DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA ELECTRÓNICA E TELECOMUNICAÇÕES

EXERCÍCIOS PRÁTICOS DE SISTEMAS E CONTROLO I

2008/2009

TELMO REIS CUNHA

Apresenta-se, neste documento, um conjunto de exercícios práticos que dizem respeito às seguintes matérias da disciplina de Sistemas e Controlo I, do Mestrado Integrado em Engenharia Electrónica e Telecomunicações:

- Revisão sobre Transformada de Laplace e Sistemas;
- Técnicas de representação dos modelos dos sistemas;
- Modelos matemáticos de sistemas físicos.

O objectivo destes exercícios é complementar o estudo efectuado pelos alunos da disciplina, podendo assim aplicar os conhecimentos adquiridos nas aulas teóricas e práticas e, também, no seu tempo de estudo individual.

I – REVISÃO SOBRE TRANSFORMADA DE LAPLACE E SISTEMAS

1 – Considere os seguintes sinais expressos no domínio de Laplace. Através da aplicação da definição de Transformada Inversa de Laplace, determine as expressões dos mesmos sinais no domínio do tempo.

a) $X(s) = \dfrac{A}{s+p}$, onde A e $p \in \Re$.

b) $Y(s) = \dfrac{A}{(s+p)^2}$, onde A e $p \in \Re$.

c) $Z(s) = \dfrac{A}{s^2+\omega^2}$, onde A e $\omega \in \Re$.

2 – Por aplicação do teorema dos resíduos (decomposição em fracções simples), determine a representação dos seguintes sinais no domínio do tempo.

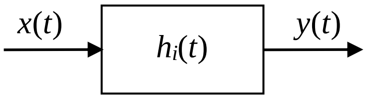
a) $X(s) = \dfrac{5}{s^3+7s^2+12s}$

b) $X(s) = \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+7s^2+12s}$

c) $X(s) = \dfrac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)^2(s+4)^2}$

d) $X(s) = \dfrac{4}{s^3+3s^2+4s+2}$

3 – Considere vários sistemas cujas respostas impulsionais $h_i(t)$, i=1,..,4, são conhecidas e descritas por:



$h_1(t) = Ae^{-pt} \quad , \quad A, p \in \Re \qquad h_2(t) = 2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \qquad h_3(t) = 2t\,e^{-2t} \qquad h_4(t) = 2\sin(t)\,e^{-t}$

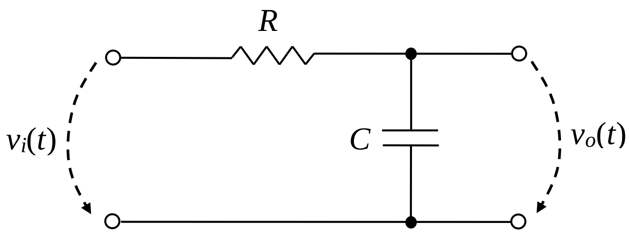
a) Para cada um destes sistemas determine a expressão, no domínio do tempo, da sua resposta ao degrau unitário, efectuando para tal a resolução do integral de convolução.

b) Repita a alínea anterior mas recorrendo, agora, à transformada de Laplace (recorde que a função de transferência de um sistema é a transformada de Laplace da sua resposta impulsional).

c) Novamente através do integral de convolução, determine a resposta impulsional do sistema constituído pela cascata de $h_2(t)$ e $h_3(t)$.

d) Repita a alínea anterior mas recorrendo, agora, à transformada de Laplace.

4 – Seja o seguinte circuito eléctrico (filtro RC passa-baixo):

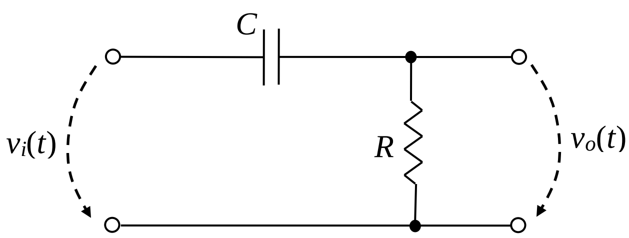


a) Com $v_i(t)$=0, $\forall t$, determine a expressão de $v_o(t)$ sabendo que, no instante inicial, o condensador tem a tensão V_{co} aos seus terminais.

b) Determine, de novo, a expressão de $v_o(t)$ sabendo agora que V_{co}=0V e que $v_i(t)$ comuta, no instante inicial, de 0v para o valor V_i, permanecendo constante neste valor daí em diante.

c) Repita a alínea anterior mas considerando que, agora, $V_{co} \neq 0$V.

5 – Repita o problema anterior para o circuito RC passa-alto:



6 – Demonstre que:

a) $\mathcal{L}\left\{\frac{d\,x(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(t)$, onde $X(s)=\ \mathcal{L}\{x(t)\}$.

b) $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}\right\} = s^2 X(s) - s\,x(t) - \left.\frac{d\,x(t)}{dt}\right|_{t=0}$, onde $X(s)=\ \mathcal{L}\{x(t)\}$.

7 – Seja o seguinte sistema. Determine as componentes transitória e estacionária do sinal de saída $y(t)$ quando a entrada $x(t)$ é:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{10}{s^2+4s+5}} \longrightarrow Y(s)$$

a) o impulso de Dirac.

b) o degrau unitário.

c) $x(t) = A\cos(\omega t)$

8 – Determine a resposta impulsional $h(t)$ dos seguintes sistemas, onde $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ a saída:

a) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{x}(t) \quad , \quad onde\ \dot{y}(t) = \frac{d\,y(t)}{dt},\ \ddot{y}(t) = \frac{d^2\,y(t)}{dt^2}, \ldots$

b) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{x}(t) + x(t)$

c) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$

d) Pode-se concluir que a) e c) representam o mesmo sistema? Justifique.

9 – Caracterize, justificando, cada um dos seguintes sistemas quanto aos seguintes atributos, sabendo que $x(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ o de saída:

- Estático
- Dinâmico com memória finita
- Dinâmico com memória infinita
- Causal
- Não causal

a) $y(t) = Kx(t) \quad , \quad K \in \Re$

b) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$

c) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{x}(t) + x(t)$

d) $\dot{y}(t) + 2y(t) = \ddot{x}(t) + 2x(t)$

e) $Y(s) = sX(s)$

f) $Y(s) = \frac{s+4}{s+1} X(s)$

1 – Represente os seguintes sistemas através de um diagrama de simulação, sendo $x(t)$ o sinal de entrada e $y(t)$ o de saída:

a) $$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}} \longrightarrow Y(s)$$

b) $$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{2}{s(s+1)^2}} \longrightarrow Y(s)$$

c) $$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)^2}} \longrightarrow Y(s)$$

d) $\dddot{y}(t)+2\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+4y(t)=5x(t)$, *onde* $\dot{y}(t)=\frac{d\,y(t)}{dt}$, $\ddot{y}(t)=\frac{d^2\,y(t)}{dt^2}, \ldots$

e) $\dddot{y}(t)+2\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+4y(t)=6\dot{x}(t)+5x(t)$

2 – Represente o seguinte sistema através de um diagrama de simulação:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{5}{s(s+1)(s+4)}} \longrightarrow Y(s)$$

a) na forma canónica de fase variável.

b) na forma canónica do observador.

3 – Represente o seguinte sistema através de um diagrama de simulação:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{(s+2)^2}{s(s+1)(s+4)}} \longrightarrow Y(s)$$

a) na forma canónica do controlador.

b) na forma canónica do observador.

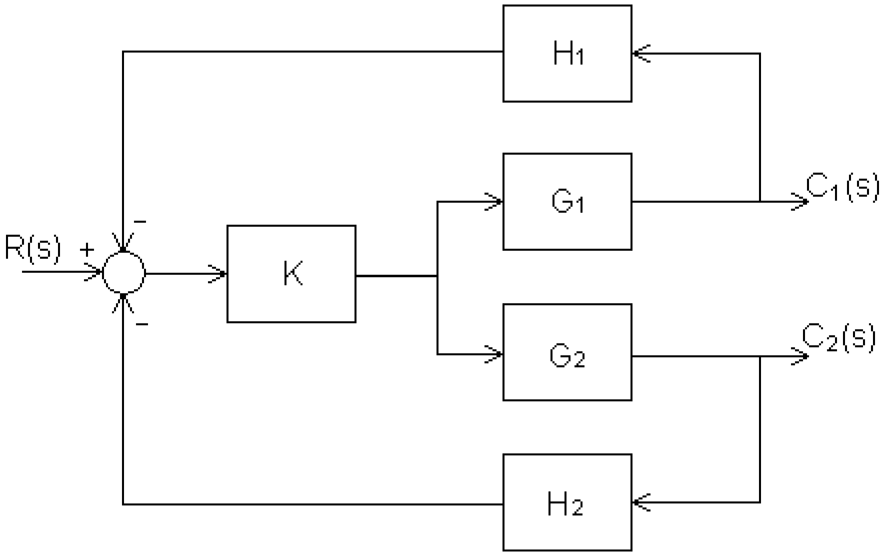
4 – Obtenha as representações por diagrama de simulação dos seguintes sistemas, usando a forma canónica do controlador:

a) $\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+1y(t)=\dot{x}(t)+2x(t)$

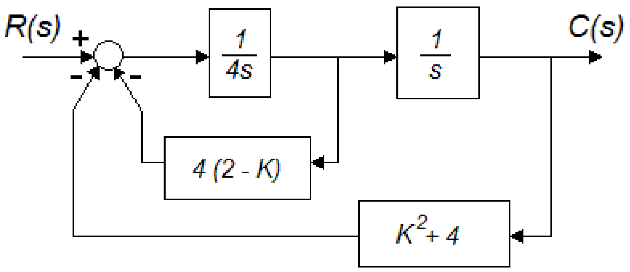
b) $\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+2y(t)=4\ddot{x}(t)+5\dot{x}(t)+x(t)$

c) Repita as alíneas anteriores considerando, agora, a forma canónica do observador.

