

Endimensionell analys

HT-2015

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2015-09-23

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Om jag skriver "alla tal" syftar jag på alla reella tal.

Talsystem

1.1 a) (s. 1)

De naturliga talen (\mathbb{N}) innefattar alla heltal som är noll eller större.
 $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{3}{0.1} = 30$, $\frac{0}{5} = 0$.

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, \frac{3}{0.1}, \frac{0}{5}$$

b) (s. 1)

De hela talen (\mathbb{Z}) inkluderar de naturliga talen (\mathbb{N}) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15$.

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}$$

c) (s. 2)

Rationella tal (\mathbb{Q}) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen (\mathbb{Z})). $3 = \frac{3}{1}$ osv...

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}$$

d) (s. 2)

Reella tal (\mathbb{R}) är alla "vanliga" tal (inte de komplexa talen (\mathbb{C})).

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \sqrt{2}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}, \pi$$

1.2 (saknar sida)

Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal i plus ett rationellt tal r_1 blir det rationella talet r_2 . $i + r_1 = r_2 \Rightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

Svar: Nej, båda blir irrationella.

Mängder och intervall

1.3 (s. 4)

$M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.

M_2 är alla tal större än eller lika med 0.

M_3 är alla tal större än eller lika med 1.

$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom M_4 är alla tal ingår M_1 , M_2 , M_3 i mängden. M_3 är även en delmängd av M_2 .

Svar:

$$M_1 \subseteq M_4, \quad M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$$

Implikationer och ekvivalens

1.4 (s. 5-6)

Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att A och C är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än -4 i C implicerar både A och C B .

Svar:

$$A \Leftrightarrow C, \quad C \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow B$$

1.5 a) (s. 5-6)

Om A är sant är B sant men om B är sant behöver inte A vara sant. Detta eftersom $a = 1$, $b = -1$ är sant för B men inte för A . A implicerar alltså B . C går att förenkla till $a = b$ genom att dela på b det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0$, $a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan A implicerar C . C och B är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C$$

b) (s. 5-6)

Eftersom specialfallen som nämns i a) båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är A , B och C ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i D får man A vilket medför att även D är ekvivalent med alla andra utsagor.

Svar: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 (s. 5-6)

A ger sant för alla tal större än noll. B ger sant för alla tal utom noll. C ger sant för alla tal utom noll. D ger sant för alla tal större än noll.

A och D är alltså ekvivalenta, lika så B och C . $A \subseteq B$ medför då att A och D implicerar både B och C .

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D, \quad B \Leftrightarrow C$$

1.7 (s. 5-6)

$$A: x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

$$B: |x - 2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

$$C: x \geq 1$$

$$D: \ln x + \ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1$$

D ingår i alla andra vilket medför att D implicerar alla andra. Eftersom svaren i både A och B är större än eller lika med 1 implicerar A och B C .

Svar:

$$D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.8 (s. 5-6)

$$A: x \geq 0$$

$$B: \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$C: e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D: |x - 2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1, \quad x - 2 > -1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Alla implicerar C eftersom C är alla tal. D är en delmängd av B som i sin tur är en delmängd av A . D implicerar alltså A och B och B implicerar A .

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.9 (s. 5-6)

$$A : |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$B : e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$C : \cos x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D : \ln(1+x^2) > 0 \Leftrightarrow 1+x^2 > e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1-1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), A och B är alltså inte samma mängd. C implicerar inte D eftersom C innehåller 0 vilket D inte gör. A och D är däremot ekvivalenta och implicerar C .

Svar:

$$B \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D$$

1.10 (s. 5-6)

Låt x representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq x \leq 10$, $x \in \mathbb{N}$).

$$A : x = 5$$

$$B : x \leq 4$$

$$C : x \geq 3$$

$$D : x \geq 5$$

$$E : x \leq 8$$

A är alltså en delmängd av C , D och E . B är en delmängd av E och D är en delmängd av C .

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow D, \quad A \Rightarrow E, \quad B \Rightarrow E, \quad D \Rightarrow C$$

1.11 (s. 5-6)

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallelogram och en parallelogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallelogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow C, \quad E \Rightarrow A, \quad E \Rightarrow C, \quad E \Rightarrow B, \quad E \Rightarrow D$$

Kapitel 2: Algebra

Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} + 6x + 9) = -6x - 18$$

eller

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x}-3) - (\cancel{x}+3)) = -6(x+3) = -6x - 18$$

Svar: $-6x - 18$

b) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3) - (x-3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} - 6x + 9) = 6x - 18$$

eller

$$(x+3)(x-3) - (x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3) - (\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x - 18$$

Svar: $6x - 18$

c) (s. 10-11)

$$(3x+5)^2 - (3x-5)^2 = \cancel{9x^2} + 30x + \cancel{25} - (\cancel{9x^2} - 30x + \cancel{25}) = 60x$$

Svar: $60x$

2.2 (saknar sida)

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Svar: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 (s. 11)

Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b} \\(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \\a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \quad VSB.\end{aligned}$$

2.4 (s. 12)

faktorisera och förenkla:

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} \\ \frac{4}{9} &= \frac{2 * 2}{3 * 3} = \frac{4}{9} \\ \frac{4}{14} &= \frac{\cancel{2} * 2}{\cancel{2} * 7} = \frac{2}{7} \\ \frac{48}{168} &= \frac{2 * \cancel{2} * \cancel{2} * \cancel{2} * 3}{\cancel{2} * \cancel{2} * \cancel{2} * 3 * 7} = \frac{2}{7} \\ \frac{24}{84} &= \frac{2 * \cancel{2} * \cancel{2} * 3}{\cancel{2} * \cancel{2} * 3 * 7} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

multiplicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

Svar:

$$\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{48}{168}, \frac{24}{84}$$

2.5 a) (s. 12-14)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14} \right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar:

$$-\frac{10}{7}$$

b) (s. 12-14)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Svar:

$$-\frac{1}{4}$$

2.6 a) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72} &= \frac{1}{5 * 3 * 2 * 2} + \frac{1}{9 * 3 * 2 * 2} - \frac{1}{6 * 3 * 2 * 2} = \\ &= \frac{1 * 9 * 6}{5 * 12 * 9 * 6} + \frac{1 * 5 * 6}{9 * 12 * 5 * 6} - \frac{1 * 9 * 5}{6 * 12 * 9 * 5} = \\ &= \frac{54}{3240} + \frac{30}{3240} - \frac{45}{3240} = \frac{39}{3240} = \frac{13}{1080}\end{aligned}$$

Svar:

$$\frac{13}{1080}$$

b) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{27}{36} - \frac{30}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{36}$$

Svar:

$$\frac{1}{36}$$

c) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245} = \frac{6}{245} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} = \frac{89}{2205} - \frac{1}{25} = \frac{445}{11025} - \frac{441}{11025} = \frac{4}{11025}$$

Svar:

$$\frac{4}{11025}$$

2.7 a) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{\cancel{a} * 4}{2 * \cancel{a}} = \frac{4}{2} = 2$$

Svar: 2

b) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a * a}{2 * 4} = \frac{a^2}{8}$$

Svar:

$$\frac{a^2}{8}$$

c) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\cancel{14}a^2(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a(\cancel{a+2})}{\cancel{a+2}} = 12a$$

Svar: $12a$

d) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a+3)^{-2}$$

Svar: $(a+3)^{-2}$ eller $\frac{1}{(a+3)^2}$

2.8 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{5x} - \frac{x}{15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}} &= \frac{\frac{45-5x^2}{75x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{\cancel{3x}(45-5x^2)}{\cancel{75x}^{25}(3-x)} = \frac{45-5x^2}{75-25x} \\ &= \frac{\cancel{5}(9-x^2)}{\cancel{5}(15-5x)} = \frac{9-x^2}{15-5x} = \frac{(3+x)(\cancel{3-x})}{5(\cancel{3-x})} = \frac{3+x}{5} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{3+x}{5}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop $1 + \frac{1}{x^2}$. Utnyttja sedan reglerna för division.

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{(\cancel{x^2+1})x^2}{(\cancel{x^2+1})} = x^2$$

Svar: x^2

c) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera ut -1 .

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{(y-x)(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}(x^2-y^2)} = \frac{(y-x)(xy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{(\cancel{y-x})(xy)}{-(\cancel{y-x})(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}$$

Svar: $-\frac{xy}{x+y}$

2.9 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bräken. Utnyttja sedan reglerna för division och den andra kvadreringsregeln bakvänt.

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{yx}}{\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{yx}} = \frac{\cancel{yx}(x+y)(\cancel{x-y})}{\cancel{yx}(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Svar: $\frac{x+y}{x-y}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bräken. Utnyttja sedan reglerna för division och konjugatregeln bakvänt två gånger.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{16x^4}{81} - y^4}{\frac{2x}{3} + y} &= \frac{\frac{16x^4 - 81y^4}{81}}{\frac{2x+3y}{3}} = \frac{\cancel{81}(16x^4 - 81y^4)}{\cancel{81}(2x+3y)} = \frac{(4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2)}{27(2x+3y)} = \\ &= \frac{(4x^2 + 9y^2)(\cancel{2x+3y})(2x-3y)}{\cancel{27(2x+3y)}} = \frac{8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3}{27} = \\ &= \frac{1}{27}(8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dots \frac{(4x^2 + 9y^2)(\cancel{2x+3y})(2x-3y)}{\cancel{27(2x+3y)}} &= \frac{(4x^2 + 9y^2)(2x-3y)}{9 \cdot 3} = \\ &= \frac{4x^2 + 9y^2}{9} * \frac{2x-3y}{3} = \left(\frac{4x^2}{9} + y^2\right)\left(\frac{2x}{3} - y\right) \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{27}(8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3)$ eller $\left(\frac{4x^2}{9} + y^2\right)\left(\frac{2x}{3} - y\right)$

c) (s. 12-14)

Skriv ihop de övre och undre bräken.

$$\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{(x-\cancel{1}+x+\cancel{1})(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})}{(\cancel{x+1}-\cancel{(x-1))}(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

Svar: x

2.10 a) (s. 13-14)

Sätt in i formeln och förläng till minsta gemensamma nämnare.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{13}{12} \Leftrightarrow R = \frac{12}{13}\Omega$$

Svar: $\frac{12}{13}\Omega$

b) (s. 13-14)

Använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{R+5}{5R} \Leftrightarrow 5x = 3R+15 \Leftrightarrow 2R = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{2}\Omega$$

Svar: $\frac{12}{13}\Omega$

2.11 (s. 13-14)

Sätt in i formel och använd räkneregler för division.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{600} &= \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{600+a}{600a} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 60000 + 100a = 600a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 500a = 60000 \Leftrightarrow a = \frac{60000}{500} = 120mm \end{aligned}$$

Svar: 120mm

2.12 (s.)

utnyttja att $1 = 2/2 = 3/3$ osv. och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Svar: $\frac{3}{5}$

Kvadratrötter och potenser

2.13 (s. 16-17)

Förläng med konjugatet för att bli av med roten i nämnaren.

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{6 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5}{4 - 5} = -(6 - \sqrt{5} - 5) = \sqrt{5} - 1$$

Svar: $\sqrt{5} - 1$

2.14 a) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + 2\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 4}{9 - 2} = \frac{7 + 7\sqrt{2}}{7} = 1 + \sqrt{2}$$

Svar: $1 + \sqrt{2}$

b) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{(\sqrt{13} + \sqrt{11})(\sqrt{13} - \sqrt{11})} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{13 - 11} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2}$

c) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \frac{2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = \\ &= \frac{2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{x+1 - (x-1)} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{\cancel{2}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

2.15 a) (s. 17)

Faktorisera ena roten för att få samma rot i båda termerna.

$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}(2 - 1) = \sqrt{3}$$

Svar: $\sqrt{3}$

b) (s. 17)

faktorisera täljaren.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{x}\sqrt{6}\sqrt{7}}{\cancel{x}\sqrt{6}} = \sqrt{7}$$

eller utnyttja reglerna för division med rötter.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$$

Svar: $\sqrt{7}$

c) (s. 17)

Faktorisera.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3} * \sqrt{3} * \sqrt{4} = 3 * 2 = 6$$

eller utnyttja reglerna för multiplikation med rötter.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3 * 12} = \sqrt{36} = 6$$

Svar: 6

d) (s. 17)

Faktorisera termerna i täljaren och skriv ihop.

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{5} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

e) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{3^2 + 4^2} - 4 - 3 = \sqrt{25} - 7 = 5 - 7 = -2$$

Svar: -2

f) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Svar: 13

2.16 a) (s. 17)

Faktorisera rötterna så alla termerna får $\sqrt{2}$ gemensamt.

$$\frac{\sqrt{168} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} + \sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(9+7)}{\cancel{\sqrt{2}}(5+1)} = \frac{9+7}{5+1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Svar: $\frac{8}{3}$

b) (s. 17)

Kvadrera under "roten ur"-tecknet först (minustecknet försvinner).

