

Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός  
Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων  
Ευριπίδης Σιδηρόπουλος

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Τηλεπικοινωνιών  
Ακαδ. Έτος 2021-2022

Εισαγωγή.....	Σελ.3
Μέρος Α – Ηλεκτροστατικό Πεδίο.....	Σελ.4
Α.1.Ομοαξονικό Καλώδιο με Διηλεκτρικό τον Αέρα.....	Σελ.4
Α.2.Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών Πεπερασμένου Πλάτους.....	Σελ.11
Μέρος Β – Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος.....	Σελ.17
Β.1.Κυματοδηγός Κυκλικής Διατομής.....	Σελ.17
Β.2.Σκέδαση από Άπειρο Κυκλικό Τέλεια Αγώγιμο Κύλινδρο.....	Σελ.22
Βιβλιογραφία.....	Σελ.24

Η παρούσα εργασία αφορά την ανάλυση προβλημάτων Ηλεκτρομαγνητισμού με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method) και την προγραμματιστική υλοποίησή τους σε Matlab.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος εξετάζονται δύο προβλήματα του Ηλεκτροστατικού Πεδίου και συγκεκριμένα: 1) Ανάλυση του Ηλεκτροστατικού Πεδίου ενός Ομοαξονικού Καλωδίου με Διηλεκτρικό τον Αέρα 2) Μελέτη του Ηλεκτροστατικού Πεδίου σε έναν Πυκνωτή Παράλληλων Πλακών και Πεπερασμένου Πλάτους.

Στο δεύτερο μέρος αναλύονται δύο προβλήματα Διάδοσης Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος: 1) Μελέτη των TE και TM Ρυθμών ενός Κυματοδηγού Κυκλικής Διατομής 2) Ανάλυση του Φαινομένου της Σκέδασης από έναν Άπειρο, Κυκλικό και Τέλεια Αγώγιμο Κύλινδρο.

Η εργασία αυτή ήταν μια ιδιαίτερη πρόκληση, ωστόσο η ενασχόληση μαζί της αποτέλεσε μια ξεχωριστή και πάρα πολύ χρήσιμη διδακτική εμπειρία.

### A.1. Ομοαξονικό Καλώδιο με Διηλεκτρικό τον Αέρα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση του ηλεκτροστατικού προβλήματος εντός ενός ομοαξονικού καλωδίου με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Οι προδιαγραφές του ομοαξονικού καλωδίου είναι οι εξής:

- Χαρακτηριστική Αντίσταση  $50 \Omega$
- Διάμετρος Εξωτερικού Αγωγού  $2b = 3.5 \text{ mm}$
- Δυναμικό Εσωτερικού Αγωγού  $V = 1 \text{ V}$
- Γειωμένος Εξωτερικός Αγωγός

Αρχικά ορίζεται τη γεωμετρία του προβλήματος χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεταβλητές. Γνωρίζοντας τη διάμετρο του εξωτερικού αγωγού, υπολογίζεται η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$Z_0 = 60 \ln(b/a) / \sqrt{\epsilon_r}$$

Έτσι, προκύπτει  $a = 0.76 \text{ mm}$ . Επομένως, ο ορισμός της γεωμετρίας γίνεται με τη χρήση της εντολής `decsg` ως εξής:

```
% Declaration of Initial Values

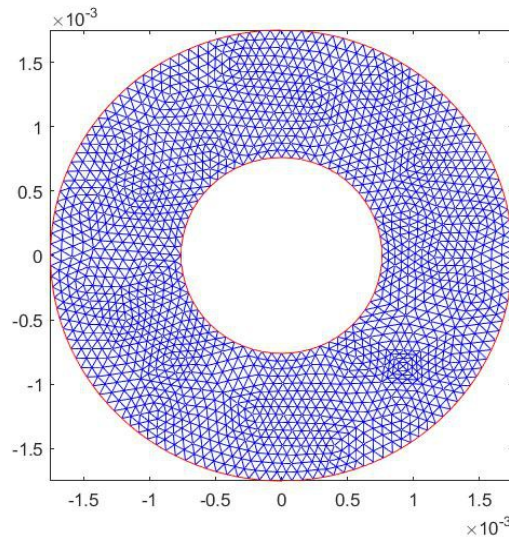
x0 = 0; % x coordinate of center
y0 = 0; % y coordinate of center
bb = 1.75e-3; % External Radius b
aa = exp(log(bb) - 5/6); % Internal Radius a
V = 1; % Voltage

% Construction and plotting of Geometry

gd = [1 1; % Geometry Description Matrix
      x0 x0;
      y0 y0;
      bb aa];
sf = 'R2-R1'; % Set Formula for subtraction of inner circle
ns = [82 82; 50 49]; % Name-space Matrix, used with sf
% as inputs to decsg alongside gd

d1 = decsg(gd, sf, ns); % Decomposed Solid Geometry Implementation
[p, e, t] = initmesh(d1); % Creation of 2-D Triangular Mesh
[p, e, t] = refinemesh(d1, p, e, t); % Refinement of Triangular Mesh x2
[p, e, t] = refinemesh(d1, p, e, t);
```

Κώδικας A.1.1 Ορισμός της γεωμετρίας



Σχήμα Α.1.1 Απεικόνιση του Ομοαξονικού Καλωδίου με πλέγμα χρησιμοποιώντας 2 Refinements

Στη συνέχεια ορίζονται οι κατάλληλοι πίνακες με τους αριθμούς των κόμβων, των στοιχείων και των ακμών των στοιχείων οι οποίες βρίσκονται στα όρια, και κατασκευάζουμε τα διανύσματα `node_id` και `X0`.

Το πρώτο είναι υπεύθυνο για το διαχωρισμό των κόμβων σε γνωστούς και αγνώστους, προκειμένου να αντιστοιχηθεί το δυναμικό που αναλογεί στον καθένα (1 αν είναι άγνωστος, 0 αν είναι γνωστός). Το `X0` είναι το διάνυσμα που περιέχει τις τιμές των δυναμικών των κόμβων ( $V$  στους κόμβους του εσωτερικού αγωγού, 0 στους κόμβους του εξωτερικού αγωγού, όπως επίσης και στους αγνώστους).

