תרגיל 1 – קובץ PDF – תשובות

מגישים: אביתר אלקלעי ועמית הלברייך

שאלה 1

סעיף 1

בהינתן האות שיש לנו ($Z_n = \tilde{Z}_{n-1} + N_n$), האות הרצוי הוא הדגימה Z_n מתוך כל L הדגימות האחרונות $\{Z_{n-1}, Z_{n-2}, \dots, Z_{n-L}\}$ (ראינו בביתה כי זה מקרה פרטי של הבעייה "האות הרצוי היא הדגימה X_n מתוך $\{Y_n, \dots, Y_{n-L+1}\}$ הדגימות האחרונות של התהליך $\{Y_n\}$").

R היא מטריצת האוטוקורלציות של כל L הדגימות האחרונות (ראינו בביתה כי זאת מטריצת טופליץ) ו-P זה וקטור האוטו-קורלציות של הדגימה הרצויה Z_n עם כל L הדגימות הנתונות. ביתר פירוט:

$$R = \mathbb{E}\begin{bmatrix} Z_n Z_n & Z_n Z_{n-1} & \dots & Z_n Z_{n-L+1} \\ Z_{n-1} Z_n & Z_{n-1} Z_{n-1} & \dots & Z_{n-1} Z_{n-L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n-L+1} Z_n & Z_{n-L+1} Z_{n-1} & \dots & Z_{n-1} Z_{n-L+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_Z[0] & R_Z[1] & \dots & R_Z[L-1] \\ R_Z[1] & R_Z[0] & \dots & R_Z[L-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_Z[L-1] & R_Z[L-2] & \dots & R_Z[0] \end{bmatrix}$$

וגם

$$P = \begin{bmatrix} Z_n Z_{n-1} \\ Z_n Z_{n-2} \\ \vdots \\ Z_n Z_{n-L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Z[1] \\ R_Z[2] \\ \vdots \\ R_Z[L] \end{bmatrix}$$

זאת כאשר
$$\forall l \in \mathbb{N} : \ R_Z[l] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha^2} + \sigma_N^2 & : \quad l = 0 \\ \frac{a^{|l|}}{1-\alpha^2} & : \quad l \neq 0 \end{cases}$$

סעיף 2

ראינו בביתה כי המשוואה עבור המסנן הלינארי האופטימלי היא הדבר הבא:

$$\hat{Z}_n = \hat{X}_n = \Sigma_{l=0}^{L-1} w_{n,l} Y_{n-l} = \Sigma_{l=0}^{L-1} w_{n,l} Z_{n-(l+1)} = \Sigma_{l'=1}^{L} w_{n,l'} Z_{n-l'}$$

כאשר הוקטור $\vec{w}$ שיביא למינימום את הביטוי הזה הוא $w^* = R^{-1}P$ (כאשר R ו-P הם אלו שנכתבו בסעיף הקודם)

סעיף 3

סעיף א'

הערה: סימנו כאן את השורות כמו במדעי המחשב, כלומר השורה הראשונה היא השורה מספר 0, השורה השנייה היא מספר 1 וכד' וכנ"ל לגבי העמודות

אם $w^* = R^{-1}P$ אזי $Rw^* = P$.

נתון ש-$\sigma_N^2 = 0$ ובמקרה כזה $R_Z[0] = \frac{1}{1-\alpha^2}$ ואז מתקיים כי: $R_Z[1] = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \alpha \cdot R_Z[0]$. אי לכך ובהתאם לזאת, נשים לב כי כל הקואורדינטות של הוקטור P הם ה-0 של המטריצה R כפול המקדם α, כלומר $\forall i \in [0, L-1]: R[i,0] = P[i+1]$. לכן ע"פ כללי כפל מטריצות, נקבל כי $w^* = [\alpha, 0, .., 0]^T$ (כאשר יש L קומפוננטות ב-w^*).

אינטואיציה: נתון ש-$\sigma_N^2 = 0$ ובהינתן העובדה כי $\mathbb{E}[N_n] = 0$, אין לתהליך N_n השפעה על הסטטיסטיקה של התהליך Z_n ומכאן נקבל כי השיערוך את Z_n מתוך L הדגימות האחרונות $Z_{n-1}, \dots, Z_{n-L}$ שקול לשיערוך תהליך AR(1) ללא תוספת הרעש $\{N_n\}$.

