André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

1.- $$y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) + 1$$

$u(t) = \alpha u(t)$,

$$3\frac{d\,\alpha u(t)}{dt} + 2\alpha u(t) + 1 = 3\alpha\frac{du(t)}{dt} + 2\alpha u(t) + 1$$

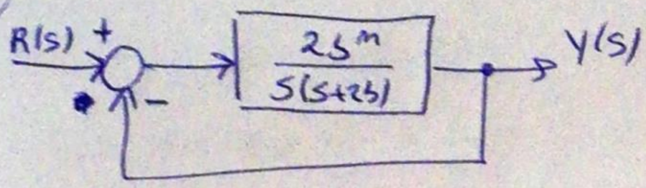
$$\neq \alpha y(t) = 3\alpha\frac{du(t)}{dt} + 2\alpha u(t) + \alpha$$

Logo, o modelo não é linear.

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

3.



$$T(s) = \frac{\frac{2b^m}{s(s+2b)}}{1+\frac{2b^m}{s(s+2b)}} = \frac{2b^m}{s(s+2b)+2b^m} = \frac{2b^m}{s^2+2bs+2b^m}$$

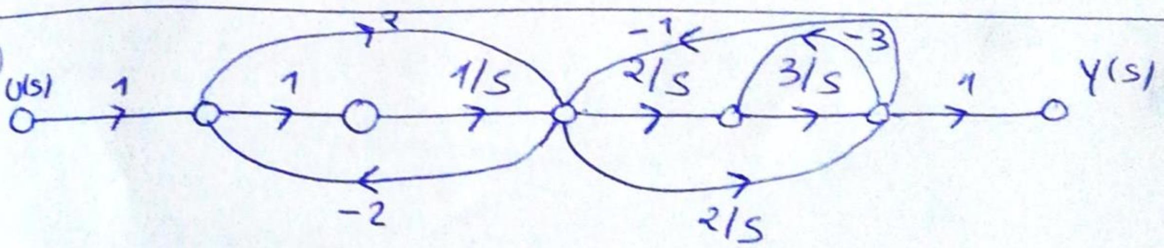
$$\begin{cases} \cancel{2}\xi\omega_n = \cancel{2}b \\ \omega_n^2 = 2b^m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{b}{\sqrt{2b^m}} \\ \omega_n = \sqrt{2b^m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \times b^{1-\frac{m}{2}} \\ - \end{cases}$$

$$P_o = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100\, e^{\frac{-\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \times b^{1-\frac{m}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}b^{2-m}}}}$$

Para não depender de b, $m = 2$

$$P_o = 100\, e^{\frac{-\pi\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}} = 4{,}3\%$$

4.



André Moreira Brandão – 93021
Sistemas e Controlo – 16/FEV/2021

(4.) (continuação)

Caminhos para-a-frente:

$$T_1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{2}{s} \times \frac{3}{s} \times 1 = \frac{6}{s^3}$$

$$T_2 = 1 \times 2 \times \frac{2}{s} \times \frac{3}{s} \times 1 = \frac{12}{s^2}$$

$$T_3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{2}{s} \times 1 = \frac{2}{s^2}$$

$$T_4 = 1 \times 2 \times \frac{2}{s} \times 1 = \frac{4}{s}$$

Cofatores:

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1 \qquad \Delta_3 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1 \qquad \Delta_4 = 1 - 0 = 1$$

Malhas:

$$L_{11} = 1 \times \frac{1}{s} \times -2 = -\frac{2}{s}$$

$$L_{12} = \frac{2}{s} \times \frac{3}{s} \times -1 = -\frac{6}{s^2}$$

$$L_{13} = \frac{3}{s} \times -3 = \frac{-9}{s}$$

$$L_{14} = -2 \times 2 = -4$$

$$L_{15} = \frac{2}{s} \times -1 = \frac{-2}{s}$$

Malhas 2 a 2:

$$L_{21} = L_{11} \times L_{13} = -\frac{2}{s} \times \frac{-9}{s} = \frac{18}{s^2}$$

$$L_{22} = L_{14} \times L_{13} = -4 \times -9 = 36$$

Malhas 3 a 3: Não há

Determinante:

$$\Delta = 1 + \left(\frac{2}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} + 4 + \frac{2}{s} \right) + \frac{18}{s^2} + 36$$