Ταυτόχρονα χρησιμοποιούνται κατάλληλες εντολές για το διαχωρισμό των κόμβων ανάλογα με τη θέση τους στη γεωμετρία. Η υλοποίηση σε κώδικα θα είναι:

```
% Definition of known numbering using the node_id vector

Nn = size(p, 2);           % Number of Nodes
Ne = size(t, 2);           % Number of elements (triangles)
Nd = size(e, 2);           % Number of (boundary) edges

node_id = ones(Nn, 1);     % Initialization of node flag
X0 = zeros(Nn, 1);         % Voltage values at every node
```

Κώδικας Α.1.2 Ορισμός των κατάλληλων πινάκων και διανυσμάτων

```

for id = 1:Nd % Construction of node_id vector
    n(1:2) = e(1:2, id);
    x(1:2) = p(1, n(1:2));
    y(1:2) = p(2, n(1:2));
    r1 = e(6, id);
    r2 = e(7, id);
    if (r1 == 0 || r2==0) % Assignment of known voltage values
        node_id(n(1)) = 0;
        node_id(n(2)) = 0;
        radius(1:2) = sqrt(x(1:2).^2 + y(1:2).^2);
        if (radius(1) > (aa+bb)/2)
            x0(n(1)) = 0;
        else
            x0(n(1)) = V;
        end
        if (radius(2) > (aa+bb)/2)
            x0(n(2)) = 0;
        else
            x0(n(2)) = V;
        end
    end
end
end

```

Κώδικας A.1.3 Αντιστοίχιση του κατάλληλου δυναμικού σε κάθε κόμβο

Σειρά έχει η αρίθμηση των κόμβων με τη βοήθεια του διανύσματος `index`, το οποίο αντιστοιχίζει κάθε κόμβο με έναν αριθμό. Οι άγνωστοι κόμβοι αρχικά έχουν αρίθμηση 0, ενώ η ανανέωσή τους γίνεται παρακάτω:

```

% Definition of unknown numbering using the index vector

ic = 0; % Define counter to count unknowns
index = zeros(Nn, 1); % Define index vector with unknown's
% numbering for each node

for in = 1:Nn
    if (node_id(in) == 1)
        ic = ic + 1;
        index(in) = ic;
    end
end
end

```

Κώδικας A.1.4 Αρχικοποίηση του διανύσματος `index`

Πλέον, το τελικό, και πιο σημαντικό, στάδιο του αλγορίθμου, είναι η αρχικοποίηση και ο υπολογισμός του ολικού αραιού πίνακα του προβλήματος με τη χρήση των τοπικών πινάκων, καθώς και η τελική επίλυση του συστήματος του προβλήματος.

Όπως αναφέρεται στην περιγραφή της μεθόδου, για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες Simplex των κόμβων. Ο κώδικας που υλοποιεί τη λύση είναι ο εξής:

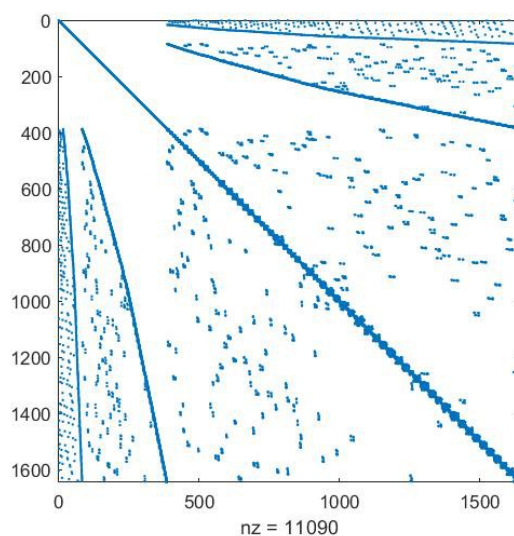
```

for ie = 1:Ne                                % Scan all elements
    n(1:3) = t(1:3, ie);                      % n(1), n(2), n(3) are the three nodes of element
                                              % ie
    rg = t(4, ie);                            % Element region
    x(1:3) = p(1, n(1:3));                    % x Simplex Coordinate
    y(1:3) = p(2, n(1:3));                    % y Simplex Coordinate
    D = det([1 x(1) y(1); 1 x(2) y(2); 1 x(3) y(3)]); % Simplex to Cartesian
    b(1) = ((y(2) - y(3))/D);
    b(2) = ((y(3) - y(1))/D);
    b(3) = ((y(1) - y(2))/D);
    c(1) = ((x(3) - x(2))/D);
    c(2) = ((x(1) - x(3))/D);
    c(3) = ((x(2) - x(1))/D);
    Ae = abs(D)/2;                             % Element area
    for i = 1:3
        for j = 1:3
            Se(i, j) = (b(i)*b(j) + c(i)*c(j))*Ae;
            if (node_id(n(i)) == 1)
                if (node_id(n(j)) == 1)
                    S(index(n(i)), index(n(j))) = S(index(n(i)), index(n(j))) + Se(i,
j);
                else
                    B(index(n(i))) = B(index(n(i))) - Se(i, j)*X0(n(j));
                end
            end
        end
    end
end
X = S\B;                                     % System Solution via Gauss-Jordan Elimination

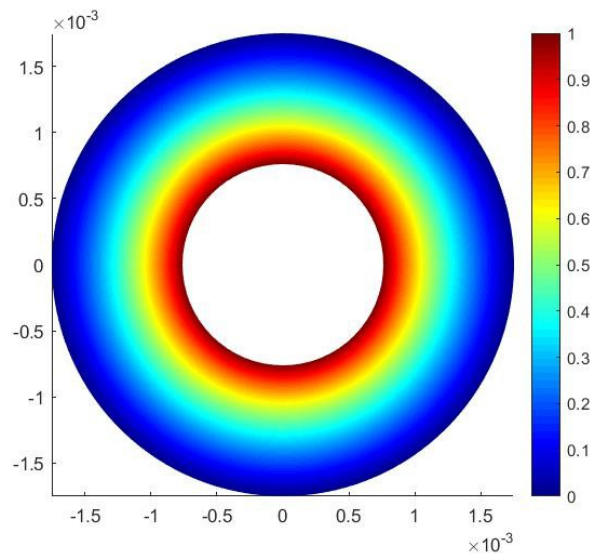
```

Κώδικας A.1.5 Υπολογισμός του ολικού πίνακα και λύση του συστήματος

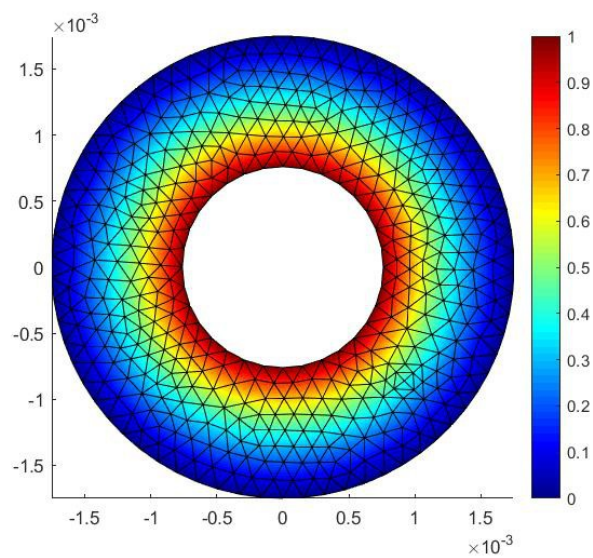
Ο αραιός πίνακας  $S$  καθώς και η τελική λύση απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα:



