EVANDRO A. N. SANCHES   Nº USP 5388861   19.03.2014

3. Sejam A, B e C $\subseteq \Sigma^*$

(b) Dê exemplos de linguagens não vazias A, B e C finitas e infinitas, tais que ~~AC≠~~ $A \subset B$ e $AC = BC$

A, B e C infinitas

- tome $\Sigma = \{a, b\}$.
- tome $A = \{w \in \Sigma^* : |w|_a = 0$ ou $|w|_a$ é ímpar$\}$
  tome $B = C = \Sigma^*$

Então $A \subset B$.

como $|\lambda|_a = 0$ $\lambda \in A$.

$AC = \Sigma^*$ pois $\lambda \cdot w = w$ para $w \in \Sigma^*$.

portanto $AC = \Sigma^* = \Sigma^* \Sigma^* = BC$

$\blacksquare$

A, B e C finitas

- Seja $\Sigma = \{a\}$
- tome $A = \{a, aaa\}$

  $B = \{a, aa, aaa\}$

  $C = \{aa, aaa\}$

Então $A \subset B$,

e $AC = \{\overset{w_1}{a\,aa}, \overset{w_2}{a\,aaa}, \overset{w_3}{aaa\,aa}, \overset{w_4}{aaa\,aaa}\}$

$BC = \{\overset{x_1}{a\,aa}, \overset{x_2}{a\,aaa = aa\,aa}, \overset{x_3}{aa\,aaa = aaa\,aa}, \overset{x_4}{aaa\,aaa}\}$

como $w_i = x_i$ para $i = 1 \cdots 4$.

então $AC = BC$ ∎

4) Sejam $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Prove que:

c) $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $(A^*)^n = A^*$

(?) $(A^*)^n \subseteq A^*$ (trivial)

$w \in (A^*)^n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+$ t.q. $w = w_1 \cdots w_n$ com $w_i \in A^*$ $i = 1 \cdots n$

para cada w_i $\exists m_i \in \mathbb{N}$ t.q. $w_i = w_{i_1} \cdots w_{i_{m_i}}$ com $w_{i_j} \in A$ $j = 1 \cdots m_i$

assim $w = w_{1_1} \cdots w_{1_{m_1}} w_{2_1} \cdots w_{2_{m_2}} \cdots w_{n_1} \cdots w_{n_{m_n}}$ com $w_{i_j} \in A$

$\therefore w \in A^*$

(?) $A^* \subseteq (A^*)^n$

$w \in A^* \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $w = w_1 \cdots w_m$ com $w_i \in A$ $i = 1 \cdots m$

1 se $m = n$

então $w \in (A^*)^n$ pois $w = w_1 \cdots w_{m=n}$ com $w_i \in A \overset{①}{\Rightarrow} w_i \in A^*$

① $A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$

2 se $m > n$

então $w \in (A^*)^n$ pois podemos agrupar a fatoração da seguinte maneira: $w = x_1 = w_1 \; x_2 = w_2 \cdots x_n = w_n w_{n+1} w_{n+2} \cdots w_m$ com

$x_i \in A \Rightarrow x_i \in A^*$ ... $\in A^*$

$\boxed{3}$ Se $m < n$

Então $w \in (A^*)^n$ pois $w = w_1 w_2 \cdots w_m \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-m}$ com $\lambda_i = \lambda$ e $i = 1 \ldots (n-m)$

Obs: $w_i \in A \Rightarrow w_i \in A^*$ e $\lambda \in A^*$

Assim por $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ $A^* \subseteq (A^*)^n$

$\therefore (A^*)^n = A^*$ para $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ∎

j) Se $A \subseteq C^*$ e $B \subseteq C^*$ então $AB \subseteq C^*$

1 • $A \subseteq C^*$. Então $w_1 \in A \Rightarrow w_1 \in C^*$. Assim $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q.

$w_1 = w_{1_1} \cdots w_{1_n}$ com $w_{1_i} \in C$ $i = 1 \ldots n$

2 • $B \subseteq C^*$. Então $w_2 \in B \Rightarrow w_2 \in C^*$. Assim $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q.

