# Endimensionell analys
# HT-2015

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2015–09–23

# Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Om jag skriver ”alla tal” syftar jag på alla reella tal.

## Talsystem

1.1 a) (s. 1)

De naturliga talen ($\mathbb{N}$) innefattar alla heltal som är noll eller större. $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{3}{0.1} = 30$, $\frac{0}{5} = 0$.

**Svar**:
$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{0}{5}$$

b) (s. 1)

De hela talen ($\mathbb{Z}$) inkluderar de naturliga talen ($\mathbb{N}$) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15$.

**Svar**:
$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$$

c) (s. 2)

Rationella tal ($\mathbb{Q}$) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen ($\mathbb{Z}$)). $3 = \frac{3}{1}$ osv...

**Svar**:
$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3}\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$$

d) (s. 2)

Reella tal ($\mathbb{R}$) är alla ”vanliga” tal (inte de komplexa talen ($\mathbb{C}$)).

**Svar**:
$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3},\ \sqrt{2},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5},\ \pi$$

1.2 (saknar sida)

Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal $i$ plus ett rationellt tal $r_1$ blir det rationella talet $r_2$. $i + r_1 = r_2 \Rightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

**Svar**: Nej, båda blir irrationella.

## Mängder och intervall

1.3 (s. 4)

$M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.
$M_2$ är alla tal större än eller lika med 0.
$M_3$ är alla tal större än eller lika med 1.
$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom $M_4$ är alla tal ingår $M_1,\ M_2,\ M_3$ i mängden. $M_3$ är även en delmängd av $M_2$.

**Svar**:

$$M_1 \subseteq M_4, \quad M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$$

## Implikationer och ekvivalens

1.4 (s. 5-6)

Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att $A$ och $C$ är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än $-4$ i $C$ implicerar både $A$ och $C$ $B$

**Svar**:

$$A \Leftrightarrow C, \quad C \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow B$$

1.5 a) (s. 5-6)

Om $A$ är sant är $B$ sant men om $B$ är sant behöver inte $A$ vara sant. Detta eftersom $a = 1,\ b = -1$ är sant för $B$ men inte för $A$. $A$ implicerar alltså $B$. $C$ går att förenkla till $a = b$ genom att dela på $b$ det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan $A$ implicerar $C$. $C$ och $B$ är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

**Svar**:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C$$

b) (s. 5-6)

Eftersom specialfallen som nämns i `a)` båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är $A$, $B$ och $C$ ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i $D$ får man $A$ vilket medför att även $D$ är ekvivalent med alla andra utsagor.

**Svar**: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 (s. 5-6)

$A$ ger sant för alla tal större än noll. $B$ ger sant för alla tal utom noll. $C$ ger sant för alla tal utom noll. $D$ ger sant för alla tal större än noll.

$A$ och $D$ är alltså ekvivalenta, lika så $B$ och $C$. $A \subseteq B$ medför då att $A$ och $D$ implicerar både $B$ och $C$.

**Svar**:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D, \quad B \Leftrightarrow C$$

1.7 (s. 5-6)

$$\begin{aligned}
&A: \; x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 1 \\
&B: \; |x-2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = 3 \\
&C: \; x \geq 1 \\
&D: \; lnx + ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1
\end{aligned}$$

$D$ ingår i alla andra vilket medför att $D$ implicerar alla andra. Eftersom svaren i både $A$ och $B$ är större än eller lika med 1 implicerar $A$ och $B$ $C$.

**Svar**:

$$D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.8 (s. 5-6)

$$\begin{aligned}
&A: \; x \geq 0 \\
&B: \; \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\
&C: \; e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\
&D: \; |x-2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1, \; x - 2 > -1 \Leftrightarrow 1 < x < 3
\end{aligned}$$

Alla implicerar $C$ eftersom $C$ är alla tal. $D$ är en delmängd av $B$ som i sin tur är en delmängd av $A$. $D$ implicerar alltså $A$ och $B$ och $B$ implicerar $A$.

**Svar**:

$$A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.9 (s. 5-6)

$$
\begin{aligned}
&A: \ |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\
&B: \ e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\
&C: \ \cos x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\
&D: \ \ln(1+x^2) > 0 \Leftrightarrow 1 + x^{>} e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1 - 1 \Leftrightarrow x \neq 0
\end{aligned}
$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), $A$ och $B$ är alltså inte samma mängd. $C$ implicerar inte $D$ eftersom $C$ innehåller 0 vilket $D$ inte gör. $A$ och $D$ är däremot ekvivalenta och implicerar $C$.

**Svar**:

$$B \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D$$

1.10 (s. 5-6)

Låt $x$ representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq \ x \leq \ 10$, $x \in \mathbb{N}$).

$$
\begin{aligned}
&A: \ x = 5 \\
&B: \ x \leq 4 \\
&C: \ x \geq 3 \\
&D: \ x \geq 5 \\
&E: \ x \leq 8
\end{aligned}
$$

$A$ är alltså en delmängd av $C$, $D$ och $E$. $B$ är en delmängd av $E$ och $D$ är en delmängd av $C$.

**Svar**:

$$A \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow D, \quad A \Rightarrow E, \quad B \Rightarrow E, \quad D \Rightarrow C$$

1.11 (s. 5-6)

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallellogram och en parallellogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.
Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallellogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

**Svar**:

$$A \Rightarrow C, \ B \Rightarrow A, \ B \Rightarrow C, \ D \Rightarrow A, \ D \Rightarrow C, \ E \Rightarrow A, \ E \Rightarrow C, \ E \Rightarrow B, \ E \Rightarrow D$$

# Kapitel 2: Algebra

## Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:
$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} + 6x + 9) = -6x - 18$
eller
$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x} - 3) - (\cancel{x} + 3)) = -6(x+3) = -6x - 18$

**Svar**: $-6x - 18$

b) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:
$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} - 6x + 9) = 6x - 18$
eller
$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3)-(\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x-18$

**Svar**: $6x - 18$

c) (s. 10-11)

$$(3x+5)^2 - (3x-5)^2 = \cancel{9x^2} + 30x + \cancel{25} - (\cancel{9x^2} - 30x + \cancel{25}) = 60x$$

**Svar**: $60x$

2.2 (saknar sida)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

**Svar**: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 (s. 11)

Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b} \\
(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \quad VSB.
\end{aligned}$$

2.4 (s. 12)

faktorisera och förenkla:

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2*2}{3*3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{14} = \frac{\cancel{2}*2}{\cancel{2}*7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{48}{168} = \frac{2*\cancel{2*2*2*3}}{\cancel{2*2*2*3}*7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{24}{84} = \frac{2*\cancel{2*2*3}}{\cancel{2*2*3}*7} = \frac{2}{7}$$

multipicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

**Svar**:

$$\frac{2}{7}, \quad \frac{4}{14}, \quad \frac{48}{168}, \quad \frac{24}{84}$$

2.5 a) (s. 12-14)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14}\right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

**Svar**:

$$-\frac{10}{7}$$

b) (s. 12-14)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12}\right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

**Svar**:

$$-\frac{1}{4}$$

2.6 a) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60}+\frac{1}{108}-\frac{1}{72}&=\frac{1}{5*3*2*2}+\frac{1}{9*3*2*2}-\frac{1}{6*3*2*2}=\\&=\frac{1*9*6}{5*12*9*6}+\frac{1*5*6}{9*12*5*6}-\frac{1*9*5}{6*12*9*5}\\&=\frac{54}{3240}+\frac{30}{3240}-\frac{45}{3240}=\frac{39}{3240}=\frac{13}{1080}\end{aligned}$$

**Svar**:

$$\frac{13}{1080}$$

b) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=\frac{27}{36}-\frac{30}{36}+\frac{4}{36}=\frac{1}{36}$$

**Svar**:

$$\frac{1}{36}$$

c) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35}-\frac{1}{25}+\frac{1}{63}-\frac{1}{245}=\frac{6}{245}-\frac{1}{25}+\frac{1}{63}=\frac{89}{2205}-\frac{1}{25}=\frac{445}{11025}-\frac{441}{11025}=\frac{4}{11025}$$

**Svar**:

$$\frac{4}{11025}$$

2.7 a) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}}=\frac{\cancel{a}*4}{2*\cancel{a}}=\frac{4}{2}=2$$

**Svar**: 2

b) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}}=\frac{a*a}{2*4}=\frac{a^2}{8}$$

**Svar**:

$$\frac{a^2}{8}$$

c) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\cancel{14}^{2}a(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = 12a$$

**Svar**: $12a$

d) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a{+}3)^{-2}$$

**Svar**: $(a+3)^{-2}$ eller $\dfrac{1}{(a+3)^2}$

2.8 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{3}{5x}-\frac{x}{15}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{45-5x^2}{75x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{\cancel{3x}(45-5x^2)}{\cancel{75x}^{25}(3-x)} = \frac{45-5x^2}{75-25x} =$$

$$= \frac{\cancel{5}(9-x^2)}{\cancel{5}(15-5x)} = \frac{9-x^2}{15-5x} = \frac{(3+x)\cancel{(3-x)}}{5\cancel{(3-x)}} = \frac{3+x}{5}$$

**Svar**: $\dfrac{3+x}{5}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop $1+\frac{1}{x^2}$. Utnyttja sedan reglerna för division.

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\cancel{(x^2+1)}x^2}{\cancel{(x^2+1)}} = x^2$$

**Svar**: $x^2$

c) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera ut $-1$.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{(y-x)(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}(x^2-y^2)} = \frac{(y-x)(xy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{\cancel{(y-x)}(xy)}{-\cancel{(y-x)}(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}$$

**Svar**: $-\dfrac{xy}{x+y}$

2.9 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och den andra kvadreringsregeln bakvänt.

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\frac{\frac{x^2-y^2}{yx}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{yx}}=\frac{\cancel{yx}(x+y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{yx}(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{x+y}{x-y}$$

**Svar**: $\frac{x+y}{x-y}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och konjugatregeln bakvänt två gånger.

$$\frac{\frac{16x^4}{81}-y^4}{\frac{2x}{3}+y}=\frac{\frac{16x^4-81y^4}{81}}{\frac{2x+3y}{3}}=\frac{\cancel{3}(16x^4-81y^4)}{\cancel{81}^{27}(2x+3y)}=\frac{(4x^2+9y^2)(4x^2-9y^2)}{27(2x+3y)}=$$

$$=\frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}}=\frac{8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3}{27}=$$

$$=\frac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$$

eller

$$\ldots\frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}}=\frac{(4x^2+9y^2)(2x-3y)}{9*3}=$$

$$=\frac{4x^2+9y^2}{9}*\frac{2x-3y}{3}=(\frac{4x^2}{9}+y^2)(\frac{2x}{3}-y)$$

**Svar**: $\frac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$ eller $(\frac{4x^2}{9}+y^2)(\frac{2x}{3}-y)$

c) (s. 12-14)

Skriv ihop de övre och undre bråken.

$$\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}}=\frac{(x-\cancel{1}+x+\cancel{1})\cancel{(x+1)(x-1)}}{(\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1))\cancel{(x+1)(x-1)}}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x$$

**Svar**: $x$

2.10 a) (s. 13-14)

Sätt in i formeln och förläng till minsta gemensamma nämnare.