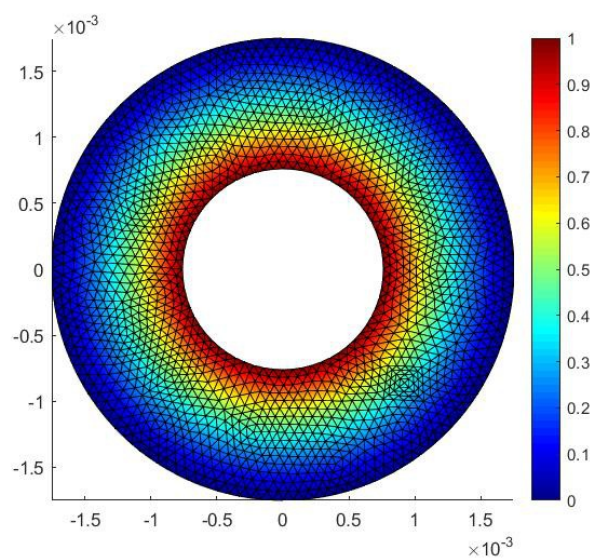
Σχήμα A.1.2 Ολικός Αραιός Πίνακας του Προβλήματος για 2 Refinements



Σχήμα A.1.3 Λύση του Ηλεκτροστατικού Προβλήματος



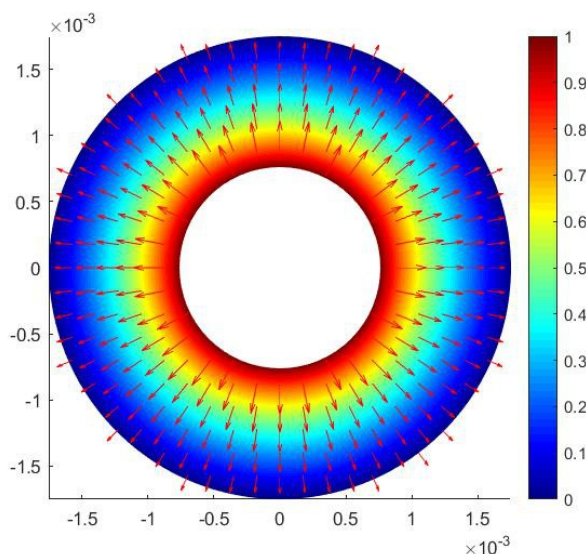
Σχήμα A.1.4 Απεικόνιση της λύσης μαζί με το πλέγμα για 1 Refinement



Σχήμα A.1.5 Απεικόνιση της λύσης μαζί με το πλέγμα για 2 Refinements



Κλείνοντας αυτό το πρώτο μέρος της εργασίας, έχουν απομείνει ορισμένα θέματα προς διερεύνηση. Αρχικά, πρέπει να απεικονιστεί το Διανυσματικό Ηλεκτρικό Πεδίο  $\mathbf{E}$ . Οι δυναμικές γραμμές του Πεδίου φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα A.1.6 Ηλεκτρικό Πεδίο  $\mathbf{E}$

Έπειτα, γίνεται επίλυση του συστήματος και με τις επαναληπτικές μεθόδους των Biconjugate Gradient και GMRES (Generalised Minimal Residual Method). Αυτό συμβαίνει προκειμένου να γίνει μια σύγκριση στην ταχύτητα επίλυσης του προβλήματος μεταξύ της απευθείας επίλυσης του συστήματος και των επαναληπτικών μεθόδων. Ακολουθούν οι εντολές σε Matlab:

```
% System Solution via Generalized Minimum Residual Method (GMRES)

tic;
X = gmres(S, B);
toc;

% System Solution via Biconjugate Gradient Method

tic;
X = bicg(S, B);
toc;
```

Κώδικας A.1.6 Επίλυση του συστήματος με επαναληπτικές μεθόδους

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, διαπιστώνουμε ότι η απευθείας επίλυση λύνει το σύστημα σε 2.5 ms, ενώ η Biconjugate Gradient σε 21 ms στο εικοστό βήμα επανάληψης και η GMRES σε 54 ms στο δέκατο βήμα επανάληψης.

Τέλος, υπολογίζεται η συνολική ανά μονάδα μήκους Ενέργεια του Ηλεκτρικού Πεδίου και η Χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους από τις δοθείσες σχέσεις

$$W_e = \iint \varepsilon |\vec{E}|^2 ds / 2 = \iint \nabla \Phi \varepsilon \nabla \Phi ds / 2, \quad W_e = CV^2 / 2$$

```
% Calculation of Energy and Capacitance
```

```
E = -[ux, uy];  
W = norm(E*E')*Ae/2;  
C = 2*W/(V^2);  
Cexact = 2*pi/log(bb/aa);  
Wexact = Cexact*(V^2)/2;
```

#### Κώδικας A.1.7 Υπολογισμός Ενέργειας και Χωρητικότητας

Τελικά, τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

- $W_{\text{exact}} = 3.7699$
- $W = 3.0983$
- $C_{\text{exact}} = 7.5398$
- $C = 6.1966$

## A.2.Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών Πεπερασμένου Πλάτους

Το μέρος A ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της ανάλυσης του Ηλεκτροστατικού Πεδίου σε έναν Πυκνωτή Παράλληλων Πλακών Πεπερασμένου Πλάτους. Οι υπολογισμοί έγιναν με βάση τις εξής δοθείσες προδιαγραφές:

- Πλάτος Πλακών  $w = 4 \text{ cm}$
- Πάχος Πλακών  $t = 2 \text{ mm}$
- Διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_r = 2.2$
- Απόσταση Πλακών  $d = 1 \text{ cm}$
- Δυναμικό  $V = 100 \text{ V}$
- Χωρίο Υπολογισμού με διαστάσεις  $A = B = 5w$

