Aulas 25 e 26

- Representação de números em vírgula flutuante
- A norma IEEE 754
 - Operações aritméticas em vírgula flutuante
 - Precisão simples e precisão dupla
 - Arredondamentos
- Unidade de vírgula flutuante do MIPS
 - Instruções da FPU do MIPS

Bernardo Cunha, José Luís Azevedo, Arnaldo Oliveira

Representação de quantidades fracionárias

- A codificação de quantidades numéricas com que trabalhamos até agora esteve sempre associada à representação de números inteiros
- A representação posicional de inteiros pode também ser usada para representar números racionais considerando-se potências negativas da base
- Por exemplo a representação da quantidade 5.75 em base 2 com 4 bits para a parte inteira e 4 bits para a parte fracionária poderia ser:
 23 22 21 20 2-1 2-2 2-3 2-4



 Esta representação designa-se por "representação em vírgula fixa"

Representação de quantidades fracionárias

- A representação de quantidades fracionárias em vírgula fixa coloca de imediato a questão da divisão do espaço de armazenamento para as partes inteira e fracionária
- O número de dígitos da parte inteira determina a gama de valores representáveis
- O número de dígitos da parte fracionária, determina a precisão da representação (no exemplo anterior, a menor quantidade representável é 2⁻⁴ = 0,0625)
- No caso geral, quantos dígitos devem então ser reservados para a parte inteira e quantos para a parte fracionária, sabendo nós que o espaço de armazenamento é limitado?

Representação de números em Vírgula Flutuante

• **Exemplo**: **-23.45129876** (vírgula fixa). A mesma quantidade pode também ser representada recorrendo à notação científica:

- São representações do mesmo valor em que a posição da vírgula tem de ser ponderada, na interpretação numérica da quantidade, pelo valor do expoente de base 10
- Esta técnica, em que a vírgula pode ser deslocada sem alterar o valor representado, designa-se também por representação em vírgula flutuante (VF)
- A representação em VF tem a vantagem de não desperdiçar espaço de armazenamento com os zeros à esquerda da quantidade representada
- No primeiro exemplo, o número de dígitos diferentes de zero à esquerda da vírgula é igual a um: diz-se que a representação está normalizada

Representação de números em Vírgula Flutuante

 A representação de quantidades em vírgula flutuante, em sistemas computacionais digitais, faz-se recorrendo à estratégia descrita nos slides anteriores, mas usando agora a base dois:

$$N = (+/-) 1.f \times 2^{Exp}$$

(representação **normalizada** de uma quantidade binária em vírgula flutuante)

• Em que:

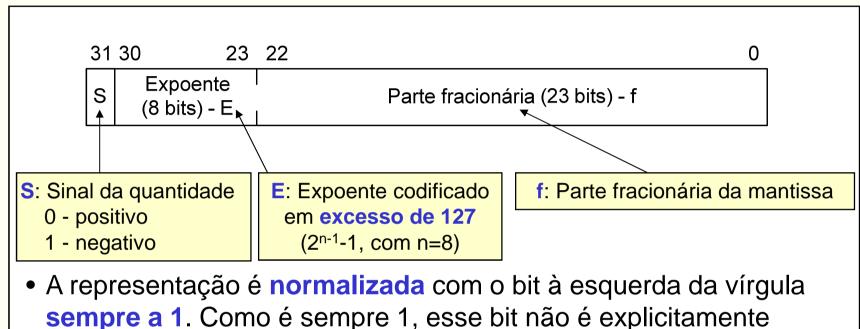
```
 f – parte fracionária representada por n bits
```

1.f – mantissa (também designada por significando)

Exp – expoente da potência de base 2 representado por *m* bits

Representação de números em Vírgula Flutuante

- O problema da divisão do espaço de armazenamento coloca-se também neste caso, mas agora na determinação do número de bits ocupados pela parte fracionária e pelo expoente
- Essa divisão é um compromisso entre gama de representação e precisão:
 - Aumento do número de bits da parte fracionária ⇒ maior precisão na representação
 - Aumento do número de bits do expoente ⇒ maior gama de representação
- Um bom design implica compromissos adequados!