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{R}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{R}=\frac{13}{12}\Leftrightarrow R=\frac{12}{13}\Omega$$

**Svar**: $\frac{12}{13}\Omega$

b) (s. 13-14)

Använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{R+5}{5R} \Leftrightarrow 5x = 3R + 15 \Leftrightarrow 2R = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{2}\Omega$$

**Svar**: $\frac{12}{13}\Omega$

2.11 (s. 13-14)

Sätt in i formel och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{600} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{600+a}{600a} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 60000 + 100a = 600a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 500a = 60000 \Leftrightarrow a = \frac{60000}{500} = 120mm$$

**Svar**: $120mm$

2.12 (s. )

utnyttja att $1 = 2/2 = 3/3$ osv. och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

**Svar**: $\frac{3}{5}$

## Kvadratrötter och potenser

2.13 (s. 16-17)

Förläng med konjugatet för att bli av med roten i nämnaren.

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5}{4-5} = -(6-\sqrt{5}-5) = \sqrt{5}-1$$

**Svar**: $\sqrt{5}-1$

2.14 a) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{9-2} = \frac{\cancel{7}+\cancel{7}\sqrt{2}}{\cancel{7}} = 1+\sqrt{2}$$

**Svar**: $1+\sqrt{2}$

b) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{13-11} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$$

**Svar**: $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$

c) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{2}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

**Svar**: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

2.15 a) (s. 17)

Faktorisera ena roten för att få samma rot i båda termerna.

$$\sqrt{12}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-\sqrt{3} = \sqrt{3}(2-1) = \sqrt{3}$$

**Svar**: $\sqrt{3}$

b) (s. 17)

faktorisera täljaren.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{6}}\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \sqrt{7}$$

eller utnyttja reglerna för division med rötter.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$$

**Svar**: $\sqrt{7}$

c) (s. 17)

Faktorisera.

$$\sqrt{3}*\sqrt{12} = \sqrt{3}*\sqrt{3}*\sqrt{4} = 3*2 = 6$$

eller utnyttja reglerna för multiplikation med rötter.

$$\sqrt{3}*\sqrt{12} = \sqrt{3*12} = \sqrt{36} = 6$$

**Svar**: 6

d) (s. 17)

Faktorisera termerna i täljaren och skriv ihop.

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \sqrt{2}$$

**Svar**: $\sqrt{2}$

e) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{3^2+4^2}-4-3 = \sqrt{25}-7 = 5-7 = -2$$

**Svar**: $-2$

f) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

**Svar**: 13

2.16 a) (s. 17)

Faktorisera rötterna så alla termerna får $\sqrt{2}$ gemensamt.

$$\frac{\sqrt{168}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}+\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(9+7)}{\cancel{\sqrt{2}}(5+1)} = \frac{9+7}{5+1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

**Svar**: $\frac{8}{3}$

b) (s. 17)

Kvadrera under ”roten ur”-tecknet först (minustecknet försvinner).

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

**Svar**: 1

c) (s. 17)

Skriv först ihop termerna utnyttja sedan reglerna för multiplikation av rötter.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Eller så används den andra kvadreringsregeln.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12-2*\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3} = 12-2*\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{1}{3} = 12-4+\frac{1}{3} = 8+\frac{1}{3} = \frac{24+1}{3} = \frac{25}{3}$$

**Svar**: $\frac{25}{3}$

d) (s. 17)

Använd konjugatregeln och sen kvadreringsregeln.

$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y}) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y) = x+2\sqrt{xy}+y-x-y = 2\sqrt{xy}$

**Svar**: $2\sqrt{xy}$

2.17 (s. 17)

$$\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9*2*4*3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3\sqrt{2}}*2\sqrt{3}}{\cancel{3\sqrt{2}}} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{\sqrt{9*4*3}}{3} = \frac{\cancel{3}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4*3} = 2\sqrt{3}$$

**Svar**: Möjligt att någon får poängavdrag på grund av att hen inte förenklat, alla är dock samma tal.

2.18 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$3^4 * 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6$$

**Svar**: $3^6$

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$2^7 * 2^{-3} = 2^{7-3} = 2^4$$

**Svar**: $2^4$

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$4^2 * 4^{-5} * 4 = 4^{2-5+1} = 4^{-2}$$

**Svar**: $4^{-2}$

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

**Svar**: $3^4$

e) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}$$

**Svar**: $4^{-4}$

f) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}$$

**Svar**: $2^{-12}$

2.19 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$3^5 * 10^5 * 3^{-3} * 10^3 = 3^{5-3} * 10^{5+3} = 3^2 * 10^8 = 9 * 10^8$$

**Svar**: $9 * 10^8$

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$\frac{2^8 * 5^6}{2^6 * 5^5} = 2^{8-6} * 5^{6-5} = 2^2 * 5 = 4 * 5 = 20$$

**Svar**: 20

c) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig och utnyttja sedan att $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\frac{2^4 * 10^4}{2 * 10^5} = 2^{4-1} * 10^{4-5} = 2^3 * 10^{-1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

**Svar**: $\frac{4}{5}$

2.20 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$b^{-0.2} * b^{1.7} * b^{-2.5} = b^{1.7-2.5-0.2} = b^{-1}$$

**Svar**: $b^{-1}$

b) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser.

$$(a^3)^{-0.5} * (a^{-5})^{-0.3} = a^{3*(-0.5)+(-5)*(-0.3)} = a^{-1.5+1.5} = a^0 = 1$$

**Svar**: 1

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a}{a^{-3.7} * a^{0.5}} = a^{1-(-3.7)-0.5} = a^{4.2}$$

**Svar**: $a^{4.2}$

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{x * x^{-1.6} * x^{0.2}}{x^{-1.4}} = \frac{x^{1-1.6+0.2}}{x^{-1.4}} = x^{1-1.6+0.2-(-1.4)} = x$$

**Svar**: $x$

2.21 a) (s. 18-20)

Faktorisera 6 och använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^2 * 2^4}{6^3} = \frac{3^2 * 2^4}{3^3 * 2^3} = 3^{2-3} * 2^{4-3} = \frac{2}{3}$$

**Svar**: $\frac{2}{3}$

b) (s. 20-21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar ”roten ur”.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1^{-1/2}}{4^{-1/2}} = 1 * \sqrt{4} = 2$$

**Svar**: 2

c) (s. 18-21)

Använd räkneregler för potenser och att tredje roten ur 8 är 2.

$$(\sqrt{64})^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

**Svar**: 4

d) (s. 19-20)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

**Svar**: 3

e) (s. 18)

Tänk på parentesen.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

**Svar**: 256

f) (s. 18)

Tänk på parentesen.

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

**Svar**: 64

2.22 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(\sqrt{5})^{-4} = (5^{1/2})^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

**Svar**: $\frac{1}{25}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

**Svar**: $\frac{2}{3}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

**Svar**: $\frac{1}{27}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar "roten ur".

$$16^{1/4} = (16^{1/2})^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

**Svar**: 2

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(8^{1/2})^{2/3} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = 2$$

**Svar**: 2

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27^{1/3}}{8^{1/3}}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 3^{-4} * \frac{1}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

**Svar**: $\frac{16}{81}$

2.23 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a^{3.3} * a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$$

**Svar**: $a^{0.4}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a * a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}$$

**Svar**: $a^{5/6}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}} * \sqrt[6]{x^{-1}} * (x^2)^{2/3} = x^{1/3*1/2} * x^{-1*1/6} * x^{2*2/3} = x^{1/6} * x^{-1/6} * x^{8/6} = x^{4/3}$$

**Svar**: $x^{4/3}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}} = \frac{(a^3a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{a^{7/8}}{a^{-1/8}} = a^{8/8} = a$$

**Svar**: $a$

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x^2y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{\cancel{x^{1/2}}y^{5/8}}{\cancel{x^{1/2}}y^{1/2}} = y^{5/8-4/8} = y^{1/8}$$

**Svar**: $y^{1/8}$

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(ab\frac{a^{3/4}}{b^{3/16}}\right)^2 = a^2b^2\frac{a^{6/4}}{b^{6/16}} = a^{8/4+6/4}b^{32/16-6/16} = a^{7/2}b^{13/8}$$

**Svar**: $a^{7/2}b^{13/8}$

2.24 (s. )

Använd räkneregler för potenser.

$$(4^x)^5 = \frac{(2^6 * 5^5)^3}{(2^4 * 5^2)^4} * \frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{18} * 5^{15}}{2^{16} * 5^8} * \frac{2^{18}}{5^7} = 2^2 * \cancel{5^7} * \frac{2^{18}}{\cancel{5^7}} = 2^{20}$$
$$(4^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow ((2^2)^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{10x} = 2^{20} \Leftrightarrow x = 2$$

**Svar**: $x = 2$

## Polynom och rationella uttryck

2.25 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

c) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

e) (s. 11)

Faktorisera.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

f) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

g) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)$$

h) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = b(a + b)^2$$

i) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a - b)^2$$

2.26 a) (s. 11)

Faktorisera.

$$x(x + 2) - 4(x + 2) = (x - 4)(x + 2)$$

b) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$x^2(x^2 - 9) + x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9) = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

c) (s. 11)

Använd konjugatregeln två gånger.

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera.

$$(a+b)(a-b)+a^2-ab = (a+b)(a-b)+a(a-b) = (a+b+a)(a-b) = (2a+b)(a-b)$$

e) (s. 11)

Skriv om 4 som $2^2$ och använd konjugatregeln.

$$(a - b)^2 - 4 = (a - b)^2 - 2^2 = (a - b + 2)(a - b - 2)$$

f) (s. 11)

Använd andra kvadreringsregeln följt av konjugatregeln.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = ((a + b)(a - b))^2 = (a + b)^2(a - b)^2$$

2.27 a) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2-7x+xy-7y = (x^2+xy)-(7x+7y) = x(x+y)-7(x+y) = (x-7)(x+y)$$

b) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$a^6-a^4+a^2-1 = a^4(a^2-1)+(a^2-1) = (a^4+1)(a^2-1) = (a^4+1)(a+1)(a-1)$$

c) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2y+2x^2-y-2 = x^2(y+2)-(y+2) = (x^2-1)(y+2) = (x+1)(x-1)(y+2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera, använd andra kvadreringsregeln och sist konjugatregeln.

$$7x^5+7xy^4-14x^3y^2 = 7x(x^4+y^2-2x^2y^2) = 7x(x^2-y^2)^2 = 7x(x+y)^2(x-y)^2$$

e) (s. 11)

Använd konjugatregeln.

$$a^2 - (b + c)^2 = (a + b + c)(a - b - c)$$

f) (s. 11)

Använd först konjugatregeln och sen båda kvadreringsreglerna.

$(x^2+y^2)^2-(2xy)^2 = (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy) = (x+y)^2(x-y)^2$

g) (s. 11)

Använd konjugatregeln följt av båda kvadreringsreglerna och sen konjugatregeln igen.

