# Конспект лекций по математическому анализу, семестр II

Шишминцев Дмитрий Владимирович

24 мая 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

## 1 Лекция 3

**Определение 1** (Определенный интеграл)**.** Рассматриваем функцию $f(x)$, которая непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть функция $f(x) > 0, a < b$. Разобъем отрезок $[a, b]$ точками $x_k, k = 0..n-1$ на $n-1$ частей. Рассмотрим $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Наибольшее значение $\Delta x$ обозначим за ранг дробления. $max \Delta x_i = \lambda(i = 0, ...n-1)$ На каждым частичном отрезке выберем произвольным образом точку $x_k$ и найдем значение функции $f(\xi_k)$. Рассмотрим $\lim_{\lambda \to 0, n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_b^a f(x)dx$

Свойства:

- $f(x) > 0, a < b \to \int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a > b \to -\int_b^a f(x)dx$
- $f(x) > 0, a = a \to \int_b^a f(x)dx = 0$

**Определение 2** (Интегральная сумма Римана)**.** $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$
Предел суммы Римана не зависит от выбора точек и разбиения отрезка $[a, b]$ на маленькие отрезки.

**Теорема 1** (Теорема существования определенного интеграла)**.** $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если она имеет конечное количество точек разрыва первого рода.

**Теорема 2** (Достаточное условие интегрируемости функции)**.** Если функция кусочно-непрерына на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует определенный интеграл

**Определение 3** (Геометрический смысл определенного интеграла)**.** Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ - площадь криволинейной трапеции. (площадь под графиком функции) на отрезке $[a, b]$ ограниченной осью $O_x$ или $y = 0$

**Определение 4** (Свойства определенного интеграла)**.**

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ - по определению
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ - по определению
- $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$ - По определению, определенный интеграл - предел суммы Римана. Сумму можно разбить, а константу вынести.

- Рассмотрим $c \in [a,b], f(x)$ - непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- $a < b, x \in [a,b] : f(x) \leq \phi(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$
- $a < b, x \in [a,b] : |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

**Теорема 3** (Оценка определенного интеграла)**.** Если функция $f(x)$ - непрерына на отрезке $[a,b]$, то справедливо утверждение:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

где $m$ - наименьшее значение функции на $[a,b]$, а $M$ - наибольшее значение
Доказательство:
$f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow \exists \sup, \inf$ по Т. Вейерштрасса.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\Delta x_k, \Delta x_k = b-a$$

, если мы рассмотрим все значения.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} m(b-a) \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \lim_{x\to 0, n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} M(b-a)$$

**Теорема 4** (Теорема о среднем)**.**
Если $f(x)$ непрервна на $[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство: $f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a} = f(\xi), \xi \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

**Теорема 5** (Об интеграле с переменным верхним пределом (Бароу))**.**
$f(x)$ - непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \int_a^x f(t)dt$ имеет проивзодную которая равна подынтегральной функции $f(x)$

$$\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' = f(x)$$

Доказательство:
$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \int_x^{\delta x+x} f(t)dt \Rightarrow \Delta\phi(x) = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \int_x^{\Delta x+x} f(t)dt \Rightarrow$ по теореме о среднем $\int_x^{\Delta x+x} f(t)dt = f(\xi)(\Delta x - x) \Rightarrow \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi(x)}{x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \Big(\int_a^x f(t)dt\Big)' - \phi(x)' = f(x)$

## 2 Лекция 4.

**Теорема 6** (дополнительная к формуле Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ - непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке имеет первообразную и имеет неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Доказательство: Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. $\int_a^x f(t)dt = F(x), F'(x) = (\int_a^a f(t)dt)' = f(x)$ по теореме Бароу.
$\phi(x)$ - первообразная $f(x)$, то $F(x) - \phi(x) = C \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

**Теорема 7** (Ньютона-Лейбница)**.** Если $f(x)$ непрерывна $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), a < b$$

Доказательство: $\int_a^x f(t)dt = F(x), f(x) = F'(x)$ - первообразная. Рассмотрим $[a,b]$, пусть $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) = -C$
Пусть $x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \Rightarrow t = x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Замечание: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ (краткая запись)

