α

Лекция 7

«Прямая на плоскости»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

7.1 Объекты аналитической геометрии

На текущий момент, владея огромным количеством как алгебраических, так и геометрических инструментов, есть возможность рассматривать алгебраические соотношения для различных объектов.

Основным объектом любой геометрической задачи является точка. Пространство, в котором ставятся и решаются геометрические задачи, состоит из точек и называется афинным пространством.

На предудщих лекциях мы показывали, что на плоскости и в пространстве каждая точка будет определяться парой или соответственно тройкой вещественных чисел, называемых координатами точки. В соответствии с этим пространство, являющееся плоскостью, будем обозначать как $\mathbb{R}^2$, а объемное пространство - $\mathbb{R}^3$.

7.1.1 Основные объекты

Точка хоть и является сама по себе основным объектом геометрии, но в своей единственности не представляет ценности. Гораздо более ценным является рассмотрение некоторой совокупности, множества точек. Такие объекты будем называть геометрическим местом точек. Такой подход позволяет дать определение тем понятиям, которые в школьной геометрии часто относят к неопределяемым понятиям - прямая и плоскость.

> Геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **прямую** в $\mathbb{R}^2$ или **плоскость** в $\mathbb{R}^3$

рисунки

Что необходимо для задания прямой в пространстве? Например, ее можно задать как пересечение двух плоскостей, но тогда для этого необходимо не только две точки, но уже три.

> **Прямой в пространстве** называется геометрическое место точек, равноудаленных от трех заданных точек.

Существует еще достаточно большой класс геометрических объектов, поддающихся аналитическому описанию и имеющих большое значение в различных приложениях.

> **Алгебраической кривой** на плоскости и **алгебраической поверхностью** в пространстве называется геометрическое место точек, чьи соотношения могут быть выражены с помощью степенных функций.

Пример 7.1. Наиболее знакомый всем пример - окружност. **Окружностью** называют геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой заданной точки.

Координаты каждой точки окружности подчиняются уравнению:

$$x^+y^2 = r^2$$

Данное аналитическое соотношение представляет собой степенную функцию координат точек, принадлежащиъ объекту, а следовательно являются алгебраической кривой.

7.1.2 Задачи аналитической геометрии

Какие задачи способна решать аналитическая геометрия?

1. Описание геометрического места точек аналитическим выражением или их совокупностью;
2. Нахождение ГМТ, удовлетворяющих заданным условиям;
3. Нахождение пересечения ГМТ;
4. Отыскание и описание свойств ГМТ;
5. Отыскание инвариантных (геометрических) свойств ГМТ;
6. Преобразование систем координат и их аналитическое описание;
7. Преобразование уравнений ГМТ при преобразованиях координат.

7.1.3 Точки отрезка

Прямая, как мы сказали ранее, является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух заданных. Однако для полноценного описания необходимо уметь простым способом находить точку, которая делит отрезок пополам. Данная задача является частным случаем задачи нахождения точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Как определить точку на отрезке? Произвольная точка отрезка может быть выражена параметрическим способом через векторы. предположим, что концы отрезка A и B задаются радиус-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, а между точками, например, проведен направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Тогда с помощью некоторого параметра $\alpha \in [0, 1]$ можно представить произвольную точку отрезка ее радиус-вектором:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$$

С другой стороны, сам направленный отрезок можно представить через разность радиус-векторов его концов $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Тогда, имея радиус-векторы точек и параметр, выступаюший как ползунок, можно определить произвольную точку отрезка:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \alpha(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (1-\alpha)\vec{r}_A + \alpha\,\vec{r}_B, \qquad \alpha \in [0, 1]$$

Иными словами, отрезок можно определить как линейную комбинацию радиус-векторов точек, сумма коэффициентов в которой равна 1. Роль самого параметра α очевидна - он выступает как степень удаленности искомой точки от выбранного конца отрезка (симметричность выражения указывает на равноправность концов). Можно сказать, что этот параметр определяется отношением длины от произвольной точки до "начала" отрезка к общей длине всего отрезка.

7.1.4 Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим задачу деления отрезка в отношении опираясь на полученное выражение для произвольной точки.

Пусть имеется точка C, которая делит отрезок в отношении $AC/CB = \lambda$. Учитывая, что α - это отношение AC/AB получаем связь между этими двумя параметрами:

$$\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + CB} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \qquad 1 - \alpha = \frac{1}{\lambda + 1}$$

После подстановки получается векторное выражение точки, делящей отрезок в отношении λ.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{\lambda + 1}\vec{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}\vec{r}_B = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{\lambda + 1}$$

Пример 7.2. Частный случай этой задачи, который и привел нас к ней - деление отрезка пополам или, иными словами, поиск середины отрезка M. В этом случае отношение частей отрезков равно $\lambda = 1$. И тогда формулы преобразуются в простой вид:

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

В заданной системе координат, где

$$\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$$
$$\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$$
$$\vec{r}_M = (x_M, y_M, z_M)$$

Координаты середины отрезка можно найти как среднее арифметическое соответствуюших координат точек:

$$x_M = \frac{x_A + x_A}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_A}{2} \qquad z_M = \frac{z_A + z_A}{2}$$

Решение этой задачи не зависит от геометрического пространства, в котором она ставится. Векторный вид уравнений в данном случае определяет точку как на плоскости, так и в объемном пространстве.