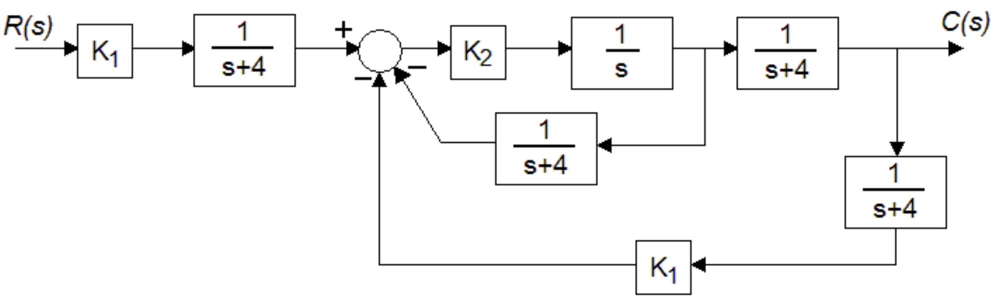
5 – Considere o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos. Determine a função de transferência considerando como entrada o sinal R(s) e como saída a diferença $C_1(s)$-$C_2(s)$.



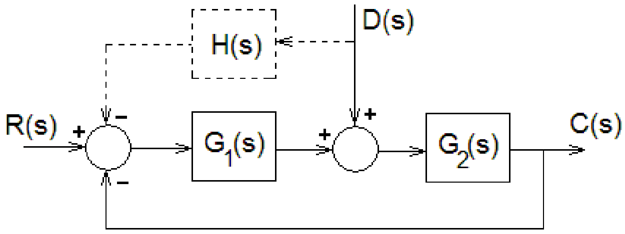
6 – Considere o sistema seguinte que possui um parâmetro ajustável $K \geq 0$. Determine as expressões dos pólos deste sistema em função do parâmetro K.



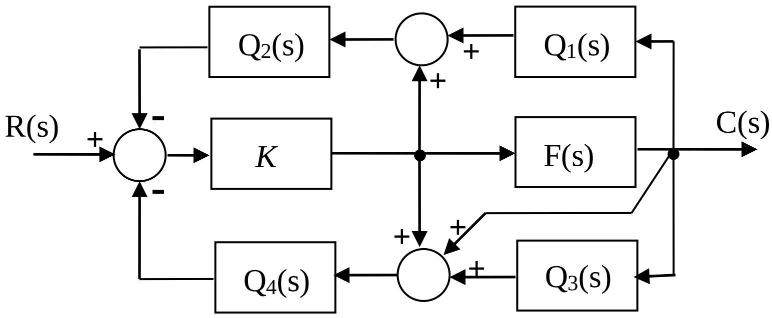
7 – Seja o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos. K1 e K2 são parâmetros ajustáveis do sistema. Determine a função de transferência do circuito.



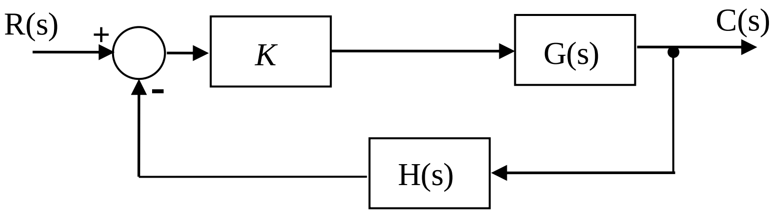
8 – Seja o sistema seguinte, onde R(s) é a sua entrada e C(s) a saída. Este sistema é afectado por perturbações exteriores, representadas pelo sinal D(s). No sentido de reduzir o efeito que essas perturbações causam na saída, foi considerado um bloco adicional [H(s)] que fora ligado ao sistema tal como apresentado na figura (a tracejado). Projecte H(s), em função de $G_1(s)$ e/ou $G_2(s)$, por forma a que a saída C(s) fique totalmente imune às perturbações D(s).



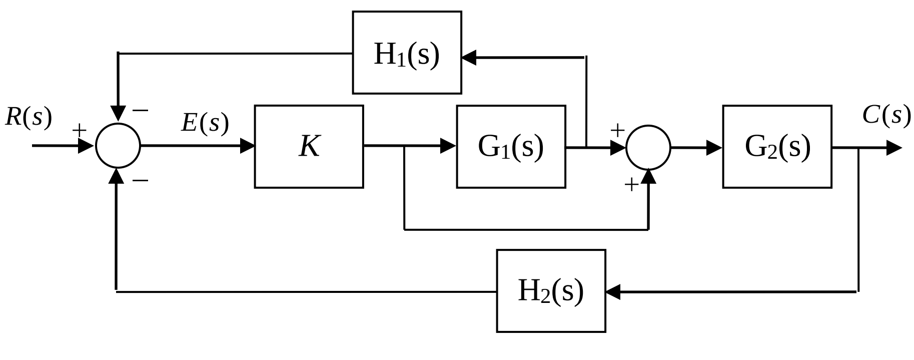
9 – Considere o sistema da seguinte figura, representado através de um diagrama de blocos.



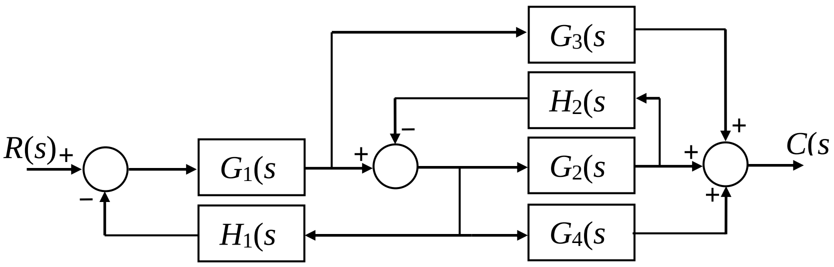
Determine G(s) e H(s) do diagrama de blocos do sistema abaixo representado por forma a que este represente o mesmo sistema que o da figura de cima.



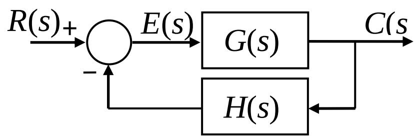
10 – Considere o sistema representado pelo seguinte diagrama de blocos, com um parâmetro real ajustável $K \in \Re$. Determine a função de transferência considerando como entrada o sinal $R(s)$ e como saída o sinal $C(s)$.



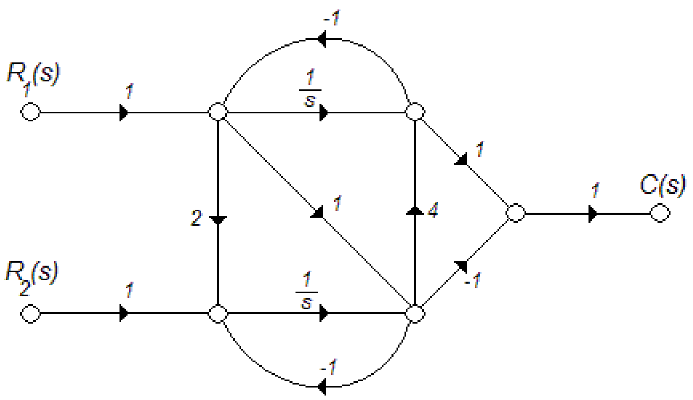
11 – Considere um sistema que é descrito pelo seguinte diagrama de blocos.



Sabe-se que esse mesmo sistema pode ser também descrito pelo diagrama de blocos mais simples apresentado em baixo. Determine as expressões de $G(s)$ e $H(s)$ em função das funções de transferência dos blocos do anterior.



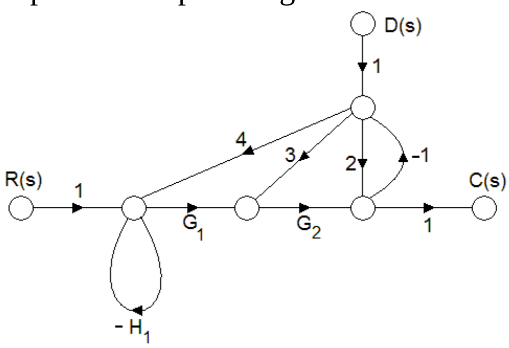
12 – Considere o sistema seguinte representado por um diagrama de fluxo de sinal.



a) Determine a função de transferência do sistema, considerando a saída $C(s)$ e as entradas $R_1(s)$ e $R_2(s)$.

b) Considere que é aplicado, em simultâneo, um degrau unitário em R_1 e R_2. Qual é o valor máximo de $c(t)$ e em que instante é atingido?