Методы вычисления определенного интеграла

- Формула замены
- Интегрирование по частям

**Теорема 8** (Формула замены)**.** $\int_a^b f(x)dx, f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$, положим $\phi(t)$ - непрерывна на $[\alpha,\beta]$и $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b, \exists\phi'(t)$, тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))d\phi(t) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

где $F(x)$- первообразная для функции $(f(\phi(t)) \cdot y'(t))$

**Теорема 9** (Формула для интегрирования по частям)**.** Расммотрим $u(x), v(x)$ - которые непрерывны и дифференцируемы на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

**Применение определенного интеграла. Площадь плоских фигур в декартовой системе координат**

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) > 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ - непрерывна на $[a, b], f(x) < 0, a < b \Rightarrow$

$$S_{aABb} = \int_a^b -f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

$f(x)$ меняет знак при переходе через ось $O_x \Rightarrow$

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$f(x), g(x)$ - непрерывны на отрезке $[a, b], f(x) > g(x) \Rightarrow$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$x = x(y), y \in [c, d] \Rightarrow$

$$S = \int_c^d f(y)dy$$

$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$$

В полярной системе координат. $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Рассматривается кривая $r(\phi)$ заданная в полярной системе координат и ограничена углом $\alpha, \beta$.

- Разбиваем сектор на $n$ кусков. $\alpha = \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n = \beta$
- Вводим углы $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$
- Рассмотрим произвольный $\Delta\phi_k$, ограничен кривой $r = f(\Delta\phi_k)$, $S = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$
- Таким образом находим все площади $\Delta S_1; \Delta S_2, ..., \Delta S_n$
- Составим сумму $S = \sum \Delta S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$ - интегральная сумма
- Вводим ранг дробления - $\lambda = \max \Delta\phi_k$
- $S = \lim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\phi_k$. Если предел существует и имеет конечное значение, то:
$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\phi) d\phi$$

## 3 Лекция 5

**Определение 5** (Длина дуги)**.** предел длины вписанной кривой при $n \to \infty$

### Вычисление длины дуги

Кривая $AB$ задана графиком функции $f(x), x \in [a,b], a < b, f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Рассматривается $k$ кусочек ломанной. $l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k - f_{k-1}^2)}$ по теореме Лагранжа $f_k - f_{k-1} = f_k'(x)\Delta x_k \Rightarrow = \sqrt{\Delta x_k^2 + (f_k')^2 \Delta x_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f_k')^2} = l_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n01} l_k = \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1+(f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n-1}^{k=1} \sqrt{1+(f_k')^2}\Delta x_k \Rightarrow$

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f_k')^2} dx$$

Если кривая задана в параметрическом виде
$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_1} \sqrt{(\phi_t')^2 + (\xi_t')^2}$

Кривая задана в полярной системе координат $r = r(\phi)$ Рассмотрим $[\alpha, \beta]$
$\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot r \sin\phi \end{cases} \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$

$x_\phi' = r'(\phi) \cdot \cos\phi + r(\phi) \cdot (-\sin\phi)$ $y_\phi' = r'(\phi) \cdot \sin\phi + r(\phi) \cdot \cos\phi$ $(x_\phi')^2 + (y_\phi)^2 = (r_\phi')^2 + r_\phi^2 \Rightarrow L \int_\alpha^\beta \sqrt{(r_\phi')^2 + r_\phi^2} d\phi$

### Несобственные интегралы

Рассмотрим $y = f(x)$ определена в $x \in (a, +\infty)$ и интегрируема при $x \in (a, A) \subset (a, +\infty)$

**Определение 6** (Несобственный интеграл)**.** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ называеют $\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ и если предел существует и конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случая интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла - площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Вычисление: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to\infty} F(A)$

**Определение 7** (Главное значение несобственного интеграла по бесконечному промежутку)**.**

$$\int_{=\infty}^{+\infty} = \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{R} F'(R) - F(-R)$$

Обозначается как:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

В определении главного значения несобственного интеграла имеется ввиду симметричное возрастание модуля переменной $x$ в положительном и отрицательном направлении.