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

Svar: 1

c) (s. 17)

Skriv först ihop termerna utnyttja sedan reglerna för multiplikation av rötter.

$$\left(\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{36} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Eller så används den andra kvadreringsregeln.

$$\left(\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12 - 2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 2 \cdot \sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 4 + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = \frac{24+1}{3} = \frac{25}{3}$$

Svar: $\frac{25}{3}$

d) (s. 17)

Använd konjugatregeln och sen kvadreringsregeln.

$$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y}) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y) = x+2\sqrt{xy}+y-x-y = 2\sqrt{xy}$$

Svar: $2\sqrt{xy}$

2.17 (s. 17)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{9*2*4*3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{2}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{108}}{3} &= \frac{\sqrt{9*4*3}}{3} = \frac{\cancel{3}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{12} &= \sqrt{4*3} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Svar: Möjligt att någon får poängavdrag på grund av att hen inte förenklat, alla är dock samma tal.

2.18 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$3^4 * 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6$$

Svar: 3^6

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$2^7 * 2^{-3} = 2^{7-3} = 2^4$$

Svar: 2^4

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$4^2 * 4^{-5} * 4 = 4^{2-5+1} = 4^{-2}$$

Svar: 4^{-2}

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

Svar: 3^4

e) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}$$

Svar: 4^{-4}

f) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}$$

Svar: 2^{-12}

2.19 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$3^5 * 10^5 * 3^{-3} * 10^3 = 3^{5-3} * 10^{5+3} = 3^2 * 10^8 = 9 * 10^8$$

Svar: $9 * 10^8$

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$\frac{2^8 * 5^6}{2^6 * 5^5} = 2^{8-6} * 5^{6-5} = 2^2 * 5 = 4 * 5 = 20$$

Svar: 20

c) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig och utnyttja sedan att $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\frac{2^4 * 10^4}{2 * 10^5} = 2^{4-1} * 10^{4-5} = 2^3 * 10^{-1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Svar: $\frac{4}{5}$

2.20 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$b^{-0.2} * b^{1.7} * b^{-2.5} = b^{1.7-2.5-0.2} = b^{-1}$$

Svar: b^{-1}

b) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser.

$$(a^3)^{-0.5} * (a^{-5})^{-0.3} = a^{3*(-0.5)+(-5)*(-0.3)} = a^{-1.5+1.5} = a^0 = 1$$

Svar: 1

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a}{a^{-3.7} * a^{0.5}} = a^{1-(-3.7)-0.5} = a^{4.2}$$

Svar: $a^{4.2}$

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{x * x^{-1.6} * x^{0.2}}{x^{-1.4}} = \frac{x^{1-1.6+0.2}}{x^{-1.4}} = x^{1-1.6+0.2-(-1.4)} = x$$

Svar: x

2.21 a) (s. 18-20)

Faktorisera 6 och använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^2 * 2^4}{6^3} = \frac{3^2 * 2^4}{3^3 * 2^3} = 3^{2-3} * 2^{4-3} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

b) (s. 20-21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen $1/2$ motsvarar "roten ur".

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1^{-1/2}}{4^{-1/2}} = 1 * \sqrt{4} = 2$$

Svar: 2

c) (s. 18-21)

Använd räkneregler för potenser och att tredje roten ur 8 är 2.

$$(\sqrt[3]{64})^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

Svar: 4

d) (s. 19-20)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

Svar: 3

e) (s. 18)

Tänk på parenteser.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

Svar: 256

f) (s. 18)

Tänk på parenteser.

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Svar: 64

2.22 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(\sqrt{5})^{-4} = (5^{1/2})^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Svar: $\frac{1}{25}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Svar: $\frac{1}{27}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen $1/2$ motsvarar "roten ur".

$$16^{1/4} = (16^{1/2})^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

Svar: 2

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(8^{1/2})^{2/3} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = 2$$

Svar: 2

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27^{1/3}}{8^{1/3}}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 3^{-4} * \frac{1}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Svar: $\frac{16}{81}$

2.23 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a^{3.3} * a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$$

Svar: $a^{0.4}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a * a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}$$

Svar: $a^{5/6}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\sqrt{\sqrt[3]{x} * \sqrt[6]{x^{-1}} * (x^2)^{2/3}} = x^{1/3 * 1/2} * x^{-1 * 1/6} * x^{2 * 2/3} = x^{1/6} * x^{-1/6} * x^{8/6} = x^{4/3}$$

Svar: $x^{4/3}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}} = \frac{(a^3a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{a^{7/8}}{a^{-1/8}} = a^{8/8} = a$$

Svar: a

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x^2y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{x^{1/2}y^{5/8}}{x^{1/2}y^{1/2}} = y^{5/8-4/8} = y^{1/8}$$

Svar: $y^{1/8}$

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(ab\frac{a^{3/4}}{b^{3/16}}\right)^2 = a^2b^2\frac{a^{6/4}}{b^{6/16}} = a^{8/4+6/4}b^{32/16-6/16} = a^{7/2}b^{13/8}$$

Svar: $a^{7/2}b^{13/8}$

2.24 (s.)

Använd räkneregler för potenser.

$$(4^x)^5 = \frac{(2^6 * 5^5)^3}{(2^4 * 5^2)^4} * \frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{18} * 5^{15}}{2^{16} * 5^8} * \frac{2^{18}}{5^7} = 2^2 * \cancel{5^7} * \frac{2^{18}}{\cancel{5^7}} = 2^{20}$$

$$(4^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow ((2^2)^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{10x} = 2^{20} \Leftrightarrow x = 2$$

Svar: $x = 2$

Polynom och rationella uttryck

2.25 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

c) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

e) (s. 11)

Faktorisera.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

f) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

g) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)$$

h) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = b(a + b)^2$$

i) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a - b)^2$$

2.26 a) (s. 11)

Faktorisera.

$$x(x + 2) - 4(x + 2) = (x - 4)(x + 2)$$

b) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$x^2(x^2 - 9) + x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9) = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

c) (s. 11)

Använd konjugatregeln två gånger.

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera.

$$(a+b)(a-b)+a^2-ab = (a+b)(a-b)+a(a-b) = (a+b+a)(a-b) = (2a+b)(a-b)$$

e) (s. 11)

Skriv om 4 som 2^2 och använd konjugatregeln.

$$(a-b)^2 - 4 = (a-b)^2 - 2^2 = (a-b+2)(a-b-2)$$

f) (s. 11)

Använd andra kvadreringsregeln följt av konjugatregeln.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = ((a+b)(a-b))^2 = (a+b)^2(a-b)^2$$

2.27 a) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2 - 7x + xy - 7y = (x^2 + xy) - (7x + 7y) = x(x+y) - 7(x+y) = (x-7)(x+y)$$

b) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$a^6 - a^4 + a^2 - 1 = a^4(a^2 - 1) + (a^2 - 1) = (a^4 + 1)(a^2 - 1) = (a^4 + 1)(a+1)(a-1)$$

c) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2y + 2x^2 - y - 2 = x^2(y+2) - (y+2) = (x^2-1)(y+2) = (x+1)(x-1)(y+2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera, använd andra kvadreringsregeln och sist konjugatregeln.

$$7x^5 + 7xy^4 - 14x^3y^2 = 7x(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) = 7x(x^2 - y^2)^2 = 7x(x+y)^2(x-y)^2$$

e) (s. 11)

Använd konjugatregeln.

$$a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

f) (s. 11)

Använd först konjugatregeln och sen båda kvadreringsreglerna.

$$(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy) = (x + y)^2(x - y)^2$$

g) (s. 11)

Använd konjugatregeln följt av båda kvadreringsreglerna och sen konjugatregeln igen.

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2 &= (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) = \\ &= ((x + y)^2 - z^2)((x - y)^2 - z^2) = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)\end{aligned}$$

2.28 a) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 6x + 7 = (x + 3)^2 - 9 + 7 = (x + 3)^2 - 2$$

b) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 - 7x + 13 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 13 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

c) (s. 23)

Perfekt kvadrat.

$$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2 - 81 + 81 = (x + 9)^2$$

d) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

e) (saknar sida)

Eftersom uttrycket saknar x -term går det inte att kvadratkomplettera.

2.29 (s. 23)

b följer av att det kommer vara 2 x -termer i högerledet och c av att de konstanta termerna ska ta ut varandra i högerledet.

$$x^2 + ax = (x + b)^2 + c$$

$$b = \frac{a}{2}$$

$$c = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$\text{Svar: } b = \frac{a}{2}, c = -\frac{a^2}{4}$$

2.30 a) (s. 24-25)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$\frac{4x^2 - 4}{2x + 2} = \frac{\cancel{4}^2(x^2 - 1)}{\cancel{2}(x + 1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}(x - 1)}{\cancel{x+1}} = 2x - 2$$

Svar: $2x - 2$

b) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och andra kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Svar: $\frac{x + 1}{x - 1}$

c) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2 - y^2}{(xy)^2} = \frac{\cancel{y^2 - x^2} + \cancel{x^2 - y^2}}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0$$

Svar: 0

2.31 a) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 6} &= \frac{2}{3(x + 3)} + \frac{x}{(x + 3)(x - 3)} - \frac{1}{2(x - 3)} = \\ &= \frac{4(x - 3) + 6x - 3(x + 3)}{6(x + 3)(x - 3)} = \frac{4x - 12 + 6x - 3x - 9}{6(x + 3)(x - 3)} = \frac{7x - 21}{6(x + 3)(x - 3)} = \\ &= \frac{\cancel{7(x - 3)}}{6(x + 3)\cancel{(x - 3)}} = \frac{7}{6x + 18} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{7}{6x + 18}$

b) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{5}{x - 1} + \frac{8}{x + 1} - \frac{3x + 7}{x^2 - 1} &= \frac{5(x + 1) + 8(x - 1) - (3x + 7)}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{5x + 5 + 8x - 8 - 3x - 7}{x^2 - 1} = \frac{10x - 10}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{10\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \\ &= \frac{10}{x + 1} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{10}{x + 1}$

2.32 a) (s. 24-25)

Använd andra kvadreringsregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{2y}{(x-y)^2} &= \frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2} = \\ &= \frac{3x-y-2x+2y-2y}{(x-y)^2} = \frac{x-y}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{x-y}$

b) (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+4ab+4b^2} + \frac{2b}{a^2-4b^2} &= \frac{a}{(a+2b)^2} + \frac{2b}{(a+2b)(a-2b)} = \\ &= \frac{a(a-2b) + 2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.33 (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+4ab+4b^2} + \frac{2b}{a^2-4b^2} &= \frac{a}{(a+2b)^2} + \frac{2b}{(a+2b)(a-2b)} = \\ &= \frac{a(a-2b) + 2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.34 a) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) : (x^3 + x + 1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) &= (x^3 + x + 1)(x^2 + Ax + B) + Cx^2 + Dx + E = \\ &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + Cx^2 + Dx + E = \\ &= x^5 + Ax^4 + (B + 1)x^3 + (A + C + 1)x^2 + (A + B + D)x + (B + E)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A &= 3 \\ B + 1 &= -2 \\ A + C + 1 &= 0 \\ A + B + D &= 2 \\ B + E &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = -4 \\ D = 2 \\ E = 2 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$

Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

b) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^6 - 1) : (x - 1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^6 - 1) &= (x - 1)(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + F = \\ &= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex - x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - \\ &\quad Dx - E + F = \\ &= x^6 + (A - 1)x^5 + (B - A)x^4 + (C - B)x^3 + (D - C)x^2 + (E - \\ &\quad D)x + (-E + F)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 &= 0 \\ B - A &= 0 \\ C - B &= 0 \\ D - C &= 0 \\ E - D &= 0 \\ F - E &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Kvot: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Rest: ingen

c) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^4 + 2x^3 + 25) &= (x^2 + 4x + 5)(x^2 + Ax + B) + Cx + D = \\ &= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 4x^3 + 4Ax^2 + 4Bx + 5x^2 + 5Ax + 5B + Cx + D = \\ &= x^4 + (A + 4)x^3 + (B + 4A + 5)x^2 + (4B + 5A + C)x + (5B + D)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 4 &= 2 \\ B - 4A + 5 &= 0 \\ 4B + 5A + C &= 0 \\ 5B + D &= 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = -2 \\ D = 10 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$

Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

2.35 a) (s. 11)

Konjugatregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 2$ eller $x - 2$).

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 1$).

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

c) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln bakvänt. (går att lösa med polynomdivision).