$(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2+2xy)(x^2+y^2-z^2-2xy) =$
$= ((x+y)^2-z^2)((x-y)^2-z^2) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

2.28 a) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2+6x+7 = (x+3)^2-9+7 = (x+3)^2-2$$

b) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2-7x+13 = (x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}+13 = (x-\frac{7}{2})^2+\frac{3}{4}$$

c) (s. 23)

Perfekt kvadrat.

$$x^2+18x+81 = (x+9)^2-81+81 = (x+9)^2$$

d) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2+5x = (x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

e) (saknar sida)

Eftersom uttrycket saknar $x$-term går det inte att kvadratkomplettera.

2.29 (s. 23)

$b$ följer av att det kommer vara 2 $x$-termer i högerledet och $c$ av att de konstanta termerna ska ta ut varandra i högerledet.

$$\begin{aligned}&x^2+ax = (x+b)^2+c\\&b = \frac{a}{2}\\&c = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

**Svar**: $b = \frac{a}{2}$, $c = -\frac{a^2}{4}$

2.30 a) (s. 24-25)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$\frac{4x^2-4}{2x+2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}(x^2-1)}{\cancel{2}(x+1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = 2x-2$$

**Svar**: $2x-2$

b) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och andra kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

**Svar**: $\dfrac{x+1}{x-1}$

c) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2-y^2}{(xy)^2} = \frac{\cancel{y^2-x^2+x^2-y^2}}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0$$

**Svar**: 0

2.31 a) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{2}{3x+9} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6} = \frac{2}{3(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{2(x-3)} =$$

$$= \frac{4(x-3)+6x-3(x+3)}{6(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12+6x-3x-9}{6(x+3)(x-3)} = \frac{7x-21}{6(x+3)(x-3)} =$$

$$= \frac{7\cancel{(x-3)}}{6(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{7}{6x+18}$$

**Svar**: $\dfrac{7}{6x+18}$

b) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{5}{x-1} + \frac{8}{x+1} - \frac{3x+7}{x^2-1} = \frac{5(x+1)+8(x-1)-(3x+7)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{5x+5+8x-8-3x-7}{x^2-1} = \frac{10x-10}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \frac{10}{x+1}$$

**Svar**: $\dfrac{10}{x+1}$

2.32 a) (s. 24-25)

Använd andra kvadreringsregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{(x-y)^2}=\frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{3x-y-2x+\cancel{2y-2y}}{(x-y)^2}=\frac{\cancel{x-y}}{(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x-y}$$

**Svar**: $\frac{1}{x-y}$

b) (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

**Svar**: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.33 (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

**Svar**: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.34 a) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) : (x^3 + x + 1)$

Ansätter lösning:
$(x^5+3x^4-2x^3+2x-1) = (x^3+x+1)(x^2+Ax+B)+Cx^2+Dx+E =$
$= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + Cx^2 + Dx + E =$
$= x^5 + Ax^4 + (B+1)x^3 + (A+C+1)x^2 + (A+B+D)x + (B+E)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A & = 3 \\ B+1 & = -2 \\ A+C+1 & = 0 \\ A+B+D & = 2 \\ B+E & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = -4 \\ D = 2 \\ E = 2 \end{cases}$$

**Kvot:** $x^2 + 3x - 3$
**Rest:** $-4x^2 + 2x + 2$

b) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^6 - 1) : (x - 1)$

Ansätter lösning:
$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + F =$
$= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex - x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E + F =$
$= x^6 + (A-1)x^5 + (B-A)x^4 + (C-B)x^3 + (D-C)x^2 + (E-D)x + (-E+F)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1 & = 0 \\ B-A & = 0 \\ C-B & = 0 \\ D-C & = 0 \\ E-D & = 0 \\ F-E & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

**Kvot:** $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
**Rest:** ingen

c) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5)$

Ansätter lösning:
$(x^4 + 2x^3 + 25) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + Ax + B) + Cx + D =$
$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 4x^3 + 4Ax^2 + 4Bx + 5x^2 + 5Ax + 5B + Cx + D =$
$= x^4 + (A+4)x^3 + (B+4A+5)x^2 + (4B+5A+C)x + (5B+D)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A+4 & = 2 \\ B-4A+5 & = 0 \\ 4B+5A+C & = 0 \\ 5B+D & = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = -2 \\ D = 10 \end{cases}$$

**Kvot:** $x^2 + 3x - 3$
**Rest:** $-4x^2 + 2x + 2$

2.35 a) (s. 11)

Konjugatregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x+2$ eller $x-2$).

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x+1$).

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

c) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln bakvänt. (går att lösa med polynomdivision).

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+A) = x^2 + Ax - x - A$

Identifierar variabeln:
$A - 1 = -3 \Leftrightarrow A = -2$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

**Svar:** $(x-1)(x-2)$

`e) (s. 25-29)`

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$2 - x - x^2 = (x-1)(-x+A) = -x^2 + Ax + x - A$

Identifierar variabeln:
$A + 1 = -1 \Leftrightarrow A = -2$

$2 - x - x^2 = (x-1)(-x-2)$

**Svar:** $(x-1)(-x-2)$

`f) (s. 11)`

Faktorisera och använd andra kvadreringsregeln.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$$

`2.36 a) (s. 11)`

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

`b) (saknar sida)`

Finns inga reella faktorer.

`c) (s. 25-29)`

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B =$
$= x^3 + (A-1)x^2 + (B-A)x - B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

**Svar:** $(x-1)(x^2 + x + 1)$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B =$
$= x^3 + (A + 1)x^2 + (B + A)x + B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B + A = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

**Svar:** $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) =$
$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C =$
$= x^4 + (A - 1)x^3 + (B - A)x^2 + (C - B)x - C$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2(x + 1) + x + 1) = (x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$

**Svar:** $(x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$

f) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -3$ och $x = 0$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^4 + 27x = x(x^3 + 27) = x(x + 3)(x^2 + Ax + B) =$
$= x(x^3 + Ax^2 + Bx + 3x^2 + 3Ax + 3B) =$
$= x(x^3 + (A + 3)x^2 + (B + 3A)x + 3B)$

Identifierar variabler:
$A + 3 = 0, \quad B + 3A = 0, \quad 3B = 27 \Leftrightarrow A = -3, \quad B = 9$

$x^4 + 27x = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

**Svar:** $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

g) (s. 25-29)

Skriv om $x^6$ till $(x^3)^2$ och använd konjugatregeln bakvänt. Faktorisera sedan faktorerna var för sig.
$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$

Hittar lösningen $x = -2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + 2x^2 + 2Ax + 2B =$
$= x^3 + (A+2)x^2 + (B+2A)x + 2B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B + 2A = 0 \\ -2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - 2x^2 - 2Ax - 2B =$
$= x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B$

Identifierar variabler:
$A - 2 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad -2B = -8 \rightarrow A = 2, \quad B = 4$

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Slå samman:
$x^6 - 64 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

**Svar:** $(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

2.37 (s. 25-29)

Delar upp problemet i delproblem efter varje faktorisering. Ekvation:
$p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$

$p(1) = 1^5 - 10 * 1^2 + 15 * 1 - 6 = 0$
Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p(x) = (x-1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$
$= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D =$
$= x^5 + (A-1)x^4 + (B-A)x^3 + (C-B)x^2 + (D-C)x - D$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=0 \\ B-A=0 \\ C-B=-10 \\ D-C=15 \\ -D=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-9 \\ D=6 \end{cases}$$

$$p(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2-9x+6)$$

Ekvation: $p_1(x)=x^4+x^3+x^2-9x+6$

$p_1(1)=1^4+1^3+1^2-9*1+6=0$
Hittar lösningen $x=1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p_1(x)=(x-1)(x^3+Ax^2+Bx+C)=$
$=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx-x^3-Ax^2-Bx-C=$
$=x^4+(A-1)x^3+(B-A)x^2+(C-B)x-C$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=1 \\ B-A=1 \\ C-B=-9 \\ D-C=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-6 \end{cases}$$

$$p_1(x)=(x-1)(x^3+2x^2+3x-6)$$

Ekvation: $p_2(x)=x^3+2x^2+3x-6$

$p_2(1)=1^3+2*1^2+3*1-6=0$
Hittar lösningen $x=1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p_2(x)=(x-1)(x^2+Ax+B)=$
$=x^3+Ax^2+Bx-x^2-Ax-B=$
$=x^3+(A-1)x^2+(B-A)x-B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=2 \\ B-A=3 \\ -B=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=6 \end{cases}$$

Ekvation: $p_3(x)=x^2+3x+6$
$p_2(1)=1^2+3*1+6=10$ ($x=1$ är inte en lösning)
pq-formeln:
$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-6}=$
$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}} \Rightarrow$ Finns ingen reell lösning

$p(x)=(x-1)(x-1)(x-1)(x^2+3x+6)=(x-1)^3(x^2+3x+6)$

**Svar:** $(x-1)^3(x^2+3x+6)$, multipliciteten för $x=1$ är 3

2.38 (s. 25-29)

Ekvationen: $p(x) = x^3 - 2x - 4$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 0 \\ B - 2A = -2 \\ -2B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$p(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$

$p_1(x) = x^2 + 2x + 2$
pq-formeln:
$x = -1 \pm \sqrt{1-2} \Rightarrow$ Finns ingen reell lösning

**Svar:** $p(x-2)(x^2 + 2x + 2)$

# Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

## Ekvationer

3.1 a) (s. 33-34)

Utnyttja faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

**Svar:** $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

b) (s. 33-34)

$x(x^2 - 4) = 0$. Faktorisera först $x^2 - 4$ med konjugatregeln.

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

**Svar:** $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

c) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

*Alternativ 1:*
Faktorisera genom att gissa $a$ och $b$ så $(x+a)(x+b) = x^2+10x+24 = 0$. $a = 4$ och $b = 6$.

$$(x+4)(x+6) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

*Alternativ 2:*
Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = -5 \pm 1$$

*Alternativ 3:*
Använd kvadratkomplettering:

$(x+5)^2 - 25 + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -5 \pm 1$

**Svar:** $x_1 = -4$ och $x_2 = -6$

d) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

*Alternativ 1:*

Faktorisera genom att gissa $a$ och $b$ så $(x+a)(x+b) = x^2+10x+25 = 0$. $a = 5$ och $b = 5$.

$$(x+5)^2 = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

*Alternativ 2:*

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$$

*Alternativ 3:*

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

**Svar:** $x_{1,2} = -5$

e) (s. 33-34)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

Faktorisera ut $x$ ur vänsterledet.

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2+10x+24$ (se c)). Nollproduktionsmetoden ger också lösningen $x = 0$.

**Svar:** $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ och $x_3 = 0$

f) (s. 33-34)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Faktorisera ut $x^2$ ur vänsterledet.

$$x^2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2+10x+25$ (se d)). Nollproduktionsmetoden ger också dubbelroten $x = 0$.