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

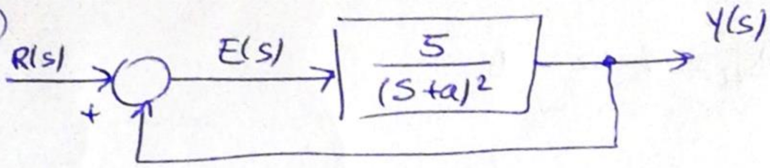
4. (continuação)

$$\Delta = \frac{41s^2 + 13s + 24}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{\sum_i \Delta_i T_i}{\Delta} = \frac{\frac{6}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}}{\Delta} = \frac{\frac{4s^2 + 14s + 6}{s^3}}{\Delta}$$

$$= \frac{4s^2 + 14s + 6}{s(41s^2 + 13s + 24)}$$

5.



$a \in \mathbb{R}^+$

Eq. característica : $1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{5}{(s+a)^2} = 0$

$\Leftrightarrow s^2 + 2as + a + 5 = 0$

$\Leftrightarrow s = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a+5)}}{2}$

$\Leftrightarrow s = -a \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4a - 20}{4}}$

$\Leftrightarrow s = -a \pm \sqrt{a^2 - a - 5}$

$a = 0 \rightarrow s = \pm 5j$

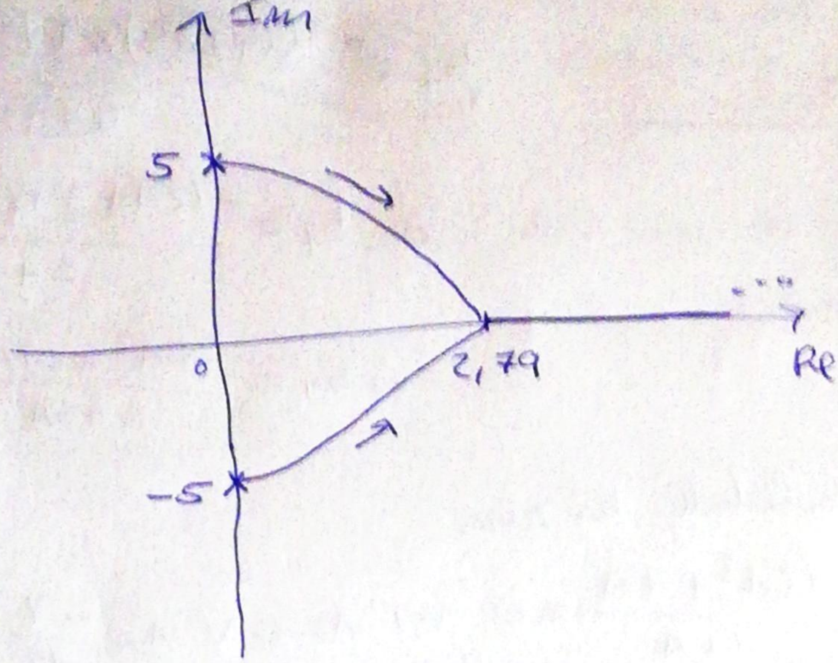
$a^2 - a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = -1,79 \vee a = 2,79$ (como $a \in \mathbb{R}$) $a = 2,79$

Tem polos Reais para $a > 2,79$

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

(5.) (continuação)



(6.) Por análise do lugar de raízes, $G(s)$ tem um pólo em 1, -1 e -3, e um zero duplo em -2.

$$G(s) = \frac{A(s+2)^2}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$

eq. característica: $1 + K\,G(s)H(s) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{KA(s+2)^2}{(s-1)(s+1)(s+3)} = 0 \Leftrightarrow (s^2-1)(s+3) + KA(s+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s^3 + 3s^2 - s - 3 + KAs^2 + KA4s + 4KA = 0 \qquad (K=3)$$

$$\Leftrightarrow s^3 + (3+3A)s^2 + (12A - 1)s + 12A - 3 = 0$$

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

6. (continuação)