## 4 Лекция 7

**Определение 8.** Простая кривая - кривая $K$, которая распадается на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение $y = f(x)$ или $x = \phi(y)$ причем $f(x), g(x)$ непрерывные функции на $[a, b], [p, q]$ то в этом случае $K$ - кривая простая, замкнутая самонепересекающаяся кривая лежащая на плоскости $Oxy$ разбивает множество точек на два множества, единственным образом

**Определение 9.** Двойной интеграл

- 1. Разобъем область $D$ сетью простых кривых произвольным образом на ячейки $D_1, D_2, D_3...D_n$, площадями $S_1, S_2, S_3..S_n$ с диаметрами $d_1, d_2, d_3, ...d_n$
- 2. Наибольший из диаметров обозначаем через ранг дробления $\max(d_k) = \lambda$
- 3. В каждой ячейке $D_k$ возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим значения $f(M_k)$
- 4. Умножим $f_k(M_k)$ на соответсвующую площадь $S_k$ ячейки и все это просуммируем $\sum_{k=1}^{n} = f(x_k, y_k)S_k$, то если рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \sigma_k = \lim_{n\to\infty,\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy$

**Теорема 10** (О существовании двойного интеграла)**.** Если подынтегральное функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точки области $D(x, y) \to \exists \iint_D f(x, y)dxdy$

**Геометрический смысл двойного интеграла**

Если $f(x, y) \geq 0$ в каждой точки области $D$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = V$$

Объем тела ограниченного снизу области $D(x, y)$ с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны $Oz$

**Свойства двойного интеграла**

$C_1, C_2 = const \neq 0$

$f_1(x, y), f_2(x, y)$ - непрерывны в области $D$

- Аналогичные свойства, как у обычных интегралов
- Если каждая точка в области больше нуля, то и интеграл будет больше нуля.
- Если одна функция больше другой, то ее интеграл тоже будет больше
- Если в каждой точке $D$ справедливо $m \leq f(x, y) \leq M$, то $m \cdot S_d \leq \iint f(x, y)dxdy \leq M \cdot S_D$

  Доказательство: так как $m \leq f(x, y) \leq M \Rightarrow \iint_D mdxdy \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_d Mdxdy \Rightarrow m \iint_D 1dxdy \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \iint_D 1dxdy \Rightarrow$ что и требовалось доказать.

**Теорема 11** (О среднем)**.** Если в каждой точке $Df(x, y)$ непрерывна, то в области $D$ найдется точка $P(\xi, \nu)$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$$

Доказательство: так как функция непрерывна, то по свойству $m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \cdot S_D : |\frac{1}{S_D} \Rightarrow m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y)dxdy \leq M \Rightarrow \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y)dxdy f(\xi, \nu) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \nu) \cdot S_D$

## 5 Лекция 8

### Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

$D(x,y) = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$

Проведем сечение $ABB_1A_1$, площадь сечения $S(y) = \int_a^b f(x,y)dx \Rightarrow V = \int_a^b S(x)dx$ - объем тела.

$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d S(y)dy = \int_c^d dy(\int_a^b f(x,y)dx) = \iint_D f(x,y)dxdy$

Пример:

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y^2)dy = \int_0^1 dx[x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3}|_0^2] =$$

$$= \int_0^1 dx[x^2 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} - (x^2 \cdot 0 + \frac{0}{3})] = \int_0^1 dx(2x^2 + \frac{8}{3}) = \frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

## 6 Лекция 9

### Замена переменных в двойном интеграле

$J$ - якобиан, коэффицент растяжения $J = \lim_{diamS^k \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^k}$

Пусть есть непрерывная функция $x = \phi(u, v); y = \xi(u, v)$ и однозначно отображают $D$ в $D^*$ и эти функции имеют непрерывную частную производную. Пусть в области $D$ на плоскости $Oxy$ задана функция $z = f(x, y)$ и ей соответстует функция $f(\phi(u, v), \xi(u, v))$. Тогда сумма Римана $\sum_D f(x, y)\Delta S = \sum_D f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot J\Delta S$

$$|J| = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$$

Если $\lim_{\alpha \to 0} \sum_D f(x, y)\Delta S = \iint_D f(x, y)dxdy$ - существует конечное значение