**Svar:** $x_{1,2} = -5$ och $x_{3,4} = 0$

3.2 a) (s.)

$$x^2 + 4x + a = 0, \quad x = 2$$

Sätt in värdet för $x$ i ekvationen och lös ut $a$.

$$2^2 + 4 * 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

**Svar:** $a = -12$

b) (s.)

$$x^2 + bx + 12 = 0, \quad x = 3$$

Sätt in värdet för $x$ i ekvationen och lös ut $b$.

$$3^2 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 3b = -21 \Leftrightarrow b = -7$$

**Svar:** $b = -7$

3.3 a) (s.)

$$p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$
$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

**Svar:** $p(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

b) (s.)

$$p(x) = 2x^2 - 3x - 2$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 2)(x + \frac{1}{2})$

**Svar:** $p(x) = (x - 2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

c) (s.)

$$p(x) = -x^2 + x + 12$$
$$-x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x-4)(x+3)$

**Svar:** $p(x) = (x-4)(x+3)$

d) (s.)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$
$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$
$$x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$$p(x) = x * g(x) = x(x - \tfrac{1}{2})^2$$

**Svar:** $p(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

e) (s.)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5)$$
$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$
$$x(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-5} \Rightarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Faktorsatsen ger då att $g(x)$ inte kan faktoriseras.

**Svar:** $p(x) = 3x(x^2 - 2x + 5)$

f) (s.)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

Använd variabelsubstitution så pq-formeln kan användas.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad t = x^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$t = 3 \pm \sqrt{9-8} \Leftrightarrow t = 3 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 4, \quad t_2 = 2$$

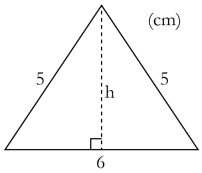
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

Faktorsatsen ger då $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

**Svar:** $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

3.4 (s.)




Satsen om likbent triangel ger att den båda rätvinkliga trianglarna är kongruenta vilket medför att basen för båda är $3cm$. Pyth. sats ger att $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow$ arean: $6 * 4/2 = 12cm^2$ och omkretsen är $16cm$.

Låt benen vara $y$ och basen $x$

$h = \sqrt{y^2 - (x/2)^2}$
area: $\dfrac{x * h}{2} = \dfrac{x\sqrt{y^2 - (x/2)^2}}{2} = 12cm \Leftrightarrow x\sqrt{y^2 - (x/2)^2} = 24cm$
omkrets: $2y + x = 16cm \Leftrightarrow x = 16 - 2y$

$$(16 - 2y)\sqrt{y^2 - (8 - y)^2} = 24 \Leftrightarrow 2(8 - y)4\sqrt{y - 4} = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (8 - y)\sqrt{y - 4} = 3 \Rightarrow (y^2 - 16y + 64)(y - 4) = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 - 16y^2 + 64y + 64y - 256 = 9 \Leftrightarrow y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = 0$$

Ansätter lösning med $x - 5$ som faktor från ursprungsfiguren (kan lösas med polynomdivision också):

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (x - 5)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A - 5)y^2 + (B - 5A)y - 5B$$

Identifierar variablerna:

$$\begin{cases} A - 5 = -20 \\ B - 5A = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -15 \\ B = 53 \end{cases}$$

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y - 5)(y^2 - 15y + 53)$$

$y^2 - 15y + 53 = 0$
pq-formeln:
$$y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{15^2 - 212}{4}} = \frac{15 \pm \sqrt{13}}{2}$$
$$y_1 = \frac{15 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 - \sqrt{13} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \text{falsk rot}$$
$$y_2 = \frac{15 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 + \sqrt{13} = 1 + \sqrt{13}$$

**Svar:** $x = 1 + \sqrt{13}$ och $y = \dfrac{15 - \sqrt{13}}{2}$

3.5 a) (s.)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)+x^2-1+x(x-1)}{x(x^2-1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})=0$$

Faktorsatsen ger då: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Svar:** $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) (s.)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{\cancel{x}-4-\cancel{x}+3}{(x-3)(x-4)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x^2-7x+12} \Rightarrow \cancel{x^2}-3x+2=\cancel{x^2}-7x+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

**Svar:** $x=\frac{5}{2}$

c) (s.)

$$\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2+3x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(x+3)+\cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{2}}(x-2)(x+3)}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3+x-2=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

**Svar:** $x=-\frac{1}{2}$

d) (s.)

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x-2-(x+2)^2}{x^2-4} = \frac{x^2}{4-x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (4-x^2)(-x^2-3x-6) = x^2(x^2-4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\cancel{4x^2} - 12x - 24 + \cancel{x^4} + 3x^3 + 6x^2 = \cancel{x^4} - \cancel{4x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

Gissar en lösning till ekvationen och hittar $x = 2$. Ansätter lösning med $x - 2$ som faktor (kan lösas med polynomdivision också):

$$x^3+2x^2-4x-8 = (x-2)(x^2+Ax+B) = x^3+(A-2)x^2+(B-2A)x-2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 2 \\ B - 2A = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$(x-2)(x^2+4x+4) = 0$$

Kvadreringsregeln:

$$(x-2)(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)^2 = 0$$

Faktorsatsen: $x_1 = 2$ och $x_{2,3} = -2$. Både 2 och $-2$ är dock falska rötter då de resulterar i nolldivision i ursprungsekvationen.

**Svar:** Ekvationen saknar lösning

3.6 (s.)

Formeln för hastighet, sträcka och tid är $s = v*t \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Låt $x$ vara båtens hastighet i stillastående vatten. Den totala tiden för resan är tiden dit ($t_1$) plus tiden tillbaka ($t_1$) ($t_1 + t_2 = t$). Hastigheten båten har dit ($v_1$) kan beskrivas som $x - 2.4$ och hastigheten hem ($v_2$) som $x + 2.4$. $t = 2$ och $s = 6.4$.

$$t_1 + t_2 = t \Leftrightarrow \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = t$$

$$\frac{6.4}{x-2.4} + \frac{6.4}{x+2.4} = 2 \Leftrightarrow \frac{6.4(x+2.4)+6.4(x-2.4)}{(x-2.4)(x+2.4)} = 2 \Leftrightarrow$$
$$6.4(2x + \cancel{2.4 - 2.4}) = 2(x^2 - 2.4^2) \Leftrightarrow \cancel{2} * 6.4x = \cancel{2}(x^2 - 2.4^2) \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 6.4x - 5.76 = 0$$

pq-formeln:

$$x = 3.2 \pm \sqrt{10.24 + 5.76} = 3.2 \pm \sqrt{16} = 3.2 \pm 4$$

$x_1 = 7.2$ och $x_2 = -0.8$. Eftersom hastigheten i uppgiften inte kan vara negativ gäller endast $x_1$

**Svar:** 7.2 km/h

3.7 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -1$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

**Svar:** $x = 2$

b) (s.)

$$\sqrt{x+2} = -x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).
$x_2 = -1$

**Svar:** $x = -1$

c) (s.)

$$x - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \Rightarrow x - 2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$x - 2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 6$
$x_2 = 3$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

**Svar:** $x = 6$

3.8 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 1$$

**Svar:** $x = 1$

`b) (s.)`

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 3x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{Falsk rot.}$$

**Svar:** Ekvationen saknar lösning

`c) (s.)`

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \Rightarrow x+2 = x \Leftrightarrow 2 = 0 \quad \text{Ej ekvivalent.}$$

**Svar:** Ekvationen saknar lösning

`d) (s.)`

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x \Rightarrow (x-2)(x+3) = x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+x-6 = \cancel{x^2} \Leftrightarrow x = 6$$

**Svar:** $x = 6$

`e) (s.)`

$$(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = 8\sqrt{x} \Leftrightarrow 9-x = 8\sqrt{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 64x \Leftrightarrow x^2 - 82x + 81 = 0$$

pq-formeln:

$$x = 41 \pm \sqrt{41^2 - 81} = 41 \pm 40$$

$x_1 = 81$ falsk rot.
$x_2 = 1$

**Svar:** $x = 1$

`f) (s.)`

$$\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{x(3+x)} \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{3x+x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 6x + 9 = 3x + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{Falsk rot.}$$

**Svar:** Lösning saknas

## Ekvationer

3.9 (s.)

$2 < 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** än 3"? Ja
$2 \leq 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** eller lika med 3"? Ja
$2 \leq 2 \Leftarrow$ är "2 mindre eller **lika med** 2"? Ja

**Svar:** Alla tre

3.10 (s.)

Nedan visar jag min tankeprocess för att lösa uppgiften.

$$\frac{2}{0.02} = \frac{2}{2} * \frac{1}{10^{-2}} = 1 * 10^2 = 100$$
$$\frac{31}{0.2} = \frac{31}{2} * \frac{1}{10^{-1}} = 15.5 * 10 = 155$$
$$\frac{0.00009}{0.000006} = \frac{9}{6} * \frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 1.5 * 10 = 15$$

**Svar:** $\frac{0.00009}{0.000006} < \frac{2}{0.02} < \frac{31}{0.2}$

3.11 a) (s.)

$3x + 1 < 2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

**Svar:** $x < \frac{1}{3}$

b) (s.)

$-3x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

**Svar:** $x \geq \frac{1}{3}$

c) (s.)

$3x + 1 > 4x + 5 \Leftrightarrow x < -4$

**Svar:** $x < -4$

d) (s.)

$(x - 3)(x + 3) \leq x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 9 \leq \cancel{x^2} \Leftrightarrow -9 \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

**Svar:** $x \in \mathbb{R}$

3.12 a) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$\frac{x+4}{x-1} > 0$$

| $x$ | | $-4$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+4}{x-1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\wr$ | $+$ |

**Svar:** $x > 1$ eller $x < -4$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger negativa värden.

$$\frac{x+4}{x-1} < 0$$

**Svar:** teckentabellen i a) ger: $-4 < x < 1$

c) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0$$

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+1}{x(x-1)}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\wr$ | $-$ | $\wr$ | $+$ |

**Svar:** $x < -1$ eller $0 < x < 1$

d) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$(x+2)(2x-1) > 0$$

| $x$ | | $-2$ | | $1/2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+2)(2x-1)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\wr$ | $+$ |

**Svar:** $x < -2$ eller $x > 1/2$

3.13 (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{3x+1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{3x+1-2(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0$$

| $x$ | | $-2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x-3}{x+2}$ | $+$ | $\wr$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Svar:** $-2 < x < 3$

3.14 a) (s. 44-45)

Se sidorna 44-45 i läroboken för förklaring till varför det fungerar såhär.

$$\frac{x^2+1}{x} < x$$

$$\text{om } x > 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2}+1 < \cancel{x^2} \Leftrightarrow \quad 1 < 0$$

$$\text{om } x < 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2}+1 > \cancel{x^2} \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

$1 < 0$ är alltid sant vilket innebär att skillnaden gäller för alla $x$ mindre än noll.

**Svar:** $x < 0$

b) (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-(x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x^2-\cancel{x^2}+4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2} < 0$$

| $x$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|
| $x^2+4$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x^2+4}{x+2}$ | $-$ | $\wr$ | $+$ |

**Svar:** $x < -2$

c) (s.)