- sempre a 1. Como é sempre 1, esse bit não é explicitamente representado (*hidden bit*)
- A parte fracionária (23 bits) pode então tomar valores compreendidos entre:
- E os limites de representação da mantissa (1.f) são:



 O expoente é codificado em excesso de 127 (2ⁿ⁻¹-1, n=8 bits). Ou seja, é somado ao expoente verdadeiro (Exp) o valor 127 para obter o código de representação

(i.e. Exp = E - 127, em que E é o expoente codificado)

$$N = (-1)^{S} 1.f \times 2^{Exp} = (-1)^{S} 1.f \times 2^{E-127}$$

- O código 127 representa assim o expoente zero, códigos maiores do que 127 representam expoentes positivos e códigos menores que 127 representam expoentes negativos
- O expoente pode, desta forma, tomar valores entre -126 e +127
 [códigos 1 a 254]. Os códigos 0 e 255 são reservados



Expoente =
$$[130]$$
 - $offset$ = $130 - 127 = 3 \Leftrightarrow (Exp = E - offset)$

Mantissa =
$$(1 + parte fracionária) = 1 + .101 = 1.101$$

A quantidade representada, Q, será então:

$$Q = +1.101 \times 2^{3} = (1 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{3}$$
$$= 1.625 \times 8 = 13 \times 10^{0} = 13$$

• Exemplo: codificar no formato vírgula flutuante IEEE 754 precisão simples, o valor -12.59375₁₀

Parte inteira: $12_{10} = 1100_2$

Parte fracionária: $0.59375_{10} = 0.10011_2$

 $12.59375_{10} = 1100.10011_2 \times 2^0$

Normalização: $1100.10011_2 \times 2^0 = 1.10010011_2 \times 2^3$

Expoente codificado: $+3 + 127 = 130_{10} = 10000010_2$

1 10000010 10010011000000000000000

0xC1498000

		•			
				X	2
MSb		1.	18	375	50
		0.	18	375	0
				X	2
		0.	37	750	00
		0.	37	750	0
				X	2
		0.	75	500	00
		0.	75	500	0
				X	2
		1.	50	000	0
↓ ↓		0.	50	000	0
				×	2
LS	b	1.	00	000	0

0.59375



$$N = (-1)^{S} 1.f \times 2^{Exp} = (-1)^{S} 1.f \times 2^{E-127}$$

• A gama de representação suportada por este formato será portanto:

$$\pm [1.175494 \times 10^{-38}, 3.402824 \times 10^{+38}]$$

 Qual o número de casas decimais? De modo a não exceder a precisão da representação original, a representação em decimal deve ter, no máximo, 6 casas decimais:

$$m = \left\lfloor n \frac{\log r}{\log s} \right\rfloor = \left\lfloor 23 \frac{\log 2}{\log 10} \right\rfloor = 6$$

 Ou, sabendo que o nº de bits por casa decimal = log₂(10) ≈ 3.3), o número de casas decimais é \(\begin{aligned} 23 \end{aligned} 3.3 \end{aligned} = 6 casas decimais



- Nas operações com quantidades representadas neste formato podem ocorrer situações de *overflow* e de *underflow*:
 - Overflow: quando o expoente do resultado n\(\tilde{a}\) cabe no espa\(\tilde{c}\) que lhe est\(\tilde{a}\) destinado \(\tilde{E} > 254\)

 Underflow: caso em que o expoente é tão pequeno que também não é representável → E < 1)

Norma IEEE 754 – Adição / Subtração

Exemplo: $N = 1.1101 \times 2^0 + 1.0010 \times 2^{-2}$

1º Passo: Igualar os expoentes ao maior dos expoentes

$$a = 1.1101 \times 2^0$$
 $b = 0.010010 \times 2^0$

2º Passo: Somar / subtrair as mantissas mantendo os expoentes

$$N = 1.1101 \times 2^0 + 0.010010 \times 2^0 = 10.000110 \times 2^0$$

3º Passo: Normalizar o resultado

$$N = 10.000110 \times 2^0 = 1.0000110 \times 2^1$$

4º Passo: Arredondar o resultado e renormalizar (se necessário)

$$N = 1.0000110 \times 2^1 = 1.0001 \times 2^1$$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 – Multiplicação

Exemplo: $N = (1.1100 \times 2^{0}) \times (1.1001 \times 2^{-2})$

1º Passo: Somar os expoentes

Exp. Resultado = 0 + (-2) = -2

2º Passo: Multiplicar as mantissas

 $Mr = 1.1100 \times 1.1001 = 10.101111$

3º Passo: Normalizar o resultado

 $N = 10.101111 \times 2^{-2} = 1.0101111 \times 2^{-1}$

4º Passo: Arredondar o resultado e renormalizar (se necessário)