13 - Considere o sistema representado pelo diagrama de fluxo de sinal seguinte:



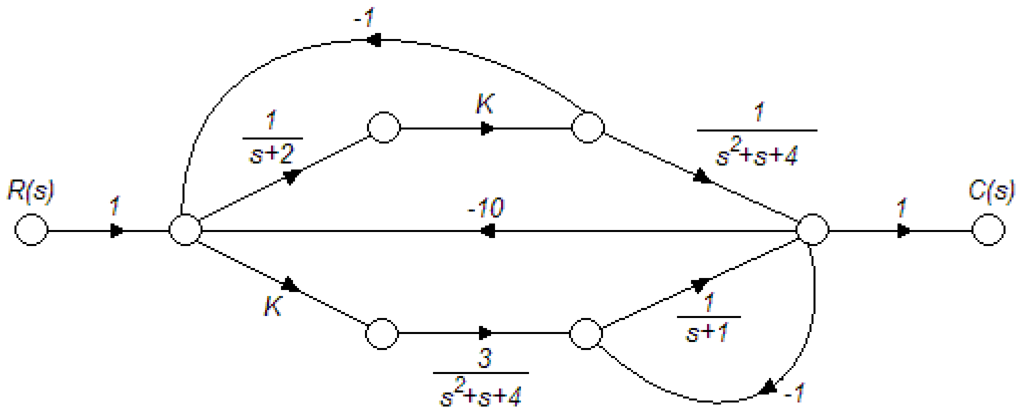
a) Determine a função de transferência, considerando a saída C(s) e as entradas R(s) e D(s).

b) Considere que $d(t) = 0, \forall_{t \in \Re}$, e que $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $G_2(s) = s+1$ $H_1(s) = s$.

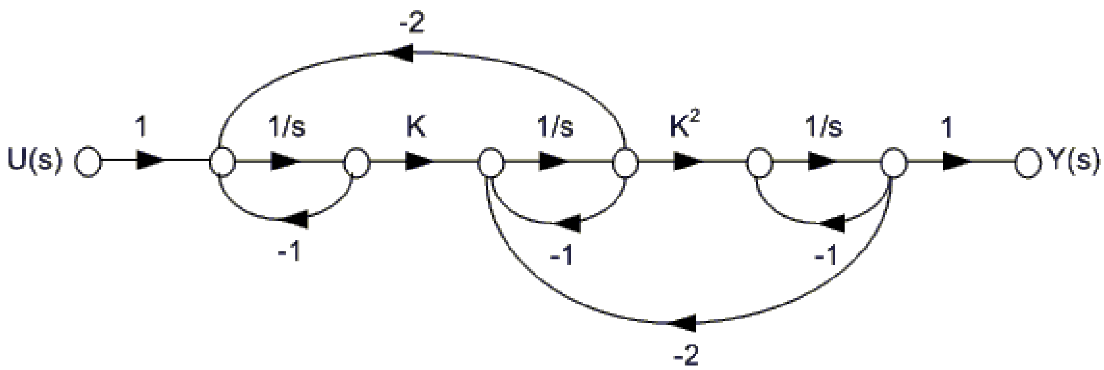
i- Em que instante $c(t)$ atinge o valor máximo quando a entrada $R(s)$ é o degrau unitário?

ii- Para que valor tende a segunda derivada da saída do sistema, $\frac{d^2c(t)}{dt^2}$, quando a entrada é $r(t) = t^2$ para $t \geq 0$ ($r(t) = 0$ para $t < 0$)?

14 - Considere o sistema representado pelo seguinte diagrama de fluxo de sinal, sendo $R(s)$ a entrada e $C(s)$ a saída. Obtenha a função de transferência do sistema por aplicação da fórmula do ganho de Mason.



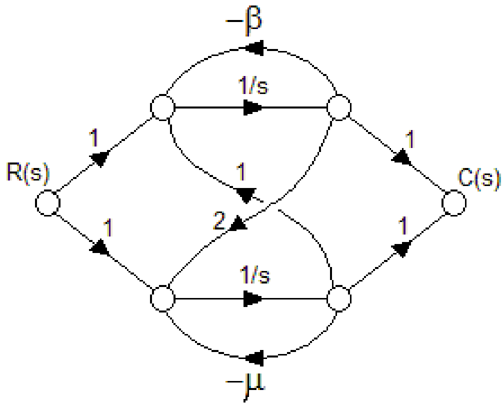
15 – Considere um sistema representado pelo diagrama de fluxo de sinal da figura seguinte, em que $u(t)$ corresponde ao sinal de entrada, $y(t)$ representa o sinal de saída e K é um escalar positivo.



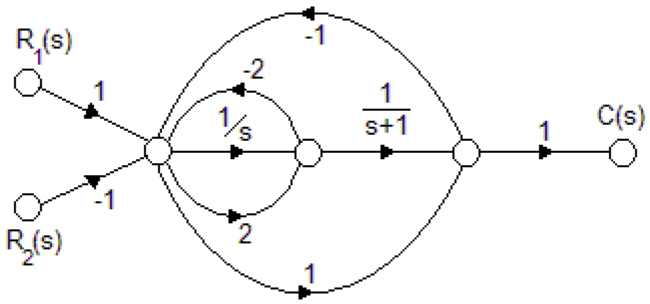
a) Determine a função de transferência do sistema.

b) Determine K por forma a que o sistema apresente um par de pólos complexos conjugados em -1±j2.

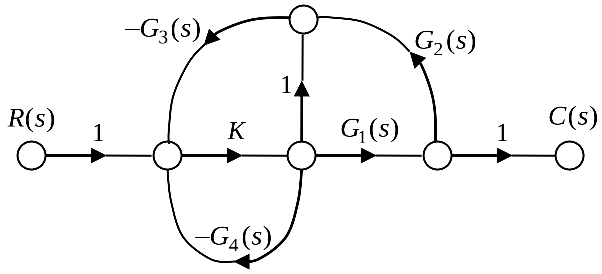
16 – Seja o seguinte sistema, de entrada R(s) e saída C(s), apresentado na forma de um diagrama de fluxo de sinal. Por aplicação da fórmula do ganho de Mason, determine a função de transferência do sistema.



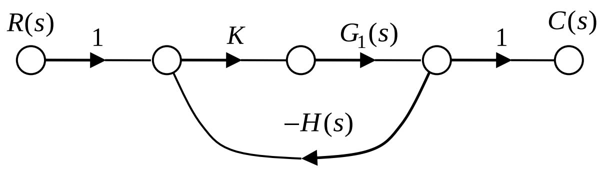
17 – Considere o sistema representado através do seguinte diagrama de fluxo de sinal. O sistema possui duas entradas ($R_1(s)$ e $R_2(s)$) e uma saída $C(s)$. Determine a função de transferência $\frac{C(s)}{U(s)}$ onde $U(s) = R_1(s) - R_2(s)$.



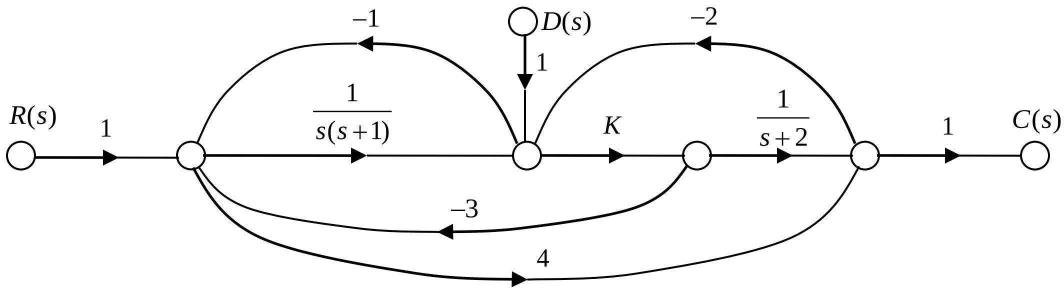
18 – Considere o sistema representado pelo diagrama de fluxo de sinal seguinte, com um parâmetro real ajustável $K \in \Re$.



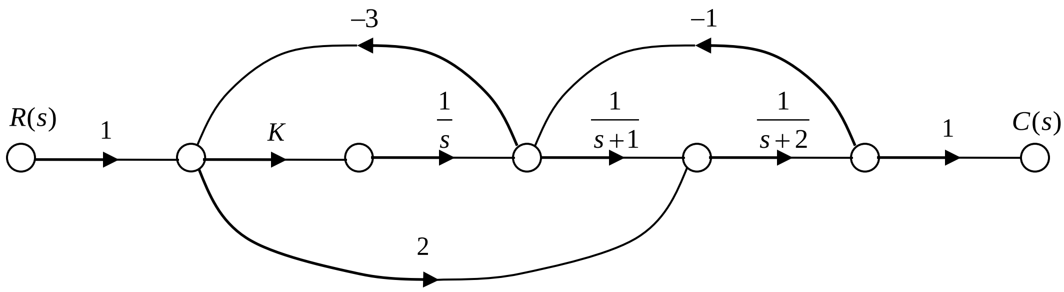
Demonstre que, se o diagrama for reduzido (por equivalência) ao diagrama apresentado em baixo, então $G_1(s)H(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_3(s)+G_4(s)$.



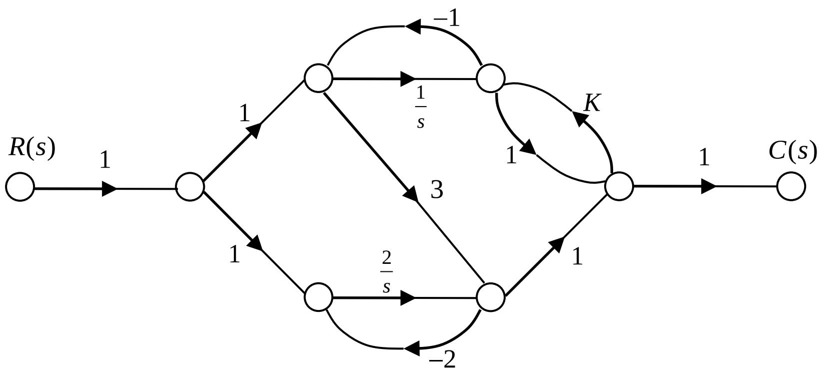
19 – Considere o sistema seguinte, representado através de um diagrama de fluxo de sinal. Determine a função de transferência G(s)=C(s)/R(s) por aplicação da fórmula do ganho de Mason.