Έτσι η υλοποίηση της γεωμετρίας έγινε όπως φαίνεται παρακάτω, ενώ ακολουθεί το σχήμα του αποτελέσματος:

```
% Declaration of Initial Values

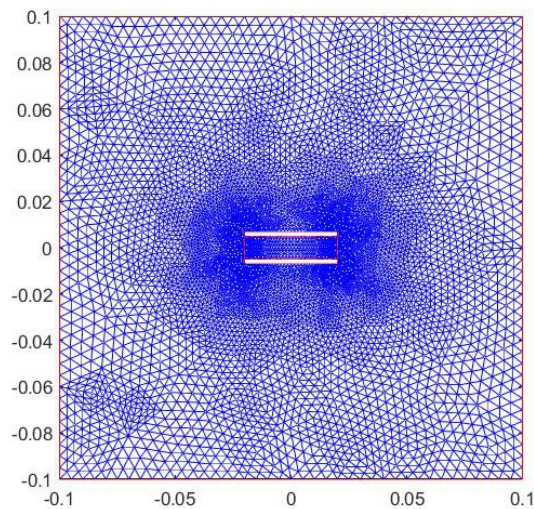
x0 = 0; % x coordinate of center
y0 = 0; % y coordinate of center
w = 4e-2; % Capacitor Plate Width
tt = 2e-3; % Capacitor Plate Height
d = 1e-2; % Capacitor Plates' distance
delta = 1e-5; % Margin for Geometry purposes
V = 100; % Voltage
er = 2.2; % Dielectric Constant

% Construction and plotting of Geometry

gd = [3 3 3 3; % Geometry Description Matrix
      4 4 4 4;
      -5*w/2 -w/2 -w/2 -w/2; % First column is the whole area R4
      5*w/2 w/2 w/2 w/2; % Second column is the Dielectric
      5*w/2 w/2 w/2 w/2; % Third column is the upper
      -5*w/2 -w/2 -w/2 -w/2; % Capacitor Plate R2
      -5*w/2 d/2 (d/2)+tt -d/2; % Fourth column is the lower
      -5*w/2 d/2 (d/2)+tt -d/2; % Capacitor Plate R1
      5*w/2 -d/2 d/2 (-d/2)-tt;
      5*w/2 -d/2 d/2 (-d/2)-tt];
sf = '(R4+R3)-R2-R1'; % Set Formula for capacitor plates
ns = [82 82 82 82; 52 51 50 49]; % Name-space Matrix, used with sf
% as inputs to decsg alongside gd

d1 = decsg(gd, sf, ns); % Decomposed Solid Geometry Implementation
[p, e, t] = initmesh(d1); % Creation of 2-D Triangular Mesh
[p, e, t] = refinemesh(d1, p, e, t); % Refinement of Triangular Mesh x2
```

Κώδικας A.2.1 Ορισμός της γεωμετρίας



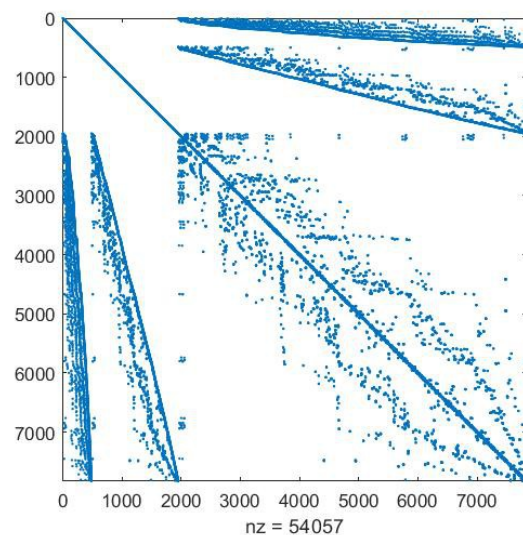
Σχήμα A.2.1 Απεικόνιση του Πυκνωτή Παράλληλων Πλακών με πλέγμα χρησιμοποιώντας 2 Refinements

Αυτό που κάνει ξεχωριστή την ανάλυση στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ότι χρειάζεται να γίνει περαιτέρω διαχωρισμός όσον αφορά τους κόμβους, ανάλογα με τη θέση τους. Έτσι, όπως φαίνεται στον παραπάνω κώδικα, ορίστηκε ξεχωριστή περιοχή για τη μοντελοποίηση του διηλεκτρικού στη δεύτερη στήλη του πίνακα `gd`, και στη συνέχεια εφαρμόστηκαν κατάλληλες συνθήκες με τη χρήση εντολών `if`, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί ο διαχωρισμός. Η αντιστοίχιση των κατάλληλων τιμών αρίθμησης και δυναμικού στους κόμβους έγινε ως εξής:

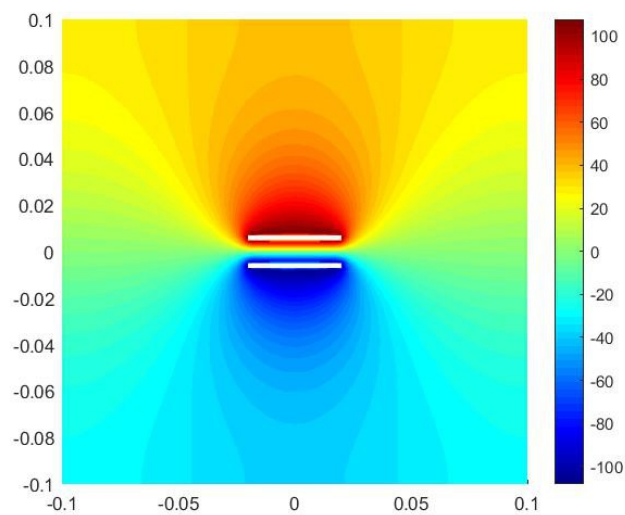
```
for id = 1:Nd % Construction of node_id vector
    n(1:2) = e(1:2, id);
    x(1:2) = p(1, n(1:2));
    y(1:2) = p(2, n(1:2));
    r1 = e(6, id);
    r2 = e(7, id);
    if (r1 == 0 || r2 == 0) % Assignment of known voltage values
        for i = 1:2
            if ((y(i) < tt+(d/2)+delta) && (y(i) > (d/2)-delta) && (abs(x(i)) < ...
                (w/2)+delta))
                X0(n(i)) = V/2;
                node_id(n(i)) = 0;
            end
            if ((y(i) > -tt-(d/2)-delta) && (y(i) < -(d/2)+delta) && (abs(x(i)) < ...
                (w/2)+delta))
                X0(n(i)) = -V/2;
                node_id(n(i)) = 0;
            end
        end
    end
end
end
```

Κώδικας A.2.2 Αντιστοίχιση του κατάλληλου δυναμικού σε κάθε κόμβο

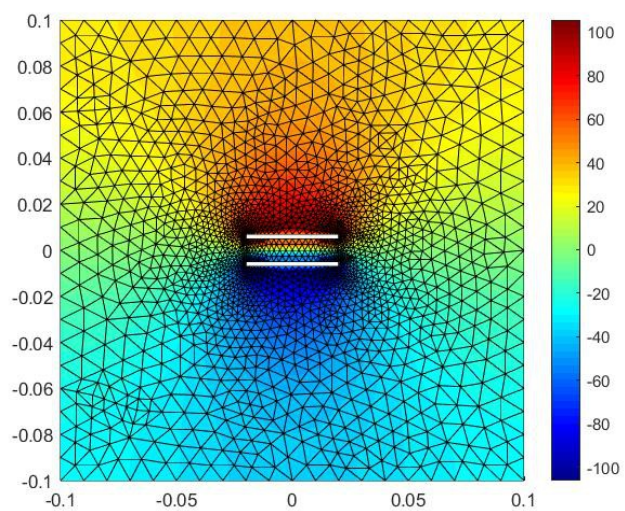
Ο αραιός πίνακας του προβλήματος και η λύση απεικονίζονται στα ακόλουθα σχήματα, καθώς επίσης και η λύση για διάφορες διαστάσεις του χωρίου:



Σχήμα Α.2.2 Ολικός Αραιός Πίνακας του Προβλήματος για 2 Refinements

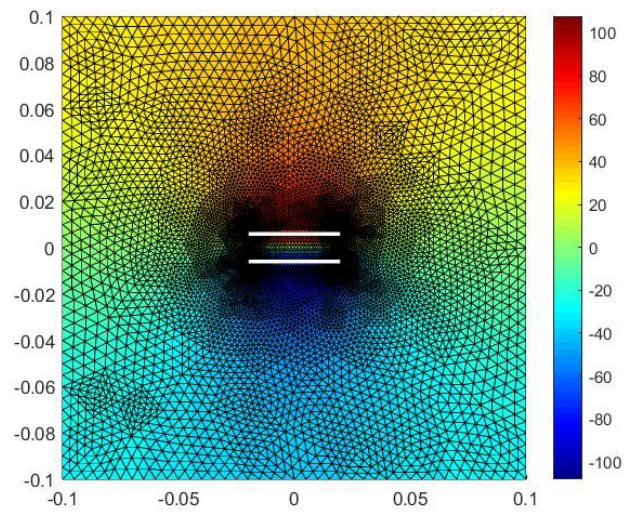


Σχήμα Α.2.3 Λύση του Ηλεκτροστατικού Προβλήματος

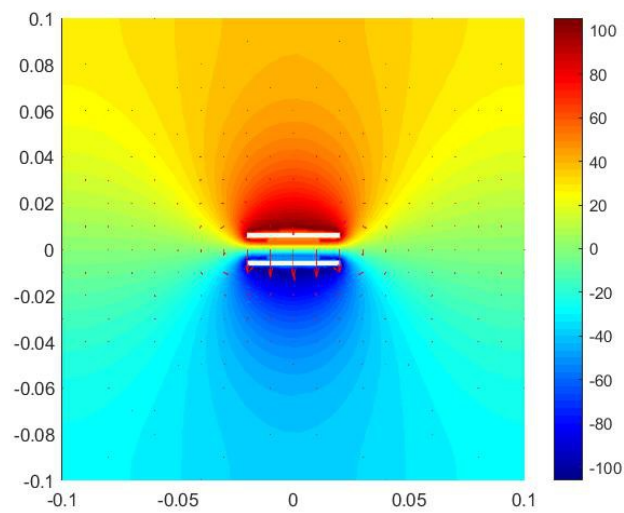


Σχήμα Α.2.4 Απεικόνιση της λύσης μαζί με το πλέγμα για 1 Refinement

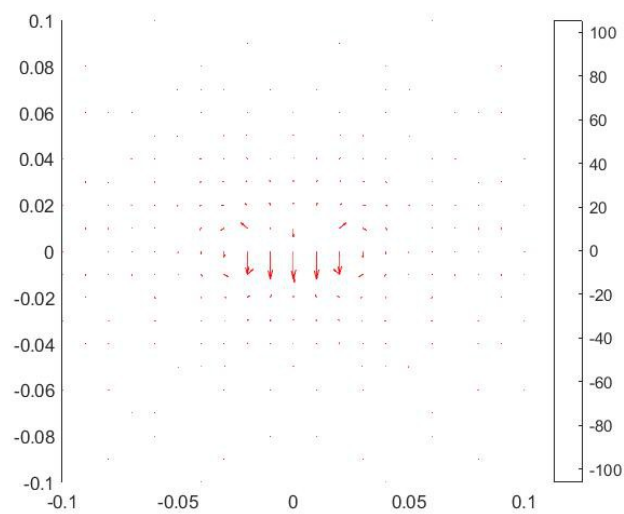




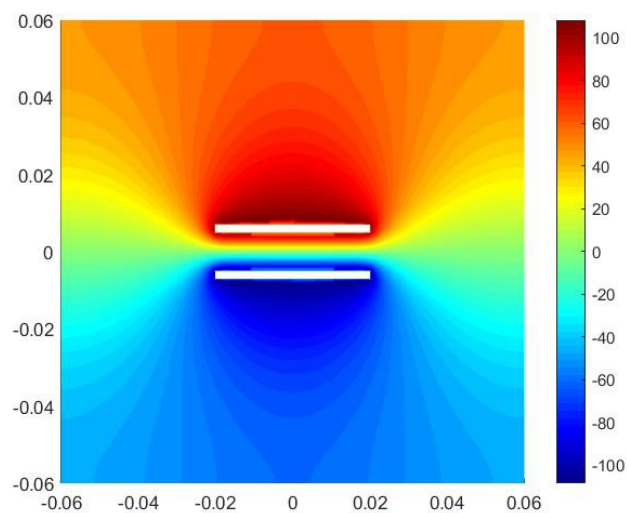
Σχήμα Α.2.5 Απεικόνιση της λύσης μαζί με το πλέγμα για 2 Refinements



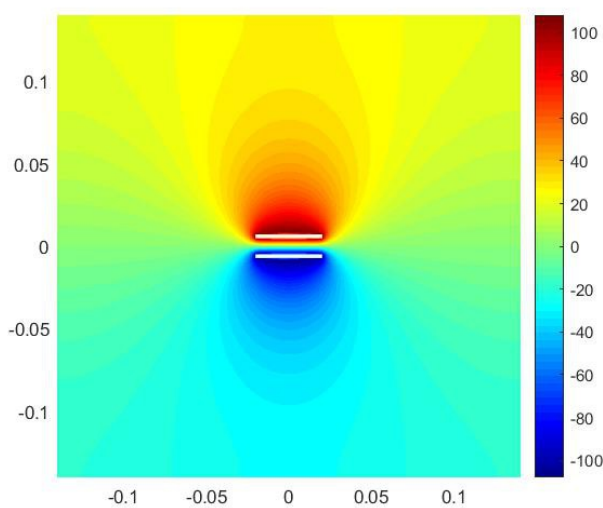
Σχήμα Α.2.6 Ηλεκτρικό Πεδίο  $E$



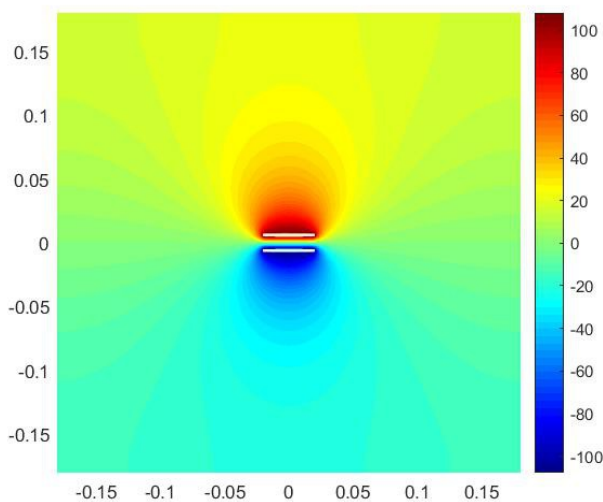
Σχήμα Α.2.7 Απεικόνιση των Δυναμικών Γραμμών του  $E$