 $N = 1.0101111 \times 2^{-1} = 1.0110 \times 2^{-1}$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 – Divisão

Exemplo: $N = (1.0010 \times 2^{0}) / (1.1000 \times 2^{-2})$

1º Passo: Subtrair os expoentes

Exp. Resultado = 0 - (-2) = 2

2º Passo: Dividir as mantissas

Mr = 1.0010 / 1.1000 = 0.11

3º Passo: Normalizar o resultado

$$N = 0.11 \times 2^2 = 1.1 \times 2^1$$

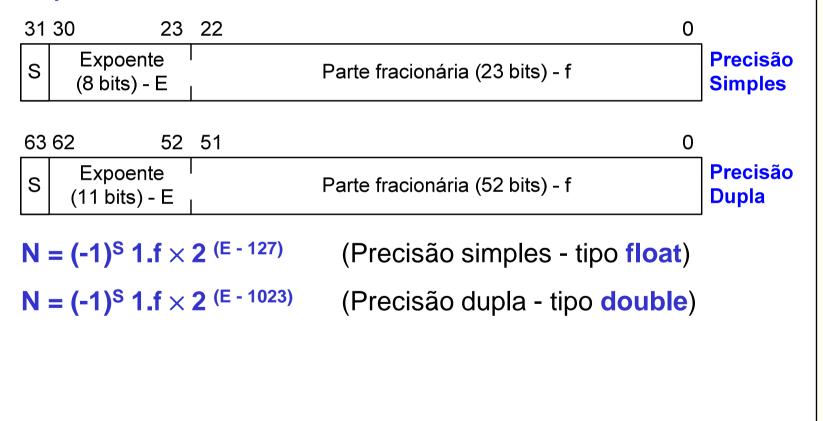
4º Passo: Arredondar o resultado

$$N = 1.1 \times 2^1 = 1.1000 \times 2^1$$

Exemplo com 4 bits fracionários

Norma IEEE 754 (precisão dupla)

 A norma IEEE 754 suporta a representação de quantidades em precisão simples (32 bits) e em precisão dupla (64 bits)



Norma IEEE 754 (precisão dupla)



$$N = (-1)^S 1.f \times 2^{Exp} = (-1)^S 1.f \times 2^{E-1023}$$

 A gama de representação suportada pelo formato de precisão dupla será:

 De modo a não exceder a precisão da representação original, a representação em decimal deve ter, no máximo, ∠52 / log₂(10) =
 15 casas decimais

Norma IEEE 754 – casos particulares

- A norma IEEE 754 suporta ainda a representação de alguns casos particulares:
 - A quantidade zero; essa quantidade não seria representável de acordo com o formato descrito até aqui
 - **+/-infinito**. Exemplos: 1.0 / 0.0, -1.0 / 0.0
 - Resultados não numéricos (NaN Not a Number). Exemplo:
 0.0 / 0.0
 - Afim de aumentar a resolução (menor quantidade representável) é ainda possível usar um formato de mantissa desnormalizada no qual o bit à esquerda do ponto binário é zero

Norma IEEE 754 – casos particulares

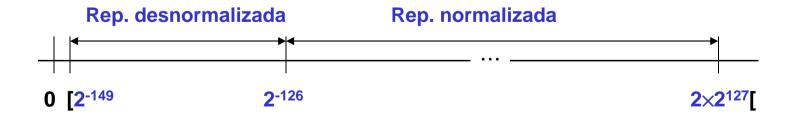
Precisão Simples		Precisão Dupla		Representa	
Expoente	Parte Frac.	Expoente	Parte Frac.		
0	0	0	0	0	
0	≠0	0	≠ 0	Quantidade desnormalizada	
1 a 254	qualquer	1 a 2046	qualquer	Nº em vírgula flutuante normalizado	
255	0	2047	0	Infinito	
255	≠ 0	2047	≠ 0	NaN (Not a Number)	