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x + A) = x^2 + Ax - x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A - 1 = -3 \Leftrightarrow A = -2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Svar: $(x - 1)(x - 2)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$2 - x - x^2 = (x - 1)(-x + A) = -x^2 + Ax + x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A + 1 = -1 \Leftrightarrow A = -2$$

$$2 - x - x^2 = (x - 1)(-x - 2)$$

Svar: $(x - 1)(-x - 2)$

f) (s. 11)

Faktorisera och använd andra kvadreringsregeln.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$$

2.36 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

b) (saknar sida)

Finns inga reella faktorer.

c) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B = \\ &= x^3 + (A - 1)x^2 + (B - A)x - B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Svar: $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned}x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B = \\&= x^3 + (A + 1)x^2 + (B + A)x + B\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B + A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Svar: $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned}x^4 - 1 &= (x - 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \\&= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C = \\&= x^4 + (A - 1)x^3 + (B - A)x^2 + (C - B)x - C\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x^4 - 1 &= (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2(x + 1) + x + 1) = \\&= (x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)\end{aligned}$$

Svar: $(x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$

f) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -3$ och $x = 0$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned}x^4 + 27x &= x(x^3 + 27) = x(x + 3)(x^2 + Ax + B) = \\&= x(x^3 + Ax^2 + Bx + 3x^2 + 3Ax + 3B) = \\&= x(x^3 + (A + 3)x^2 + (B + 3A)x + 3B)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$A + 3 = 0, \quad B + 3A = 0, \quad 3B = 27 \Leftrightarrow A = -3, \quad B = 9$$

$$x^4 + 27x = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Svar: $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

g) (s. 25-29)

Skriv om x^6 till $(x^3)^2$ och använd konjugatregeln bakvänt. Faktorisera sedan faktorerna var för sig.

$$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$$

Hittar lösningen $x = -2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= (x + 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + 2x^2 + 2Ax + 2B = \\ &= x^3 + (A + 2)x^2 + (B + 2A)x + 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B + 2A = 0 \\ -2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - 2x^2 - 2Ax - 2B = \\ &= x^3 + (A - 2)x^2 + (B - 2A)x - 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$A - 2 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad -2B = -8 \rightarrow A = 2, \quad B = 4$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Slå samman:

$$x^6 - 64 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\textbf{Svar: } (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

2.37 (s. 25-29)

Delar upp problemet i delproblem efter varje faktorisering. Ekvation:

$$p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$$

$$p(1) = 1^5 - 10 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \\ &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = \\ &= x^5 + (A - 1)x^4 + (B - A)x^3 + (C - B)x^2 + (D - C)x - D \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = -10 \\ D - C = 15 \\ -D = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -9 \\ D = 6 \end{cases}$$

$$p(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6)$$

Ekvation: $p_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6$

$$p_1(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 + 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \\ &= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C = \\ &= x^4 + (A - 1)x^3 + (B - A)x^2 + (C - B)x - C \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A = 1 \\ C - B = -9 \\ D - C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -6 \end{cases}$$

$$p_1(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + 3x - 6)$$

Ekvation: $p_2(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

$$p_2(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x - 1)(x^2 + Ax + B) = \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B = \\ &= x^3 + (A - 1)x^2 + (B - A)x - B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 2 \\ B - A = 3 \\ -B = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 6 \end{cases}$$

Ekvation: $p_3(x) = x^2 + 3x + 6$

$$p_2(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 6 = 10 \quad (x = 1 \text{ är inte en lösning})$$

pq-formeln:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 6} =$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} \Rightarrow \text{Finns ingen reell lösning}$$

$$p(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 3x + 6) = (x - 1)^3(x^2 + 3x + 6)$$

Svar: $(x - 1)^3(x^2 + 3x + 6)$, multipliciteten för $x = 1$ är 3

2.38 (s. 25-29)

Ekvationen: $p(x) = x^3 - 2x - 4$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A - 2)x^2 + (B - 2A)x - 2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 0 \\ B - 2A = -2 \\ -2B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$p_1(x) = x^2 + 2x + 2$$

pq-formeln:

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 2} \Rightarrow \text{Finns ingen reell lösning}$$

$$\textbf{Svar: } p(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

Ekvationer

3.1 a) (s. 33-34)

Utnyttja faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

b) (s. 33-34)

$x(x^2 - 4) = 0$. Faktorisera först $x^2 - 4$ med konjugatregeln.

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

c) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 24 = 0$. $a = 4$ och $b = 6$.

$$(x+4)(x+6) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = -5 \pm 1$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 1 \Leftrightarrow x+5 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -5 \pm 1$$

Svar: $x_1 = -4$ och $x_2 = -6$

d) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 25 = 0$. $a = 5$ och $b = 5$.

$$(x + 5)^2 = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x + 5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Svar: $x_{1,2} = -5$

e) (s. 33-34)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

Faktorisera ut x ur vänsterledet.

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 24$ (se c). Nollproduktionsmetoden ger också lösningen $x = 0$.

Svar: $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ och $x_3 = 0$

f) (s. 33-34)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Faktorisera ut x^2 ur vänsterledet.

$$x^2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 25$ (se d). Nollproduktionsmetoden ger också dubbelroten $x = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -5$ och $x_{3,4} = 0$

3.2 a) (s.)

$$x^2 + 4x + a = 0, \quad x = 2$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut a .

$$2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

Svar: $a = -12$

b) (s.)

$$x^2 + bx + 12 = 0, \quad x = 3$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut b .

$$3^2 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 3b = -21 \Leftrightarrow b = -7$$

Svar: $b = -7$

3.3 a) (s.)

$$p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) (s.)

$$p(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 2)(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = (x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) (s.)

$$p(x) = -x^2 + x + 12$$
$$-x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 4)(x + 3)$

Svar: $p(x) = (x - 4)(x + 3)$

d) (s.)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right)$$

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$$p(x) = x * g(x) = x(x - \frac{1}{2})^2$$

Svar: $p(x) = x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$

e) (s.)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$x(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} \Rightarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Faktorsatsen ger då att $g(x)$ inte kan faktoriseras.

Svar: $p(x) = 3x(x^2 - 2x + 5)$

f) (s.)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

Använd variabelsubstitution så pq-formeln kan användas.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad t = x^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$t = 3 \pm \sqrt{9 - 8} \Leftrightarrow t = 3 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 4, \quad t_2 = 2$$

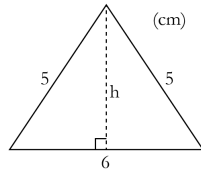
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

Faktorsatsen ger då $p(x) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

Svar: $p(x) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

3.4 (s.)



Satsen om likbent triangel ger att den båda rätvinkliga triangelarna är kongruenta vilket medför att basen för båda är 3cm . Pyth. sats ger att $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow$ arean: $6 * 4/2 = 12\text{cm}^2$ och omkretsen är 16cm .

Låt benen vara y och basen x

$$h = \sqrt{y^2 - (x/2)^2}$$

$$\text{area: } \frac{x * h}{2} = \frac{x\sqrt{y^2 - (x/2)^2}}{2} = 12\text{cm} \Leftrightarrow x\sqrt{y^2 - (x/2)^2} = 24\text{cm}$$

$$\text{omkrets: } 2y + x = 16\text{cm} \Leftrightarrow x = 16 - 2y$$

$$(16 - 2y)\sqrt{y^2 - (8 - y)^2} = 24 \Leftrightarrow 2(8 - y)4\sqrt{y - 4} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8 - y)\sqrt{y - 4} = 3 \Rightarrow (y^2 - 16y + 64)(y - 4) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 - 16y^2 + 64y + 64y - 256 = 9 \Leftrightarrow y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = 0$$

Ansätter lösning med $x - 5$ som faktor från ursprungsfiguren (kan lösas med polynomdivision också):

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (x - 5)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A - 5)y^2 + (B - 5A)y - 5B$$

Identifierar variablerna:

$$\begin{cases} A - 5 = -20 \\ B - 5A = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -15 \\ B = 53 \end{cases}$$

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y - 5)(y^2 - 15y + 53)$$

$$y^2 - 15y + 53 = 0$$

pq-formeln:

$$y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{15^2 - 212}{4}} = \frac{15 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$y_1 = \frac{15 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 - \sqrt{13} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \text{falsk rot}$$

$$y_2 = \frac{15 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 + \sqrt{13} = 1 + \sqrt{13}$$

$$\text{Svar: } x = 1 + \sqrt{13} \text{ och } y = \frac{15 - \sqrt{13}}{2}$$

3.5 a) (s.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + x^2 - 1 + x(x-1)}{x(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)} &= 0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})=0\end{aligned}$$

Faktorsatsen ger då: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) (s.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x-2-x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-4-x+3}{(x-3)(x-4)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x^2-7x+12} \Rightarrow x^2-3x+2 = x^2-7x+12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Svar: $x = \frac{5}{2}$

c) (s.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+3x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+3) + x(x-2)}{x^2(x-2)(x+3)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x+3+x-2 &= 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Svar: $x = -\frac{1}{2}$

d) (s.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} &= \frac{x^2}{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x-2-(x+2)^2}{x^2-4} = \frac{x^2}{4-x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (4-x^2)(-x^2-3x-6) &= x^2(x^2-4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x^2-12x-24+x^4+3x^3+6x^2 &= x^4-4x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3+2x^2-4x-8 &= 0\end{aligned}$$

Gissar en lösning till ekvationen och hittar $x = 2$. Ansätter lösning med $x - 2$ som faktor (kan lösas med polynomdivision också):

$$x^3+2x^2-4x-8 = (x-2)(x^2+Ax+B) = x^3+(A-2)x^2+(B-2A)x-2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-2=2 \\ B-2A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=4 \end{cases}$$
$$(x-2)(x^2+4x+4) = 0$$

Kvadreringsregeln:

$$(x-2)(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)^2 = 0$$

Faktorsatsen: $x_1 = 2$ och $x_{2,3} = -2$. Både 2 och -2 är dock falska rötter då de resulterar i nolldivision i ursprungsekvationen.

Svar: Ekvationen saknar lösning

3.6 (s.)

Formeln för hastighet, sträcka och tid är $s = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Låt x vara båtens hastighet i stillastående vatten. Den totala tiden för resan är tiden dit (t_1) plus tiden tillbaka (t_2) ($t_1 + t_2 = t$). Hastigheten båten har dit (v_1) kan beskrivas som $x - 2.4$ och hastigheten hem (v_2) som $x + 2.4$. $t = 2$ och $s = 6.4$.

$$t_1 + t_2 = t \Leftrightarrow \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = t$$

$$\begin{aligned}\frac{6.4}{x-2.4} + \frac{6.4}{x+2.4} &= 2 \Leftrightarrow \frac{6.4(x+2.4) + 6.4(x-2.4)}{(x-2.4)(x+2.4)} = 2 \Leftrightarrow \\ 6.4(2x+2.4-2.4) &= 2(x^2-2.4^2) \Leftrightarrow 2 \cdot 6.4x = 2(x^2-2.4^2) \Leftrightarrow \\ x^2-6.4x-5.76 &= 0\end{aligned}$$

pq-formeln:

$$x = 3.2 \pm \sqrt{10.24 + 5.76} = 3.2 \pm \sqrt{16} = 3.2 \pm 4$$

$x_1 = 7.2$ och $x_2 = -0.8$. Eftersom hastigheten i uppgiften inte kan vara negativ gäller endast x_1

Svar: 7.2 km/h

3.7 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1 \text{ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).}$$

Svar: $x = 2$

b) (s.)

$$\sqrt{x+2} = -x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2 \text{ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).}$$

$$x_2 = -1$$

Svar: $x = -1$

c) (s.)

$$x - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow x-2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$x-2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 3 \text{ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).}$$

Svar: $x = 6$

3.8 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 1$$

Svar: $x = 1$

b) (s.)

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 3x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{Falsk rot.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

c) (s.)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \Rightarrow x+2 = x \Leftrightarrow 2 = 0 \quad \text{Ej ekvivalent.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

d) (s.)

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x \Rightarrow (x-2)(x+3) = x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} \Leftrightarrow x = 6$$

Svar: $x = 6$

e) (s.)

$$\begin{aligned} (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}) &= 8\sqrt{x} \Leftrightarrow 9 - x = 8\sqrt{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 18x + 81 &= 64x \Leftrightarrow x^2 - 82x + 81 = 0 \end{aligned}$$

pq-formeln:

$$x = 41 \pm \sqrt{41^2 - 81} = 41 \pm 40$$

$x_1 = 81$ falsk rot.

$x_2 = 1$

Svar: $x = 1$

f) (s.)

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{x(3+x)} \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{3x+x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{x^2} - 6x + 9 &= 3x + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{Falsk rot.} \end{aligned}$$

Svar: Lösning saknas

Ekvationer

3.9 (s.)

$2 < 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** än 3"? Ja
 $2 \leq 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** eller lika med 3"? Ja
 $2 \leq 2 \Leftarrow$ är "2 mindre eller **lika med** 2"? Ja

Svar: Alla tre

3.10 (s.)