Eftersom $x^2$ aldrig kan bli negativt behövs inget motsvarade det i uppgift a) göras.

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2 > \cancel{x^2} + 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

**Svar:** Alla $x$

3.15 a) (s.)

Skriv om olikheten så att allt är i vänsterledet och använd konjugatregeln baklänges. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) < 0$$

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+2)(x-2)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Svar:** $-2 < x < 2$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger positiva värden.

**Svar:** teckentabellen i a) ger: $x < -2$ eller $x > 2$

c) (s.)

Använd kvadreringsregeln och lös olikheten.

$$(x+1)^2 > (x+5)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 > \cancel{x^2} + 10x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 > 8x \Leftrightarrow x < -3$$

**Svar:** $x < -3$

3.16 (s.)

Förenkla vänsterledet, flytta över ettan och skriv allt på ett gemensamt bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{1-x^4-2x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{-x^4-2x^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^4-(-x^4-2x^2)}{-x^2(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)} < 0$$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $2x^2+1$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-x^2$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $x^2+2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)}$ | $-$ | $\wr$ | $-$ |

**Svar:** $x \neq 0$

3.17 a) (s.)

Lös ekvationen genom att multiplicera termerna med $x$. Faktorisera sedan täljaren. Notera att grundekvationen inte är definierad för $x = 0$ därför implicerar endast den första ekvationen den andra.

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Faktorsatsen ger: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

**Svar:** $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

b) (s.)

Skriv om olikheten så alla termer står på samma bråkstreck i vänsterledet. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$x + \frac{4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{x} > 0$$

| $x$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{(x-4)(x-1)}{x}$ | $-$ | $\wr$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Svar:** $0 < x < 1$ eller $x > 4$

# Kapitel 4: Summor och talföljder

## Summatecken

4.1 a) (s.)

$$\sum_{n=1}^{5} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

**Svar:** 225

b) (s.)

$$\sum_{k=0}^{4} (k^2 - 3k) = 0^2 - 3*0 + 1^2 - 3*1 + 2^2 - 3*2 + 3^2 - 3*3 + 4^2 - 3*4 =$$

$$= 1 - 3 + 4 - 6 + 9 - 9 + 16 - 12 = 0$$

**Svar:** 0

c) (s.)

$$\sum_{k=2}^{100} 3 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3 + 3}_{99 \text{ st.}} = 3 * 99 = 297$$

**Svar:** 297

d) (s.)

Antalet element kommer alltid vara lika med övre gränsen minus undre gränsen plus ett.

$$\sum_{k=m}^{n} 3 = 3(n - m + 1)$$

**Svar:** $3(n - m + 1)$

4.2 a) (s.)

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10}}_{10 \text{ st. från 1 till 10}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$$

**Svar:** $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$

b) (s.)

$$\underbrace{2*3+3*4+4*5+\ldots+n(n+1)}_{\text{från 2 till n}} = \sum_{k=2}^{n} k(k+1)$$

**Svar:** $\sum_{k=2}^{n} k(k+1)$

c) (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det kan skrivas med summatecken.

$$1+3+9+27+81+243 = \underbrace{3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5}_{\text{6 st. från 0 till 5}} = \sum_{k=0}^{5} 3^k$$

**Svar:** $\sum_{k=0}^{5} 3^k$

## Aritmetisk summa

4.3 (s.)

Se formeln för aritmetisk summa.

$$1+2+\ldots+100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

**Svar:** 5050

4.4 (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det går att skrivas med summatecken.

$$3+6+\ldots+96+99 = 3*1+3*2+\ldots+3*32+3*33 =$$

$$= 3\underbrace{(1+2+\ldots+33+44)}_{\text{33 st. från 1 till 33}} = 3\sum_{k=1}^{33} k = 3*\frac{33*34}{2} = 1683$$

**Svar:** 1683

4.5 a) (s.)

$$1+2+3+\ldots+9+10 = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10*11}{2} = 55$$

**Svar:** 55

b) (s.)

bryt ut fyran och skriv om med summatecken.

$$4+8+12+\ldots+36+40 = 4(1+2+3+\ldots+9+10) = 4\sum_{k=1}^{10} k = 4*\frac{10*11}{2} = 220$$

**Svar:** 220

c) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att fyran kan brytas ut.

$$3+7+11+\ldots+35+39 =$$
$$= (4*1-1)+(4*2-1)+(4*3-1)+\ldots+(4*9-1)+(4*10-1) =$$
$$= 4(1+2+3+\ldots+9+10) - (\underbrace{1+1+1\ldots+1+1}_{10\text{ st.}}) =$$
$$= 4\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 = 4*\frac{10*11}{2} - 10*1 = 210$$

**Svar:** 210

d) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att tian kan brytas ut.

$$-3+7+17+\ldots+87+97 =$$
$$= (10*0-3)+(10*1-3)+(10*2-3)+\ldots+(10*9-3)+(10*10-3) =$$
$$= 10(0+1+2+\ldots+9+10) - (\underbrace{3+3+3\ldots+3+3}_{11\text{ st.}}) =$$
$$= 10\sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^{10} 3 = 10(0+\sum_{k=1}^{10} k) - \sum_{k=0}^{10} 310*\frac{10*11}{2} - 11*3 = 517$$

**Svar:** 517

4.6 a) (s.)

Bryt ut trean och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{15} 3k = 3*1+3*2+\ldots+3*14+3*15 =$$
$$= 3(1+2+\ldots+14+15) = 3\sum_{k=1}^{15} k = 3\frac{15*16}{2} = 360$$

**Svar:** 360

b) (s.)

Bryt ut trean och två och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{15}(3k+2) = (3*1+2)+(3*2+2)+\ldots+(3*14+2)+(3*15+2) =$$

$$= 3(1+2+\ldots+14+15)+(\underbrace{2+2+\ldots+2+2}_{\text{15 st.}}) = 3\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2 =$$

$$= 3\frac{15*16}{2}+2*15 = 390$$

**Svar:** 390

c) (s.)

Bryt ut trean och två som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = 3(1+2+\ldots+(n-1)+n)+(\underbrace{2+2+\ldots+2+2}_{\text{n st.}}) =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2 = 3\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

**Svar:** $3\frac{n(n+1)}{2}+2n$

d) (s.)

Bryt ut $a$ och $d$ som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+d) = a(1+2+\ldots+(n-1)+n)+(\underbrace{d+d+\ldots+d+d}_{\text{n st.}}) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}d = a\frac{n(n+1)}{2}+dn$$

**Svar:** $a\frac{n(n+1)}{2}+dn$

## Geometrisk summa

4.7 a) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = \sum_{k=0}^{5}2^k = \frac{2^{5+1}-1}{2-1} = 127$$

**Svar:** 127

b) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa.
Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1-3+9-27+81-243=(-3)^0+(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4+(-3)^5=$$
$$=\sum_{k=0}^{5}(-3)^k=\frac{(-3)^{5+1}-1}{-3-1}=-182$$

**Svar:** $-182$

c) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa.
Eftersom start värdet inte är 0 finns det två olika sätt att lösa det på: antingen göra en summa av delmängden där $k \geq 0$ och addera resten efteråt eller genom att bryta ut den minsta exponenten.

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{128}=2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^7=$$
$$=2+\sum_{k=0}^{7}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{511}{128}$$

eller

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{128}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^7=$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}*\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)=$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}*\sum_{k=0}^{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}*\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{511}{128}$$

**Svar:** $\frac{511}{128}$

d) (s.)

Två alternativa sätt att lösa det: Bryta ut $e$ så att summan får startvärdet 0 eller använd subtraktion så att summan kan skrivas med 0 som startvärde.

$$e + e^2 + e^3 + \ldots + e^{10} = e(e^0 + e^1 + e^2 + \ldots + e^9) = e\sum_{k=0}^{9} e^k = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$$

eller

$$e + e^2 + e^3 + \ldots + e^{10} = \sum_{k=1}^{10} e^k = \sum_{k=0}^{10} e^k - \sum_{k=0}^{0} e^k = \frac{e^{11} - 1}{e - 1} - \frac{e^1 - 1}{e - 1} =$$
$$= \frac{e^{11} - \cancel{1} - (e - \cancel{1})}{e - 1} = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$$

**Svar:** $e * \dfrac{e^{10} - 1}{e - 1}$

e) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^9 = (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \ldots + +(-x)^9 =$$
$$= \sum_{k=0}^{9} (-x)^k = \frac{(-x)^{10} - 1}{-x - 1} = -\frac{x^{10} - 1}{x + 1} = \frac{1 - x^{10}}{x + 1}$$

**Svar:** $\dfrac{1 - x^{10}}{x + 1}$

4.8 a) (s.)

Se 4.6 a) för resonemang kring varför faktorn 3 kan brytas ut.

$$\sum_{k=0}^{10} (3 * 2^k) = 3 * \sum_{k=0}^{10} 2^k = 3 * \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 3(2^{11} - 1)$$

**Svar:** $3(2^{11} - 1)$

b) (s.)

Bryt ut en tvåa från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=1}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=1}^{10}2^k = 3*2(2^0+2^1+\ldots+2^9) =$$
$$= 6*\sum_{k=0}^{9}2^k = 6*\frac{2^{10}-1}{2-1} = 6(2^{10}-1)$$

eller

$$\sum_{k=1}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=1}^{10}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{10}2^k - \sum_{k=0}^{0}2^k\right) =$$
$$= 3\left(\frac{2^{11}-\cancel{1}}{2-1} - \frac{2^1-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{11}-2) = 6(2^{10}-1)$$

**Svar:** $6(2^{10}-1)$

c) (s.)

Bryt ut tre tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=3}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=3}^{10}2^k = 3*2^3(2^0+2^1+\ldots+2^7) =$$
$$= 24*\sum_{k=0}^{7}2^k = 24*\frac{2^8-1}{2-1} = 24(2^8-1)$$

eller

$$\sum_{k=3}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=3}^{10}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{10}2^k - \sum_{k=0}^{2}2^k\right) =$$
$$= 3\left(\frac{2^{11}-\cancel{1}}{2-1} - \frac{2^3-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{11}-2^3) = 24(2^{10}-1)$$

**Svar:** $24(2^{10}-1)$

d) (s.)