Norma IEEE 754 – representação desnormalizada

- Permite a representação de quantidades cada vez mais pequenas (com cada vez menos precisão - underflow gradual)
- A gama de representação suportada pelo formato de mantissa desnormalizada, em precisão simples, será então:

$$\pm [1 \times 2^{-23} \times 2^{-126}, 1.0 \times 2^{-126}]$$

$$\pm$$
 [1.401299 × 10⁻⁴⁵, 1.175494 × 10⁻³⁸[



- As operações aritméticas são efetuadas com um número de bits da parte fracionária superior ao disponível no espaço de armazenamento
- Desta forma, na conclusão de qualquer operação aritmética é necessário proceder ao arredondamento do resultado por forma a assegurar a sua adequação ao espaço que lhe está destinado
- As técnicas mais comuns no processo de arredondamento do resultado (o qual introduz um erro) são:
 - Truncatura
 - Arredondamento simples
 - Arredondamento para o par (ímpar) mais próximo

 Truncatura (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Trunc(x)	Erro	
x.00	X	0	
x.01	X	-1/4	
x.10	Х	-1/2	
x.11	Х	-3/4	

Erro médio =
$$(0 - 1/4 - 1/2 - 3/4) / 4$$

= -3/8

 Mantém-se a parte inteira, desprezando qualquer informação que exista à direita do ponto binário

 Arredondamento simples (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Arred(x)	Erro	
x.00	X	0	
x.01	X	-1/4	
x.10	x + 1	+1/2	
x.11	x + 1	+1/4	

Erro médio =
$$(0 - 1/4 + 1/2 + 1/4) / 4$$

= +1/8

 Mantém-se a parte inteira quando o 1º dígito à direita do ponto binário for 0 ou soma-se "1" à parte inteira quando aquele for "1":

$$arred(x) = trunc(x + 0.5)$$

 O erro médio é mais próximo de zero do que no caso da truncatura, mas ligeiramente polarizado do lado positivo

 Arredondamento para o par mais próximo (exemplo com 2 dígitos na parte fracionária: d=2)

Número	Arred(x)	Erro	Número	Arred(x)	Erro
x0.00	х0	0	x1.00	x1	0
x0.01	х0	-1/4	x1.01	x1	-1/4
x0.10	х0	-1/2	x1.10	x1 + 1	+1/2
x0.11	x1	+1/4	x1.11	x1 + 1	+1/4

- Semelhante à técnica de arredondamento, mas decidindo, para o caso "xx.10", em função do primeiro dígito à esquerda do ponto binário
- Erro médio = (0 1/4 1/2 + 1/4) / 4 + (0 1/4 + 1/2 + 1/4) / 4 = -1/8 + 1/8 = 0

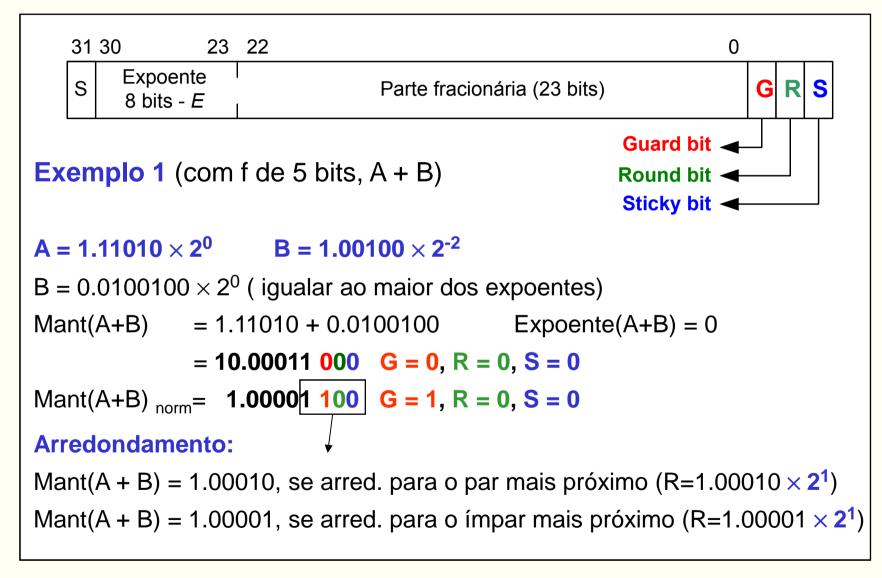
Norma IEEE 754 – arredondamentos

• Os valores resultantes de cada fase intermédia da execução de uma operação aritmética são armazenados com três bits adicionais, à direita do bit menos significativo da mantissa (i.e., para o caso de precisão simples, com pesos 2⁻²⁴, 2⁻²⁵ e 2⁻²⁶)