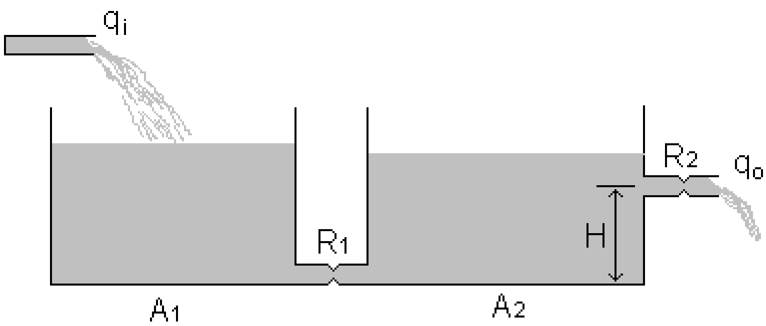
20 – Considere o sistema seguinte, representado através de um diagrama de fluxo de sinal. Determine a função de transferência C(s)/R(s).



21 – Considere o sistema seguinte, representado através de um diagrama de fluxo de sinal. Determine a função de transferência $C(s)/R(s)$ por aplicação da fórmula de Mason.

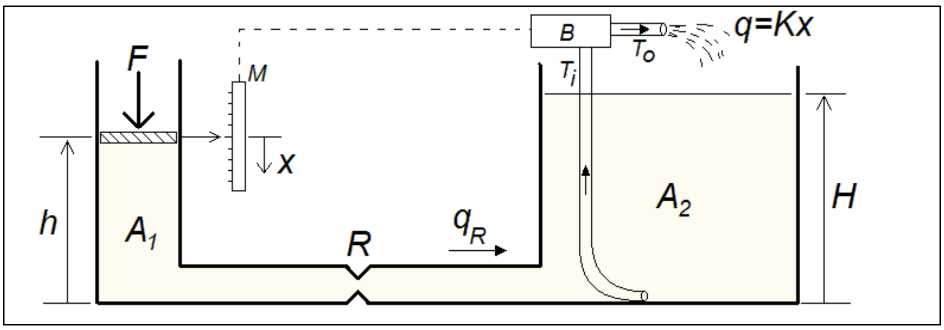


1 – Considere o sistema da figura seguinte. Utilizando as ferramentas proporcionadas pelo MATLAB (*simulink*), visualize a resposta ao degrau unitário para o intervalo de tempo [0 , 5] seg. Obtenha, também, o gráfico da altura da água em ambos os tanques. Considere A1=1m^2, A2=2m^2, R1=5000, R2=2000, H=1m.



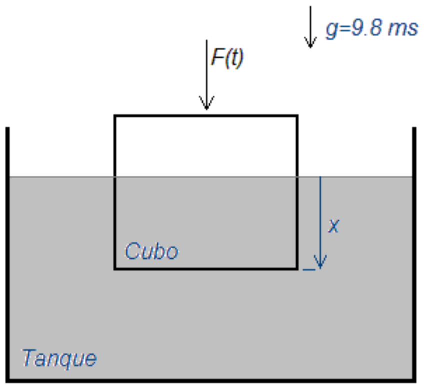
q_i - Caudal de água de entrada
q_o - Caudal de água de saída
R_1 e R_2 - Resistências fluídicas
A_1 e A_2 - Área da base dos tanques cilíndricos

2 – A figura seguinte apresenta um sistema hidráulico cujo objectivo é manter constante a altura h do tanque 1, independentemente da força exterior F que é aplicada sobre a plataforma que isola a superfície do tanque 1 (considere desprezável o atrito entre esta plataforma e as paredes do tanque). Quando F aumenta, o medidor de desnível M detecta um deslocamento x e envia um sinal de controlo à bomba de água B que começa a encher o tanque 2 através do tubo T_o (esta água provém de um reservatório externo). Quando F diminui e x passa a ser negativo, a bomba de água começa a retirar água do tanque 2 (para o reservatório externo), através do tubo T_i. Considere que o caudal (debitado ou extraído) da bomba de água é proporcional a x, com constante de proporcionalidade K. A saída do sistema é a altura H. A densidade do fluído é $\rho = 1$.



Obtenha as equações da dinâmica deste sistema, considerando que o valor da altura h, em regime estacionário, pode ser regulada pelo operador do sistema (sendo esta denominada h_o).

3 – O sistema da figura seguinte representa uma balança baseada no Princípio de Arquimedes. Num tanque contendo água foi colocado um cubo de 1m de lado e densidade relativa 0.5. Sendo colocado um determinado corpo em cima do cubo, espera-se que, por observação da profundidade (x) atingida pela face inferior do cubo, seja estimado o peso desse corpo.



Considere:

- Densidade absoluta da água = 1 Kg/dm^3
- Densidade relativa da água = 1

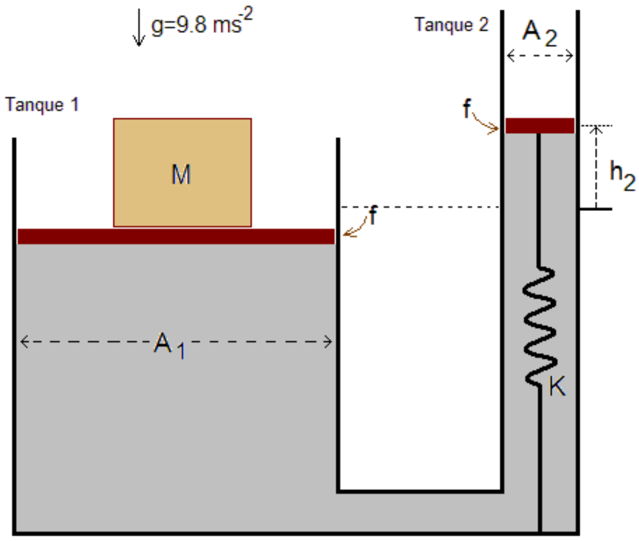
a) Seja $F(t)=0$ (ausência de corpo a pesar). Considere também que ao deslocamento vertical do cubo na água se opõe uma força de atrito de coeficiente f praticamente constante. Pretendendo-se observar a variação de x no tempo, obtenha a equação da dinâmica deste sistema supondo que, inicialmente, o cubo é libertado à superfície do fluido.

b) Estando o cubo mergulhado, já em repouso, sem qualquer corpo sobre ele, suponha que, de repente, se colocou um corpo de massa M no cubo. Qual é o valor máximo de M para que, durante esta experiência, o corpo nunca se molhe (considere $f = 2000$)?

NOTA: Arquimedes (282-212 aC) foi um matemático grego que, entre vários outros assuntos, estudou a impulsão de um corpo quando totalmente ou parcialmente submerso num líquido. Desse estudo resultou o famoso Princípio de Arquimedes que é aqui relembrado:
"Todo o corpo mergulhado num fluido sofre, por parte do fluido, uma força vertical de baixo para cima, cuja intensidade é igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo."

4 – Considere a balança representada na figura seguinte. A balança é composta por dois tanques cilíndricos, cujas secções são $A1$ e $A2$, estando ambos interligados na base através de um canal. No interior dos tanques (e do canal) encontra-se um líquido incompressível, estando vedado na superfície, em cada tanque, por uma placa isoladora. Cada placa pode-se movimentar na vertical, no entanto mantém sempre o contacto com a superfície do líquido. Considere desprezável o atrito do líquido nas paredes dos tanques quando comparado com o atrito das placas isoladoras na zona de contacto com os tanques (cujo coeficiente de atrito é f). Considere também desprezável a resistência fluídica introduzida pelo canal.

Quando um corpo de massa M é colocado na placa do tanque 1, esta desce e a placa do tanque 2 sobe. Ao fim de um certo tempo, por acção da mola (de coeficiente K) e do volume de líquido deslocado, as placas estabilizam e, a partir da altura h_2 (medida relativamente à posição de repouso da balança, sem qualquer corpo aplicado), obtém-se uma medida da massa M do corpo.

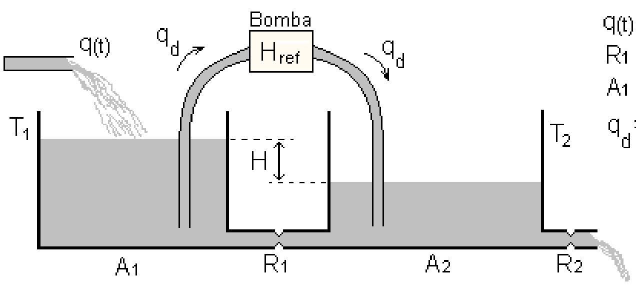


Densidade absoluta do líquido:
ρ= 1 Kg/dm^3

a) Determine a equação da dinâmica deste sistema.

b) Com A_1=1m^3, que relação deverá existir entre os vários parâmetros do sistema para que, em regime estacionário, h_2 apresente uma variação de 1 cm por cada kg da massa do corpo aplicado?

5 – O sistema seguinte tem como objectivo manter num valor pré-determinado o desnível H entre as alturas de água nos tanques T_1 e T_2, sendo estes cilíndricos com área de base A_1 e A_2 respectivamente. Uma bomba de água movimenta o líquido entre os dois tanques mediante a relação q_d=$K(H\text{-}H_{ref})$, onde H_{ref} é o desnível de referência previamente especificado pelo operador do sistema. O tanque T_1 é alimentado por uma mangueira que debita o caudal $q(t)$.