$w_2 = w_{2_1} \cdots w_{2_m}$ com $w_{2_i} \in C$ $i = 1 \ldots m$

• Se $w \in AB$. Então $w = w_1 w_2$ t.q. $w_1 \in A$ e $w_2 \in B$.

por 1 e 2 $w = w_{1_1} \cdots w_{1_n} w_{2_1} \cdots w_{2_m}$ com $w_{1_i} \in C$ e $w_{2_j} \in C$

$\therefore w \in C^{n+m} \Rightarrow w \in C^*$ ∎

1) $(A \cup B)^* = A^*(BA^*)^*$

i.e. $\overbrace{aa}^{x_0}\underbrace{b}_{y_1}\overbrace{aa}^{x_1}\underbrace{b}_{y_2}\overbrace{\lambda}^{x_2}\underbrace{b}_{y_3}\overbrace{\lambda}^{x_3}$

(?) $(A \cup B) \subseteq A^*(BA^*)^*$

Seja $w \in (A \cup B)^*$

caso 1 Existe algum el. de B fator de w.

- então podemos nomear os n fatores f de w, t.q. $f \in B$, como $y_1, y_2 \cdots, y_n$. onde $n \in \mathbb{N}_+$

- também existem $x_0, x_1, x_2 \cdots x_n \in A^*$ t.q.

$w = x_0 y_1 x_1 y_2 x_2 \cdots y_n x_n$.

- ~~Como~~ como $x_0 \in A^*$ e $x_i y_i \in BA^*$,

$$w \in A^* \underbrace{(BA^*)(BA^*) \cdots (BA^*)}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow w \in A^*(BA^*)^n \Rightarrow w \in A^*(BA^*)^*$$

caso 2 Não existe el. de B fator de w.

- então $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $w = w_1 \cdots w_n$ onde $w_i \in A$, $i = 1 \cdots n$.

- portanto $w \in A^* \Rightarrow w = w\lambda \in A^*(BA^*)^*$.

(?) $A^*(BA^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$

Seja $w \in A^*(BA^*)^*$

① . Então, existem $w_1 \in A^*$ e $w_2 \in (BA^*)^*$ t.q. $w = w_1 w_2$

② . Deste modo, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $w_1 = w_{1_1} w_{1_2} \cdots w_{1_n}$, onde $w_{1_i} \in A$, $i = 1 \cdots n$

e $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $w_2 = w_{2_1} \cdots w_{2_m}$, onde $w_{2_j} \in BA^*$.

③ . Para cada w_{2_j}, $\exists\, x_{1_j} \in B$ e $x_{2_j} \in A^*$ . . .

④ . Mas para cada x_{2_j}, $\exists\, p \in \mathbb{N}$ t.q. $x_{2_j} = x_{2_{j_1}} x_{2_{j_2}} \cdots x_{2_{j_p}}$, com $x_{2_{j_k}} \in A$, $k = 1 \cdots p$.

⑤ . Assim

$$w = \overset{\in A^*}{w_1}\,\overset{\in (BA^*)^*}{w_2} = \overset{\in A}{w_{1_1} \cdots w_{1_n}}\,\overset{\in BA^*}{w_{2_1} \cdots w_{2_m}} = w_{1_1} \cdots w_{1_n} x_{1_1} x_{2_1} \cdots x_{1_m} x_{2_m}$$

$$= \overset{\in A}{w_{1_1} \cdots w_{1_n}}\, \overset{\in B}{x_{1_1}}\, \overset{\in A}{x_{2_{1_1}} \cdots x_{2_{1_p}}}\, \overset{\in B}{x_{1_2}}\, \overset{\in A}{x_{2_{2_1}} \cdots x_{2_{2_p}}} \cdots \overset{\in B}{x_{1_m}}\, \overset{\in A}{x_{2_{m_1}} \cdots x_{2_{m_p}}}$$

com $w_{1_i} \in A$, $x_{1_j} \in B$, $x_{2_{j_k}} \in A$

$$\therefore w \in (A \cup B)^{i+j+jk} \Rightarrow w \in (A \cup B)^*$$

■

h) Se $\lambda \in A$ e $\lambda \in B$ então $(A\Sigma^*B)^* = \Sigma^*$

(⊆) $(A\Sigma^*B)^* \subseteq \Sigma^*$

Pela propriedade d) da concatenação, vista em aula: $A \subseteq B \Rightarrow AC \subseteq BC$ e

- Sendo assim

① $A \subseteq \Sigma^* \Rightarrow A\Sigma^* \subseteq \Sigma^*\Sigma^* = \Sigma^*$

② $B \subseteq \Sigma^* \Rightarrow \Sigma^* B \subseteq \Sigma^*\Sigma^* = \Sigma^*$

③ $A\Sigma^* \subseteq \Sigma^* \Rightarrow A\Sigma^* B \subseteq \Sigma^* B \underset{②}{\subseteq} \Sigma^*$

Pela transitividade $A\Sigma^* B \subseteq \Sigma^*$

(?) $\Sigma^* \subseteq (A\Sigma^* B)^*$

seja $w \in \Sigma^*$

- então temos que $\lambda w \lambda \in (A\Sigma^* B)$, pois $\lambda \in A$ e $\lambda \in B$.