7.2 Прямая на плоскости: векторные уравнения

Прямая в силу своей простоты, но и в силу своей универсальности имеет достаточно обширное количество способов задания. Рассмотрим для начала возможности описать прямую в виде векторных равенств.

7.2.1 Прямая как ГМТ

По определению, прямая - это геометрическое место точек, равноудаленных от некоторых точек P_1 и P_2. С помощью радиус-векторов можно определить прямую как равенство модулей векторов:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1| = |\vec{r}-\vec{r}_2|$$

Это равенство можно преобразовать, полагая, что если равны модули векторов, значит и равны их квадраты - скалярные произведения векторов на самих себя. Воспользуемся этим.

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}-\vec{r}_1) = (\vec{r}-\vec{r}_2, \vec{r}-\vec{r}_2)$$
$$(\vec{r}, \vec{r}) - 2(\vec{r}, \vec{r}_1) + (\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\vec{r}, \vec{r}) - 2(\vec{r}, \vec{r}_2) + (\vec{r}_2, \vec{r}_2)$$
$$2(\vec{r}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (\vec{r}_1, \vec{r}_1) - (\vec{r}_2, \vec{r}_2)$$

Во второй строке было учтено сокращение одинаковых членов, а также свойство линейности скалярного произведения. В третьей же строке стоит разность являющаяся аналогом разности квадратов. Преобразуем ее по тому же принципу и приведем всё выражение к более простому виду.

$$2(\vec{r}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$
$$\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1\vec{r}_2\right)$$

Уравнение носит название уравнения прямой равноудаленной от двух точек. Какие интересные особенности есть у этого уравнения? Скалярное произведение равное нулю определяет перпендикулярные друг другу вектора. Какие это? Первое слагаемое содержит в себе радиус-вектор прозвольной точки, а также точки P_3, которая, как мы узнали ранее, является серединой отрезка P_1P_2. Середина отрезка, очевидно, принадлежит данной прямой, поэтому скалярное обращение обращается в ноль, если $\vec{r}$ соответствует радиус-вектору точки P_3. Разность же векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_3$ представляет какой-то вектор лежащий на этой прямой. Следовательно, второй множитель всегда ему перпендикулярен. Вектор, обладающий свойством ортогональности вектору, лежащему на прямой, называют **нормалью** к заданной прямой.

7.2.2 Прямая как продолжение отрезка

Несколько иное семейство уравнений дает рассмотрение прямой как продолжения отрезка. Действительно, в выражении для произвольной точки отрезка

$$\vec{r} = \vec{r} + \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$$

можно указать, что параметр α представляет собой любое действительное число, а не просто принадлежит $[0, 1]$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

Такое уравнение называют **уравнением прямой, проходящей через две точки**. Радиус-векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$ - это радиус-векторы произвольных точек, принадлежащих прямой.

Также можно переобозначить вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$, учитывая, что без потери общности $\overrightarrow{AB}$ может быть заменен любым коллинеарным ему вектором $\vec{s}$. С помощью приведенных преобразований уравнение прямой предстанет в виде векторного параметрического уравнения.

> **Векторным параметрическим уравнением** прямой L называется уравнение вида
> $$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}, \qquad t \in \mathbb{R},$$
> где $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки прямой L, $\vec{r}_0$ - радиус-вектор фиксированной, **опорной**, точки P_0, $\vec{s}$ - **направляющий вектор** прямой L, а t - некоторый вещественный параметр.

Если векторное параметрическое уравнение прямой *векторно* умножить на вектор $\vec{s}$, то получится векторное уравнение прямой.

> **Векторным уравнением** прямой L называется уравнение вида
> $$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{b}, \qquad \vec{b} = \vec{r}_0 \times \vec{s}$$

Уравнение получено в силу того, что произведение $\vec{s} \times \vec{s}$ всегда равно нулю.

Если же векторное параметрическое уравнение умножит скалярно на заданный вектор нормали $\vec{n}$, то можно получить нормальное векторное уравнение прямой:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

7.3 Прямая на плоскости: координатные уравнения

Если на плоскости выбрать некоторую систему координат, то из полученных уравнений можно получить несколько других, отражающие соотношения не для векторов, а для координат точек и векторов.