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\phi(u, v), \xi(u, v)) \cdot |J|dudv$$

### Двойной интеграл в полярных координатах

$x(r, \phi) = x = r \cdot \cos\phi$
$y(r, \phi) = y = r \cdot \sin\phi$
$r \in [0, +\infty]; \phi \in (0, 2\pi] \Rightarrow$

$$|J| = \begin{bmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & r \cdot (-\sin\phi) \\ \sin\phi & r \cdot \cos\phi \end{bmatrix} = |r \cdot \cos^2\phi + r \cdot \sin^2\phi|$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\phi, r\cos\phi) \cdot rdrdy$$

### Тройной интеграл

**Определение 10** (Тройной интеграл)**.** Дано материальное тело, представляющее собой пространственную область $\Omega$ заполненную массой. Требуется найти массу этой области, при условии что в каждой точке этой области известна плотность. $\phi(P) = \phi(x, y, z)$ Разобъем $\Omega$ на неперекрывающиеся кубируемые части: $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$ в соотсветствии с объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. В каждой области выбираем $\forall(\cdot)P_k$ с плотностью $\phi(p_k)$, тогда масса этой области $\Delta m_k \approx \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$, мааса всей области $\Omega m \approx \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot v_k$. Пусть $d$ наименьший из диаметров частичных областей: $\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$, где сумма не зависит от выбора точки $P_k$, не зависит от разбиения и если предел конечен, то:

$$\iiint_\Omega \phi(x, y, z) dxdydz = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^n \phi(P_k) \cdot \Delta v_k$$

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iint_D dxdy \int_l^m f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(p) dz$$

## 7 Лекция 10

### Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Область $G$ ограничена $z = \phi(x, y)$ и $z = \phi(x, y)$ - поверхности, которые однозначно проектируются на одну и ту же область $D$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} fdz$$

Если область $D(x, y)$ представляет собой криволинейную трапецию, то $x \in [a, b]; y = \xi_1(x); y = \xi(x)$

$$\int_a^b dx \iint_{\xi_1(x)}^{\xi_2(x)} dy \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} fdz$$

### Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах описывается тремя координатами. $\rho, \phi, z \Rightarrow P(\rho, \phi, z)\rho$ - полярный радиус, $\phi$ - полярный угол, для точки $p'$ - которая является проекцией точки $p$ $z$ - аппликата точки $p$.

Декартовы координаты связаны с цилиндрическими координатами:

$$x = \rho \cdot \cos\phi; \phi \in [0, +\infty]$$

$$y = \rho \cdot \sin\phi; \phi \in [0, 2\pi]$$

$$z = z; z \in [-\infty, +\infty]$$

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{G^*} f(\rho\cos\phi, r\sin\phi, z)|J|drd\phi dz$$

$$J = \det\begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\phi} & \frac{dz}{dz} \end{bmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

$drdydz = J \cdot drd\phi dz = dv =$ элемент объема в цилиндрических координатах.

## Сферические координаты в тройном интеграле

В сферических координатах положение точки $p$ описывается с помощью трех координат $\phi, r, \theta$ где $r$ - радиус вектор которые соединяет точку $p$ с началом координат. $\phi$ - полярный угол, угол между проекцией точки $p$ на плоскость $Oxy$ и осью $Ox.\theta$ - угол между радиус вектором и положительным направлением $Oz$.

$\phi \in [0, 2\phi]$

$r \in [0, +\infty]$

$\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Декартовы координаты через сферические:

$x = r \cos\phi \sin\theta$

$y = r \sin\phi \sin\theta$

$z = r \cos\theta$

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{D^*} f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot |J| dtd\phi d\theta$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\phi} & \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} = r^2 \sin\theta \Rightarrow r^2 \sin\theta drd\phi d\theta$$

- элемент объема в сферических координатах.