<u>סעיף ב'</u>

אם $\alpha = 0$ אזי $\tilde{Z}_n = G_N$. במקרה כזה, $Z_n = G_n + N_n$ משמע Z_n מורכב משני תהליכים בלתי תלויים סטטיסטית, כאשר $G_n \sim N(0,1)$ ו-$N_n \sim N(0, \sigma_N^2)$ כאשר $\sigma_N^2 > 0$. ואז **Z_n לא תלוי בכלל ב-$Z_{n-1}, \dots, Z_{n-L}$**, אלא רק בתהליכים $\{G_n\}, \{N_n\}$, וכתוצאה מכך $w^* = [0,0, .., 0]^T$ כלומר לא ניתן כלל לשערך את Z_n מתוך $Z_{n-1}, \dots, Z_{n-L}$.

<u>סעיף 4</u>

<u>סעיף א'</u>

ע"פ החישוב במטל"ב, קיבלנו כי הממוצע האמפירי על Z_l הוא $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^N Z_l = 0.0022$ בעוד הממוצע האמפירי מסדר שני הוא $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^N Z_l^2 = 2.3308$.

ראינו בכיתה בעבר כי הממוצע האמפירי שואפת לתוחלת (כאן $\mathbb{E}[Z] = 0$) והממוצע האמפירי שקיבלנו אכן שואף ל-0.

באופן דומה, הממוצע האמפירי מסדר שני שואף לשונות האמפירית (כאן $\mathrm{Var}[Z] = R_Z[0] = \frac{1}{1-\alpha^2} + \sigma_N^2 = \frac{1}{1-0.5^2} + 1 = \frac{7}{3} = 2.333$) ולכן הממוצע האמפירי מסדר שני שקיבלנו אכן שואף לשונות האמפירית.

<u>סעיף ב'</u>

נתון כי $\mathbb{E}[Z] = 0$ ולכן $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] = R_Z[0] = \frac{1}{1-\alpha^2} + \sigma_N^2$. כעת נחשב את β כאשר נתון כי $\mathbb{E}[(\beta Z)^2] = \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{E}[(\beta Z)^2] = \mathbb{E}[\beta^2 Z^2] = \beta^2 \mathbb{E}[Z^2] = \beta^2 \mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{2} \to \beta^2 = \frac{1}{2\mathrm{Var}[Z]} \to \beta = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Var}[Z]}}$$

נציב את $\mathrm{Var}(Z)$ מהסעיף הקודם

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Var}(Z)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{7}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{14}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{14}} = 0.4629$$

<u>סעיף ג'</u>

אנחנו צריכים לעשות את ה-scaling הזה כדי שפונקציית השמע תישמע באופן ברור. אם יהיו ערכים יותר קטנים מ--1 אזי זה יוביל לעוצמה נמוכה וערכים גדולים מ-1 זה יוביל לרעש חזק. לכן נרצה להקטין את סטיית התקן כמה שיותר כדי להביא למינימום את כמות הדגימות שחורגות מהטווח הזה.

<u>סעיף 5</u>

בסעיף זה נתון לנו כי $\alpha = 0.9$ ו-$\sigma_N^2 = 0.5$.

<u>סעיף א'</u>

נחשב במטל"ב את וקטור המקדמים האופטימלי עבור כל סדר החל מ-$L = 1$ ועד ל-$L = 5$:

עבור $L = 1$, $\overrightarrow{w^*} = [0.8219]$

עבור $L = 2$, $\overrightarrow{w^*} = \begin{bmatrix} 0.6593 \\ 0.1978 \end{bmatrix}$

עבור $L = 3$, $\overrightarrow{w^*} = \begin{bmatrix} 0.6495 \\ 0.1651 \\ 0.0495 \end{bmatrix}$

עבור $L = 4$, $\overrightarrow{w^*} = \begin{bmatrix} 0.6489 \\ 0.1631 \\ 0.0415 \\ 0.0124 \end{bmatrix}$

עבור $L = 5$, $\overrightarrow{w^*} = \begin{bmatrix} 0.6489 \\ 0.1630 \\ 0.0410 \\ 0.0104 \\ 0.0031 \end{bmatrix}$