Bryt ut $m$ tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=m}^{n}(3*2^k) = 3*\sum_{k=m}^{n}2^k = 3*2^m(2^0+2^1+\ldots+2^{n-m}) =$$
$$= 3*2^m*\sum_{k=0}^{n-m}2^k = 3*2^m*\frac{2^{n-m+1}-1}{2-1} = 3*2^m(2^{n-m+1}-1)$$

eller

$$\sum_{k=m}^{n}(3*2^k) = 3*\sum_{k=m}^{n}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{n}2^k-\sum_{k=0}^{m-1}2^k\right) =$$
$$= 3\left(\frac{2^{n+1}-\cancel{1}}{2-1}-\frac{2^m-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{n+1}-2^m) = 3*2^m(2^{n-m+1}-1)$$

**Svar:** $3*2^m(2^{n-m+1}-1)$

4.9 a) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktal.

$$\sum_{k=0}^{n}(3*2^{-k}) = 3*\sum_{k=0}^{n}(2^{-k}) = 3*\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 3*\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} =$$
$$= 3*\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{-\frac{1}{2}} = -6\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right) = 6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

**Svar:** $6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

b) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktal och fixa till så att startvärdet är noll (båda metoderna i 4.8 b)-c) går att använda).

$$\sum_{k=1}^{n}e^{-k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{e}\right)^k = \tfrac{1}{e}\left(\left(\tfrac{1}{e}\right)^0+\left(\tfrac{1}{e}\right)^1+\ldots+\left(\tfrac{1}{e}\right)^{n-1}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{e}*\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tfrac{1}{e}\right)^k = \tfrac{1}{e}*\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{e}{e}-e} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{1-e} = \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{e-1}$$

**Svar:** $\dfrac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{e-1}$

c) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$\sum_{n=0}^{100}(1000*(1.05)^n) = 1000*\sum_{n=0}^{100}1.05^n = 1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{1.05-1} =$$
$$= 1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{\frac{1}{20}} = 20*1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{1} = 20000(1.05^n+1-1)$$

**Svar:** $20000(1.05^n+1-1)$

d) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}=(-\tfrac{1}{2})^0+(-\tfrac{1}{2})^1+(-\tfrac{1}{2})^2+(-\tfrac{1}{2})^3+\ldots+(-\tfrac{1}{2})^{2n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-\tfrac{1}{2})^k=\frac{(-\frac{1}{2})^{2n+1}-1}{-\frac{1}{2}-1}=-2\frac{-\frac{1}{2^{2n+1}}-1}{3}=\frac{\frac{2}{2^{2n+1}}+2}{3}=\frac{2^{-2n}+2}{3}$$

**Svar:** $\dfrac{2^{-2n}+2}{3}$

e) (s.)

Det saknas en enkel metod för att lösa uppgiften så lösningen är att iterativt summera allt.

$$\sum_{k=2}^{5}\frac{k(-1)^k}{2^k}=\frac{2*(-1)^2}{2^2}+\frac{3*(-1)^3}{2^3}+\frac{4*(-1)^4}{2^4}+\frac{5*(-1)^5}{2^5}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\frac{5}{32}=\frac{16}{32}-\frac{12}{32}+\frac{8}{32}-\frac{5}{32}=\frac{7}{32}$$

**Svar:** $\dfrac{7}{32}$

4.10 (s.)

Skriv om funktionen som en summa och applicera sedan funktionsvärdet 3.

$$p(x)=2+2x+2x^2+\ldots+2x^7=2(1+x+x^2+\ldots+x^7)=$$

$$=2(x^0+x^1+x^2+\ldots+x^7)=2*\sum_{k=0}^{7}x^k$$

$$\Downarrow$$

$$p(3)=2*\sum_{k=0}^{7}3^k=2*\frac{3^8-1}{3-1}=3^8-1=6560$$

**Svar:** 6560

4.11 (s.)

Mängden pengar på Lisas bankkonto kommer öka med $2000 * 1.02^k$ varje år där $k$ är antalet år från start. Efter noll år (starten) är mängden pengar: $2000*1.02^0 = 2000$. Efter ett år har pengarna som sattes in förra året ökat med en faktor av 1.02 och 2000 till har sats in: $2000*1.02^1+2000$. Nästa år har de båda 2000 ökat med en faktor av 1.02 och ytterligare 2000 satts in: $2000*1.02^2+2000*1.02^1+2000$ osv.

Detta kan alltså beskrivas som en geometrisk summa där 2022/2023 är 11 år efter start:

$$\sum_{k=0}^{11} 2000 * 1.02^k = 2000 * \sum_{k=0}^{11} = 2000 * \frac{1.02^{12}-1}{1.02-1} = 2000 * \frac{1.02^{12}-1}{\frac{1}{50}} =$$
$$= 50 * 2000(1.02^{12}-1) = 10^5(1.02^{12}-1) \approx 26800 \text{ kr}$$

**Svar:** 26800 kr

4.12 (s.)

Sträckan bollen kommer röra sig efter varje studs är $2*0.9^k$ där $k$ är antalet studs sen start (tvåan är där eftersom det både är upp och ner). Undantaget är den metern bollen faller i början. Då sträckan som sökes är fram till studs tio kommer slutvärdet vara nio.

$$1 + \sum_{k=1}^{9} 2 * 0.9^k = 1 + 2(0.9^1 + 0.9^2 + \ldots + 0.9^9) =$$
$$= 1 + 2 * 0.9(0.9^0 + 0.9^1 + \ldots 0.9^8) = 1 + 1.8 * \sum_{k=0}^{8} 0.9^k =$$
$$= 1 + 1.8\frac{0.9^9-1}{0.9-1} = 1 - 18(0.9^9-1) = 1 + 18(1-0.9^9) \approx 12 \text{ m}$$

**Svar:** 12 m

## Binomialsatsen

4.13 a) (s.)

$$7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$$

**Svar:** 5040

b) (s.)

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!*4!} = 35$$

**Svar:** 35

c) (s.)

$$\binom{1001}{999} = \frac{1001!}{999! * 2!} = 500500$$

**Svar:** 500500

4.14 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + \binom{2}{1}a^1b^1 + b^2 = \\ &= a^2 + \frac{2!}{1! * 1!}ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

**Svar:** $a^2 + 2ab + b^2$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + b^3 = \\ &= a^3 + \frac{3!}{1! * 2!}a^2b + \frac{3!}{2! * 1!}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

**Svar:** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + b^4 = \\ &= a^4 + \frac{4!}{1! * 3!}a^3b + \frac{4!}{2! * 2!}a^2b^2 + \frac{4!}{3! * 1!}ab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3\end{aligned}$$

**Svar:** $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3$

d) (s.)

Se sidorna 58-59 om du är osäker på vad Pascals triangel är.

**Svar:**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\end{array}$$

4.15 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(1+x)^3 = 1^3 + \binom{3}{1}1^2x^1 + \binom{3}{2}1^1x^2 + x^3 =$$
$$= 1 + \frac{3!}{1!*2!}x + \frac{3!}{2!*1!}x^2 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

**Svar:** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(3-2x)^3 = (3+(-2x))^3 = 3^3 + \binom{3}{1}3^2(-2x)^1 + \binom{3}{2}3^1(-2x)^2 + (-2x)^3 =$$
$$= 27 - \frac{3!}{1!*2!}9*2*x + \frac{3!}{2!*1!}3*4*x^2 - 8x^3 = -8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$$

**Svar:** $-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(1+x)^4 = 1^4 + \binom{4}{1}1^3x^1 + \binom{4}{2}1^2x^2 + \binom{4}{3}1^1x^3 + x^4 =$$
$$= 1 + \frac{4!}{1!*3!}x + \frac{4!}{2!*2!}x^2 + \frac{4!}{3!*1!}x^3 + x^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

**Svar:** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

4.16 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{15}{13}x^{13}1^2 = \frac{15!}{13!*2!}x^{13} = 105x^{13}$$

**Svar:** 105

4.17 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{8}{5}3^5(-x)^3 = -\frac{8!}{5!*3!}243x^3 = -13608x^3$$

**Svar:** $-13608$

4.18 (s.)

$x$-termerna ska ta ut varandra för att termen ska bli konstant.

$$\binom{15}{k}(x^2)^{15-k}(\tfrac{1}{x^3})^k = \binom{15}{k}x^{2(15-k)}x^{-3k}$$

För att $x$-termerna ska ta ut varandra:

$$2(15-k)-3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Sätt in 6 istället för $k$:

$$\binom{15}{6}x^{2(15-6)}x^{-3*6} = \frac{15!}{6!*9!}x^{18}x^{-18} = 5005$$

**Svar:** 5005

4.19 (s.)

Vi börjar med att testa högstagradstermerna i båda potenserna.

Första: $(x^3)^{16} = x^{48}$
Andra: $(x^4)^{12} = x^{48}$

De båda kommer alltså ta ut varandra. Vi får då en nivå lägre.

Första: $\binom{16}{1}(x^3)^{15}(-2)^1 = -\frac{16!}{1!*15!}x^{45}*2 = -32x^{45}$
Andra: $\binom{12}{1}(x^4)^{11}3^1 = \frac{12!}{1!*11!}x^{44}*3 = 36x^{44}$

**Svar:** $-32x^{45}$

4.20 (s.)

Använd binomialsatsen med $a = b = 1$.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 1^n =$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \text{ V.S.V.}$$

Detta innebär att summan av talen i den $(n-1)$:a raden i Pascals triangel är $2^n$, t.ex. är $1+3+3+1 = 2^3$.

4.21 (s.)

Använd binomialsatsen baklänges.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} =$$
$$= \binom{n}{0}1^n(-1)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0(-1)^n =$$
$$= (1-1)^n = 0 \text{ V.S.V}$$

4.22 (s.)

$x^8$ termen ges av:

$$\binom{10}{8}a^2(2x)^8 = \frac{10!}{8! * 2!}a^2 2^8 x^8 = (45 * 256 * a^2)x^8$$

$$45 * 256 * a^2 = 180 \Leftrightarrow a^2 = \frac{180}{45 * 256} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{8}$$

**Svar:** $a = \pm\frac{1}{8}$

## Talföljder och induktion

4.23 a) (s.)

$a_0 = 1$
$a_1 = 2a_0 = 2 * 1 = 2$
$a_2 = 2a_1 = 2 * 2 = 4$
$a_3 = 2a_2 = 2 * 4 = 8$

**Svar:** $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$

b) (s.)

$a_0 = 1$
$a_1 = a_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$
$a_3 = a_2^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$

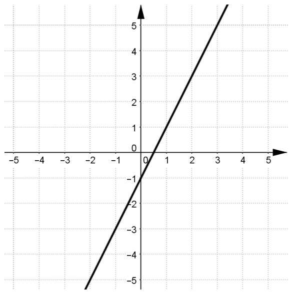
**Svar:** $a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0$

# Kapitel 5: Analytisk Geometri

## Räta linjen

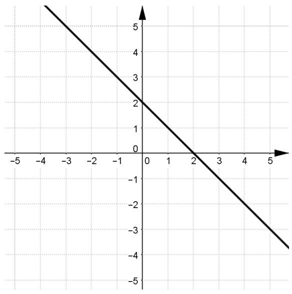
5.1 a) (s.)

$y = 2x - 1 \rightarrow$ Lutning: 2, korsar y-axeln vid: $-1$



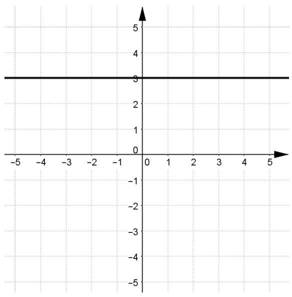
b) (s.)