s^3	1	$12A-1$
s^2	$3+3A$	$12A-3$
s^1	$\frac{12A^2+7A}{1+A}$	0
s^0	$12A-3$	

$$b_1 = \frac{-12A+3+(3+3A)(12A-1)}{3+3A}$$

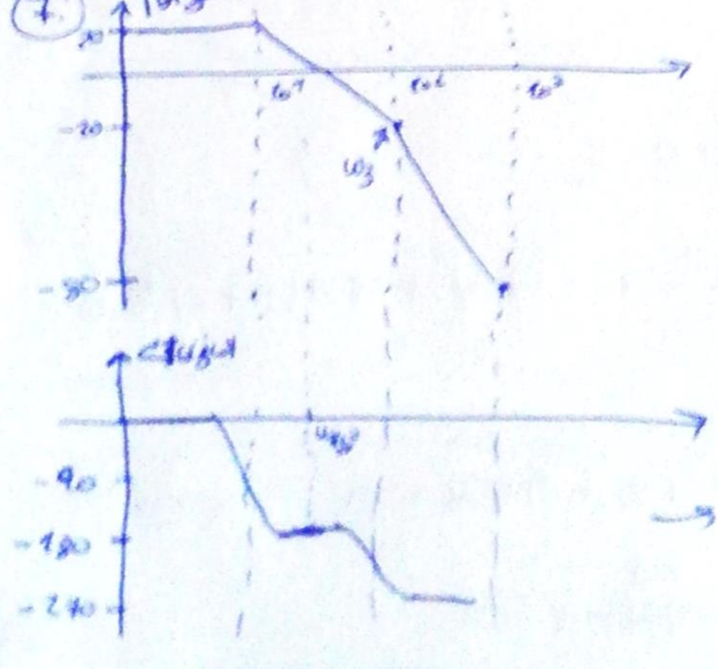
$$\Leftrightarrow b_1 = \frac{36A^2+21A}{3+3A} = \frac{12A^2+7A}{1+A}$$

No limiar de estabilidade há uma linha de zeros, $\frac{12A^2+7A}{1+A} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee A = \frac{-7}{12} \wedge A \neq -1$

Logo, $A = -\frac{7}{12}$

Portanto, $G(s) = \frac{-7(s+2)^2}{12(s-1)(s+1)(s+3)}$

7.



Da análise do diagrama de Bode,

$f = 10^1 \rightarrow$ Pólo duplo

$f = 10^2 \rightarrow$ Pólo simples (ω_3)

$\omega_3 = 20\pi \text{ rad/s} \rightarrow f = \frac{20\pi}{2\pi} = 10 \text{ Hz}$

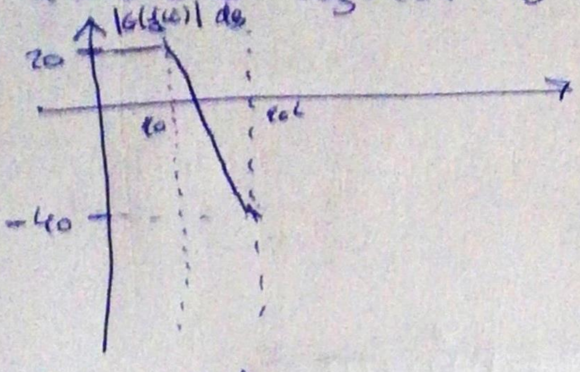
→ Este sistema é estável pois $|G(\omega_{180})| < 0$

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

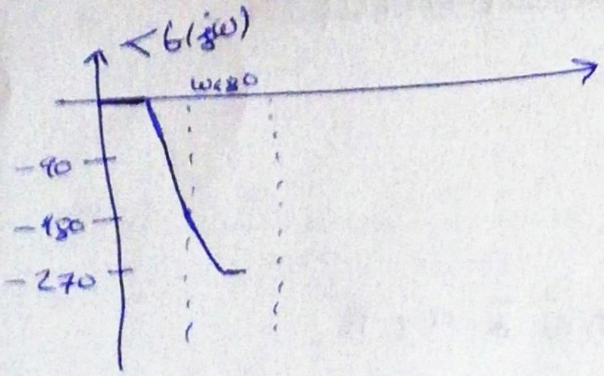
7 (continuação)

Se tivermos $\omega_3 = 20\pi \rightarrow f = 10\,Hz$ → passa a ter um polo triplo nessa frequência