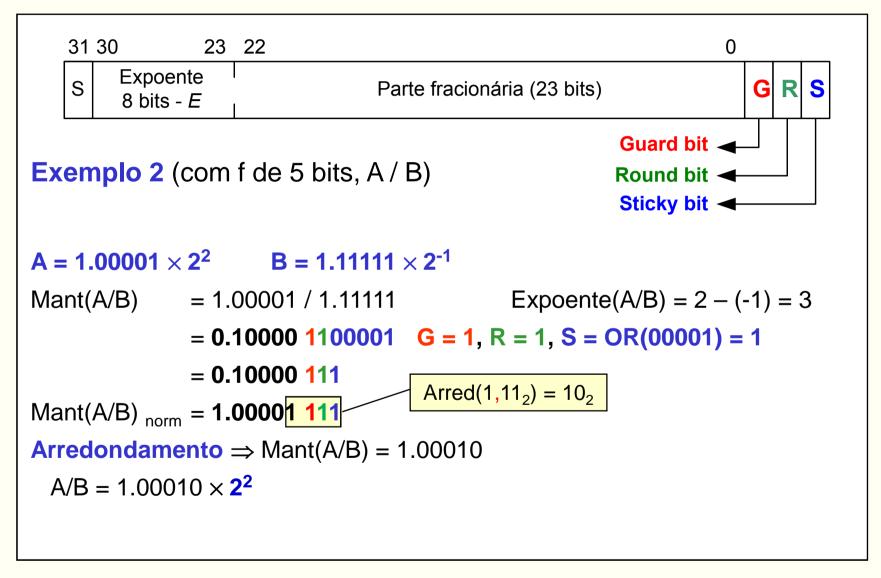
?.??????????????? **G R S** (f c/ 26 bits)

- Objetivos: 1) minimizar o erro introduzido pelo processo de arredondamento e 2) ter bits suplementares para a pósnormalização
- G Guard Bit
- R Round bit
- S Sticky bit Bit que resulta da soma lógica de todos os bits à direita do bit R (i.e., se houver à direita de R pelo menos 1 bit a '1', então S='1')

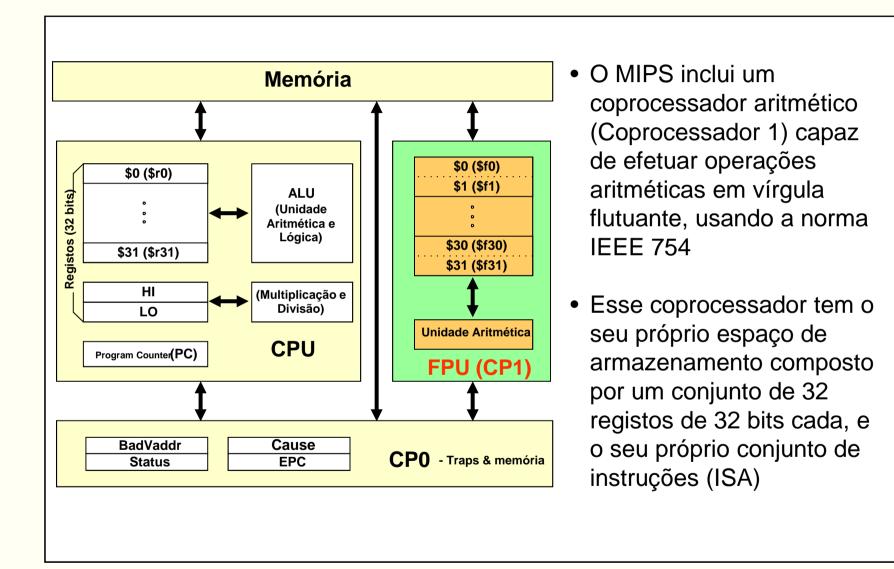
Norma IEEE 754 – arredondamentos



Norma IEEE 754 – arredondamentos



Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS



Vírgula Flutuante no MIPS – registos

- Os registos do coprocessador aritmético são designados, no Assembly do MIPS, pelas letras \$fn, em que o indíce n toma valores entre 0 e 31
- Cada par de registos consecutivos [\$fn,\$fn+1] (com n par) pode funcionar como um registo de 64 bits para armazenar valores em precisão dupla.
- Em Assembly a referência ao par de registos faz-se indicando como operando o registo par
- Apenas os registos de índice par podem ser usados no contexto das instruções