$y = 2 - x \Leftrightarrow y = -1x + 2 \rightarrow$ Lutning: $-1$, korsar y-axeln vid: 2



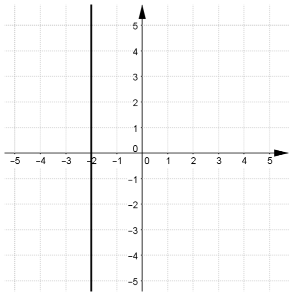
c) (s.)

$y = 3 \Leftrightarrow y = 0x + 3 \rightarrow$ Lutning: 0, korsar y-axeln vid: 3. Kan också ses som att $y$ är konstant tre oberoende av vad $x$ är.



d) (s.)

$x = -2$ kan inte beskrivas med räta linjens ekvation eftersom ekvationen inte är en funktion (saknar värde på $y$ för alla $x$ utom $-2$ och har oändligt många lösningar på $x = -2$). Se det som att för oberoende av vad $y$ är är $x = -2$.



5.2 a) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna $m$.

Enpunktsformeln:

$$y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Räta linjens ekvation:

$$2 = -1 * 0 + m \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow y = -x + 2$$

**Svar:** $y = -x + 2$

b) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna $m$.

Enpunktsformeln:

$$y - 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 6 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

Räta linjens ekvation:

$$1 = 3 * 2 + m \Leftrightarrow m = -5 \Rightarrow y = 3x - 5$$

**Svar:** $y = 3x - 5$

c) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna $m$.

Enpunktsformeln:

$$y - b = k(x - a)$$

Räta linjens ekvation:

$$b = ka + m \Leftrightarrow m = b - ka$$

$$y = kx - ka + b \Leftrightarrow y = k(x - a) + b \Leftrightarrow y - b = k(x - a)$$

**Svar:** $y - b = k(x - a)$

d) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$(\overbrace{a}^{x_1}, \overbrace{b}^{y_1}) \quad (\overbrace{a+1}^{x_2}, \overbrace{b+1}^{y_2})$$

$$y - b = \frac{\cancel{b} + 1 - \cancel{b}}{\cancel{a} + 1 - \cancel{a}}(x - a) \Leftrightarrow y = 1(x - a) + b \Leftrightarrow y = x + b - a$$

**Svar:** $y = x + b - a$

5.3 (s.)

Använd tvåpunktsformeln med $(-2, 5)$ och $(0, -3)$ som punkter ($m$-värdet ger den andra punkten).

$$y - 5 = \frac{-3 - 5}{0 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = -4(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = -4x - 3$$

**Svar:** $a = -4$

5.4 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 1 = \frac{-2 - 1}{1 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{3}(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$$

**Svar:** $y = -x - 1$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 2 = \frac{2 - 2}{2 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y = 0(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2$$

**Svar:** $y = 2$

c) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 0 = \underbrace{\frac{2-0}{1-1}}_{\text{ej def.}}(x-1)$$

Att tvåpunktsformeln inte är definierad (nolldivision) innebär att lutningen på linjen är ”oändlig” vilket i sin tur innebär att det är en vertikal linje. Eftersom båda punkterna ligger på $x = 1$ måste det vara ekvationen.

**Svar:** $x = 1$

5.5 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y-2 = \frac{3-2}{2+1}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+1)+2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{6}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

Allmän form:

$$\frac{1}{3}x - y + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 7 = 0$$

**Svar:** $k$-form: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ och allmän form: $x - 3y + 7 = 0$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 3 = \frac{3-3}{-7-2}(x-2) \Leftrightarrow y = 0(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

Allmän form:

$$y - 3 = 0$$

**Svar:** $k$-form: $y = 3$ och allmän form: $y - 3 = 0$

5.6 a) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-6, 5)$ och $(-2, 2)$.

$$y - 5 = \frac{2-5}{-2+6}(x+6) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x - \frac{9}{2} + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3 * 10 + 4 * (-8) - 2 = 30 - 32 - 2 = -4 \neq 0$$

Punkten ligger alltså inte på linjen.

**Svar:** Nej.

b) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-7, -5)$ och $(3, 1)$.

$$y+5=\frac{1+5}{3+7}(x+7) \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}(x+7)-5 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}-\frac{25}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x-y-\frac{4}{5}=0 \Leftrightarrow 3x-5y-4=0$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3*8-5*4-4=24-20-4=0$$

Punkten ligger alltså på linjen.

**Svar:** Ja

5.7 a) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-3x+11 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$2x+1=-3x+11 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2*2+1=5$$

**Svar:** punkten $(2, 5)$

b) (s.)

Lös ekvationssystemet ($y$-värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=5 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$5=2x-3 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$$

**Svar:** punkten $(4, 5)$

c) (s.)

Lös ekvationssystemet ($x$-värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$y = 3 * 4 - 2 \Leftrightarrow y = 12 - 2 \Leftrightarrow y = 10$$

**Svar:** punkten $(4, 10)$

d) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 5x + 6 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$\cancel{5x} - 4 = \cancel{5x} + 6 \Leftrightarrow -4 \neq 6 \Rightarrow \text{Saknar lösning}$$

**Svar:** Skärning saknas

## Parabeln

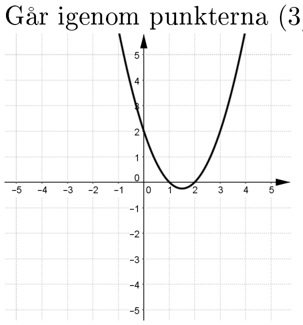
5.8 a) (s.)

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

**Svar:** $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b) (s.)

Går igenom punkterna $(3/2; -1/4)$ och $(0, 2)$.



c) (s.)

$y$ är som minst när $(x - \frac{3}{2})^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på $y$ är alltså $-\frac{1}{4}$.

**Svar:** $-\frac{1}{4}$

d) (s.)

Använd pq-formeln.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

**Svar:** $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

e) (s.)

Faktorisera polynomet och använd sedan en teckentabell.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geq 0$$

| $x$ | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-2)(x-1)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

När $x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

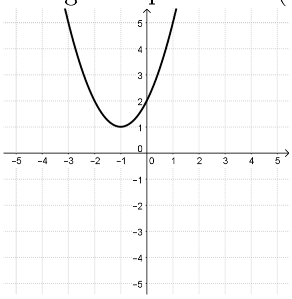
**Svar:** $x \leq 0$ eller $x \geq 2$

5.9 a) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 - 1^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(1; 1)$ och $(0, 2)$.



Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på $y$ 1.

Lös ekvationen:

$$x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1\pm\sqrt{1^2 - 2} = -1\pm\sqrt{-1} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$0^2 + 2 * 0 + 2 = 2$$

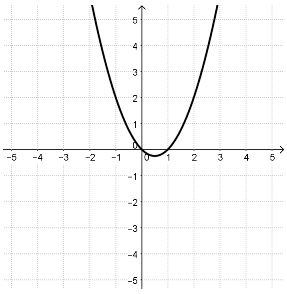
Olikheten är alltså sann för alla värden.

b) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ och $(0,0)$.



Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på $y$ $-\frac{1}{4}$.

Lös ekvationen:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

Lös olikheten:

$$x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$$

| $x$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x(x-1)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

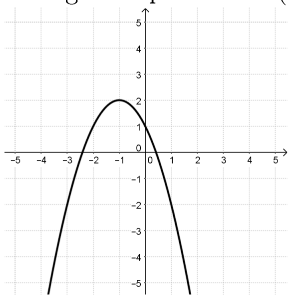
När $x \leq 0$ eller $x \geq 1$.

c) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$1-2x-x^2 = -(x^2+2x)+1 = -((x+1)^2-1^2)+1 = -(x+1)^2+1+1 = 2-(x+1)^2$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(-1,2)$ och $(0,1)$.




Minsta värdet:
Saknar mista värde eftersom när $x$ ökar kommer $y$ bli mindre (pga. negationen).

Lös ekvationen:

$$1-2x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{1^2+1}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$x=-1\pm\sqrt{2}$$

Lös olikheten:

$$1-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2+2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \geq 0$$

| $x$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1+\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1-\sqrt{2}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1+\sqrt{2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $-(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

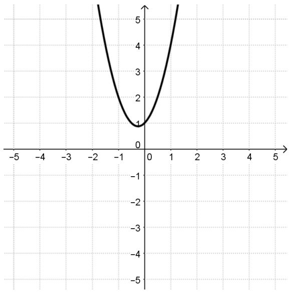
När $-1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}$.

d) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$2x^2+x+1 = 2(x^2+\tfrac{1}{2}x)+1 = 2((x+\tfrac{1}{4})^2-(\tfrac{1}{4})^2)+1 = 2(x+\tfrac{1}{4})^2-\tfrac{1}{8}+1 = 2(x+\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{8}$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$ och $(0, 1)$.




Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på $y$ $\frac{7}{8}$.

Lös ekvationen:

$$2x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pm\sqrt{(\frac{1}{4})^2-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\pm\sqrt{-\frac{7}{16}} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$2x^2+x+1 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$2*0^2+0+1 = 1$$

Olikheten är alltså sann för alla värden.

5.10 (s.)

Kvadratkomplettera:

$$y - x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow y = x^2+4x = (x+2)^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4$$

$y$ är som minst när $(x+2)^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på $y$ är alltså $-4$.

**Svar:** 4

5.11 (s.)

Uppgiften ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 6 = (-1)^2 + a * (-1) + b \\ 3 = 2^2 + a * 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 - a + b \\ 3 = 4 + 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 5 \\ b = -2a - 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$a + 5 = -2a - 1 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -2 + 5 = 3$$

**Svar:** $a = -2$ och $b = 3$

## Absolutbelopp

5.12 a) (s.)

$$|3| = 3$$

**Svar:** 3

b) (s.)

$$|-3| = 3$$

**Svar:** 3

c) (s.)

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

**Svar:** 3

d) (s.)

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

**Svar:** 3

e) (s.)

$$\sqrt{x^2} = x$$

**Svar:** $x$

f) (s.)

$$\sqrt{(-x)^2} = x$$

**Svar:** $x$

5.13 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 4 \\ x < 0: &\quad -x = 4 \Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 4$ eller $x = -4$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Andra är en falsk lösning eftersom lösningen inte ligger inom intervallet som $x$ får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 0 \\ x < 0: &\quad -x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 0$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Båda är en falsk lösning eftersom lösningarna inte ligger inom intervallet som $x$ får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = -1 \not\geq 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < 0: &\quad -x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

**Svar:** ekvationen saknar lösning

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x-2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x-2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\quad x-2 = 4 \Leftrightarrow x = 6 \\ x < 2: &\quad -(x-2) = 4 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 6$ eller $x = -2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{då } x+4 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -4 \\ -(x+4) & \text{då } x+4 < 0 \text{ dvs. } x < -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -4: &\quad x+4 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \\ x < -4: &\quad -(x+4) = 3 \Leftrightarrow x = -7 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = -1$ eller $x = -7$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } 2x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{då } 2x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -\tfrac{1}{2}: &\quad 2x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ x < -\tfrac{1}{2}: &\quad -(2x+1) = 1 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 0$ eller $x = -1$

g) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{då } 1-x \geq 0 \text{ dvs. } x \leq 1 \\ -(1-x) & \text{då } 1-x < 0 \text{ dvs. } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ x > 1: &\quad -(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 0$ eller $x = 2$

5.14 a) (s.)