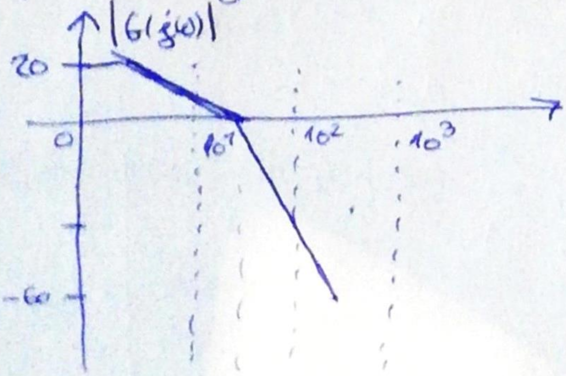


Neste caso $|G(\omega_{180})| > 0\ dB$

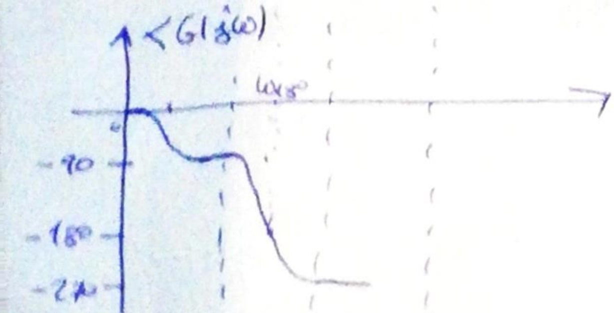
Logo o sistema é instável



Se frequência desse polo ~~...~~ for muito menor que 10Hz tem-se



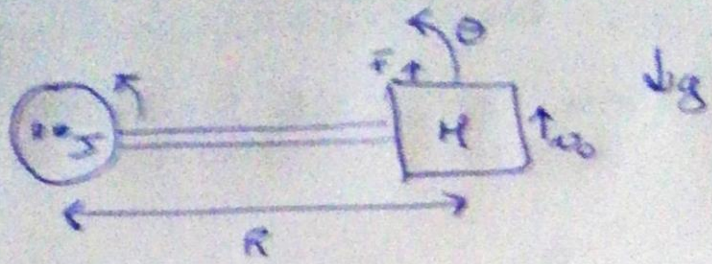
Neste caso o sistema é estável, $|G(\omega_{180})|_{dB} < 0\ (dB)$



Logo, o sistema realimentado é instável para $\omega = 20\pi$, e estável para valores afastados.

André Moleira Branchão – 93021
Sistemas e Controlo – 16/FEV/2021

(8)



$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} + FR \\ F = -Mg \end{cases} \Rightarrow J\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} - MgR$$

$$x = \theta R \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \dot{\theta} R$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R} \rightarrow \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}$$

Logo, tem-se

$$J\ddot{\theta}(t) + D\dot{\theta}(t) = -MgR \quad , \text{com } \dot{\theta}(0) = v_0$$

André Moreira Barradas – 43021
Sistemas e Controlo – 16/FEV/2021

5)

$$Y(s) = \frac{A}{(s+a)(s+b)} \overset{1\,(\text{frações parciais})}{=} \frac{B_1}{s+a} + \frac{B_2}{s+b}$$

$$B_1 = \left[\frac{A}{s+b}\right]_{s=-a} = \frac{A}{b-a}$$

$$B_2 = \left[\frac{A}{s+a}\right]_{s=-b} = \frac{A}{a-b}$$

$$Y(s) = \frac{A}{b-a} \times \frac{1}{s+a} + \frac{A}{a-b} \times \frac{1}{s+b}$$

$$y(t) = \frac{A}{b-a} e^{-at} + \frac{A}{a-b} e^{-bt}$$

$$= \frac{A}{b-a} \times \left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

Pelo gráfico de $y(t) \rightarrow y_{ss} = 1$

$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{(s+a)(s+b)} \times s \times 1 = 1$$

Para ser igual 1, $b = 0$ e portanto, $\frac{A}{a} = 1$

Então, $y(t) = \frac{A}{a} \times e^{-at}$

$= 1 \times e^{-at}$, como $y(1) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-a} = 0,5$

$\Leftrightarrow a = 0,69$

André Moreira Brandão - 93021

Sistemas e Controlo - 16/FEV/2021

② (continuação)

$$\frac{A}{a} = 1 \Leftrightarrow A = a = 0,69$$

Logo, $G(s) = \dfrac{A}{(s+a)(s+b)} = \dfrac{0,69}{(s+0,69)s}$