## 8 Лекция 12

### Свойства криволинейного интеграла II рода

- Криволинейный интеграл второго рода зависит от пути обхода $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$
- Если кривая - контур замкнутый $ABCDA \Rightarrow \oint_{+ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint_{-ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
- Если кривая описывается $AB = AC + CB, \Rightarrow \int_{AB} P(x,y)Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
- Если кривая $AB$ - прямолинейный отрезок который перпендикулярен $Ox \Rightarrow \int_{AB} P(x,y)dx = 0$ так как $x = const, d(const) = 0$
- Если кривая $AB$ - прямолинейный отрезок который перпендикулярен $Oy \Rightarrow \int_{AB} Q(x,y)dy = 0$ так как $y = const, dy = 0$

### Связь криволинейного интеграла I рода с криволинейным интегралом II рода

Рассмотрим $\int_{AB} P(x,y)dx$, где $P(x,y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой. Кривая $AB$ будет задаваться в явном виде, то есть $y = \xi(x), x \in [a,b]$ так как кривая непрерывна и функция $P(x,y)$ со своими производными непрерывна, следовательно в каждой точке кривой можно построить касательную к кривой. $\xi'_x = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \int_{AB} P(x,y)dx = \int P(x,\xi(x))dx = \int P(x,\xi(x)) \cdot 1dx = [\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha \cdot (\operatorname{tg}^2\alpha + 1) = 1 \Rightarrow \sqrt{\cos^2\alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 + 1)} \Rightarrow \cos\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}] = \int_a^b P(x,\xi(x))\cos\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}dx = [\sqrt{y'_x + 1}dx = dl] = \int_L P(x,\xi(x)) \cdot \cos\alpha dl$ - криволинейный интеграл I рода.

Аналогично $\int_{AB} Q(x,y)dy = [x = \phi(y), y \in [c,d]] = \int Q(\phi(y),y) \cdot \cos\beta\sqrt{1 + (\phi'_y)^2}dy = \int_L Q(x,y) \cdot \cos\beta \cdot dl$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int P(x,\xi(x)) \cdot \cos\alpha + Q(\phi(y),y) \cdot \cos\beta dl =$$

$$= \int_L [P(x,y) \cdot \cos\alpha + Q(x,y) \cdot \cos\beta]dl$$

**Определение 11** (Формула Остроградского-Грина)**.** Если функции $P(x, y); Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{dp}{dy}; \frac{dq}{dx}$ на рассматриваемой кривой которая полностью лежит в области $D(x, y)$ то имеет место формула:

$$\oint_{+ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy})dxdy$$

Доказательство: Пусть заданная область $D(x, y)$ ограничена таким образом:

- Кривыми $y = \phi(x); y = \xi(x)$
- С боков $BC||Oy; AD||Oy$

Рассмотрим $\oint_{+ABCDA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по кускам $\Rightarrow$

$$\oint_{+ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx +$$
$$+ \int_{BC} P(x,y)dx + \int_{CD} P(x,y)dx + \int_{DA} P(x,y)dx$$

По свойствам криволинейного интеграла $\int_{DA} P(x, y)dx = \int_{BC} P(x, y)dx = 0$ так как $x = const \Rightarrow dx = 0$

Подставим наши кривые:

$$\int_{AB} P(x, \phi(x))dx + \int_{CD} P(x, \xi(x))dx$$

Так как $\frac{dP}{dy}$ - непрерывна на $L$ и в области $D \Rightarrow P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dP}{dy}dy$

К нашей формуле мы получим такое выражение:

$$P(x, \xi(x)) - P(x, \phi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy}dy$$

$$\int_a^b P(x, \phi(x))dx + \int_b^a P(x, \xi(x))dx = \int_a^b P(x, \phi(x))dx - \int_a^b P(x, \xi(x))dx =$$

$$= \int_a^b [P(x,\phi(x)) - P(x,\xi(x))]dx = -\int_a^b [P(x,\xi(x)) - P(x,\phi(x))]dx$$

Вспомним, что $P(x,\xi(x)) - P(x,\phi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy}dy \Rightarrow$

$$-\int_a^b 1dx \int_{\phi(x)}^{\xi(x)} \frac{dP}{dy}dy = -\iint_D \frac{dP}{dy}dydx = \oint_{+ABCDA} P(x,y)dx$$

- малая формула Грина

Аналогичным образом можно доказать (сами!!!)

$$\oint_{+ABCDA} Q(x,y)dy = \iint_D \frac{dQ}{dy}$$

Следовательно:

$$\oint_{+ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy})dxdy$$

Что и требовалось доказать.