Зафиксируем систему координат, в которой:

$$\vec{r} = (x, y), \qquad \vec{s} = (s_x, s_y)$$
$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) \qquad \vec{n} = (A, B)$$

7.3.1 Прямые следствия векторных уравнений

Векторное параметрическое уравнение прямой предстанет в виде:

$$x = x_0 + ts_x$$
$$y = y_0 + ts_y$$

В этой системе уравнений фигурирует параметр t, от которого можно избавиться, выразив его через остальные элементы:

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}$$

Уравнение данного вида называется **каноническим уравнением** прямой на плоскости.

Nota bene Стоит заметить, что если одна из координат направляющего вектора равна 0, т.е. он сонаправлен с одной из осей, то в данном выражении *допустимо* писать ноль в знаменателе.
Аналогичным ему является **уравнение прямой проходящей через две точки**, аналогичным образом полученное из векторного аналога:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Так называемое **общее уравнение** прямой можно получить двумя путями. Оно выглядит следующим образом:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B - координаты нормального вектора. И потому первый путь получения этого уравнения - напрямую из векторного нормального уравнения:

$$A(x - x_0) + B(x - x_0) = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0,$$

в котором C - это есть обозначение выражения в скобках.
Другой способ заключается в получении его же, но из канонического уравнения прямой. Умножением "крест-накрест" можно получить следующее выражение:

$$s_y x + (-s_x)y + (s_x y_0 - s_y x_0) = 0$$

Полученное уравнение также является общим в силу обозначений:

$$A = s_y \qquad B = s_x \qquad C = s_x y_0 - s_y x_0$$

7.3.2 Производные уравнения в координатной форме

Если в каноническом уравнении положить $k = s_y/s_x$, можно прийти к **уравнению прямой с угловым коэффициентом**

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y = kx + b,$$

где $b = y_0 - kx_0$. Заметим, что данное уравнение имеет ограничение. Коэффициент k называют угловым коэффициентом в силу того, что он определяет $\operatorname{tg}\alpha$ - тангенс угла наклона прямой относительно Ox. В случае вертикальной прямой $x = c$ угол равен $\pi/2$ и соответственно не может идти речи об уравнении с тангенсом такого угла.

В силу произвольности выбора нормали (любой коллинеарный ей вектор), общее уравнение справедливо с любым коэффициентом пропорциональности для чисел A, B и C. Потому разделим все уравнение на $-C$ и приведем его к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b имеют смысл длин отрезков, которые образуются началом координат и точками пересечения прямой с соответствующими осями. Длины отрезков можно выразить через коэффициенты общего уравнения

$$a = -\frac{C}{A} \qquad\qquad b = -\frac{C}{B}$$

Выполняя деление общего уравнения на модуль вектора нормали можно получить **уравнение с прицельным параметром**:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = p, \qquad p = (\vec{r_0}, \vec{n}_0),$$

где $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ - нормальный вектор в представлении направляющих косинусов.

$$\cos\alpha = \frac{n_x}{|\vec{n}|} \qquad \cos\alpha = \frac{n_y}{|\vec{n}|}$$

Nota bene Число p называется прицельным параметром. Его геометрический смысл заключается в величине расстояния от начала отсчета до прямой.

Наконец заметим, что уравнение прямой, проходящей через две точки, также может быть записано в ином виде - как определитель матрицы, составленной из соответствующих координат:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

7.4 Взаимное расположение прямых

Всего на плоскости возможны три случая взаимного расположения прямых:

1. Наложение прямых друг на друга;
2. Параллельность прямых;
3. Пересечение прямых.

Первый случай вполне тривиален. Он сводится к приведению уравнений прямых L_1 и L_2 к одному виду, в котором очевидны равенство или пропорциональность коэффициентов. Например, если прямые приведены к общим уравнениям:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ L_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

условие наложения двух прямых сводится к пропорциональности всех коэффициентов.

$$L_1 = L_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \gamma$$

Условие параллельности прямых моожно выразить схожим образом. Ведь действительно, параллельные прямые обладают коллинеарными веторами нормали $\vec{n}_1 = \gamma\vec{n}_2$. Следовательно, это можно взять за условие параллельности.

$$L_1 \parallel L_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \gamma$$

Однако аналогичное условие справедливо и для направляющих векторов $\vec{s}_i = (p_i, q_i)$. Коллинеарные векторы будут определять параллельные прямые.

$$L_1 \parallel L_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

Иначе это можно представить как

$$p_1 q_2 = p_2 q_1$$

Для получения условия пересечения прямых заметим, что для параллельных прямых (включающих в себя и совпадающие прямые) необходимо выполняется ортогональность вектора нормали и направляющего вектора. Следовательно можно пойти от обратного - прямые пересекаются тогда, когда скалярное произведения вектора нормали $\vec{n_1}$ одной прямой на направляющий векторой второй прямой $\vec{s}_2$ не равно нулю:

$$(\vec{n}_1, \vec{s}_2) \neq 0$$