Σχήμα A.2.8 Λύση του Ηλεκτροστατικού Προβλήματος για χωρίο με πλευρά 3w



Σχήμα A.2.9 Λύση του Ηλεκτροστατικού Προβλήματος για χωρίο με πλευρά 7w



Σχήμα A.2.10 Λύση του Ηλεκτροστατικού Προβλήματος για χωρίο με πλευρά 9w

Παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις του χωρίου επιδρούν σημαντικά στο πρόβλημα, καθώς η λύση αλλάζει δραστικά όπως φαίνεται στα τρία τελευταία σχήματα. Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το μέγεθος του χωρίου, τόσο περισσότερο εξασθενεί το δυναμικό όσο η απόσταση από τον πυκνωτή αυξάνει. Έτσι, στα όρια του χωρίου οι τιμές του δυναμικού είναι πάρα πολύ χαμηλές.



## Μέρος Β – Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος

### B.1.Κυματοδηγός Κυκλικής Διατομής

Μετά την επίλυση προβλημάτων Ηλεκτροστατικού Πεδίου, σειρά έχουν τα προβλήματα Διάδοσης Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος. Η αρχή γίνεται με το πρόβλημα Διάδοσης σε Κυματοδηγό Κυκλικής Διατομής, όπου αναζητούνται οι TE και TM Ρυθμοί, καθώς και οι αντίστοιχες συχνότητες αποκοπής. Η Διάμετρος του Κυματοδηγού είναι  $2a = 2 \text{ cm}$ .

Καταρχάς, πρέπει να γίνει η διάκριση των Ρυθμών σε TE και TM. Αυτό γίνεται εύκολα, καθώς για την περίπτωση των ρυθμών TE παραλείπεται η διαδικασία αρίθμησης των εξωτερικών κόμβων με το διάνυσμα `node_id`. Η εξήγηση είναι ότι εφαρμόζονται ομογενείς συνθήκες Neumann στους εξωτερικούς κόμβους, άρα πρέπει να αφεθούν ως άγνωστοι, οπότε και απουσιάζει η αντίστοιχη `for` που παρουσιάστηκε στον Κώδικα A.1.3.

Αντίστοιχα, για τους TM Ρυθμούς, θα εφαρμοστούν ομογενείς συνθήκες Dirichlet στους εξωτερικούς κόμβους:

```
for id = 1:Nd % Construction of node_id vector
    n(1:2) = e(1:2, id);
    x(1:2) = p(1, n(1:2));
    y(1:2) = p(2, n(1:2));
    r1 = e(6, id);
    r2 = e(7, id);
    if (r1 == 0 || r2==0) % Assignment of known voltage values
        node_id(n(1)) = 0;
        node_id(n(2)) = 0;
        radius(1:2) = sqrt(x(1:2).^2 + y(1:2).^2);
        if (radius(1) == aa)
            if (radius(2) == aa)
                X0(n(1)) = 0;
                X0(n(2)) = 0;
            end
        end
    end
end
end
```

Κώδικας B.1.1 Υλοποίηση του διανύσματος `node_id` για τους TM Ρυθμούς

Η μεγάλη διαφοροποίηση σε σχέση με τα προβλήματα του Ηλεκτροστατικού Πεδίου, είναι ότι όλη η πληροφορία του προβλήματος περνάει στη λύση μέσα από τους Πίνακες Μάζας και Ακαμψίας, όπως αυτοί ορίζονται στη θεωρία. Ο πυρήνας του αλγορίθμου παρουσιάζεται εδώ:

```
for i = 1:3
    for j = 1:3
        Se(i, j) = (b(i)*b(j) + c(i)*c(j))*Ae;
        if (i == j)
            Te(i, j) = Ae/6;
        else
            Te(i, j) = Ae/12;
        end
        if (node_id(n(i)) == 1)
            if (node_id(n(j)) == 1)
                S(index(n(i)), index(n(j))) = S(index(n(i)), index(n(j))) + Se(i, j);
                T(index(n(i)), index(n(j))) = T(index(n(i)), index(n(j))) + Te(i, j);
            end
        end
    end
end
end
```