Следствие из формулы Остраградского-Грина: Если $P(x,y) = -y; Q(x,y) = x$

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_L -ydx + xdy = 2S_D$$

Следовательно, через криволинейные интегралы II рода можно считать площади плоских фигур.

## Криволинейные интегралы II рода независящие от пути интегрирования

Рассмотрим функции $P(x,y); Q(x,y)$ - непрерывны вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой и в области $D(x,y)$, кривая целиком лежим в области $D(x,y)$

Криволинейный интеграл II рода не зависит от пути интегрирования, если результат вычисления криволинейного интеграла по любым кривым соединяющих точки $A$ и $B$ один и тот же.

**Теорема 12.** Если в каждой точке области $D(x,y)P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными и выполняется условия Грина($\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$), то выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow$

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} du(x,y) = u(x,y)$$

Тогда криволинейный интеграл не зависит от контура.

### Приложение криволинейного интеграла II рода

- Если $f(x,y)$ - линейная плотность, то $\int_{AB} f(x,y)dl = m$ - масса дуги.
- $\oint_L xdy - ydx = 2S_D$ - площадь плоской фигуры.
- $\int P(x,y)dx + Q(x,y)$ , где $(P,Q) = F$ - силы перемещения точки, $(dx,dy) = S$ - перемещение кривой $\Rightarrow \int FdS = W$ - работа по перемещению точки вдоль контура $AB$
- $f(x,y) = 1 \Rightarrow \int_{AB} 1dl = L$ - длинна дуги

## 9 Лекция 14

### Поверхностный интеграл второго рода

**Определение 12.** Потоком жидкости через поверхность $\Sigma$ называется количество жидкости протекаюзее на единицу измерения

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} (v_k \cdot n_k)|_{P_k} \cdot S_k$$

$$\lim_{\lambda \to 0, n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (v \cdot n)|_{P_k} = \exists = \iint_{\Sigma} (v \cdot n) d\delta$$

**Определение 13.** Потоком вектора (векторного поля) через поверхность $\Sigma$ называется поверхностным интегралов второго рода:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\delta$$

Аналогичная запись:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a}_{\vec{n}} d\delta$$

$\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,zs))$
$P, Q, R$ - непрерывны на рассматриваемой поверхности
$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta \cos\gamma)$ $\vec{a} \cdot \vec{n} = P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma$

$$\iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\delta \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\delta = \iint_{\Sigma} P\cos\alpha d\delta + Q\cos\beta d\delta R\cos\gamma d\delta$$

$$= \iint_{\Sigma} \pm P \cdot dydz \pm Q \cdot dxdz \pm R \cdot dxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta R\cos\gamma) d\delta =$$

$$\iint_{\Sigma} \pm P \cdot dydz + Q \cdot dxdz + R \cdot dydx$$

**Свойства:**

- Линейность $\iint_{\Sigma} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{n} d\delta = \lambda \iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\delta + \mu \iint_{\Sigma} \vec{b} \cdot \vec{n} d\delta$
- Адиктивность $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$; $\iint_{\Sigma} \vec{a}\vec{n} d\delta = \iint_{\Sigma_1} \vec{a}\vec{n} d\delta + \iint_{\Sigma_2} \vec{a}\vec{n} d\delta$
- Гладкие поверхности и двухсторонние поверхности имеют 2 нормали

- $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz = \iint_{D_{Oyz}} f(g(g,z),y,z)dydz$

**Теорема 13** (Гаусса-Остроградского)**.** Если в некоторой области $G$ в пространстве $R^3$ координаты $\vec{a}(P,Q,R)$ непрерывные функии и имеют непрерывные частные производные $\frac{dO}{dX}, \frac{dQ}{dY}, \frac{dR}{dZ}$, то $\oint\oint \vec{a}\cdot\vec{n}d\delta = \iiint_T (\frac{dO}{dX}, \frac{dQ}{dY}, \frac{dR}{dZ})dxdydz$