<u>סעיף ב'</u>

נחשב באופן תיאורטי את המקדם β כך ש-$\mathbb{E}[(\beta Z_n)^2] = \frac{1}{2}$: ראינו בסעיף הקודם כי $\mathbb{E}[(\beta Z_n)^2]$ לא תלוי בשום צורה בסדר L וכי $\beta = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Var}[Z]}}$, כאשר $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] = R_Z[0] = \frac{1}{1-\alpha^2} + \sigma_N^2$. כעת כל שנותר זה לחשב את $\mathrm{Var}(Z)$ עם הפרמטרים החדשים ואז להציב אותו בביטוי ל-β:

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{1-\alpha^2} + \sigma_N^2 = \frac{1}{1-0.9^2} + 0.5 = \frac{219}{38}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Var}[Z]}} = \frac{1}{\sqrt{2\frac{219}{38}}} = 0.2945$$

הפעלנו את הרעש המקורי $\{\beta Z_n\}$ וגם את השגיאה $\{\beta e_n\}$ ואכן קיבלנו כי ככל שנגדיל את מספר הדגימות שמהן נשערך את האות, אז השגיאה נשמעת חלש יותר.

<u>סעיף ג'</u>

השגיאות שקיבלנו:

- עבור $L = 1$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 2.676533$
- עבור $L = 2$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 2.503926$
- עבור $L = 3$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 2.482719$
- עבור $L = 4$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 2.479985$

- עבור $L = 5$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 2.479619$

סעיף ד'

נחשב במטל"ב את עבור כל אחד מ-$L = 1$ עד $L = 5$ וזה מה שקיבלנו:

- עבור $L = 1$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 3.684990$
- עבור $L = 2$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 3.974501$
- עבור $L = 3$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 4.011440$
- עבור $L = 4$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 4.016225$
- עבור $L = 5$, $\frac{1}{N}\Sigma_{l=1}^{N} e_l^2 = 4.016865$

NR זה היחס בין הגודל הממוצע של האות לבין השגיאה הממוצעת. כיוון שהיחס הזה גדל, אזי השגיאה קטנה יותר ביחס לאות ומכאן השיערוך יותר טוב.

שאלה 2

בסעיף זה נתון לנו כי $L = 4$, $\alpha = 0.9$ ו-$\sigma_N^2 = 0.5$.

סעיף 1

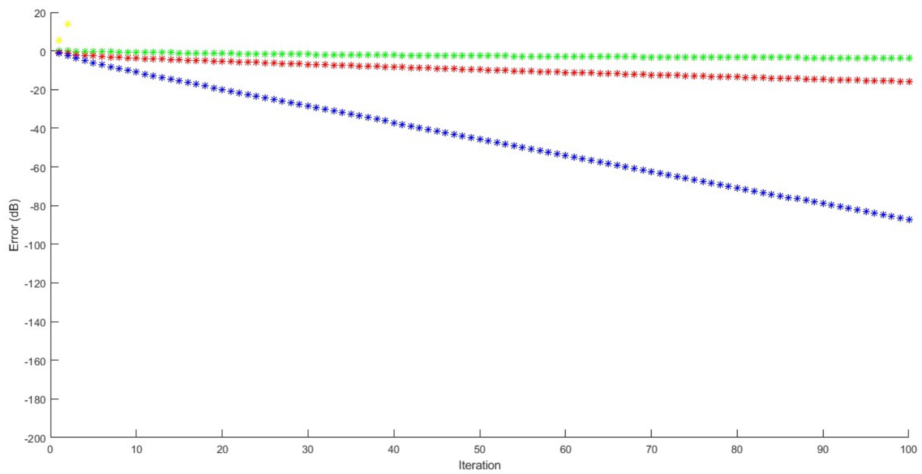
ראשית, נחשב את המטריצה R עבור הערכים הרלוונטים במטל"ב. המטריצה יוצאת כדלקמן:

5.7632	4.7368	4.2632	3.8368
4.7368	5.7632	4.7368	4.2632
4.2632	4.7368	5.7632	4.7368
3.8368	4.2632	4.7368	5.7632

לאחר חישוב מטריצת טופליץ, והוצאת הערכים העצמיים (במטל"ב), יוצא כי הערך העצמי המקסימלי הוא:

$$\lambda_{max} = 19.062$$

סעיף 2



מקרא:

- $\mu = 0.001$ בירוק

- $\mu = 0.01$ באדום
- $\mu = 0.1$ בכחול
- $\mu = 0.2$ בצהוב

<u>סעיף 3</u>

השגיאה צריכה להצטמצם ככול שמספר האיטרציות גדל, אך גודל ההתכנסות תלוי בערך של μ: אם μ קטן מידי אזי האלגוריתם ייתכנס לאט. אם μ גדול מידי, ייתכן שהאלגוריתם לא ייתכנס או שהוא ייתכנס לפתרון לא אופטימלי.

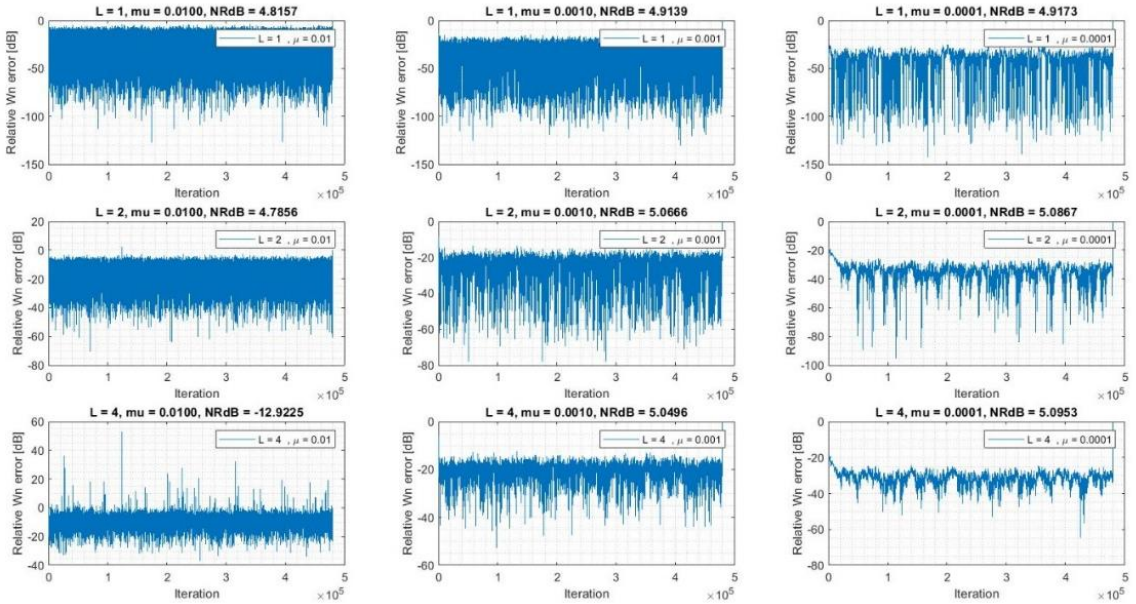
הערך המקסימלי של μ שעבורו השגיאה מתכנסת קשור ל-$\frac{2}{\lambda_{\max}}$ שהוא הערך העצמי המקסימלי של המטריצה R (במקרה שלנו 19.0612 כי $L = 4$ לא משתנה). אם $\mu > \frac{2}{\lambda_{\max}}$ אזי ייתכן שהאלגוריתם לא ייתכנס.

במקרה שלנו, $\frac{2}{\lambda_{\max}} = 0.1049$ וזה מסביר למה הגרף הצהוב (כאשר $\mu = 0.2$) מתפוצץ ושאר הגרפים מתכנסים לפתרון האופטימלי. בנוסף, ניתן גם לראות ככול ש-$\mu \to \frac{2}{\lambda_{\max}}$, הגרף מתכנס לגודל השגיאה יותר מהר (כמו הגרף הכחול שמתאר את $\mu = 0.1$ שמתכנס יותר מהר מהגרף הירוק שמתאר את $\mu = 0.001$).

<u>שאלה 3</u>

בסעיף זה נתון לנו כי $L = 4$, $\alpha = 0.9$ ו-$\sigma_N^2 = 0.5$.