- Assim $\Sigma^* \subseteq (A\Sigma^* B) \subseteq (A\Sigma^* B)^*$

Pela transitividade $\Sigma^* \subseteq (A\Sigma^* B)^*$ ∎

i) $(\overline{A})^R = \overline{(A^R)}$

5. Para cada uma das afirmações a seguir, responda se é verdadeira ou falsa. Prove sua resposta.

a) Para quaisquer linguagens A e $B \subseteq \Sigma^*$, $A = B$ sse $A^* = B^*$

Falsa!

contra exemplo:

sejam: $\Sigma = A = \{0,1\}$ $\quad B = \Sigma^2 = \{0, 1, 00, 01, 10, 11\}$.

sabemos que $A^* = \Sigma^*$ e $B^* = \Sigma^*$ mas $A \neq B$.

d) Para quaisquer linguagens A, B e $C \subseteq \Sigma^*$, $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

Falsa!

contra exemplo

sejam $\Sigma = \{0,1\}$ $\quad A = \{\lambda\}$ $\quad B = \{\lambda\}$ e $C = \{11\}$

· Então $(AB) \cup C = \{\lambda, 1\}$

se $w \in AB \Rightarrow w = \lambda\lambda = \lambda \quad \therefore \quad AB = \{\lambda\}$

· $\{\lambda\} \cup C = \{\lambda, 1\}$ resultado das notas de aula

· Mas $\quad (A \cup C)(B \cup C) = (\{1, \lambda\})(\{1, \lambda\}) = \{1, 11, \lambda\}$

$$\therefore \quad (AB) \cup C \neq (A \cup C)(B \cup C)$$

6 Seja $L = \{x \in \{0,1\}^* : |x|_0 \neq |x|_1\}$

a) Prove que $L^* = \{0,1\}^*$

Sabemos que em $\{0,1\}^*$ existem ou palavras x com $|x|_0 = |x|_1$ ou com $|x|_0 \neq |x|_1$.

· se a palavra x é tal que $|x|_0 \neq |x|_1$ então $x \in L$ e $L \subseteq L^*$. nada a fazer

· se a palavra x é tal que $|x|_0 = |x|_1$ então temos três casos:

caso 1 (x termina em 1)

Neste caso podemos fatorar x tq $x = x_1 1$

- Sabemos que $|1|_0 = 0$ e $|1|_1 = 1$ $\therefore$ $|1|_0 \neq |1|_1$ $\therefore$ $1 \in L$

- Como $|x_1|_1 = |x|_1 - 1$, sabemos que $|x_1|_1 \neq |x_1|_0$ $\therefore x_1 \in L$

assim $x \in L^2 \Rightarrow x \in L^*$

<u>Caso 2</u> (x termina em 0.)

Analogo ao caso anterior.

<u>Caso 3</u> ($x = \lambda$)

então $x \in L^*$ pois $\lambda \in L^*$.

Portanto $\{0,1\}^* \subseteq L^*$

- como o alfabeto pode ser descrito com $\Sigma = \{0,1\}$, provar que $L^* \subseteq \{0,1\}^*$ é provar que $L^* \subseteq \Sigma^*$, que é trivial.

Assim $L^* = \{0,1\}^*$

$\blacksquare$

b) Descreva $\bar{L}$, e prove que $(\bar{L})^* = \bar{L}$

definindo:

$\bar{L} = \{x \in \{0,1\}^* \cdot |x|_0 = |x|_1\}$

($(\overline{L})^* = \overline{L}$)

(⊆) $(\overline{L})^* \subseteq \overline{L}$

seja $w \in (\overline{L})^* \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $w = w_1 \cdots w_n$ com $w_i \in \overline{L}$, $i = 1 \ldots n$.

então $|w_i|_0 = |w_i|_1$

Podemos observar que

$$|w|_0 = |w_1|_0 + \cdots + |w_n|_0$$

(I) com $|w_i|_0 = |w_i|_1 \quad \forall i \in \{1 \ldots n\}$

$$|w|_1 = |w_1|_1 + \cdots + |w_n|_1$$

obs

Por (I)

Podemos trocar $|w|_0 = |w_1|_1 + \cdots + |w_n|_1$

$\therefore\ |w|_0 = |w|_1 \Rightarrow w \in \overline{L}$

(⊇) $\overline{L} \subseteq (\overline{L})^*$

Por definição.

Assim $(\overline{L})^* = \overline{L}$

∎