Partielle Ordnung / Halbordnung

Definition 5.1

- 🌽 $\sqsubseteq$ ist **reflexiv**: $\forall a \in A.a \sqsubseteq a$
- 🌽 $\sqsubseteq$ ist **antisymmetrisch**: $\forall a_1, a_2 \in A.a_1 \sqsubseteq a_2 \wedge a_2 \sqsubseteq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$
- 🌽 $\sqsubseteq$ ist **transitiv**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A.a_1 \sqsubseteq a_2 \wedge a_2 \sqsubseteq a_3 \Rightarrow a_1 \sqsubseteq a_3$

Satz 5.1

$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$

Beispiel Partielle Ordnung / Halbordnung

- 🌽 $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(M)$ für eine beliebige Grundmenge M.
- 🌽 Teilbarkeitsbeziehung | auf $\mathbb{N}$.
- 🌽 Teilzeichenreihenbeziehung auf A^* definiert durch:

$$w' \sqsubseteq w \Leftrightarrow_{df} \exists w_1, w_2 \in A^*.w_1\ w'\ w_2 = w$$

(Beispiel: `w' = "sdf", w = "asdfg"`)

Quasiordnungen / Präordnung

Definition 5.2

- 🌽 $\precsim$ ist **reflexiv**: $\forall a \in A.a \precsim a$
- 🌽 $\precsim$ ist **transitiv**: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A.a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_3 \Rightarrow a_1 \precsim a_3$

Beispiel Quasiordnungen / Präordnung

- 🌽 “kleiner oder gleich groß”-Beziehung bei Personen.
- 🌽 Teilbarkeitsbeziehung | auf $\mathbb{Z}$.

Notiz

- 🌽 Eine Quasiordnung $\precsim \subseteq A \times A$ induziert eine Äquivalenzrelation auf A durch:
$$a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \precsim a_2 \wedge a_2 \precsim a_1$$
- 🌽 $a_1 = a_2 \Rightarrow a_1 \sim a_2$ **(reflexiv)**
- 🌽 $\precsim$ bildet eine partielle Ordnung auf $A \backslash \sim$

Totale Quasiordnung

Definition totale Quasiordnung / Präferenzordnung

Eine Quasiordnung $\precsim \subseteq A \times A$, in der **alle** Elemente vergleichbar sind, heißt *totale Quasiordnung* oder auch *Präferenzordnung*, d.h.:

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \precsim a_2 \vee a_2 \precsim a_1$$

Beispiel totale Quasiordnung / Präferenzordnung

- 🌽 Personen nach ihrer Größe geordnet.
- 🌽 "Weniger mächtig"-Beziehung $\leqq$ auf Mengensystemen.

Totale Ordnung

Definition totale Ordnung / lineare Ordnung

Eine partielle Ordnung $\sqsubseteq \subseteq A \times A$, in der **alle** Elemente vergleichbar sind, heißt *totale Ordnung* oder auch *lineare Ordnung*, d.h.:

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \sqsubseteq a_2 \vee a_2 \sqsubseteq a_1$$

Beispiel totale Ordnung / lineare Ordnung

- 🌽 $\leq$ auf $\mathbb{N}$.
- 🌽 Lexikographische Ordnung auf A^*

Striktordnungen

Definition Striktordnungen

Zu einer gegebenen Quasiordnung $\underset{\sim}{\sqsubset}$ lässt sich die zugehörige *Striktordnung* $\sqsubset$ definieren durch:

$$a_1 \sqsubset a_2 \Leftrightarrow a_1 \underset{\sim}{\sqsubset} a_2 \land a_1 \not\sim a_2$$

Lemma 5.1

- $\sqsubset$ ist **asymmetrisch**, d.h.: $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \sqsubset a_2 \Rightarrow a_2 \not\sqsubset a_1$
- $\sqsubset$ ist **transitiv**, d.h.: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 \sqsubset a_2 \land a_2 \sqsubset a_3 \Rightarrow a_1 \sqsubset a_3$

Folgerung: $\sqsubset$ ist **irreflexiv**, d.h.: $\forall a \in A. a \not\sqsubset a$

Partielle Ordnung aus Striktordnung

Definition Partielle Ordnung aus Striktordnung

Zu einer gegebenen Striktordnung $\sqsubset$ lässt sich die zugehörige partielle Ordnung definieren durch:

$$a_1 \sqsubseteq a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \sqsubset a_2 \lor a_1 = a_2$$

Nachbarschaftsordnung

Definition

Wird eine Striktordnung auf die unmittelbar benachbarten Abhängigkeiten reduziert, so entsteht die Nachbarschaftsordnung $\sqsubset_N$, definiert durch:

$$a_1 \sqsubset_N a_2 \Leftrightarrow_{df} a_1 \sqsubset a_2 \land \nexists a_3 \in A. a_1 \sqsubset a_3 \sqsubset a_2$$

Noethersche Quasiordnung

Definition

Eine Quasiordnung $(M, \sqsubseteq)$ ist genau dann Noethersch, wenn es in M keine unendliche, echt absteigende Kette $x_0 \sqsupset x_1 \sqsupset x_2 \ldots$ gibt.

Beispiel

5.3 Noethersch partielle Ordnungen

- 🌽 $\leq$ auf N ist Noethersch, denn jede nichtleere Teilmenge enthält sogar ein kleinstes Element.
- 🌽 Die Teilzeichenreihenbeziehung auf A^* ist Noethersch.
- 🌽 $\subseteq$ ist Noethersch auf $\mathfrak{P}(M)$ für jede endliche Grundmenge M.