Nedan visar jag min tankeprocess för att lösa uppgiften.

$$\frac{2}{0.02} = \frac{2}{2} * \frac{1}{10^{-2}} = 1 * 10^2 = 100$$

$$\frac{31}{0.2} = \frac{31}{2} * \frac{1}{10^{-1}} = 15.5 * 10 = 155$$

$$\frac{0.00009}{0.000006} = \frac{9}{6} * \frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 1.5 * 10 = 15$$

Svar: $\frac{0.00009}{0.000006} < \frac{2}{0.02} < \frac{31}{0.2}$

3.11 a) (s.)

$$3x + 1 < 2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Svar: $x < \frac{1}{3}$

b) (s.)

$$-3x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

Svar: $x \geq \frac{1}{3}$

c) (s.)

$$3x + 1 > 4x + 5 \Leftrightarrow x < -4$$

Svar: $x < -4$

d) (s.)

$$(x - 3)(x + 3) \leq x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 9 \leq \cancel{x^2} \Leftrightarrow -9 \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Svar: $x \in \mathbb{R}$

3.12 a) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$\frac{x+4}{x-1} > 0$$

x		-4		1	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-1}$	$+$	0	$-$	\wr	$+$

Svar: $x > 1$ eller $x < -4$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger negativa värden.

$$\frac{x+4}{x-1} < 0$$

Svar: teckentabellen i a) ger: $-4 < x < 1$

c) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0$$

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x(x-1)}$	$-$	0	$+$	\wr	$-$	\wr	$+$

Svar: $x < -1$ eller $0 < x < 1$

d) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$(x+2)(2x-1) > 0$$

x		-2		$1/2$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	\wr	$+$

Svar: $x < -2$ eller $x > 1/2$

3.13 (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{3x+1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{3x+1-2(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0$$

x		-2		3	
$x-3$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+	+	-	0	+

Svar: $-2 < x < 3$

3.14 a) (s. 44-45)

Se sidorna 44-45 i läroboken för förklaring till varför det fungerar såhär.

$$\frac{x^2+1}{x} < x$$

$$\text{om } x > 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \cancel{x} + 1 < \cancel{x} \Leftrightarrow 1 < 0$$

$$\text{om } x < 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \cancel{x} + 1 > \cancel{x} \Leftrightarrow 1 > 0$$

$1 < 0$ är alltid sant vilket innebär att skillnaden gäller för alla x mindre än noll.

Svar: $x < 0$

b) (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{x+2} < x-2 &\Leftrightarrow \frac{2x^2-(x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x^2-\cancel{x}^2+4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2} < 0 \end{aligned}$$

x		-2	
x^2+4	+	+	+
$x+2$	-	0	+
$\frac{x^2+4}{x+2}$	-	+	+

Svar: $x < -2$

c) (s.)

Eftersom x^2 aldrig kan bli negativt behövs inget motsvarande det i uppgift a) göras.

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2 > \cancel{x^2} + 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Svar: Alla x

3.15 a) (s.)

Skriv om olikheten så att allt är i vänsterledet och använd konjugatregeln baklänges. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) < 0$$

x		-2		2	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 2)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Svar: $-2 < x < 2$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger positiva värden.

Svar: teckentabellen i a) ger: $x < -2$ eller $x > 2$

c) (s.)

Använd kvadreringsregeln och lös olikheten.

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 > (x + 5)^2 &\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 > \cancel{x^2} + 10x + 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -24 > 8x \Leftrightarrow x < -3\end{aligned}$$

Svar: $x < -3$

3.16 (s.)

Förenkla vänsterledet, flytta över ettan och skriv allt på ett gemensamt bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\begin{aligned} \frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 &\Leftrightarrow \frac{1-x^4}{1-x^4-2x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{-x^4-2x^2} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-x^4-(-x^4-2x^2)}{-x^2(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)} < 0 \end{aligned}$$

x		0	
$2x^2+1$	+	+	+
$-x^2$	-	0	-
x^2+2	+	+	+
$\frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)}$	-	∓	-

Svar: $x \neq 0$

3.17 a) (s.)

Lös ekvationen genom att multiplicera termerna med x . Faktorisera sedan täljaren. Notera att grundekvationen inte är definierad för $x = 0$ därför implicerar endast den första ekvationen den andra.

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Faktorsatsen ger: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

Svar: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

b) (s.)

Skriv om olikheten så alla termer står på samma bråkstreck i vänsterledet. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$x + \frac{4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{x} > 0$$

x		0		1		4	
$x-4$	-	-	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
x	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{(x-4)(x-1)}{x}$	-	∓	+	0	-	0	+

Svar: $0 < x < 1$ eller $x > 4$

Kapitel 4: Summor och talföljder

Summatecken

4.1 a) (s.)

$$\sum_{n=1}^5 n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

Svar: 225

b) (s.)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^4 (k^2 - 3k) &= 0^2 - 3 \cdot 0 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 3^2 - 3 \cdot 3 + 4^2 - 3 \cdot 4 = \\ &= 1 - 3 + 4 - 6 + 9 - 9 + 16 - 12 = 0\end{aligned}$$

Svar: 0

c) (s.)

$$\sum_{k=2}^{100} 3 = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3 + 3}_{99 \text{ st.}} = 3 \cdot 99 = 297$$

Svar: 297

d) (s.)

Antalet element kommer alltid vara lika med övre gränsen minus undre gränsen plus ett.

$$\sum_{k=m}^n 3 = 3(n - m + 1)$$

Svar: $3(n - m + 1)$

4.2 a) (s.)

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}}_{10 \text{ st. från } 1 \text{ till } 10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$$

Svar: $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$

b) (s.)

$$\underbrace{2 * 3 + 3 * 4 + 4 * 5 + \dots + n(n+1)}_{\text{från 2 till n}} = \sum_{k=2}^n k(k+1)$$

Svar: $\sum_{k=2}^n k(k+1)$

c) (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det kan skrivas med summatecken.

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = \underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5}_{6 \text{ st. från } 0 \text{ till } 5} = \sum_{k=0}^5 3^k$$

Svar: $\sum_{k=0}^5 3^k$

Aritmetisk summa

4.3 (s.)

Se formeln för aritmetisk summa.

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

Svar: 5050

4.4 (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det går att skrivas med summatecken.

$$\begin{aligned} 3 + 6 + \dots + 96 + 99 &= 3 * 1 + 3 * 2 + \dots + 3 * 32 + 3 * 33 = \\ &= 3 \underbrace{(1 + 2 + \dots + 33 + 34)}_{33 \text{ st. från } 1 \text{ till } 33} = 3 \sum_{k=1}^{33} k = 3 * \frac{33 * 34}{2} = 1683 \end{aligned}$$

Svar: 1683

4.5 a) (s.)

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

Svar: 55

b) (s.)

bryt ut fyran och skriv om med summatecken.

$$4+8+12+\dots+36+40 = 4(1+2+3+\dots+9+10) = 4 \sum_{k=1}^{10} k = 4 * \frac{10 * 11}{2} = 220$$

Svar: 220

c) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att fyran kan brytas ut.

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 11 + \dots + 35 + 39 &= \\ &= (4 * 1 - 1) + (4 * 2 - 1) + (4 * 3 - 1) + \dots + (4 * 9 - 1) + (4 * 10 - 1) = \\ &= 4(1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) - \underbrace{(1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1)}_{10 \text{ st.}} = \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 = 4 * \frac{10 * 11}{2} - 10 * 1 = 210 \end{aligned}$$

Svar: 210

d) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att tian kan brytas ut.

$$\begin{aligned} -3 + 7 + 17 + \dots + 87 + 97 &= \\ &= (10 * 0 - 3) + (10 * 1 - 3) + (10 * 2 - 3) + \dots + (10 * 9 - 3) + (10 * 10 - 3) = \\ &= 10(0 + 1 + 2 + \dots + 9 + 10) - \underbrace{(3 + 3 + 3 \dots + 3 + 3)}_{11 \text{ st.}} = \\ &= 10 \sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^{10} 3 = 10(0 + \sum_{k=1}^{10} k) - \sum_{k=0}^{10} 3 = 10 * \frac{10 * 11}{2} - 11 * 3 = 517 \end{aligned}$$

Svar: 517

4.6 a) (s.)

Bryt ut trean och använd aritmetisk summa.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} 3k &= 3 * 1 + 3 * 2 + \dots + 3 * 14 + 3 * 15 = \\ &= 3(1 + 2 + \dots + 14 + 15) = 3 \sum_{k=1}^{15} k = 3 \frac{15 * 16}{2} = 360 \end{aligned}$$

Svar: 360

b) (s.)

Bryt ut trean och två och använd aritmetisk summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(3k+2) &= (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + \dots + (3 \cdot 14 + 2) + (3 \cdot 15 + 2) = \\ &= 3(1 + 2 + \dots + 14 + 15) + \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2 + 2)}_{15 \text{ st.}} = 3 \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 2 = \\ &= 3 \frac{15 \cdot 16}{2} + 2 \cdot 15 = 390\end{aligned}$$

Svar: 390

c) (s.)

Bryt ut trean och två som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(3k+2) &= 3(1 + 2 + \dots + (n-1) + n) + \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2 + 2)}_{n \text{ st.}} = \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 = 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n\end{aligned}$$

Svar: $3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n$

d) (s.)

Bryt ut a och d som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(ak+d) &= a(1 + 2 + \dots + (n-1) + n) + \underbrace{(d + d + \dots + d + d)}_{n \text{ st.}} = \\ &= a \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n d = a \frac{n(n+1)}{2} + dn\end{aligned}$$

Svar: $a \frac{n(n+1)}{2} + dn$

Geometrisk summa

4.7 a) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = \sum_{k=0}^5 2^k = \frac{2^{5+1} - 1}{2 - 1} = 127$$

Svar: 127

b) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa.
Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$\begin{aligned} 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 &= (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + (-3)^5 = \\ &= \sum_{k=0}^5 (-3)^k = \frac{(-3)^{5+1} - 1}{-3 - 1} = -182 \end{aligned}$$

Svar: -182

c) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa.
Eftersom start värdet inte är 0 finns det två olika sätt att lösa det på: antingen göra en summa av delmängden där $k \geq 0$ och addera resten efteråt eller genom att bryta ut den minsta exponenten.

$$\begin{aligned} 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \\ &= 2 + \sum_{k=0}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{511}{128} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} * \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} * \sum_{k=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{511}{128} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{511}{128}$

d) (s.)

Två alternativa sätt att lösa det: Bryta ut e så att summan får startvärdet 0 eller använd subtraktion så att summan kan skrivas med 0 som startvärde.

$$e + e^2 + e^3 + \dots + e^{10} = e(e^0 + e^1 + e^2 + \dots + e^9) = e \sum_{k=0}^9 e^k = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$$

eller

$$\begin{aligned} e + e^2 + e^3 + \dots + e^{10} &= \sum_{k=1}^{10} e^k = \sum_{k=0}^{10} e^k - \sum_{k=0}^0 e^k = \frac{e^{11} - 1}{e - 1} - \frac{e^1 - 1}{e - 1} = \\ &= \frac{e^{11} - 1 - (e - 1)}{e - 1} = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1} \end{aligned}$$

Svar: $e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$

e) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 &= (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots + (-x)^9 = \\ &= \sum_{k=0}^9 (-x)^k = \frac{(-x)^{10} - 1}{-x - 1} = -\frac{x^{10} - 1}{x + 1} = \frac{1 - x^{10}}{x + 1} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1 - x^{10}}{x + 1}$

4.8 a) (s.)

Se 4.6 a) för resonemang kring varför faktorn 3 kan brytas ut.

$$\sum_{k=0}^{10} (3 * 2^k) = 3 * \sum_{k=0}^{10} 2^k = 3 * \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 3(2^{11} - 1)$$

Svar: $3(2^{11} - 1)$

b) (s.)

Bryt ut en tvåa från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=1}^{10} 2^k = 3 * 2(2^0 + 2^1 + \dots + 2^9) = \\ &= 6 * \sum_{k=0}^9 2^k = 6 * \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 6(2^{10} - 1)\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=1}^{10} 2^k = 3 \left(\sum_{k=0}^{10} 2^k - \sum_{k=0}^0 2^k \right) = \\ &= 3 \left(\frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - \frac{2^1 - 1}{2 - 1} \right) = 3(2^{11} - 2) = 6(2^{10} - 1)\end{aligned}$$

Svar: $6(2^{10} - 1)$

c) (s.)

Bryt ut tre tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{10} (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=3}^{10} 2^k = 3 * 2^3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^7) = \\ &= 24 * \sum_{k=0}^7 2^k = 24 * \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 24(2^8 - 1)\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{10} (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=3}^{10} 2^k = 3 \left(\sum_{k=0}^{10} 2^k - \sum_{k=0}^2 2^k \right) = \\ &= 3 \left(\frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \right) = 3(2^{11} - 2^3) = 24(2^{10} - 1)\end{aligned}$$

Svar: $24(2^{10} - 1)$

d) (s.)

Bryt ut m tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=m}^n 2^k = 3 * 2^m (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-m}) = \\ &= 3 * 2^m * \sum_{k=0}^{n-m} 2^k = 3 * 2^m * \frac{2^{n-m+1} - 1}{2 - 1} = 3 * 2^m (2^{n-m+1} - 1)\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n (3 * 2^k) &= 3 * \sum_{k=m}^n 2^k = 3 \left(\sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \right) = \\ &= 3 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - \frac{2^m - 1}{2 - 1} \right) = 3(2^{n+1} - 2^m) = 3 * 2^m (2^{n-m+1} - 1)\end{aligned}$$

Svar: $3 * 2^m (2^{n-m+1} - 1)$

4.9 a) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktalet.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (3 * 2^{-k}) &= 3 * \sum_{k=0}^n (2^{-k}) = 3 * \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \\ &= 3 * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}} = -6 \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) = 6 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)\end{aligned}$$

Svar: $6 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$

b) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktalet och fixa till så att startvärdet är noll (båda metoderna i 4.8 b)-c) går att använda).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n e^{-k} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e} \left(\left(\frac{1}{e}\right)^0 + \left(\frac{1}{e}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{e} * \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e} * \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{\frac{e}{e} - e} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{1 - e} = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{e - 1}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{e - 1}$

c) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{100} (1000 * (1.05)^n) &= 1000 * \sum_{n=0}^{100} 1.05^n = 1000 * \frac{1.05^{n+1} - 1}{1.05 - 1} = \\ &= 1000 * \frac{1.05^{n+1} - 1}{\frac{1}{20}} = 20 * 1000 * \frac{1.05^{n+1} - 1}{1} = 20000(1.05^n + 1 - 1)\end{aligned}$$

Svar: $20000(1.05^n + 1 - 1)$

d) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} &= (-\tfrac{1}{2})^0 + (-\tfrac{1}{2})^1 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^3 + \dots + (-\tfrac{1}{2})^{2n} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-\tfrac{1}{2})^k = \frac{(-\tfrac{1}{2})^{2n+1} - 1}{-\tfrac{1}{2} - 1} = -2 \frac{-\frac{1}{2^{2n+1}} - 1}{3} = \frac{\frac{2}{2^{2n+1}} + 2}{3} = \frac{2^{-2n} + 2}{3} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2^{-2n} + 2}{3}$

e) (s.)