Vírgula Flutuante no MIPS – instruções aritméticas

```
# Absolute Value
abs.p
         FPdst, FPsrc
         FPdst, FPsrc
                                     # Negate
neg.p
div.p
                                     # Divide
         FPdst,FPsrc1,FPsrc2
mul.p
                                     # Multiply
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
add.p
                                     # Addition
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
sub.p
         FPdst, FPsrc1, FPsrc2
                                     # Subtract
               O sufixo .p representa a precisão com que é
                 efetuada a operação (simples ou dupla).
                Deverá, na instrução, ser substituído pelas
                    letras .s ou .d respetivamente.
```

Vírgula Flutuante no MIPS – conversão entre tipos

```
cvt.d.s FPdst, FPsrc
cvt.d.w FPdst,FPsrc
cvt.s.d FPdst,FPsrc
cvt.s.w FPdst, FPsrc
cvt.w.d FPdst,FPsrc
cvt.w.s FPdst,FPsrc
         Formato original
 Formato do
  resultado
```

```
# Convert Single to Double
# Convert Integer to Double
# Convert Double to Single
# Convert Integer to Single
# Convert Double to Integer
# Convert Single to Integer
```

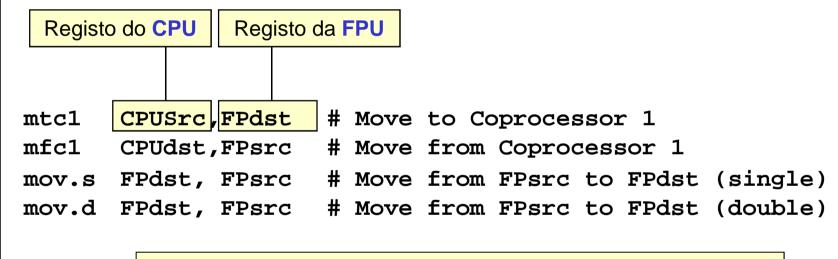
As conversões entre tipos de representação são efetuadas pela FPU pelo que apenas podem ter como operandos/destinos registos da FPU

Conversão entre tipos – exemplos

```
= -1.625 \times 2^2 = -6.5
cvt.d.s $f6,$f0
   Exp = (129-127) + 1023 = 1025 = 10000000001
   $f6=0x00000000 $f7=1 1000000001 1010000...0
   $f6=0x00000000 $f7=0xC01A0000
cvt.w.s $f8,$f0
   Exp = (129-127) = 2
   Val = -1.625 \times 2^2 = -6.5, (int)(-6.5) = -6
   $f8=0xFFFFFFFA
```

Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de transferência

 Transferência de informação entre registos do CPU e da FPU, e entre registos da FPU



Estas instruções copiam o conteúdo integral do registo fonte para o registo destino.

Não efetuam qualquer tipo de conversão entre tipos de informação.

Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de transferência

 Transferência de informação entre registos da FPU e a memória

```
Registo da FPU
              Endereço de memória
lwc1
      FPdst, offset(CPUreg) # Load single from memory
      FPsrc, offset(CPUreq) # Store single into memory
swc1
ldc1
     FPdst, offset(CPUreq) # Load double from memory
sdc1 FPsrc, offset(CPUreg) # Store double into memory
Instruções virtuais (apenas muda a mnemónica):
l.s
      FPdst, offset(CPUreg) # Load single from memory
s.s FPsrc, offset(CPUreg) # Store single into memory
1.d FPdst, offset(CPUreg) # Load double from memory
s.d
     FPsrc, offset(CPUreg) # Store double into memory
```

Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de decisão

- A tomada de decisões envolvendo quantidades em vírgula flutuante realiza-se de forma distinta da utilizada para o mesmo tipo de operação envolvendo quantidades inteiras
- Para quantidades em vírgula flutuante são necessárias duas instruções em sequência: uma comparação das duas quantidades, seguida da decisão (que usa a informação produzida pela comparação):
 - A instrução de comparação coloca a True ou False uma flag (1 bit), dependendo de a condição em comparação ser verdadeira ou falsa, respetivamente
 - Em função do estado dessa flag a instrução de decisão (instrução de salto) pode alterar a sequência de execução

Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS

• Instruções de comparação:

```
c.x.s FPUreg1, FPUreg2 # compare single
c.x.d FPUreg1, FPUreg2 # compare double
```