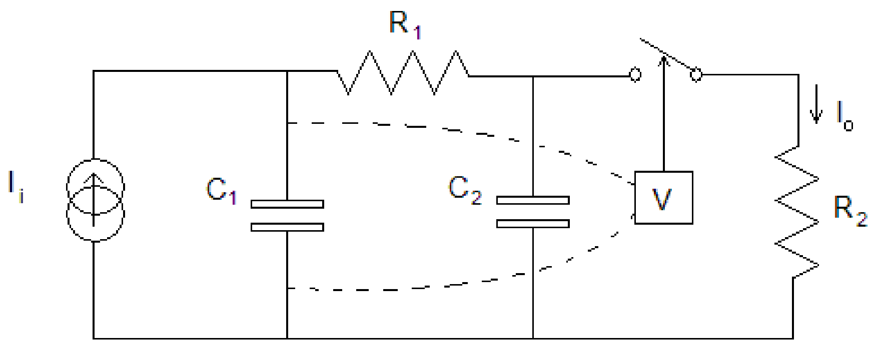


q(t) - Caudal de água de entrada
R1 e R2 - Resistências fluídicas
A1 e A2 - Área da base dos tanques cilíndricos
$q_d = K(H - H_{ref})$

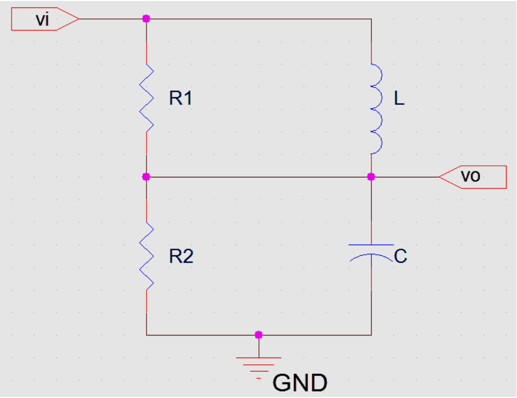
a) Determine um sistema de equações diferenciais, no domínio do tempo, que represente a dinâmica completa do sistema.

b) Verifique que, em regime estacionário e considerando $q(t)$=Q constante, só existe um valor de H_{ref} para o qual a bomba permanece sem consumir energia a movimentar água. Determine esse valor particular de H_{ref} em função dos parâmetros do sistema.

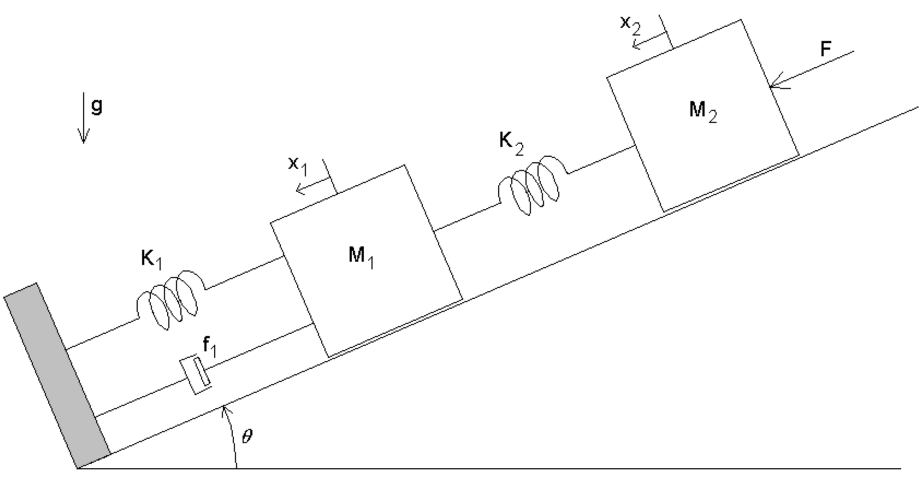
6 – Considere o sistema da figura seguinte. O voltímetro-actuador V fecha o interruptor quando a tensão aos terminais de C_1 ultrapassa o valor V_T. Considere como entrada do sistema a corrente I_i e como saída a corrente em R_2 (I_o). Visualize, via *simulink*, a resposta ao degrau unitário para o intervalo de tempo [0 , 2] seg. Obtenha, também, o gráfico da tensão em ambos os condensadores. Considere C_1=100mF, C_2=200mF, R_1=5Ω, R_2=2Ω, V_T=5v.



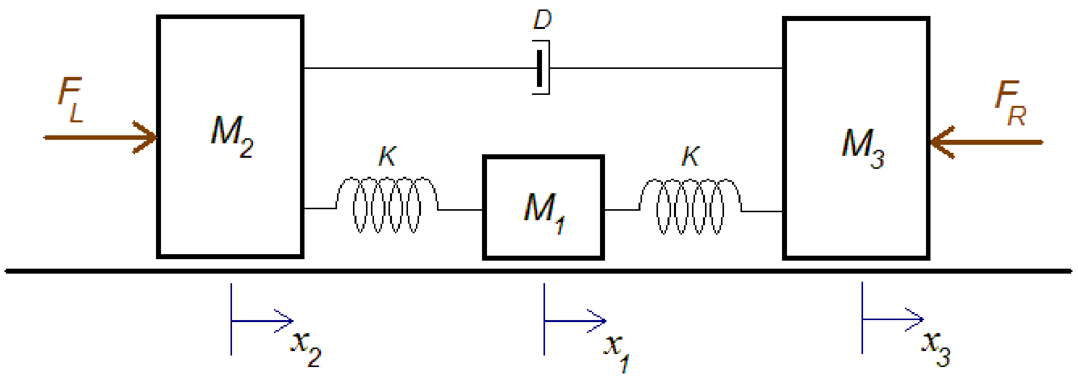
7 – Considere o seguinte circuito eléctrico. $v_i(t)$ é a entrada e $v_o(t)$ a saída. Determine a função de transferência do circuito.



8 – Considere o sistema mecânico de translação apresentado na figura seguinte. Considere desprezável o atrito entre as duas massas e o plano inclinado. Determine as equações da dinâmica do sistema.



9 – Considere o seguinte sistema onde um conjunto de três massas interligadas por duas molas (de coeficiente de elasticidade K) e um amortecedor (de coeficiente de atrito D) são actuadas horizontalmente por duas forças exteriores F_L e F_R. O parâmetro x_i (i=1,2,3) corresponde ao desvio da posição da massa M_i relativamente à sua posição inicial (em repouso). Despreze o atrito entre a superfície inferior de cada massa e o solo.



a) Determine as equações da dinâmica, considerando x_1 como saída do sistema.

b) Considerando que:

i) M2=M3;

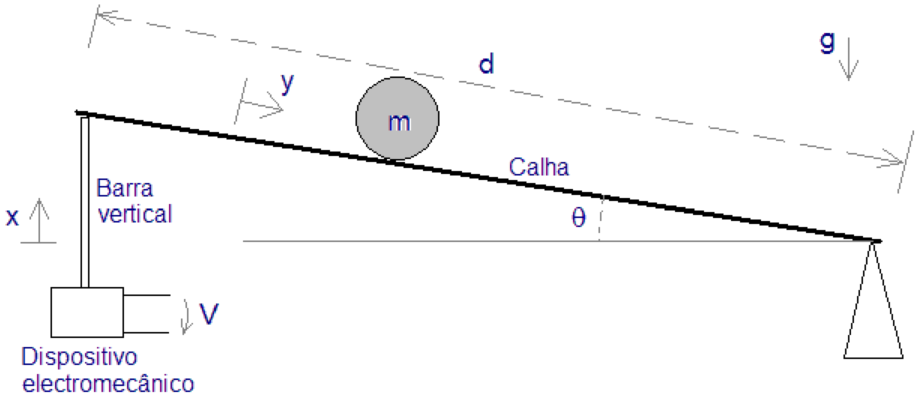
ii) o sistema está inicialmente em repouso;

iii) no instante inicial, são aplicadas as forças F_L e F_R (segundo os sentidos indicados na figura), ambas com módulo constante e igual a $|F|$.

Determine o valor final de x_1, x_2 e x_3.

10 – Considere o sistema da figura que se segue, cujo objectivo é colocar a esfera de massa m numa dada posição (y) ao longo da calha por onde rola. A calha encontra-se fixa na sua extremidade direita através de uma dobradiça (que permite que a calha adquira diferentes inclinações relativamente à horizontal). Na sua extremidade esquerda a calha encosta numa barra vertical que se pode deslocar verticalmente através de um dispositivo electromecânico.
Relativamente a este sistema sabe-se que:

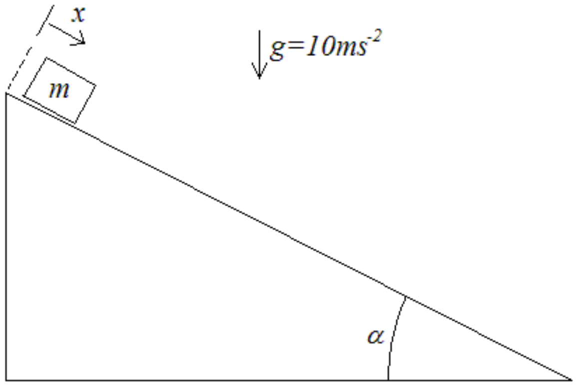
- a esfera está sempre em contacto com a calha, existindo entre ambas atrito dinâmico com coeficiente f;
- a esfera desloca-se por acção da gravidade (de aceleração gravítica g);
- a posição x da extremidade esquerda da calha relaciona-se com a tensão V aplicada ao dispositivo electromecânico através da relação $\dot{x}(t) + b\,x(t) = kV(t), \quad b,k \in \Re^+$;
- a posição x=0 da extremidade esquerda corresponde à posição horizontal da calha;
- a tensão V aplicada ao dispositivo electromecânico pode ser positiva ou negativa;
- considere que as variações possíveis de x são muito menores que o comprimento da calha (d), pelo que é válida a aproximação $\sin(\theta)\approx\theta$.



a) Determine a equação da dinâmica deste sistema que relaciona a posição *y* da esfera na calha com a tensão *V* aplicada ao dispositivo electromecânico.

b) Considere *m*=0.5Kg, *g*=10ms^{-2}, *d*=1m, *f*=0.05Ns/m, *b*=1 e *k*=0.01. Sabendo que inicialmente se tinha *x*=5cm, colocou-se a esfera (parada) na extremidade esquerda da calha. No instante *t*=0 seg soltou-se a esfera que começou a rolar para a direita, tendo-se mantido a calha sempre com a mesma inclinação. Determine a posição da esfera, e a sua velocidade (i.e., derivada de *y*), no instante *t*=2seg.