Det saknas en enkel metod för att lösa uppgiften så lösningen är att iterativt summera allt.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^5 \frac{k(-1)^k}{2^k} &= \frac{2 * (-1)^2}{2^2} + \frac{3 * (-1)^3}{2^3} + \frac{4 * (-1)^4}{2^4} + \frac{5 * (-1)^5}{2^5} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \frac{5}{32} = \frac{16}{32} - \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{5}{32} = \frac{7}{32} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{7}{32}$

4.10 (s.)

Skriv om funktionen som en summa och applicera sedan funktionsvärdet 3.

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 + 2x + 2x^2 + \dots + 2x^7 = 2(1 + x + x^2 + \dots + x^7) = \\ &= 2(x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^7) = 2 * \sum_{k=0}^7 x^k \end{aligned}$$

\Downarrow

$$p(3) = 2 * \sum_{k=0}^7 3^k = 2 * \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6560$$

Svar: 6560

4.11 (s.)

Mängden pengar på Lisas bankkonto kommer öka med $2000 * 1.02^k$ varje år där k är antalet år från start. Efter noll år (starten) är mängden pengar: $2000 * 1.02^0 = 2000$. Efter ett år har pengarna som sattes in förra året ökat med en faktor av 1.02 och 2000 till har satts in: $2000 * 1.02^1 + 2000$. Nästa år har de båda 2000 ökat med en faktor av 1.02 och ytterligare 2000 satts in: $2000 * 1.02^2 + 2000 * 1.02^1 + 2000$ osv.

Detta kan alltså beskrivas som en geometrisk summa där 2022/2023 är 11 år efter start:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{11} 2000 * 1.02^k &= 2000 * \sum_{k=0}^{11} 1.02^k = 2000 * \frac{1.02^{12} - 1}{1.02 - 1} = 2000 * \frac{1.02^{12} - 1}{\frac{1}{50}} = \\ &= 50 * 2000(1.02^{12} - 1) = 10^5(1.02^{12} - 1) \approx 26800 \text{ kr} \end{aligned}$$

Svar: 26800 kr

4.12 (s.)

Sträckan bollen kommer röra sig efter varje studs är $2 * 0.9^k$ där k är antalet studs sen start (tvåan år där eftersom det både är upp och ner). Undantaget är den metern bollen faller i början. Då sträckan som sökes är fram till studs tio kommer slutvärdet vara nio.

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^9 2 * 0.9^k &= 1 + 2(0.9^1 + 0.9^2 + \dots + 0.9^9) = \\ &= 1 + 2 * 0.9(0.9^0 + 0.9^1 + \dots + 0.9^8) = 1 + 1.8 * \sum_{k=0}^8 0.9^k = \\ &= 1 + 1.8 \frac{0.9^9 - 1}{0.9 - 1} = 1 - 18(0.9^9 - 1) = 1 + 18(1 - 0.9^9) \approx 12 \text{ m} \end{aligned}$$

Svar: 12 m

Binomialsatsen

4.13 a) (s.)

$$7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$$

Svar: 5040

b) (s.)

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * 4!} = 35$$

Svar: 35

c) (s.)

$$\binom{1001}{999} = \frac{1001!}{999! * 2!} = 500500$$

Svar: 500500

4.14 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + \binom{2}{1}a^1b^1 + b^2 = \\ &= a^2 + \frac{2!}{1! * 1!}ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Svar: $a^2 + 2ab + b^2$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + b^3 = \\ &= a^3 + \frac{3!}{1! * 2!}a^2b + \frac{3!}{2! * 1!}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Svar: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + b^4 = \\ &= a^4 + \frac{4!}{1! * 3!}a^3b + \frac{4!}{2! * 2!}a^2b^2 + \frac{4!}{3! * 1!}ab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Svar: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

d) (s.)

Se sidorna 58-59 om du är osäker på vad Pascals triangel är.

Svar:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\end{array}$$

4.15 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= 1^3 + \binom{3}{1}1^2x^1 + \binom{3}{2}1^1x^2 + x^3 = \\ &= 1 + \frac{3!}{1! * 2!}x + \frac{3!}{2! * 1!}x^2 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

Svar: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(3-2x)^3 &= (3+(-2x))^3 = 3^3 + \binom{3}{1}3^2(-2x)^1 + \binom{3}{2}3^1(-2x)^2 + (-2x)^3 = \\ &= 27 - \frac{3!}{1! * 2!}9 * 2 * x + \frac{3!}{2! * 1!}3 * 4 * x^2 - 8x^3 = -8x^3 + 36x^2 - 54x + 27\end{aligned}$$

Svar: $-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}(1+x)^4 &= 1^4 + \binom{4}{1}1^3x^1 + \binom{4}{2}1^2x^2 + \binom{4}{3}1^1x^3 + x^4 = \\ &= 1 + \frac{4!}{1! * 3!}x + \frac{4!}{2! * 2!}x^2 + \frac{4!}{3! * 1!}x^3 + x^4 = \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Svar: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

4.16 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{15}{13}x^{13}1^2 = \frac{15!}{13! * 2!}x^{13} = 105x^{13}$$

Svar: 105

4.17 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{8}{5}3^5(-x)^3 = -\frac{8!}{5! * 3!}243x^3 = -13608x^3$$

Svar: -13608

4.18 (s.)

x -termerna ska ta ut varandra för att termen ska bli konstant.

$$\binom{15}{k} (x^2)^{15-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \binom{15}{k} x^{2(15-k)} x^{-3k}$$

För att x -termerna ska ta ut varandra:

$$2(15 - k) - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Sätt in 6 istället för k :

$$\binom{15}{6} x^{2(15-6)} x^{-3 \cdot 6} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} x^{18} x^{-18} = 5005$$

Svar: 5005

4.19 (s.)

Vi börjar med att testa höstgradstermerna i båda potenserna.

$$\text{Första: } (x^3)^{16} = x^{48}$$

$$\text{Andra: } (x^4)^{12} = x^{48}$$

De båda kommer alltså ta ut varandra. Vi får då en nivå lägre.

$$\text{Första: } \binom{16}{1} (x^3)^{15} (-2)^1 = -\frac{16!}{1! \cdot 15!} x^{45} \cdot 2 = -32x^{45}$$

$$\text{Andra: } \binom{12}{1} (x^4)^{11} 3^1 = \frac{12!}{1! \cdot 11!} x^{44} \cdot 3 = 36x^{44}$$

Svar: $-32x^{45}$

4.20 (s.)

Använd binomialsatsen med $a = b = 1$.

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 1^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \text{ V.S.V.} \end{aligned}$$

Detta innebär att summan av talen i den $(n-1)$:a raden i Pascals triangel är 2^n , t.ex. är $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$.

4.21 (s.)

Använd binomialsatsen baklänges.

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \\ &= \binom{n}{0} 1^n (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 (-1)^n = \\ &= (1-1)^n = 0 \text{ V.S.V} \end{aligned}$$

4.22 (s.)

x^8 termen ges av:

$$\binom{10}{8} a^2 (2x)^8 = \frac{10!}{8! * 2!} a^2 2^8 x^8 = (45 * 256 * a^2) x^8$$

$$45 * 256 * a^2 = 180 \Leftrightarrow a^2 = \frac{180}{45 * 256} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{64}} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{8}$$

Svar: $a = \pm \frac{1}{8}$

Talföljder och induktion

4.23 a) (s.)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2a_0 = 2 * 1 = 2 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 * 2 = 4 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 * 4 = 8 \end{aligned}$$

Svar: $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$

b) (s.)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= a_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0 \\ a_2 &= a_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1 \\ a_3 &= a_2^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

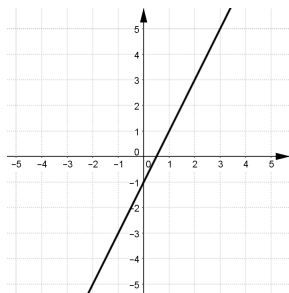
Svar: $a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0$

Kapitel 5: Analytisk Geometri

Räta linjen

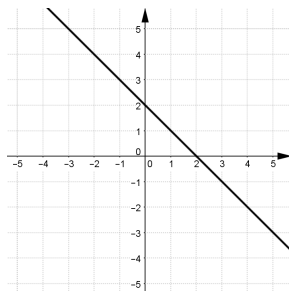
5.1 a) (s.)

$$y = 2x - 1 \rightarrow \text{Lutning: } 2, \text{ korsar y-axeln vid: } -1$$



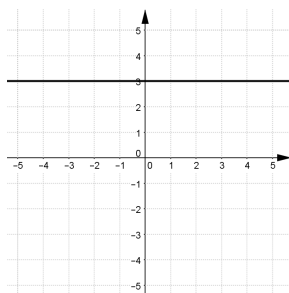
b) (s.)

$$y = 2 - x \Leftrightarrow y = -1x + 2 \rightarrow \text{Lutning: } -1, \text{ korsar y-axeln vid: } 2$$



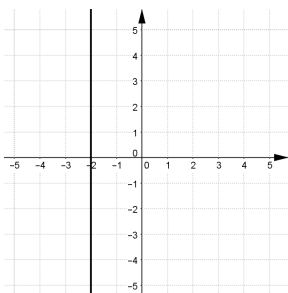
c) (s.)

$$y = 3 \Leftrightarrow y = 0x + 3 \rightarrow \text{Lutning: } 0, \text{ korsar y-axeln vid: } 3. \text{ Kan också ses som att } y \text{ är konstant tre oberoende av vad } x \text{ är.}$$



d) (s.)

$x = -2$ kan inte beskrivas med räta linjens ekvation eftersom ekvationen inte är en funktion (saknar värde på y för alla x utom -2 och har oändligt många lösningar på $x = -2$). Se det som att för oberoende av vad y är är $x = -2$.



5.2 a) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna m .

Enpunktsformeln:

$$y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Räta linjens ekvation:

$$2 = -1 * 0 + m \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow y = -x + 2$$

Svar: $y = -x + 2$

b) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna m .

Enpunktsformeln:

$$y - 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 6 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

Räta linjens ekvation:

$$1 = 3 * 2 + m \Leftrightarrow m = -5 \Rightarrow y = 3x - 5$$

Svar: $y = 3x - 5$

c) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i rätta linjens ekvation och beräkna m .

Enpunktsformeln:

$$y - b = k(x - a)$$

Rätta linjens ekvation:

$$b = ka + m \Leftrightarrow m = b - ka$$

$$y = kx - ka + b \Leftrightarrow y = k(x - a) + b \Leftrightarrow y - b = k(x - a)$$

Svar: $y - b = k(x - a)$

d) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$\left(\overbrace{a}^{x_1}, \overbrace{b}^{y_1} \right) \quad \left(\overbrace{a+1}^{x_2}, \overbrace{b+1}^{y_2} \right)$$

$$y - b = \frac{b' + 1 - b}{a' + 1 - a}(x - a) \Leftrightarrow y = 1(x - a) + b \Leftrightarrow y = x + b - a$$

Svar: $y = x + b - a$

5.3 (s.)

Använd tvåpunktsformeln med $(-2, 5)$ och $(0, -3)$ som punkter (m -värdet ger den andra punkten).

$$y - 5 = \frac{-3 - 5}{0 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = -4(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = -4x - 3$$

Svar: $a = -4$

5.4 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 1 = \frac{-2 - 1}{1 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{3}(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$$

Svar: $y = -x - 1$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 2 = \frac{2 - 2}{2 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y = 0(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2$$

Svar: $y = 2$

c) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 0 = \underbrace{\frac{2-0}{1-1}}_{\text{ej def.}}(x-1)$$

Att tvåpunktsformeln inte är definierad (nolldivision) innebär att lutningen på linjen är "oändlig" vilket i sin tur innebär att det är en vertikal linje. Eftersom båda punkterna ligger på $x = 1$ måste det vara ekvationen.