<u>סעיף 1</u>



<u>סעיף 2</u>

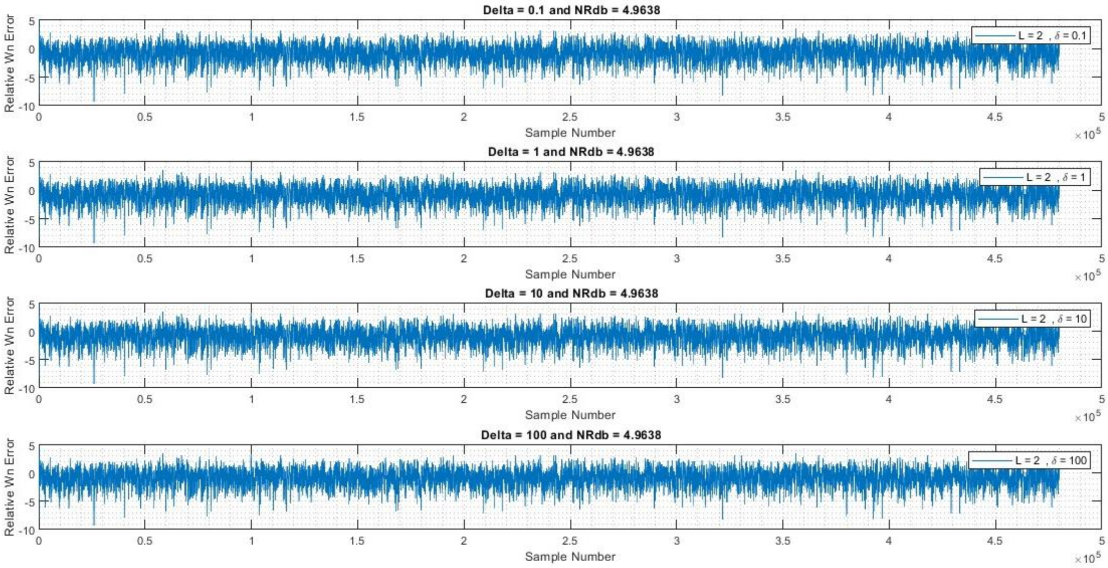
ראשית, נשים לב כי ככול שמגדילים את L אזי הערך העצמי המקסימלי של המטריצה R גם הוא גדל. וכתוצאה מכך הערך המקסימלי של μ שבו השגיאה מתכנסת קטן. במילים אחרות, אם נרצה שהשגיאה תתכנס, עבור L יותר גדול נבחר μ יותר קטן, אך מצד שני ככול ש-μ יותר קטן אז השגיאה מתכנסת לאט יותר. כלומר **נצטרך לאזן בין כמה אנחנו רוצים שההתכנסות של השגיאה תהיה מהירה** (לכך גורם μ גדול)

לעומת כמה אנחנו רוצים שהשגיאה עצמה תהיה מזערית יותר (לכך גורם L גדול). אפשר לראות כי כאשר בחרנו $L = 4$ ו-$\mu = 0.01$ (מספר דגימות גדול וגודל צעד גדול), אז נשים לב כי $NRdB = -12[dB]$ וביחס לקומבינציות האחרות, השיערוך לא מספיק טוב (הרי $NRdB$ קובע את טיב השיערוך בין היתר).

<u>שאלה 4</u>

בסעיף זה נתון לנו כי $\alpha = 0.9$ ו-$\sigma_N^2 = 0.5$.

<u>סעיף 1</u>



<u>סעיף 2</u>

המטרה של הפרמטר δ היא לאתחל את המטריצה P (שאותה אנחנו מעדכנים בין היתר באלגוריתם ה-*RLS*) בכדי שתהיה הפיכה (אחרת האלגוריתם לא יעבוד).

נשים לב כי כל הגרפים שלנו די דומים, ז"א לאחר זמן גדול מאוד δ כבר לא משפיע ואין שינוי במקדמים w_n. לכן נבחר $\delta = 1$ כדי לקבל את השיערוך הטוב ביותר.

<u>סעיף 3</u>

הפרמטר λ הוא מקדם השכחה (מתאר עד כמה התהליך שוכח את העבר).

