in B : B' \sim A$ и $\nexists A' \in A : A' \sim B \Rightarrow |A| < |B|$

1.4 Множества чисел

- $\mathbb{N}$ - натуральные числа $\{1, 2, 3...\}$
- $\mathbb{Z}$ - целые числа $\{-1, 0, 1, 2..\}$
- $\mathbb{Q}$ - рациональные числа $\{\frac{2}{3}, 0.(3)\}$
- $\mathbb{R}$ - вещественные (действительные числа) $\{\sqrt{2}, \pi, e\}$
- $\mathbb{C}$ - комплексные

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Основные свойства вещественных чисел:

- Транзитивность $(a > b, b > c \to a > c)$
- Ассоциативность $(a + (b + c) = (a + b) + c)$
- Коммутативность $a + b = b + a$
- Дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \exists ! c \in \mathbb{R} : a + b = c$
- $\forall a \neq 0 \exists ! a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$

Грани множеств:

- $\forall b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leq b$ - верхняя грань
- $\forall d \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to d \leq a$ - нижняя грань

Грани не единственны

Определение 8. Точная верхняя/нижняя грань - минимальный/максимальный элемент множества верхних/нижних граней множеств.

Свойство точной верхней грани:

Если $b = \sup A$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \epsilon$

► Допустим обратное. Тогда $a \leq b - \epsilon$ А это невозможно т.к b является наименьшей верхней гранью. ◄

Свойство нижней верхней грани:

Если $d = \inf A$, то $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a < d + \epsilon$

► Док-во аналогично свойству точной верхней грани. ◄

Теорема 3 (Принцип вложенных отрезков)**.** Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\inf} : \forall n \in \mathbb{N} \to [a_{n+1}, b_{n+1} \subset [a_n, b_n]]$ тогда $\exists ! c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to c \in [a_n, b_n]$

► Пусть длина отрезка - $d(n) = b_n - a_n . \forall k \in \mathbb{N} \to d(1) > d(k)$. Пусть $c := \sup a_n \Rightarrow \forall n \to a_n \leq c \leq b_n . \forall n \to c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$. Единственность точки следует из стремления длин отрезков к нулю. ◄

1.5 Метод математической индукции

Для обоснования ММИ используем свойство натуральных чисел: $\forall A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \exists a' \in A : \forall a \in A \to a' \leq a$. Метод математической индукции для док-ва утверждения на множестве A состоит из шагов:

- База индукции - проверяем справедливость на a'

- Индукционное предположение - проверяем для произвольного элемента $a_k \in A$
- Индукционный шаг - доказываем справедливость для $a_{k+1} \in A$

1.6 Бином Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \tag{1.1}$$

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биноминальный коэффициент
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

▶ По методу математической индукции. При $n = 1.1 + x = C_1^0 + C_1^1 x = 1 + x$
При $n = t$ формула так же верна.
При $n = t + 1$
$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) = \binom{t}{0}x^0 + ... + \binom{t}{t}x^t + \binom{t}{0}x + ... + \binom{t}{t}x^{t+1} = \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + ... + \binom{t+1}{t+1}x^{t+1}$ ◀

1.7 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n > 1 + xn \tag{1.2}$$

При $x > -1, x \neq 0, n \geq 2$
Док-во по ММИ.

2 Пределы

2.1 Предел числовой последовательности

Определение 9 (Числовая последовательность).
$\sqsupset x_n = f(n), f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Операции с числовыми последовательностями выполняются почленно.

Определение 10 (Ограниченность последовательности).
$\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leq A$

Определение 11 (Бесконечно большая последовательность). Последовательность называется бесконечно большой, если множество членов удовлетворяющих условию $|x_n| \leq c$ конечно.
$\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| > c$

Определение 12 (Бесконечно малая последовательность). Последовательность называется бесконечно малой, если множество членов удовлетворяющих условию $|x_n| \geq c$ конечно.
$\forall c > 0 \exists n(c) \in \mathbb{N} : \forall n > n(c) \to |x_n| < c$

Теорема 4 (Ограниченность бесконечно малой последовательности). Если x_n - б.м.п $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| < C, C \in \mathbb{R}_+$

► По определению бесконечно малой последовательности, кол-во элементов $|x_n| \geq C$ конечно. Возьмем $C = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$. Получим $\forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| < C$ ◄