11 – O sistema da ilustrado em baixo representa uma experiência efectuada para se determinar o valor do coeficiente de atrito dinâmico (*f*) entre duas superfícies (a da superfície inclinada com a superfície inferior da massa *m*). O corpo de massa *m* é deixado livre no topo da rampa, começando a descida por influência apenas da acção gravítica. Esse corpo possui instalado um registador da sua velocidade instantânea relativamente ao solo. Considere desprezável o atrito com o ar e considere que se conhece *a priori* o ângulo de inclinação (α) da rampa relativamente à horizontal local.

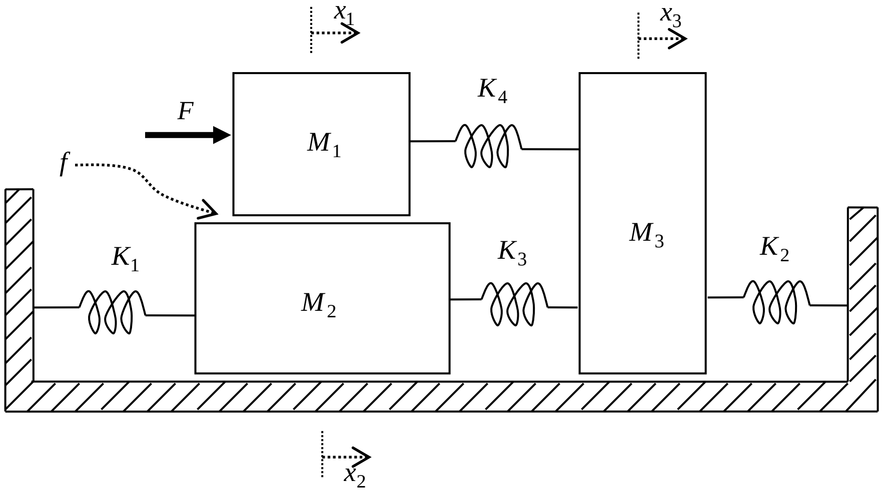


a) Determine a equação da dinâmica do sistema.

b) Como é que procederia para determinar o valor de *f* com base nesta experiência, sem ter que determinar acelerações instantâneas do corpo?

c) Com $m = 10kg$, $\alpha = 10^o$ e estimando-se que $f = 4\,Ns/m$, qual deverá ser o comprimento mínimo da rampa para que o corpo atinja, a meio da rampa, uma velocidade de pelo menos 80% da sua velocidade final. (Sugestão: recorra à simulação do sistema no *simulink*).

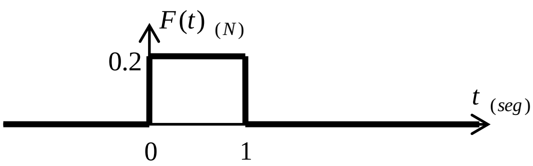
12 - Considere o sistema da figura seguinte onde um conjunto de três corpos (de massas M_1, M_2 e M_3) interligados por molas (de constante de elasticidade K_1, K_2, K_3 e K_4) efectuam pequenos desvios de posição (x_1, x_2 e x_3, respectivamente, e relativamente às suas posições iniciais) quando é aplicado ao corpo de massa M_1 uma força exterior F. Considere que apenas existe atrito não desprezável no contacto entre os corpos de massa M_1 e M_2, sendo f o seu coeficiente de atrito.



a) Determine o sistema de equações da dinâmica do sistema.

b) Represente o sistema através de um diagrama de blocos ($F(s)$ é a entrada e $X_2(s)$ a saída), em que no diagrama aparecem os sinais $F(s)$, $X_1(s)$, $X_2(s)$ e $X_3(s)$.

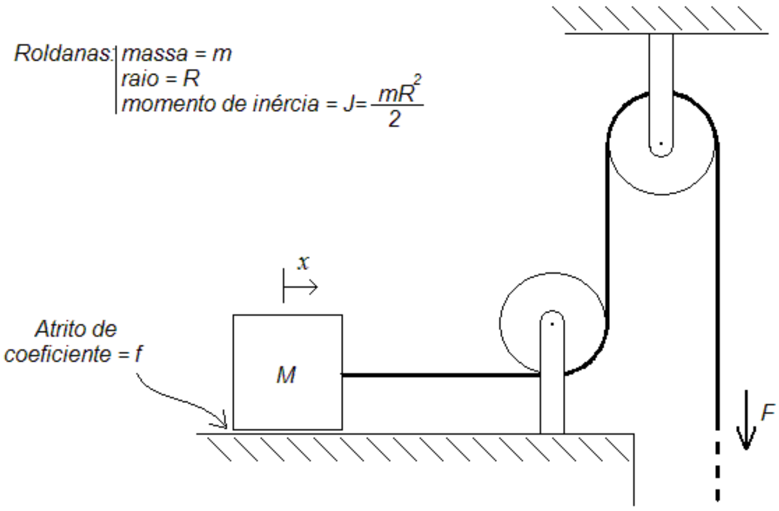
c) Com $M_1 = 1kg, M_2 = 2kg, M_3 = 5kg,\ f = 0.5Ns/m, K_1 = K_2 = 1N/m, K_3 = K_4 = 0.5N/m$, simule o sistema no *simulink* por forma a visualizar $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ em simultâneo, durante 100 segundos após a aplicação da seguinte força exterior:



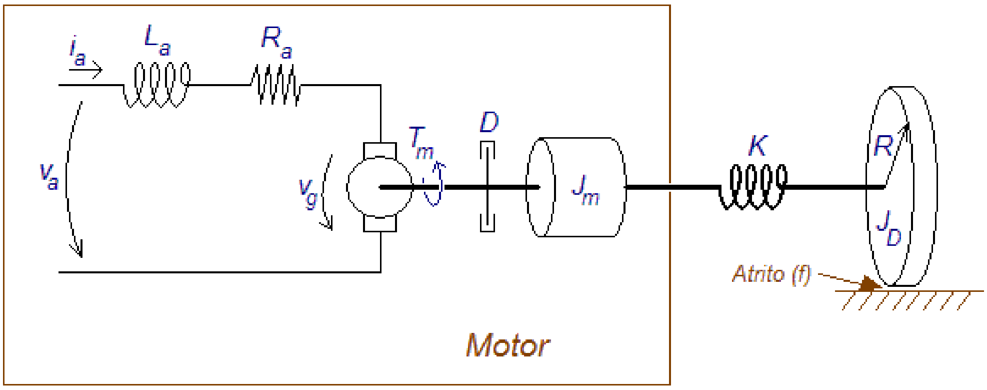
13 – Considere o sistema mecânico apresentado em baixo. Neste, um corpo de massa M é deslocado para a direita através de uma força F imposta num cabo de coeficiente de elasticidade infinito. Este cabo passa por duas roldanas fixas, com massa m e raio R, e considera-se que não há deslizamento entre o cabo e a superfície das roldanas. Existe atrito dinâmico, de coeficiente f, entre o corpo de massa M e a superfície horizontal onde assenta.

a) Determine a função de transferência $X(s)/F(s)$, onde $X(s)= \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $F(s)= \mathcal{L}\{F(t)\}$.

b) Suponha que, com o sistema inicialmente parado, se coloca um outro corpo, também de massa M, na extremidade direita do cabo. No instante t=0 seg., e com o cabo esticado, este corpo é largado. Obtenha a expressão que representa a evolução de $x(t)$ com o tempo.



14 – Considere o sistema mecânico de uma máquina rebarbadora, movida por um motor eléctrico DC controlado pelo induzido e de ligação independente. O veio do motor está ligado ao disco (de raio R) da rebarbadora, sendo J_D a inércia do disco relativamente ao seu eixo de rotação. A ligação entre o motor e o disco é efectuada através de um veio elástico, com constante de elasticidade K. Considere que, quando em operação, existe atrito entre a borda do disco e o material que está a ser trabalhado, sendo o coeficiente de atrito f considerado constante durante cada operação. Pretende-se observar a velocidade de rotação do disco. A figura seguinte mostra um esquema representativo deste sistema.