Em que x pode ser uma das seguintes condições:

```
EQ - equal
```

LT - less than

LE - less or equal

Instruções de salto:

```
bc1t # branch if true
bc1f # branch if false
```

Vírgula Flutuante no MIPS – instruções de decisão

```
float a, b;
if(a > b)
 a = a + b;
else
  a = a - b;
```

```
# $f0 \leftarrow a
# $f2 ← b
if: c.le.s $f0, $f2  # if(a > b)
     bclt else  # {
add.s $f0, $f0, $f2  # a = a + b;
     bc1t else
                            # }
     j endif
                           # else
else: sub.s $f0, $f0, $f2 # a = a - b;
endif:...
```

Convenções quanto à utilização de registos

- Registos para passar parâmetros para funções:
 - \$f12 (\$f13), \$f14 (\$f15)
- Registos para devolução de resultados das funções:
 - \$f0 (\$f1), \$f2 (\$f3)

Cálculo em Vírgula Flutuante no MIPS – Exemplo

```
double average(double *, int);
void main(void)
  double array[SIZE];
  double avg;
  avg = average( array, SIZE );
  printDouble( avg );  // syscall 3
double average(double *v, int N)
  double av = 0.0;
  int i;
  for(i = 0; i < N; i++)
     av += v[i];
  return av / (double)N;
```

Tradução C / Assembly

```
void main(void)
                     double average(double *, int)
  static double array[SIZE];
  double avg;
  avg = average( array, SIZE );
```

```
.data
array: .space 8 * SIZE
      .text
      .globl main
main:
                       # void main(void) {
      la $a0, array
                       #
      li $a1, SIZE
      jal average
     mov.d $f12, $f0
                            avg = average(array, SIZE)
     li $v0, 3
      syscall
                            print double(avg)
                       # }
      jr $ra
```

Tradução C / Assembly

```
double average(double *v, int N)
  double av = 0.0;
  int i:
  for(i = 0; i < N; i++)
   av += v[i];
  return av / (double)N;
# $f0 \leftarrow av
func: mtc1 $0, $f0 #
     cvt.d.s $f0, $f0  # av = 0.0
     li $t0, 0 # i = 0
for: bge $t0, $a1, endf # while(i < N) {</pre>
     sll $t1, $t0, 3 #
     addu $t1, $t1, $a0 # $t1 = &v[i]
     1.d $f4, 0($t1) # $f0 = v[i]
     add.d $f0, $f0, $f4 # av += v[i]
     addi $t0, $t0, 1 # i++
                        # }
     j for
endf: mtcl $a1, $f4 #
     cvt.d.w $f4, $f4  # $f4 = (double)N
     div.d $f0, $f0, $f4
     jr $ra
```

Exercícios

- Na conversão de uma quantidade codificada em formato IEEE754 precisão simples para decimal, qual o número máximo de casas decimais com que o resultado deve ser apresentado? E se o valor original estiver representado em formato IEEE754 precisão dupla?
- Determine a representação em formato IEEE754 precisão simples da quantidade real 19,1875. Determine a representação da mesma quantidade em precisão dupla
- Determine o valor em decimal da quantidade representada em formato IEEE754, precisão simples, como 0xC19AB000
- Determine o valor em decimal da quantidade representada em formato IEEE754, precisão simples, como 0x80580000

Exercícios

- Considere que o conteúdo dos dois seguintes registos da FPU representam a codificação de duas quantidades reais no formato IEEE754 precisão simples:
 - \$f0 = 0x416A0000
 - \$f2 = 0xC0C00000

Calcule o resultado das instruções seguintes, apresentando o resultado em hexadecimal:

```
• abs.s $f4,$f2 # $f4 = abs($f2)
• neg.s $f6,$f0 # $f6 = neg($f0)
• sub.s $f8, $f0,$f2 # $f8 = $f0 - $f2
sub.s $f10,$f2,$f0 # $f10 = $f2 - $f0
add.s $f12,$f0,$f2 # $f12 = $f0 + $f2
mul.s $f14,$f0,$f2 # $f14 = $f0 * $f2
• div.s $f16,$f0,$f2 # $f16 = $f0 / $f2
• div.s $f18,$f2,$f0 # $f18 = $f2 / $f0
• cvt.d.s $f20,$f2 # Convert single to double
cvt.w.s $f22,$f0
                     # Convert single to integer
```