Definitionen av kvadratroten:

$$\text{Om } a^2 = b \text{ och } a \geq 0 \text{ då är } a = \sqrt{b}$$

Vilket innebär att $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$.

Använd nu faktumet att $|a|$ alltid är positivt och regeln $a^2 = |a|^2$.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \text{ V.S.V}$$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp och att $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \\ x > 1: &\quad -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 4$ eller $x = -2$

5.15 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 3 \\ x < 0: &\quad -x = 3 \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 3$ eller $x = -3$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x < 3 \\ x < 0: &\quad -x < 3 \Leftrightarrow x > -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < 0 \text{ eller } 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

**Svar:** $-3 < x < 3$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \geq 3 \\ x < 0: &\quad -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 3 \text{ eller } x \leq -3$$

**Svar:** $x \geq 3$ eller $x \leq -3$

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \\ x > 1: &\quad -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 4$ eller $x = -2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 < 3 \Leftrightarrow x < 4 \\ x < 1: &\quad -(x-1) < 3 \Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-2 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

**Svar:** $-2 < x < 4$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ x < 1: &\quad -(x-1) \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 4 \text{ eller } x \leq -2$$

**Svar:** $x \geq 4$ eller $x \leq -2$

5.16 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

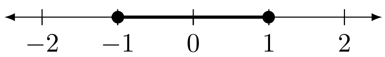
$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \leq 1 \\ x < 0: &\quad -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-1 \leq x < 0 \text{ eller } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$-1 \leq x \leq 1$




b) (s.)

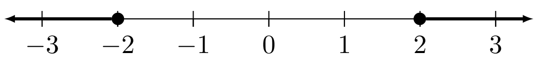
Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \geq 2 \\ x < 0: &\quad -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$x \leq -2$ eller $x \geq 2$



c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

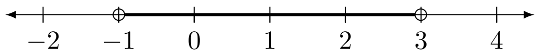
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 < 2 \Leftrightarrow x < 3 \\ x < 1: &\quad -(x-1) < 2 \Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-1 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$-1 < x < 3$




d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

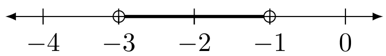
$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{då } x+2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{då } x+2 < 0 \text{ dvs. } x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -2: &\quad x+2 < 1 \Leftrightarrow x < -1 \\ x < -2: &\quad -(x+2) < 1 \Leftrightarrow x > -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < -2 \text{ eller } -2 \leq x < -1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

$-3 < x < -1$




**Svar:**

5.17 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{då } x-3 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{då } x-3 < 0 \text{ dvs. } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 3: &\quad x-3 = 1-2x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \ngeq 3 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < 3: &\quad -(x-3) = 1-2x \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = -2$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x-2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x-2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\quad x-2 = x+1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ingen lösning} \\ x < 2: &\quad -(x-2) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Svar:** $x = \frac{1}{2}$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } 2x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{då } 2x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -\frac{1}{2}: &\quad 2x+1 = x-1 \Leftrightarrow x = -2 \ngeq -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < -\frac{1}{2}: &\quad -(2x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = 0 \nless -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

**Svar:** Saknar lösning

5.18 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x - x = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow \text{ingen lösning} \\ x < 0: &\quad -x - x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = -1$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \ngeq 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ x < 0: &\quad x^2 + 2(-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \nless 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Svar:** $x = -1$ eller $x = 1$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

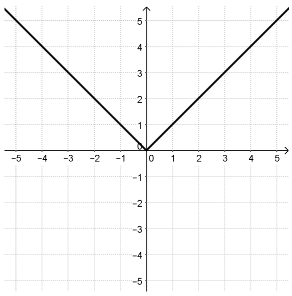
$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -1 \end{cases}$$

$$x \geq -1: \quad x^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x < -1: \quad x^2 + 2(-x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \not< -1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

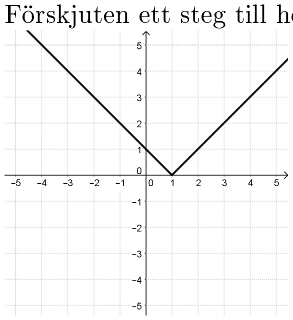
**Svar:** $x = -1$

5.19 a) (s.)



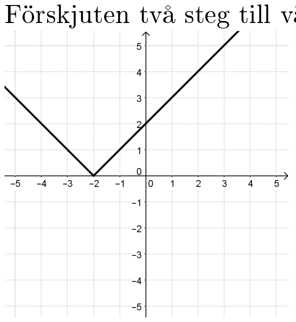
b) (s.)

Förskjuten ett steg till höger.



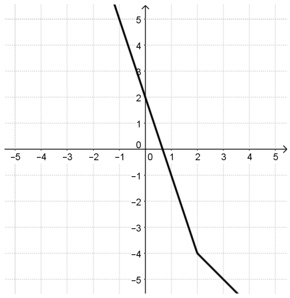
c) (s.)

Förskjuten två steg till vänster.



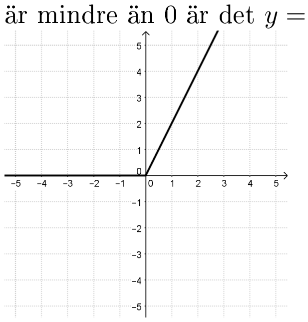
5.20 a) (s.)

När $x$ är större än 2 är det $y = x - 2 - 2x = -x - 2$ som gäller och när $x$ är mindre än 2 är det $y = -(x-2) - 2x = -3x + 2$.



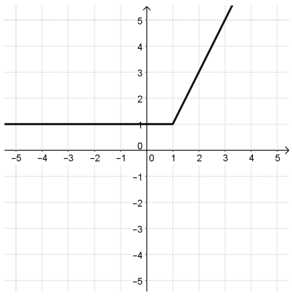
b) (s.)

När $x$ är större än 0 så är det $y = x + x = 2x$ som gäller och när $x$ är mindre än 0 är det $y = -x + x = 0$.



c) (s.)

När $x$ är större än 1 så är det $y = x - 1 + x = 2x - 1$ som gäller och när $x$ är mindre än 1 är det $y = -(x-1) + x = 1$.



5.21 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| + |x-1| = \begin{cases} x+1+x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ x+1-(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)-(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1+x-1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1-(x-1) = 4 \Leftrightarrow 2 \neq 4 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)-(x-1) = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

**Svar:** $x = 2$ eller $x = -2$

5.22 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| - |x-1| = \begin{cases} x+1-(x-1) & \text{då } x \geq 1 \\ x+1+(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)+(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1-(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2 \neq 1 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1+(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)+(x-1) = 1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \end{aligned}$$

**Svar:** $x = \frac{1}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1-(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1+(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \not< 1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)+(x-1) = 3 \Leftrightarrow -2 \neq 3 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \end{aligned}$$

**Svar:** saknar lösning

c) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

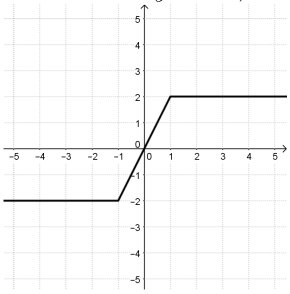
$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1-(x-1) = -2 \Leftrightarrow 2 \neq -2 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1+(x-1) = -2 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \\ x < -1: &\ \ -(x+1)+(x-1) = -2 \Leftrightarrow -2 = -2 \Rightarrow \text{ alla lösningar} \end{aligned}$$

$$x < -1 \text{ eller } x = -1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

**Svar:** $x \leq -1$

d) (s.)

Under $-2$ är $y = -2$, mellan $-2$ och 2 är $y = 2x$ och efter 2 är $y = 2$.



5.23 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x-1| + |x-2| = \begin{cases} x-1+x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ x-1-(x-2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x-1)-(x-2) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\ \ x-1+x-2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \\ 1 \leq x < 2: &\ \ x-1-(x-2) = 2 \Leftrightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ x < 1: &\ \ -(x-1)-(x-2) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Svar:** $x = \frac{1}{2}$ eller $x = \frac{5}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$
\begin{aligned}
x \geq 2: &\quad x-1+x-2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7}{4} \ngeq 2 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\
1 \leq x < 2: &\quad x-1-(x-2)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\
x < 1: &\quad -(x-1)-(x-2)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \nless 1 \Rightarrow \text{falsk lösning}
\end{aligned}
$$

**Svar:** saknar lösning

5.24 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$
|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x < 2 \end{cases}
$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$
|x-1|+2|x-2| = \begin{cases} x-1+2(x-2) & \text{då } x \geq 2 \\ x-1-2(x-2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x-1)-2(x-2) & \text{då } x < 1 \end{cases}
$$

För att lösa uppgiften behöver vi veta värdemängden för varje uttryck och eftersom de är linjär kommer det endast finnas ett värde på $x$ för varje värde på $a$ och ändarna kommer alltid vara minsta respektive största värdet.

Värdemängden för första uttrycket ges av $x = 2 \Rightarrow a = 1$ och $x \to \infty \Rightarrow a \to \infty$.

Värdemängden för andra uttrycket ges av $x = 1 \Rightarrow a = 2$ och $x \to 2 \Rightarrow a \to 1$.

Värdemängden för tredje uttrycket ges av $x \to -\infty \Rightarrow a \to \infty$ och $x \to 1 \Rightarrow a \to 2$.

För alla $a$ större än 1 kommer det alltså finnas två lösningar.

**Svar:** $a > 1$

5.25 (s.)

Utnyttja faktumen att $\sqrt{a^2} = |a|$, att $|a| = -a$ eftersom $a < 0$ och att $a^2 + b^2 >= 0$ oberoende av värden på $a$ och $b$.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{a^6+2a^4b^2+a^2b^4} = \sqrt{a^2}\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4} = |a|\sqrt{(a^2+b^2)^2} = \\
&= -a|a^2+b^2| = -a(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

**Svar:** $-a(a^2+b^2)$

5.26 (s.)

Avståndet mellan punkterna i $x$-led kan skrivas som $|x_2 - x_1|$ och i $y$-led som $|y_2 - y_1|$. Eftersom $x$- och $y$-axeln är vinkelräta mot varandra kan en vinkelrät triangel ritas upp där avståndet mellan punkterna är hypotenusan och avståndet i $x$- respektive $y$-led är kateterna. Pyth. sats säger då att:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Leftrightarrow d = \overset{+}{_{(-)}}\sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ V.S.V.}$$

## Cirkeln, ellipsen och hyperbeln

5.27 (s.)

**Svar:**

5.28 (s.)

**Svar:**

5.29 a) (s.)

**Svar:**

b) (s.)

**Svar:**

5.30 (s.)

**Svar:**

5.31 a) (s.)

**Svar:**

b) (s.)

**Svar:**

c) (s.)

**Svar:**

d) (s.)

**Svar:**

5.32 (s.)

**Svar:**

5.33 (s.)

**Svar:**