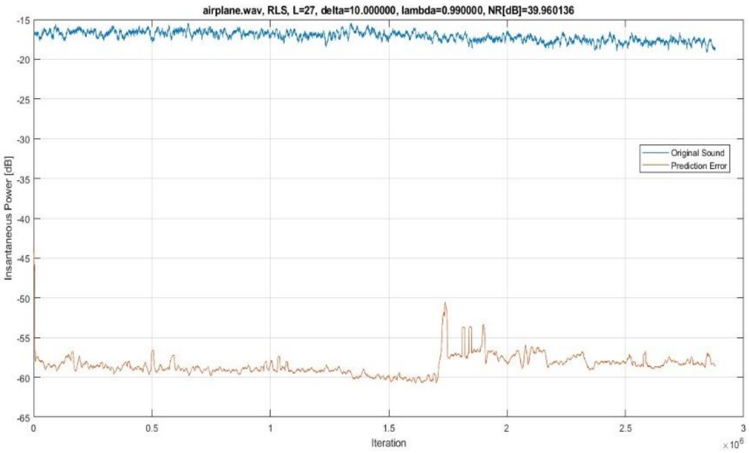
- אם נבחר $\lambda \sim 1$ אז משקל המדידות מהעבר הרחוק לא יידעך מהר (וזה מתאים למודל שמשתנה מאוד לאט)
- אם נבחר $\lambda \sim 0$ אז אנחנו כמעט ומתעלמים ממדידות מהעבר (וזה מתאים למודל שמשתנה מאוד מהר)

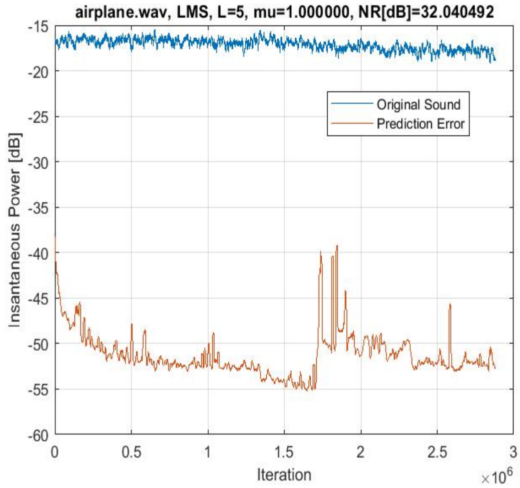
במקרה שלנו, $\alpha = 0.9$ ולכן **התהליך שלנו מתאים לתהליך שכמעט ולא שוכח את העבר** ולכן אם נרצה לתת משקל לדגימות הקרובות, נהיה חייבים במשערך שלנו להשאיף את λ ל-1.