Svar: $x = 1$

5.5 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y-2 = \frac{3-2}{2+1}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+1)+2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Allmän form:

$$\frac{1}{3}x - y + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 7 = 0$$

Svar: k -form: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ och allmän form: $x - 3y + 7 = 0$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 3 = \frac{3-3}{-7-2}(x-2) \Leftrightarrow y = 0(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

Allmän form:

$$y - 3 = 0$$

Svar: k -form: $y = 3$ och allmän form: $y - 3 = 0$

5.6 a) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-6, 5)$ och $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{2-5}{-2+6}(x+6) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x - \frac{9}{2} + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3 * 10 + 4 * (-8) - 2 = 30 - 32 - 2 = -4 \neq 0$$

Punkten ligger alltså inte på linjen.

Svar: Nej.

b) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-7, -5)$ och $(3, 1)$.

$$\begin{aligned}y + 5 &= \frac{1 + 5}{3 + 7}(x + 7) \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}(x + 7) - 5 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{21}{5} - \frac{25}{5} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{3}{5}x - y - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 4 = 0\end{aligned}$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3 * 8 - 5 * 4 - 4 = 24 - 20 - 4 = 0$$

Punkten ligger alltså på linjen.

Svar: Ja

5.7 a) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 11 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$2x + 1 = -3x + 11 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 * 2 + 1 = 5$$

Svar: punkten $(2, 5)$

b) (s.)

Lös ekvationssystemet (y -värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$5 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Svar: punkten $(4, 5)$

c) (s.)

Lös ekvationssystemet (x -värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$y = 3 * 4 - 2 \Leftrightarrow y = 12 - 2 \Leftrightarrow y = 10$$

Svar: punkten (4, 10)

d) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 5x + 6 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$\cancel{5x} - 4 = \cancel{5x} + 6 \Leftrightarrow -4 \neq 6 \Rightarrow \text{Saknar lösning}$$

Svar: Skärning saknas

Parabeln

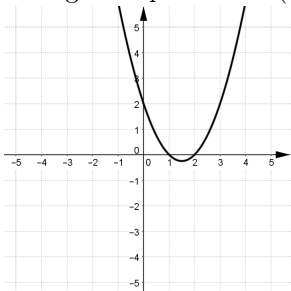
5.8 a) (s.)

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Svar: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b) (s.)

Går igenom punkterna $(3/2; -1/4)$ och $(0, 2)$.



c) (s.)

y är som minst när $(x - \frac{3}{2})^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på y är alltså $-\frac{1}{4}$.

Svar: $-\frac{1}{4}$

d) (s.)

Använd pq-formeln.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

Svar: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

e) (s.)

Faktorisera polynomet och använd sedan en teckentabell.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) \geq 0$$

x		1		2	
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x - 1$	-	0	+	+	+
$(x - 2)(x - 1)$	+	0	-	0	+

När $x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

Svar: $x \leq 0$ eller $x \geq 2$

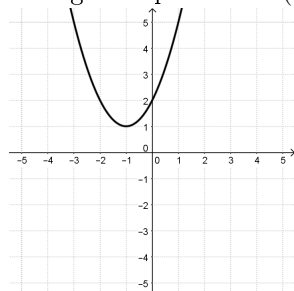
5.9 a) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 - 1^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Visualisera:

Går igenom punkterna (1; 1) och (0, 2).



Minsta värdet:

Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på y 1.

Lös ekvationen:

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$0^2 + 2 * 0 + 2 = 2$$

Olikheten är alltså sann för alla värden.

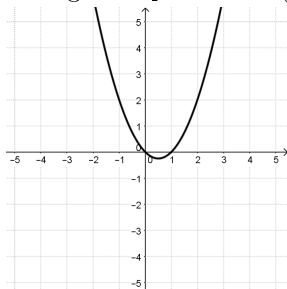
b) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Visualisera:

Går igenom punkterna $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ och $(0, 0)$.



Minsta värdet:

Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på $y - \frac{1}{4}$.

Lös ekvationen:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

Lös olikheten:

$$x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0$$

x		0		1	
x	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x(x - 1)$	+	0	-	0	+

När $x \leq 0$ eller $x \geq 1$.

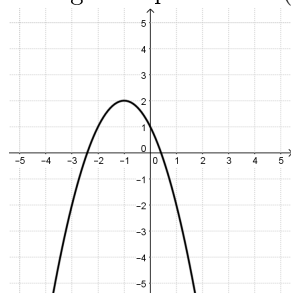
c) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$1 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x) + 1 = -((x+1)^2 - 1^2) + 1 = -(x+1)^2 + 1 + 1 = 2 - (x+1)^2$$

Visualisera:

Går igenom punkterna $(-1, 2)$ och $(0, 1)$.



Minsta värdet:

Saknar mista värde eftersom när x ökar kommer y bli mindre (pga. negationen).

Lös ekvationen:

$$1 - 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Lös olikheten:

$$1 - 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + 2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \geq 0$$

x		$-1 - \sqrt{2}$		$-1 + \sqrt{2}$	
$x + 1 - \sqrt{2}$	-	-	-	0	+
$x + 1 + \sqrt{2}$	-	0	+	+	+
-	-	-	-	-	-
$-(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$	-	0	+	0	-

När $-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$.

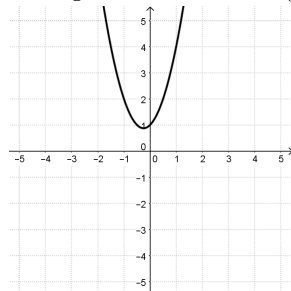
d) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$2x^2 + x + 1 = 2(x^2 + \frac{1}{2}x) + 1 = 2((x + \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2) + 1 = 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1 = 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}$$

Visualisera:

Går igenom punkterna $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$ och $(0, 1)$.



Minsta värdet:

Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på y $\frac{7}{8}$.

Lös ekvationen:

$$2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{16}} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$2x^2 + x + 1 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$2 * 0^2 + 0 + 1 = 1$$

Olikheten är alltså sann för alla värden.

5.10 (s.)

Kvadratkomplettera:

$$y - x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$$

y är som minst när $(x + 2)^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på y är alltså -4 .

Svar: 4

5.11 (s.)

Uppgiften ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 6 = (-1)^2 + a * (-1) + b \\ 3 = 2^2 + a * 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 - a + b \\ 3 = 4 + 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 5 \\ b = -2a - 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$a + 5 = -2a - 1 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -2 + 5 = 3$$

Svar: $a = -2$ och $b = 3$

Absolutbelopp

5.12 a) (s.)

$$|3| = 3$$

Svar: 3

b) (s.)

$$|-3| = 3$$

Svar: 3

c) (s.)

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

Svar: 3

d) (s.)

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Svar: 3

e) (s.)

$$\sqrt{x^2} = x$$

Svar: x

f) (s.)

$$\sqrt{(-x)^2} = x$$

Svar: x

5.13 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad x = 4$$

$$x < 0: \quad -x = 4 \Leftrightarrow x = -4$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -4$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Andra är en falsk lösning eftersom lösningen inte ligger inom intervallet som x får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad x = 0$$

$$x < 0: \quad -x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

Svar: $x = 0$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Båda är en falsk lösning eftersom lösningarna inte ligger inom intervallet som x får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad x = -1 \not\geq 0 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$x < 0: \quad -x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

Svar: ekvationen saknar lösning

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{då } x - 2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{då } x - 2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 : \quad x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$$

$$x < 2 : \quad -(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x = -2$$

Svar: $x = 6$ eller $x = -2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4 & \text{då } x + 4 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -4 \\ -(x + 4) & \text{då } x + 4 < 0 \text{ dvs. } x < -4 \end{cases}$$

$$x \geq -4 : \quad x + 4 = 3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x < -4 : \quad -(x + 4) = 3 \Leftrightarrow x = -7$$

Svar: $x = -1$ eller $x = -7$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{då } 2x + 1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x + 1) & \text{då } 2x + 1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x \geq -\frac{1}{2} : \quad 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x < -\frac{1}{2} : \quad -(2x + 1) = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Svar: $x = 0$ eller $x = -1$

g) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{då } 1 - x \geq 0 \text{ dvs. } x \leq 1 \\ -(1 - x) & \text{då } 1 - x < 0 \text{ dvs. } x > 1 \end{cases}$$

$$x \leq 1 : \quad 1 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x > 1 : \quad -(1 - x) = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Svar: $x = 0$ eller $x = 2$

5.14 a) (s.)

Definitionen av kvadratroten:

$$\text{Om } a^2 = b \text{ och } a \geq 0 \text{ då är } a = \sqrt{b}$$

Vilket innebär att $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$.

Använd nu faktumet att $|a|$ alltid är positivt och regeln $a^2 = |a|^2$.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \text{ V.S.V}$$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp och att $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$x \leq 1 : \quad x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$

$$x > 1 : \quad -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -2$

5.15 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : \quad x = 3$$

$$x < 0 : \quad -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$$

Svar: $x = 3$ eller $x = -3$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : \quad x < 3$$

$$x < 0 : \quad -x < 3 \Leftrightarrow x > -3$$

Kombinera sedan definitions mängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < 0 \text{ eller } 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Svar: $-3 < x < 3$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : x \geq 3$$

$$x < 0 : -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$$

Kombinera sedan definitionsområdet för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 3 \text{ eller } x \leq -3$$

Svar: $x \geq 3$ eller $x \leq -3$

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$x \leq 1 : x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$

$$x > 1 : -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$x \geq 1 : x-1 < 3 \Leftrightarrow x < 4$$

$$x < 1 : -(x-1) < 3 \Leftrightarrow x > -2$$

Kombinera sedan definitionsområdet för uttrycket och uttrycket.

$$-2 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

Svar: $-2 < x < 4$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$x \geq 1 : x-1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 4$$

$$x < 1 : -(x-1) \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -2$$

Kombinera sedan definitionsområdet för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 4 \text{ eller } x \leq -2$$

Svar: $x \geq 4$ eller $x \leq -2$

5.16 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

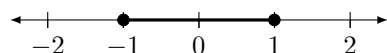
$$x \geq 0 : x \leq 1$$

$$x < 0 : -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Kombinera sedan definitionsområdet för uttrycket och uttrycket.

$$-1 \leq x < 0 \text{ eller } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$



b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

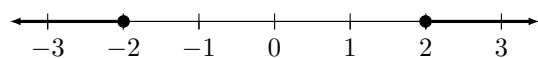
$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : x \geq 2$$

$$x < 0 : -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$$

Kombinera sedan definitionsområdet för uttrycket och uttrycket.

$$x \leq -2 \text{ eller } x \geq 2$$



c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{då } x - 1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{då } x - 1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

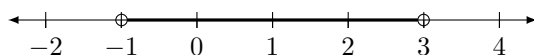
$$x \geq 1: \quad x - 1 < 2 \Leftrightarrow x < 3$$

$$x < 1: \quad -(x - 1) < 2 \Leftrightarrow x > -1$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-1 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$$-1 < x < 3$$



d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{då } x + 2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -2 \\ -(x + 2) & \text{då } x + 2 < 0 \text{ dvs. } x < -2 \end{cases}$$

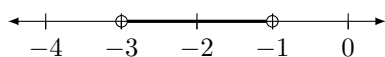
$$x \geq -2: \quad x + 2 < 1 \Leftrightarrow x < -1$$

$$x < -2: \quad -(x + 2) < 1 \Leftrightarrow x > -3$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < -2 \text{ eller } -2 \leq x < -1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

$$-3 < x < -1$$



Svar:

5.17 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{då } x - 3 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{då } x - 3 < 0 \text{ dvs. } x < 3 \end{cases}$$

$$x \geq 3: \quad x - 3 = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \not\geq 3 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$x < 3: \quad -(x - 3) = 1 - 2x \Leftrightarrow x = -2$$

Svar: $x = -2$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x-2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x-2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$x \geq 2: \quad x-2 = x+1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$x < 2: \quad -(x-2) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } 2x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{då } 2x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x \geq -\frac{1}{2}: \quad 2x+1 = x-1 \Leftrightarrow x = -2 \not\geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$x < -\frac{1}{2}: \quad -(2x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = 0 \not< -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

Svar: Saknar lösning

5.18 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad x-x = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$x < 0: \quad -x-x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Svar: $x = -1$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \not\geq 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$x < 0: \quad x^2 + 2(-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \not< 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

Svar: $x = -1$ eller $x = 1$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

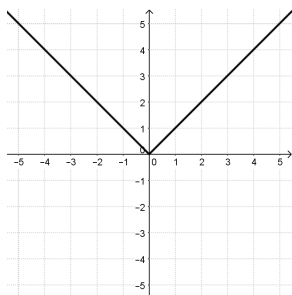
$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -1 \end{cases}$$

$$x \geq -1: \quad x^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x < -1: \quad x^2 + 2(-x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \not< -1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

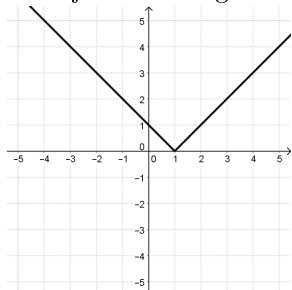
Svar: $x = -1$

5.19 a) (s.)



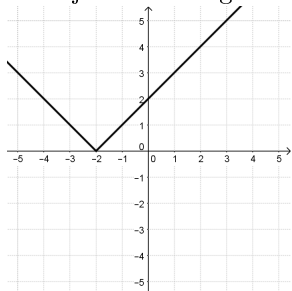
b) (s.)