Considere as seguintes características do motor:

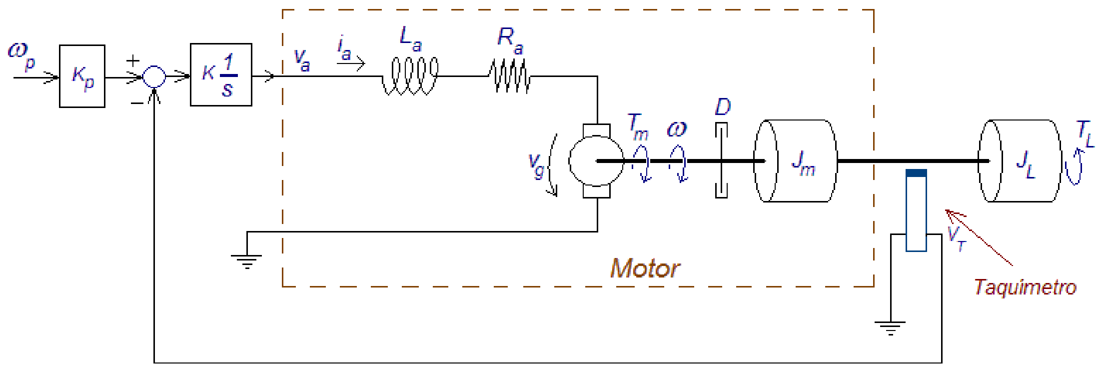
- o rotor do motor tem inércia J_m não desprezável;
- o atrito devido à rotação do veio do rotor é considerado constante e de coeficiente de atrito D;
- o binário produzido pelo motor é proporcional à corrente que percorre o induzido, sendo K_m a constante de proporcionalidade;
- a tensão no induzido devida à força contra-electromotriz é proporcional à velocidade de rotação do rotor, sendo K_g a constante de proporcionalidade;
- o induzido, alimentado pela tensão v_a apresenta uma indutância L_a e uma resistência ohmica R_a.

a) Determine as equações da dinâmica para uma determinada operação da rebarbadora.

b) Com $K = 10\,Nm/rad$, $D = 1\,Nm/rad\,s^{-1}$, $J_m = 5\,Kg\,m^2$, $K_m = 10\,Nm/A$, $K_g = 0.2V/rad\,s^{-1}$, $R_a = 2\Omega$, $L_a = 2H$, $R = 0.1m$ e $J_D = 1Kg\,m^2$, obtenha o gráfico da velocidade de rotação do disco, e o gráfico da corrente consumida, desde o instante em que se liga o motor com $v_a = 10V$ até 50 segundos após esse instante, numa operação com $f = 1N/ms^{-1}$. Utilize o *simulink*.

c) Com os parâmetros do sistema da alínea anterior, obtenha o traçado da velocidade angular do disco quando inicialmente se liga o motor (com $v_a = 10V$) com o disco desencostado do material a ser trabalhado e, passados 10 segundos, se encosta o disco ao material, operando agora com $f = 2N/ms^{-1}$ (simule durante 50 segundos a partir do instante de ligação do motor).

15 – A figura seguinte representa o esquema de funcionamento de uma determinada ferramenta. Quando em operação, a sua carga J_L é submetida a um binário externo T_L que se opõe ao movimento do veio. A ferramenta é composta por um motor DC controlado pelo induzido e de ligação independente, e possui também um mecanismo cujo objectivo é manter a velocidade do veio num determinado valor (ω_p) independentemente do binário T_L. Para tal foi instalado um taquímetro para medir a velocidade do veio. Este taquímetro fornece um valor de tensão (v_T) que é proporcional à velocidade ($v_T = K_T \omega$).



Considere as seguintes características do motor:

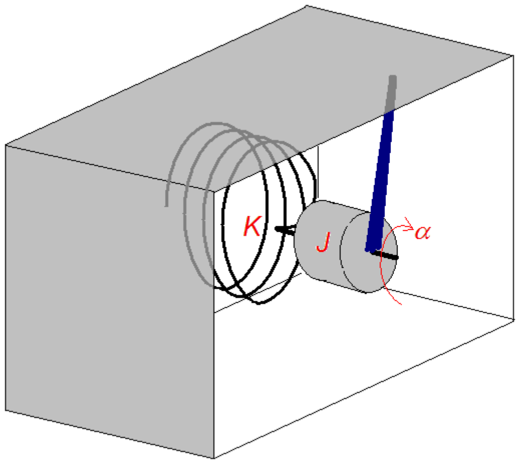
- o rotor do motor tem inércia J_m não desprezável;
- o atrito devido à rotação do veio do rotor apresenta um coeficiente de atrito D; v.s.f.f.
- o binário produzido pelo motor é proporcional à corrente que percorre o induzido, sendo K_m a constante de proporcionalidade;
- a tensão no induzido devida à força contra-electromotriz é proporcional à velocidade de rotação do rotor, sendo K_g a constante de proporcionalidade;
- o induzido, alimentado pela tensão v_a apresenta uma indutância L_a e uma resistência ohmica R_a.

a) Determine a função de transferência do sistema considerando como saída a velocidade angular do motor.

b) Considerando que o binário T_L é constante, a que condição devem obedecer os parâmetros do sistema por forma a que o valor final de ω seja igual ao valor especificado em ω_p (sendo este também constante).

c) Com $D = 1 Nm/rad\,s^{-1}$, $J_m = 10\,Kg\,m^2$, $K_m = 10\,Nm/A$, $K_g = 0.2V/rad\,s^{-1}$, $R_a = 2\Omega$, $L_a = 2H$, $J_L = 5Kg\,m^2$, $K = 0.1$, $K_T = 1$ e $K_p = 1$, obtenha, através do *simulink*, o gráfico da velocidade do motor durante 200 segundos após se ter especificado uma velocidade pretendida de $10\,rad\,s^{-1}$, sabendo que as condições iniciais são nulas, que inicialmente a carga estava em vazio ($T_L = 0$), e que 100 segundos após o arranque do motor a carga entrou em esforço constante com $T_L = 10\,Nm$.

16 – Considere o sistema seguinte que é uma implementação muito rudimentar de um cronómetro. Inicialmente, com o sistema em repouso ($\alpha = 0$), o ponteiro é rodado de várias voltas, sendo então preso (a mola, de constante de elasticidade K, fica sob tensão). Num determinado instante, o ponteiro é solto e, por acção da energia armazenada na mola, começa a rodar em sentido oposto ao inicial. O ponteiro roda dentro de um líquido espesso (mas transparente) que imprime um forte atrito (com coeficiente de atrito D) relativamente ao deslocamento angular do ponteiro. A inércia J representa a concentração da inércia de todo o sistema rotativo, relativamente ao seu eixo de rotação.



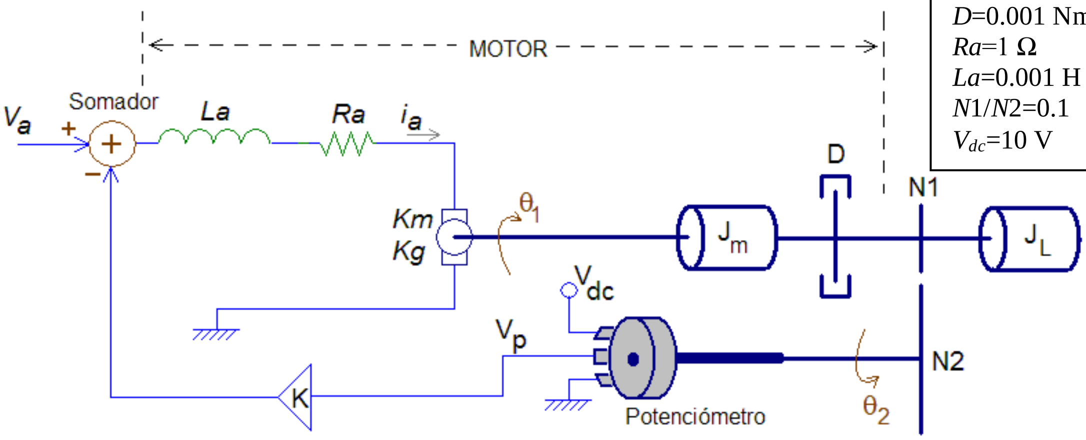
a) Obtenha uma representação deste sistema nas suas equações da dinâmica.

b) Considere que $D^2 > 4KJ$. Demonstre que, após ter sido solto o ponteiro, o tempo que este demora a desfazer 90% das voltas inicialmente dadas (antes de ser solto) é sempre constante (independentemente do número de voltas que lhe são dadas inicialmente). Demonstre que o mesmo é verdade para qualquer outra percentagem considerada.

17 – Considere o sistema da figura seguinte, em que:

- um motor DC, controlado pelo induzido e com ligação independente, é utilizado para posicionar um ponteiro sobre uma escala (não representado na imagem, mas cuja inércia é J_L), consoante o valor da tensão V_a que é aplicada ao sistema;
- o rotor do motor tem inércia J_m, e os seus rolamentos introduzem atrito (de coeficiente D), representado à direita da inérica J_m; segue-se um par de rodas dentadas a ligar os dois eixos, tendo cada roda $N1$ e $N2$ dentes;
- o eixo de θ_2 está directamente ligado ao eixo de um potenciómetro multi-voltas que faz com que se verifique a relação $V_p = 0.1 \cdot \theta_2 \cdot V_{dc} \quad (V)$;
- a tensão V_p é amplificada por um bloco de ganho K e subtraída à tensão de referência V_a;
- K_m é a constante do motor, e K_g a constante associada à força contra-electromotriz gerada no induzido;
- considere desprezáveis a inércia e o atrito associados ao eixo de θ_2.