שאלה 5

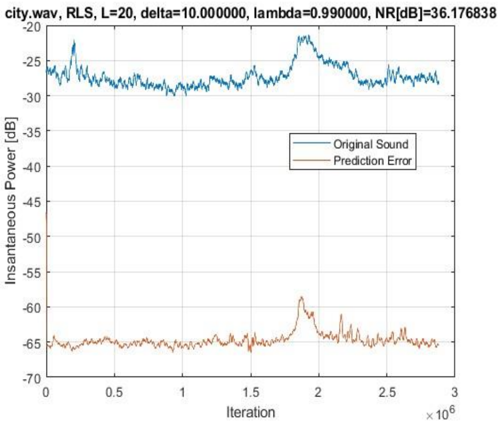
סעיף 1

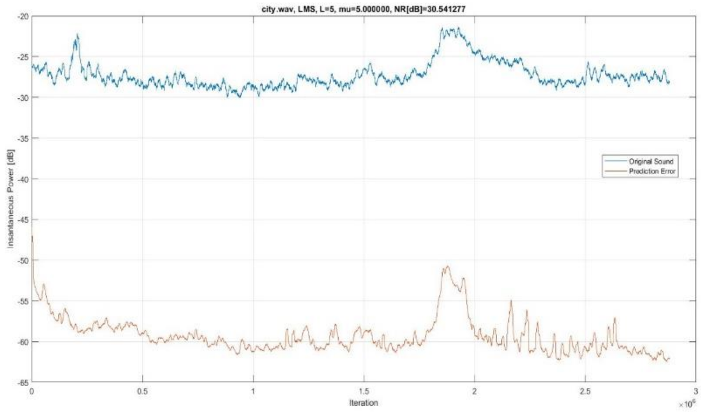
airplane.wav



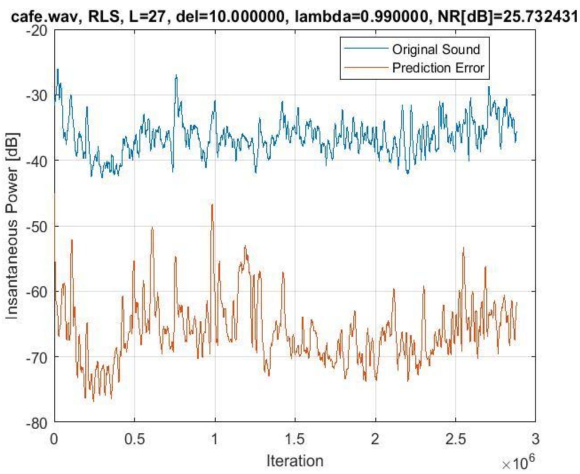


city.wav

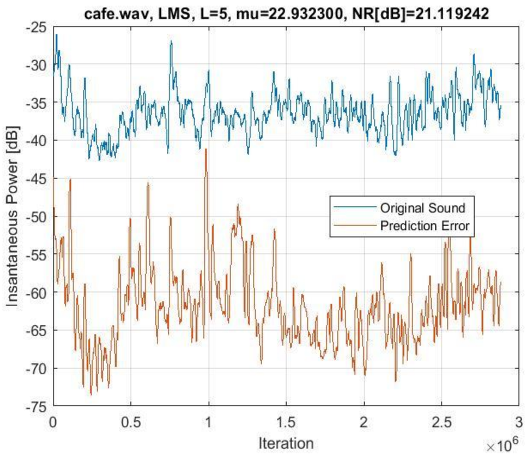


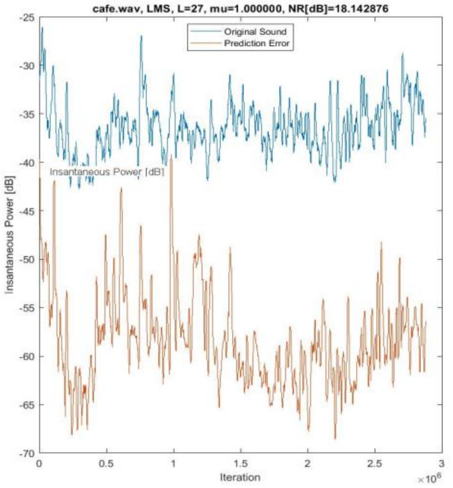


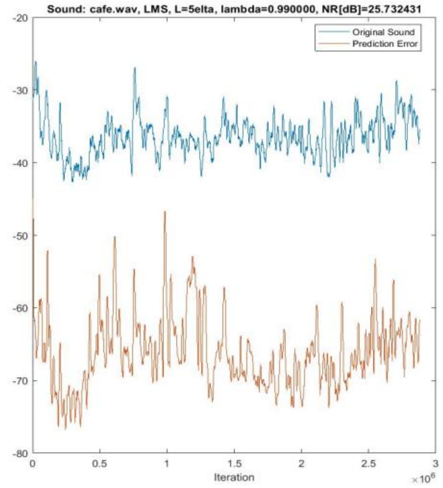
Cafe.wav



cleanr







<u>סעיף 2</u>

בגרפים ניתן לראות כי רעש המטוס כמעט ולא משתנה (בכל הדגימות העוצמה הרגעית שואפת ל-$-20dB$) וכך גם רעש העיר (כל הדגימות העוצמה הרגעית נמצאת בתוך טווח קטן של $-20dB$ עד $-30dB$ ללא יותר מידי אוסילציות, וכך העוצמה הרגעית אמנם משתנה אבל בין דגימה לדגימה השינוי לא משמעותי). רעשים כאלו קלים יותר לחיזוי מרעשים כמו של הרעש של הקפה וזה של שואב האבק, שהם עושים הרבה אוסילציות כך שהעוצמה הרגעית כמעט משתנה בכל רגע נתון, ואז האות מתפזר בצורה גדולה יותר ולא אחידה וכך יוצא שהרעש קשה יותר לחיזוי.