Förskjuten ett steg till höger.



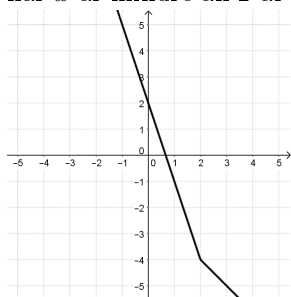
c) (s.)

Förskjuten två steg till vänster.



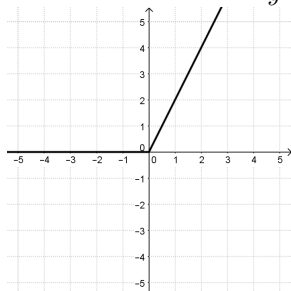
5.20 a) (s.)

När x är större än 2 är det $y = x - 2 - 2x = -x - 2$ som gäller och när x är mindre än 2 är det $y = -(x - 2) - 2x = -3x + 2$.



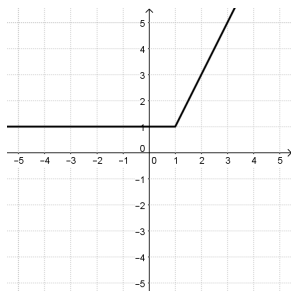
b) (s.)

När x är större än 0 så är det $y = x + x = 2x$ som gäller och när x är mindre än 0 är det $y = -x + x = 0$.



c) (s.)

När x är större än 1 så är det $y = x - 1 + x = 2x - 1$ som gäller och när x är mindre än 1 är det $y = -(x - 1) + x = 1$.



5.21 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| + |x-1| = \begin{cases} x+1+x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ x+1-(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)-(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$x \geq 1: x+1+x-1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

$$-1 \leq x < 1: x+1-(x-1) = 4 \Leftrightarrow 2 \neq 4 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$x < -1: -(x+1)-(x-1) = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$$

Svar: $x = 2$ eller $x = -2$

5.22 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| - |x-1| = \begin{cases} x+1-(x-1) & \text{då } x \geq 1 \\ x+1+(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)+(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$x \geq 1: x+1-(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2 \neq 1 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$-1 \leq x < 1: x+1+(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x < -1: -(x+1)+(x-1) = 1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$x \geq 1: x+1-(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$-1 \leq x < 1: x+1+(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \not\leq 1 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$x < -1: -(x+1)+(x-1) = 3 \Leftrightarrow -2 \neq 3 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

Svar: saknar lösning

c) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$x \geq 1: x + 1 - (x - 1) = -2 \Leftrightarrow 2 \neq -2 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$-1 \leq x < 1: x + 1 + (x - 1) = -2 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

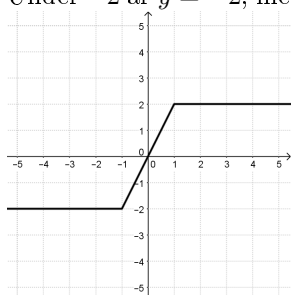
$$x < -1: -(x + 1) + (x - 1) = -2 \Leftrightarrow -2 = -2 \Rightarrow \text{alla lösningar}$$

$$x < -1 \text{ eller } x = -1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Svar: $x \leq -1$

d) (s.)

Under -2 är $y = -2$, mellan -2 och 2 är $y = 2x$ och efter 2 är $y = 2$.



5.23 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättöläst).

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} x - 1 + x - 2 & \text{då } x \geq 2 \\ x - 1 - (x - 2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x - 1) - (x - 2) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

$$x \geq 2: x - 1 + x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$1 \leq x < 2: x - 1 - (x - 2) = 2 \Leftrightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$x < 1: -(x - 1) - (x - 2) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$ eller $x = \frac{5}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$x \geq 2: x - 1 + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \not\geq 2 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

$$1 \leq x < 2: x - 1 - (x - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ingen lösning}$$

$$x < 1: -(x - 1) - (x - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \not< 1 \Rightarrow \text{falsk lösning}$$

Svar: saknar lösning

5.24 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x - 1| + 2|x - 2| = \begin{cases} x - 1 + 2(x - 2) & \text{då } x \geq 2 \\ x - 1 - 2(x - 2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x - 1) - 2(x - 2) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

För att lösa uppgiften behöver vi veta värdemängden för varje uttryck och eftersom de är linjär kommer det endast finnas ett värde på x för varje värde på a och ändarna kommer alltid vara minsta respektive största värdet.

Värdemängden för första uttrycket ges av $x = 2 \Rightarrow a = 1$ och $x \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow \infty$.

Värdemängden för andra uttrycket ges av $x = 1 \Rightarrow a = 2$ och $x \rightarrow 2 \Rightarrow a \rightarrow 1$.

Värdemängden för tredje uttrycket ges av $x \rightarrow -\infty \Rightarrow a \rightarrow \infty$ och $x \rightarrow 1 \Rightarrow a \rightarrow 2$.

För alla a större än 1 kommer det alltså finnas två lösningar.

Svar: $a > 1$

5.25 (s.)

Utnyttja faktumen att $\sqrt{a^2} = |a|$, att $|a| = -a$ eftersom $a < 0$ och att $a^2 + b^2 \geq 0$ oberoende av värden på a och b .

$$\begin{aligned} \sqrt{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4} &= \sqrt{a^2} \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = |a| \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= -a|a^2 + b^2| = -a(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Svar: $-a(a^2 + b^2)$

5.26 (s.)

Avståndet mellan punkterna i x -led kan skrivas som $|x_2 - x_1|$ och i y -led som $|y_2 - y_1|$. Eftersom x - och y -axeln är vinkelräta mot varandra kan en vinkelrät triangel ritas upp där avståndet mellan punkterna är hypotenusan och avståndet i x - respektive y -led är kateterna. Pyth. sats säger då att:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Leftrightarrow d = (\pm) \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ V.S.V.}$$

Cirkeln, ellipsen och hyperbeln

5.27 (s.)

Kvadratkomplettera och använd sedan cirkelns ekvation för att identifiera medelpunkten och radien.

$$x^2 + y^2 + 2(2x - y) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 2^2 + (y - 1)^2 - 1^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 + 4 + 1 \Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Medelpunkten blir då $(-2, 1)$ och radien blir 3.

Svar: medelpunkt: $(-2, 1)$, radie: 3

5.28 (s.)

Kvadratkomplettera och använd sedan cirkelns ekvation för att identifiera radien.

$$x^2 - ax + y^2 + 2y = a \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 + (y + 1)^2 - 1^2 = a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + (y + 1)^2 = a + \frac{a^2}{4} + 1$$

Cirkelns ekvation ger:

$$r^2 = a + \frac{a^2}{4} + 1, \quad r = 2$$

$$a + \frac{a^2}{4} + 1 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 - 4 * 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$$

pq-formeln:

$$a = -2 \pm \sqrt{2^2 + 12} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -6$$

Svar: $a_1 = 2$ eller $a_2 = -6$

5.29 a) (s.)

Skriv om ekvationen så den passar ellipsens ekvation och identifiera sedan radien och halvaxlarna.

$$\begin{aligned} 2x^2 + (y-1)^2 = 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

radien är $(0, 1)$ och halvaxlarna är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1

Svar: radie: $(0, 1)$, halvaxlar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1

b) (s.)

Kvadratkomplettera, skriv om ekvationen så den passar ellipsens ekvation och identifiera sedan radien och halvaxlarna.

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0 &\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x) + (y+1)^2 - 1^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2((x-2)^2 - 2^2) + (y+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 8 + (y+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-(-1)}{2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

radien är $(2, -1)$ och halvaxlarna är $\sqrt{2}$ och 2

Svar: radie: $(2, -1)$, halvaxlar: $\sqrt{2}$ och 2

5.30 (s.)

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow (y+1)^2 - 1^2 - (2x)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-(-1))^2 - (2(x-0))^2 = 1 \end{aligned}$$

Hyperbelns ekvation ger då att medelpunkten är $(0, -1)$.

Kolla sedan vad som händer när $x \rightarrow \infty$ för att bestämma lutningen på asymptoterna.

$$\begin{aligned} (y-(-1))^2 - (2(x-0))^2 = 1 &\Leftrightarrow (y+1)^2 = (2x)^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y+1 = \sqrt{(2x)^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \pm \sqrt{(2x)^2 + 1} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{(2x)^2} = \pm 2x \end{aligned}$$

Lutningen på asymptoterna är alltså $\pm 2x$ och eftersom de ska passera igenom medelpunkten blir ekvationen för respektive asymptot $y = 2x - 1$ samt $y = -2x - 1$.

Svar: medelpunkt: $(0, -1)$, asymptoter: $y = 2x - 1$ och $y = -2x - 1$

5.31 a) (s.)

Identifiera vilken andragsgradskurva det är (*hyperbel* eftersom en av x och y är negativ).

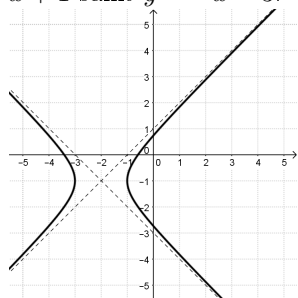
$$x^2 - y^2 + 4x - 2y = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 - ((y+1)^2 - 1^2) = -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$$

Medelpunkten är $(-2, -1)$ och eftersom det är y -termen som är negativ går linjerna på höger och vänster sida om asymptoterna.

Lutning på asymptoterna:

$$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \pm \sqrt{(x+2)^2 - 1} - 1 \Leftrightarrow y = \pm x$$

Lutningen på asymptoterna är alltså $\pm x$ och eftersom de ska passera igenom medelpunkten blir ekvationen för respektive asymptot $y = x + 1$ samt $y = -x - 3$.

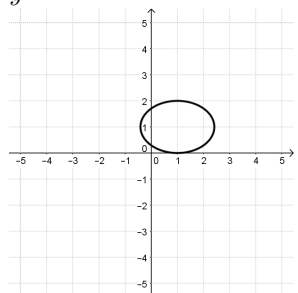


b) (s.)

Identifiera vilken andragsgradskurva det är (*ellips* eftersom x och y är positiva och det är ett ojämnt antal x^2 - och y^2 -termer).

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1^2 + 2((y+1)^2 - 1^2) = -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{1}\right)^2 = 1$$

Medelpunkten är $(1, 1)$ och halvaxlarna är $\sqrt{2}$ och 1 i x - respektive y -led.

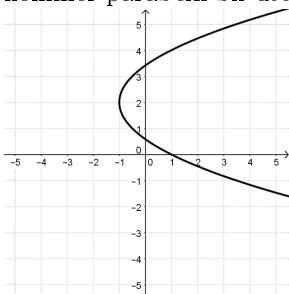


c) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*liggandes parabel* eftersom att en y^2 -term men inte en x^2 -term).

$$\begin{aligned} y^2 - 2x - 4y + 2 &= 0 \Leftrightarrow 2x = y^2 - 4y + 2 \Leftrightarrow 2x = (y - 2)^2 - 2^2 + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}(y - 2)^2 - 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y - 2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

Vertex är i punkten $(-1, 2)$ och eftersom faktorn i y -termen är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kommer parabeln bli utdragen med en faktor av det.

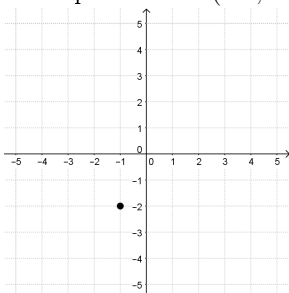


d) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*cirkel* eftersom x och y är positiva och det är ett jämnt antal x^2 - och y^2 -termer).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 &= 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1^2 + (y + 2)^2 - 2^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Medelpunkten är $(-1, -2)$ och radien är 0 (är en punkt).



5.32 (s.)

Lös det med hjälp av ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 &= 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} - x + 1 = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - x = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} &= 0 \end{aligned}$$

pq-formeln:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{12}{5}} = \frac{4}{10} \pm \sqrt{\frac{16 + 240}{100}} = \frac{4}{10} \pm \frac{16}{10} \\ \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} * 2 - 1 = 0 \\ x_2 = -\frac{6}{5} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{6}{5}\right) - 1 = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Punkterna är $(2, 0)$ och $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$.

Svar: $(2, 0)$ och $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$

5.33 (s.)

Skriv om den räta linjen som $y = kx + m$ med tvåpunktsformeln och använd sen ett ekvationssystem.

Tvåpunktsformeln:

$$y - 1 = \frac{4 - 1}{2 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{3}(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$$

Ekvationssystem:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y = 3 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2(x + 2)^2 + 6x + 4(x + 2) &= 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2(x^2 + 4x + 4) + 6x + 4x + 8 &= 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^2 - 8x - 8 + 10x + 8 &= 3 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

pq-formeln:

$$\begin{aligned} x &= -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = -1 \pm 2 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -3 + 2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Punkterna är $(1, 3)$ och $(-3, -1)$.