#### Κώδικας B.1.2 Υπολογισμός Πινάκων Ακαμψίας και Μάζας

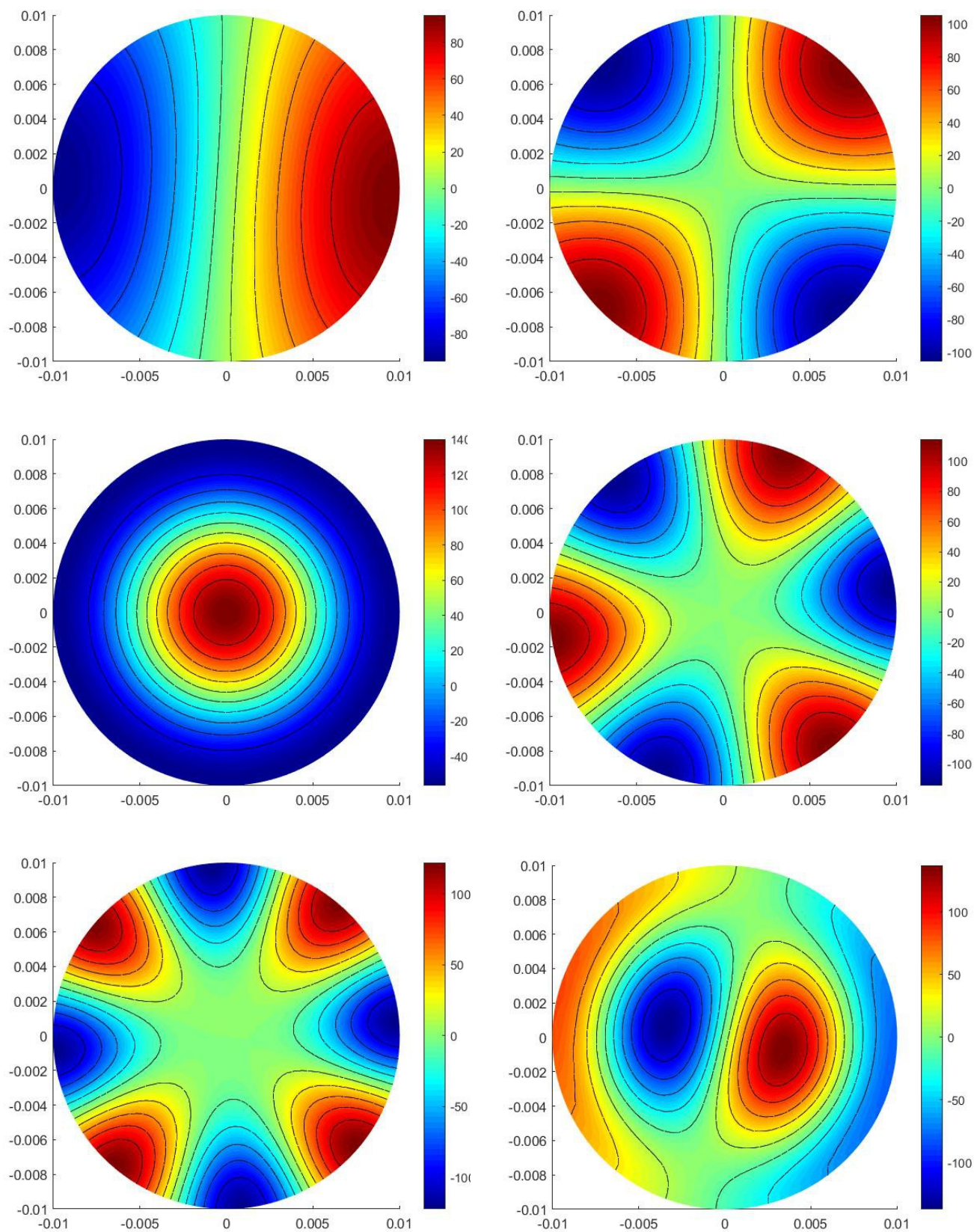
Τέλος, η επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών γίνεται με τη συνάρτηση `eigs`, που δέχεται σαν ορίσματα τους Ολικούς Πίνακες Ακαμψίας και Μάζας, το πλήθος των ιδιοτιμών  $k$ , καθώς και ένα  $\sigma$  τέτοιο ώστε να βρεθούν οι όσο το δυνατόν μικρότερες ιδιοτιμές. Η Υλοποίηση της λύσης για ΤΕ Ρυθμούς δίνεται στον ακόλουθο κώδικα, ενώ όμοια γίνεται και για τους ΤΜ Ρυθμούς:

```
[V, D] = eigs(S, T, k, 0); % Solution of Generalised Eigenvalue
                             % Problem of TE Modes

for i = 1:k % TE Modes Solution and Plot
    X1 = V(:,i);
    for in = 1:Nn
        if (node_id(in) == 1)
            X0(in) = X1(index(in));
        end
    end
    fc(i) = sqrt(D(i,i))*(3e8/(2*pi));
    figure;
    pdeplot(p, e, t, 'xydata', X0, 'contour', 'on', 'mesh', 'off');
    axis equal;
    axis tight;
    hold on;
    colormap jet;
    disp(fc(i));
end
```

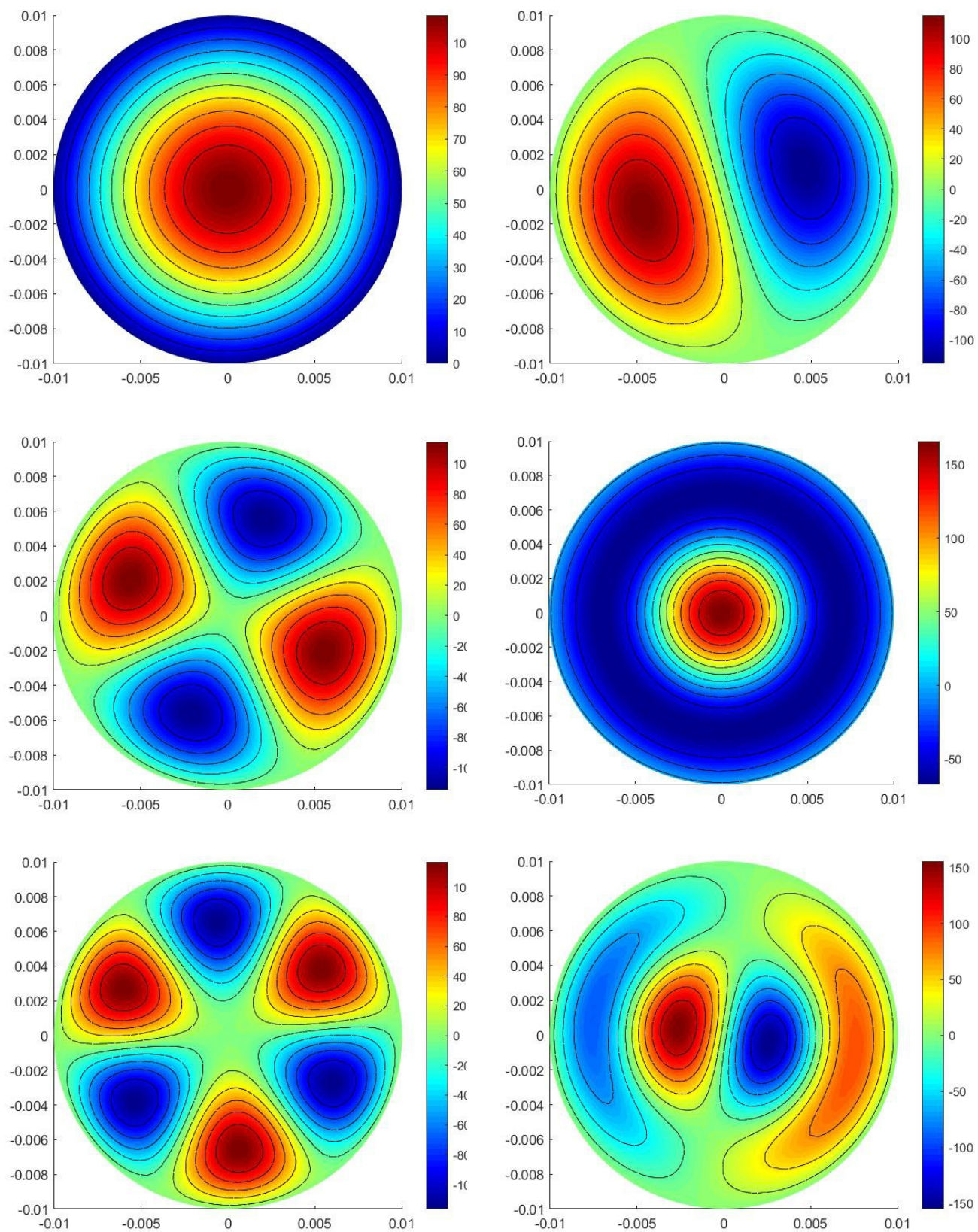
#### Κώδικας B.1.3 Υπολογισμός τελικής λύσης

Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι ζητούμενοι 6 ΤΕ και 6 ΤΜ ρυθμοί:



Σχήμα Β.1.1 Απεικόνιση των 6 πρώτων ΤΕ Ρυθμών





Σχήμα Β.1.2 Απεικόνιση των 6 πρώτων TM Ρυθμών

Αυτό το μέρος ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό των Συχνοτήτων Αποκοπής κάθε ρυθμού, όπως αυτές προέκυψαν από την υλοποίηση με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, και τη σύγκρισή τους με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι Συχνότητες Αποκοπής:

Συχνότητα (GHz)	TE	TM	FEM TE	FEM TM	Σφάλμα TE (%)	Σφάλμα TM (%)
Ρυθμοί						
1	8.79	11.483	8.7942	11.487	0.047781	0.034834
2	14.581	18.296	14.593	18.313	0.082298	0.092916
3	18.296	24.517	18.317	24.564	0.11477	0.1917
4	20.058	26.356	20.082	26.407	0.11965	0.48945
5	25.543	30.462	25.433	30.544	0.43064	0.26918
6	33.498	33.498	25.508	33.603	23	0.31345

Πίνακας Β.1.1 Απεικόνιση των Συχνοτήτων Αποκοπής των TE και TM Ρυθμών

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι κοντά στα πραγματικά, με σχετικά καλή ακρίβεια. Εξαίρεση ωστόσο αποτελεί ο έκτος TE ρυθμός, που παρουσιάζει πολύ υψηλό σφάλμα. Πράγματι, έγινε μια πρόχειρη διερεύνηση, και όταν αυξήθηκε το πλήθος των ζητούμενων ρυθμών, η λύση κατέρρευσε.

## B.2.Σκέδαση από Άπειρο Κυκλικό Τέλεια Αγώγιμο Κύλινδρο

Το μέρος B και κατ' επέκταση η παρούσα εργασία κλείνει με την επίλυση του προβλήματος Σκέδασης σε έναν Άπειρο, Κυκλικό και Τέλεια Αγώγιμο Κύλινδρο. Πιο συγκεκριμένα, ένα Επίπεδο Ομοιόμορφο Κύμα της μορφής

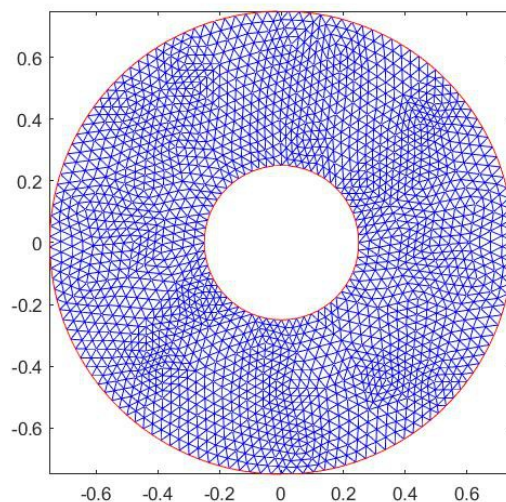
$$\vec{E} = E_0 e^{-jk_0 z} \hat{z}$$

προσπίπτει στον εν λόγω κύλινδρο και σκεδάζεται. Οι προδιαγραφές του προβλήματος είναι οι εξής:

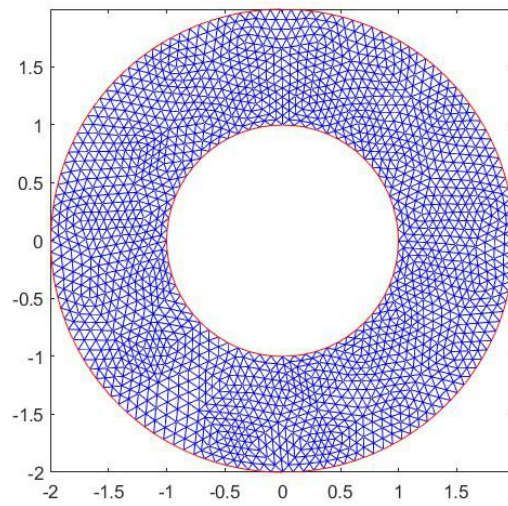
- Πλάτος Κύματος  $E_0 = 1$  V/m
- Συχνότητα  $f = 300$  MHz (Μήκος Κύματος  $\lambda = 1$  m)
- Διάμετρος Σκεδαστή  $2a = \lambda/2, 2\lambda$  και  $5\lambda$  (Ακτίνα Σκεδαστή  $\lambda/4, \lambda$  και  $5\lambda/2$  αντίστοιχα)
- Ακτίνα Απορροφητικών Οριακών Συνθηκών  $R$  τέτοια ώστε  $R - a = \lambda/2, \lambda$  και  $2\lambda$  αντίστοιχα ( $R = 3\lambda/4, 2\lambda$  και  $9\lambda/2$  αντίστοιχα)

Δυστυχώς η υλοποίηση της λύσης δεν ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί, παρά τις τεράστιες προσπάθειες που καταβλήθηκαν.

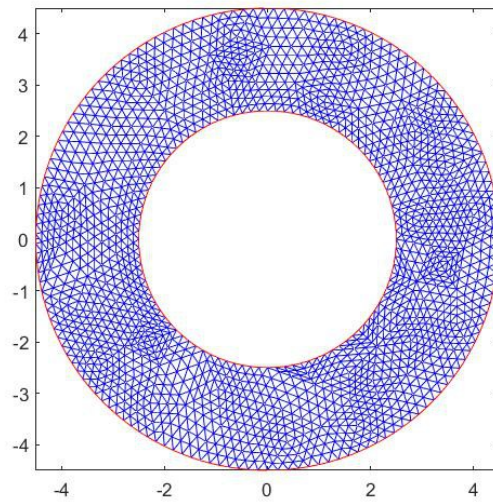
Επόμενως, για το κλείσιμο της εργασίας παρουσιάζονται οι τρεις διαφορετικές γεωμετρίες του προβλήματος στα παρακάτω σχήματα :



Σχήμα B.2.1 Απεικόνιση του Σκεδαστή Διαμέτρου  $2a = \lambda/2$  με πλέγμα χρησιμοποιώντας 2 Refinements



Σχήμα Β.2.2 Απεικόνιση του Σκεδαστή Διαμέτρου  $2a = 2\lambda$  με πλέγμα χρησιμοποιώντας 2 Refinements



Σχήμα Β.2.3 Απεικόνιση του Σκεδαστή Διαμέτρου  $2a = 5\lambda$  με πλέγμα χρησιμοποιώντας 2 Refinements

1. M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques In Electromagnetics*, CRC Press, 2000
2. Τ. Β. Γιούλτσης και Ε. Ε. Κριεζής, *Μικροκύματα, Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2016
3. Θ. Δ. Τσιμπούκης, *Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο – Βασική Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2014