K_m=0.01 Nm/A
K_g=0.1 V/rad/s
$J=J_m+J_L$=0.001 Nm/rad/s^2
D=0.001 Nm/rad/s
Ra=1 Ω
La=0.001 H
$N1/N2$=0.1
V_{dc}=10 V

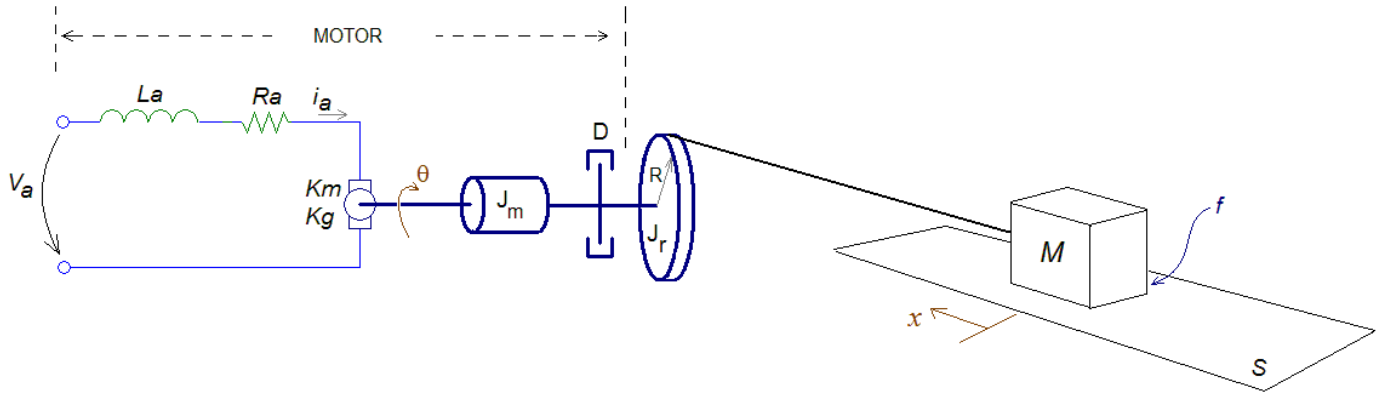


a) Determine a função de transferência $G(s) = \dfrac{\theta_1(s)}{V_a(s)}$, considerando condições iniciais nulas.

b) Determine K para que uma tensão V_a=1V cause um valor final de θ_1=1 rad.

18 – Considere o sistema representado na seguinte figura. Este é constituído por um motor DC controlado pelo induzido e de ligação independente, onde K_m é a constante do motor e K_g a constante relativa à força contra-electromotriz. O veio do motor está directamente ligado a uma roda de raio R e inércia J_r. Em torno desta roda está enrolado um cabo que, por sua vez, desloca um corpo de massa M sobre a superfície horizontal S (note-se que o segmento de cabo que une o topo da roda à massa M também se encontra na horizontal, e considere que este cabo se encontra sempre sob tensão). Existe atrito dinâmico entre o corpo de massa M e a superfície S, cujo coeficiente se considera constante e igual a f.

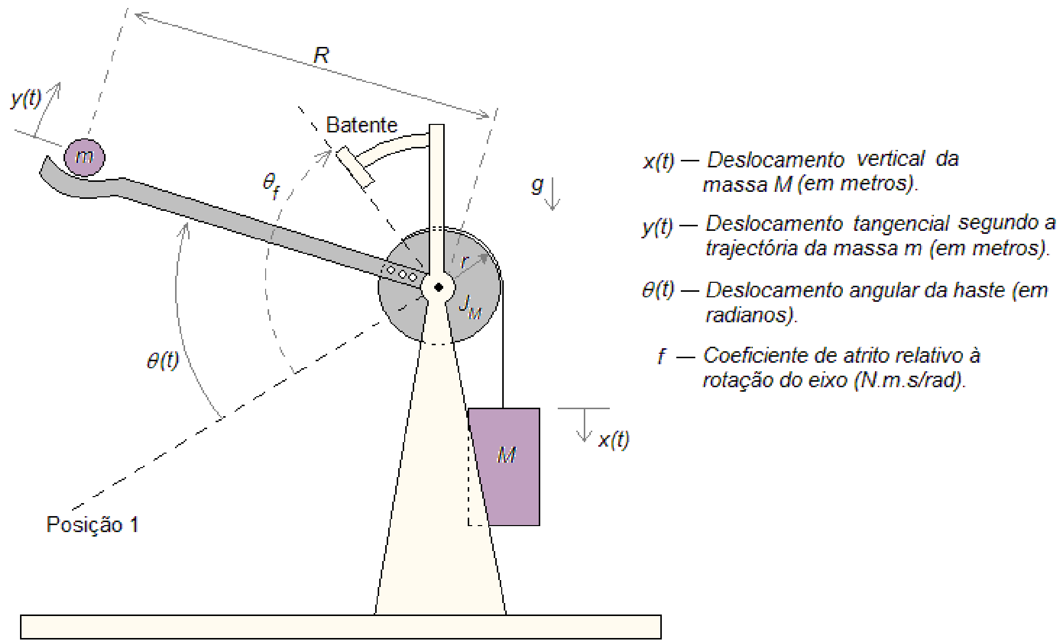
O rotor do motor tem inércia J_m e os rolamentos do seu eixo produzem atrito de coeficiente D (considerado constante).



a) Determine a equação da dinâmica que relaciona a saída do sistema (x) com a sua entrada (V_a).

b) Obtenha a função de transferência $X(s)/V_a(s)$, considerando condições iniciais nulas.

19 – A catapulta de contrapeso foi uma arma muito utilizada durante vários séculos, por diversas civilizações. São diversos os modelos que foram surgindo no tempo (em particular nos séculos XV e XVI). Na figura seguinte apresenta-se um modelo de uma catapulta de contrapeso, onde se pretende arremessar um corpo de massa m, usando para tal o peso de um outro corpo de massa M (bastante elevada). Este último é preso por um cabo à volta de uma roda, de raio r, que gira sobre um eixo que passa pelo seu centro (a roda apresenta uma inércia J_M relativamente a esse eixo de rotação). Fixo à roda está uma haste de comprimento R (medido desde o eixo de rotação referido anteriormente até ao ponto de apoio do projéctil), e cuja massa se despreza neste problema.
A catapulta é inicialmente colocada na posição 1, sendo aí presa à haste. No instante inicial t=0, a haste é solta, começando a rodar (rotação essa submetida a atrito de coeficiente f) até que a haste embate no batente, instante em que o projéctil é arremessado.
Para simplificar a análise, despreze o atrito do ar, assim como a acção do peso da massa m.

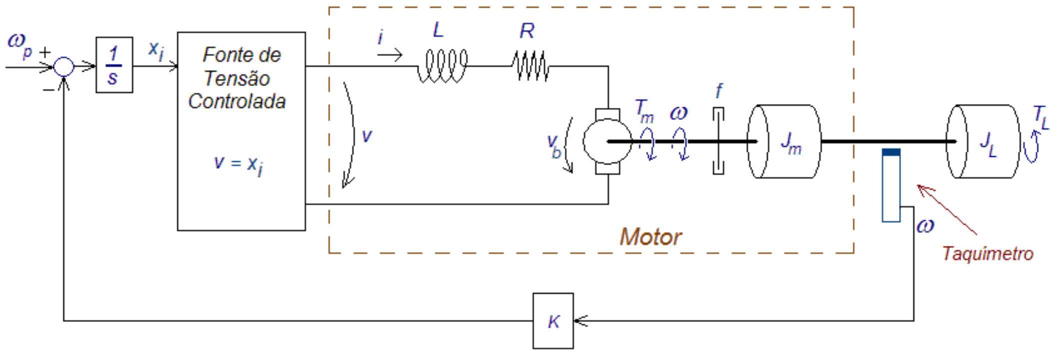


a) Determine a equação da dinâmica deste sistema que determina a evolução do módulo da velocidade tangencial ($v(t) = \dot{y}(t)$) do projéctil antes de este abandonar a catapulta (e depois de esta ter sido disparada).

b) Determine o módulo da velocidade $v(t_f)$ do projéctil no instante (t_f) em que este deixa a catapulta. Neste cálculo considere: m=5Kg, M=500Kg, g=10m/s^2, J_M=75Kg.m^2, R=5m, r=1m, $\theta_f=\pi/2$ rad e despreze o atrito (f=0 N.m.s/rad).

NOTA: Lembre-se que um corpo pontual de massa m ligado a um eixo de rotação por uma barra rígida (de massa desprezável, comprimento d, e perpendicular ao eixo) apresenta uma inércia J_m relativamente a esse eixo tal que, $J_m=md^2$.

20 – Considere o sistema da figura seguinte onde um motor DC (de ligação independente e controlado pelo induzido) com uma carga J_L no seu veio é colocado num sistema realimentado cujo propósito é especificar a velocidade de rotação do motor independente do binário resistente imposto na carga (T_L). Um taquímetro mede a velocidade de rotação do veio do motor, produzindo um sinal igual a essa velocidade. Este sinal é amplificado por um bloco de ganho K e comparado com o sinal ω_p que especifica a velocidade pretendida para o motor. A diferença entre os sinais é integrada, servindo o resultado (x_i) para actuar sobre uma fonte de tensão controlada que produz na sua saída uma tensão igual ao valor do sinal x_i (tensão essa que alimenta o motor). Sabe-se que $T_m=K_m i$ e $v_b=K_b\omega$, onde K_m e K_b são constantes conhecidas. O veio do motor sofre atrito de coeficiente f.



a) Determine um sistema de equações diferenciais, no domínio do tempo, que represente a dinâmica completa do sistema.

b) Represente o sistema através de um diagrama de blocos onde figurem os sinais $\omega_p(s)$, $T_L(s)$, $\omega(s)$ e $I(s)$.

c) Com $\omega_P(s)=A/s$, com $A \in \Re^+$, e sem binário exterior $T_L(t)$ aplicado à carga, determine a expressão do valor para o qual tende a velocidade de rotação do veio do motor.