Svar: $(1, 3)$ och $(-3, -1)$

Kapitel 6: Komplexa tal

6.1 a) (s.)

$$2 + 3i$$

$$\operatorname{Re} z = 2 \text{ och } \operatorname{Im} z = 3$$

Svar: 2, 3

b) (s.)

$$-1 - i = -1 - 1i$$

$$\operatorname{Re} z = -1 \text{ och } \operatorname{Im} z = -1$$

Svar: -1, -1

c) (s.)

$$3 = 3 + 0i$$

$$\operatorname{Re} z = 3 \text{ och } \operatorname{Im} z = 0$$

Svar: 3, 0

d) (s.)

$$2i = 0 + 2i$$

$$\operatorname{Re} z = 0 \text{ och } \operatorname{Im} z = 2$$

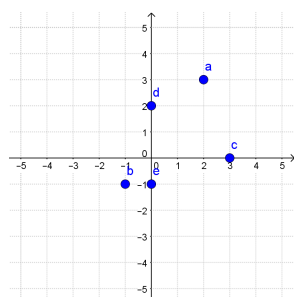
Svar: 0, 2

e) (s.)

$$-i = 0 + -1i$$

$$\operatorname{Re} z = 0 \text{ och } \operatorname{Im} z = -1$$

Svar: 0, -1



6.2 a) (s.)

$$(1 + i) + (-3 - 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - i$$

Svar: $-2 - i$

b) (s.)

$$(1+i) - (3-4i) = (1+i) + (-3+4i) = (1-3) + (1+4)i = -2+4i$$

Svar: $-2+4i$

c) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller parentesmultiplikation.

Räkneregeln:

$$\begin{aligned}(1+i)(3-4i) &= (1+i)(3+(-4)i) = (1*3 - 1*(-4)) + (1*(-4) + 1*3)i = \\ &= (3+4) + (-4+3)i = 7-i\end{aligned}$$

parentesmultiplikation:

$$(1+i)(3-4i) = 3-4i+3i-4i^2 = 3-i+4 = 7-i$$

Svar: $7-i$

d) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller kvadreringsregeln.

Räkneregeln:

$$\begin{aligned}(1-i)^2 &= (1+(-i))(1+(-i)) = \\ &= (1*1 - (-1)*(-1)) + (1*(-1) + (-1)*1)i = \\ &= (1-1) + (-1-1)i = -2i\end{aligned}$$

Kvadreringsregeln:

$$(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

Svar: $-2i$

e) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller parentesmultiplikation.

Räkneregeln:

$$\begin{aligned}(5 - 2i)^3 &= (5 + (-2i))(5 + (-2i))(5 + (-2i)) = \\&= ((5 * 5 - (-2) * (-2)) + (5 * (-2) + (-2) * 5)i)(5 + (-2i)) = \\&= ((25 - 4) + (-10 - 10)i)(5 + (-2i)) = (21 + (-20)i)(5 + (-2i)) = \\&= (21 * 5 - (-20) * (-2)) + (21 * (-2) + (-20) * 5)i = \\&= (105 - 40) + (-42 - 100)i = 65 - 142i\end{aligned}$$

parentesmultiplikation:

$$\begin{aligned}(5 - 2i)^3 &= 5^3 - 3 * 5^2 * 2i + 3 * 5 * (2i)^2 - (2i)^3 = \\&= 125 - 150i - 60 + 8i = 65 - 142i\end{aligned}$$

Svar: $65 - 142i$

f) (s.)

Uppgift d) ger att $(x - i)^2 = -2i$ (kan också lösas med båda metoderna som tidigare använts).

$$(x - i)^4 = ((x - i)^2)^2 = (-2i)^2 = 4 * (-1) = -4$$

Svar: -4

6.3 a) (s.)

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

Svar: $1 - i$

b) (s.)

$$\overline{3 - 5i} = 3 + 5i$$

Svar: $3 + 5i$

c) (s.)

$$\overline{-7} = -7$$

Svar: -7

d) (s.)

$$(1+i)\overline{(1+i)} = (1+i)(1-i) = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$$

Svar: $-2i$

e) (s.)

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

f) (s.)

$$|i| = |0+i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Svar: 1

g) (s.)

$$|3-2i| = |3+(-2)i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Svar: $\sqrt{13}$

h) (s.)

$$|-5i| = |0+(-5)i| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$$

Svar: 5

6.4 a) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{\overline{1+i}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Svar: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{\overline{3-4i}}{(3-4i)\overline{(3-4i)}} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Svar: $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

c) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\begin{aligned}\frac{3-4i}{1+i} &= \frac{(3-4i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-4i-4}{1^2+1} = \\ &= \frac{-1-7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\end{aligned}$$

Svar: $-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

d) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-i-1}{1^2+1} = \\ &= \frac{-2i}{2} = -i\end{aligned}$$

Svar: $-i$

e) (s.)

Förenkla och förläng med konjugatet.

$$\begin{aligned}(1+i)^{-2} &= \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1^2+2i+i^2} = \frac{1}{2i} = \\ &= \frac{\overline{2i}}{2i\overline{2i}} = \frac{-2i}{2i(-2i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Svar: $-\frac{1}{2}i$

f) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

Svar: $-i$

6.5 a) (s.)

Använd räknelagen $|zw| = |z||w|$ (upprepade gånger).

$$|(1-i)^{14}| = |1-i|^{14} = \sqrt{1^2+(-1)^2}^{14} = \sqrt{2}^{14} = 2^7 = 128$$

Svar: 128

b) (s.)

Använd räknelagen $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

$$\left| \frac{3+i}{4+3i} \right| = \frac{|3+i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Svar: $\frac{\sqrt{10}}{5}$

6.6 (s.)

Använd räknelagarna $|zw| = |z||w|$ och $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2}{(5+i)^2} \right| &= \frac{|(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2|}{|(5+i)^2|} = \frac{|1+2i||7+\sqrt{3}i|^2}{|5+i|^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{7^2+\sqrt{3}^2}^2}{\sqrt{5^2+1^2}^2} = \frac{\sqrt{5} * 52}{26} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Svar: $2\sqrt{5}$

6.7 (s.)

Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b var för sig.

$$\begin{aligned} z + 2\bar{z} &= 2 - i \Leftrightarrow (a + bi) + 2\overline{(a + bi)} = 2 - i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = 2 - i \Leftrightarrow 3a - bi = 2 - i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \\ -b = -1 \Leftrightarrow b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + i \end{aligned}$$

Svar: $z = \frac{2}{3} + i$

6.8 a) (s.)

Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b med ett ekvations-system.

$$\begin{aligned} 3z - i\bar{z} &= 7 - 5i \Leftrightarrow 3(a + bi) - i\overline{(a + bi)} = 7 - 5i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3a + 3bi - i(a - bi) = 7 - 5i \Leftrightarrow 3a + 3bi - ai - b = 7 - 5i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3a - b) + (3b - a)i = 7 - 5i \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}z : & 3a - b = 7 \Leftrightarrow b = 3a - 7 \\ \text{Im}z : & 3b - a = -5 \Leftrightarrow b = \frac{a-5}{3} \end{cases} \stackrel{\text{sub.met.}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 3a - 7 = \frac{a-5}{3} \Leftrightarrow 9a - 21 = a - 5 \Leftrightarrow 8a = 16 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b = 3 * 2 - 7 = -1 \Rightarrow z = 2 - i \end{aligned}$$

Svar: $z = 2 - i$

b) (s.)

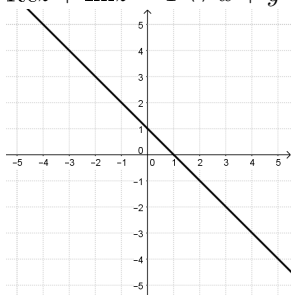
Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b med ett ekvations-system.

$$\begin{aligned} z * 2\bar{z} &= 1 + i \Leftrightarrow (a + bi) * 2\overline{(a + bi)} = 1 + i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(a + bi)(a - bi) = 1 + i \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) = 1 + i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Rez} : 2(a^2 + b^2) = 1 \\ \text{Im}z : 0 = 1 \Rightarrow \text{ekvationen saknar lösning} \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: saknar lösning

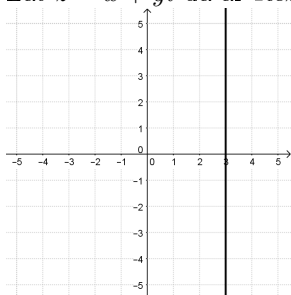
6.9 (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Rez} = x$ och $\text{Im}z = y$ vilket innebär att $\text{Rez} + \text{Im}z = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$



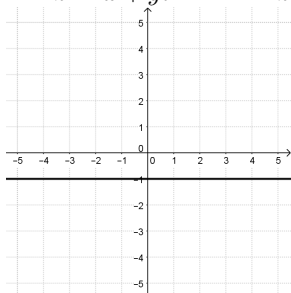
6.10 a) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Rez} = x$ vilket medför att $\text{Rez} = 3 \Leftrightarrow x = 3$



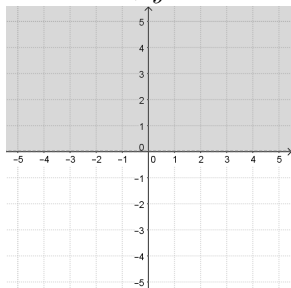
b) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Im}z = y$ vilket medför att $\text{Im}z = -1 \Leftrightarrow y = -1$



c) (s.)

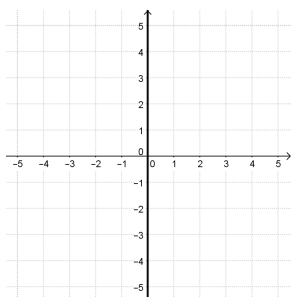
Låt $z = x + yi$ då är $\text{Im}z = y$ vilket medför att $\text{Im}z > 0 \Leftrightarrow y > 0$



d) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\bar{z} = x - yi$.

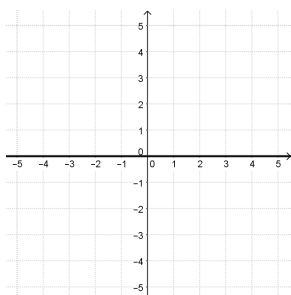
$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x + \cancel{yi} + x + \cancel{-yi} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



e) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\bar{z} = x - yi$.

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \cancel{x} + yi = \cancel{x} - yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0$$



6.11 (s.)

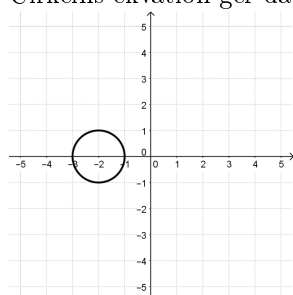
(taget från boken)

Eftersom $|z-u|$ anger avståndet från z till u , så är $|z+2| = |z-(-2)|$ avståndet från $|z|$ till $|-2|$. Relationen $|z+2| = 1$ är alltså uppfylld av alla z vars avstånd till -2 är 1, dvs. alla z på cirkeln med radie 1 och medelpunkt -2 .

Algebraisk lösning (låt $z = x + yi$):

$$|z+2| = 1 \Leftrightarrow |(x+2)+yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten -2 och radien 1.

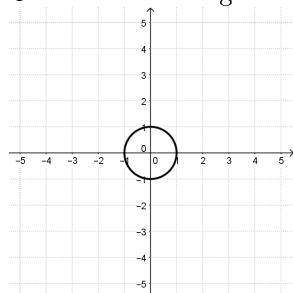


6.12 a) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 1.

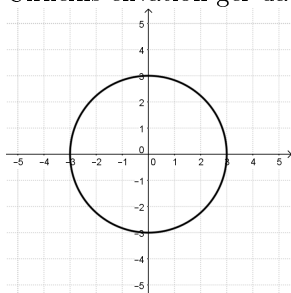


b) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 3.

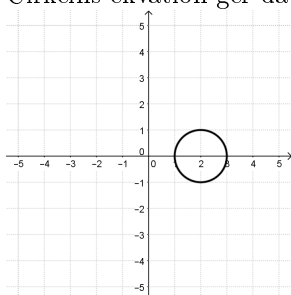


c) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z-2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2)+yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 2 och radien 1.

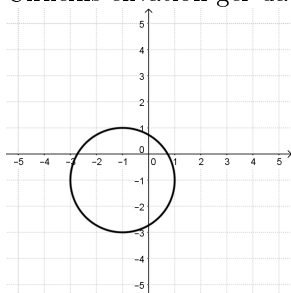


d) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} |z + 1 + i| = 2 &\Leftrightarrow |(x+1) + (y+1)i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten $-1 - i$ och radien 2.

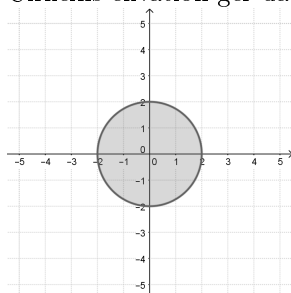


e) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 2.

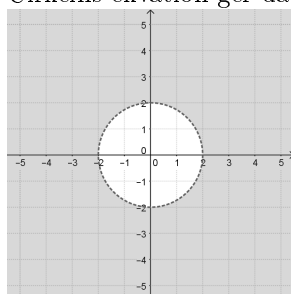


f) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 2.

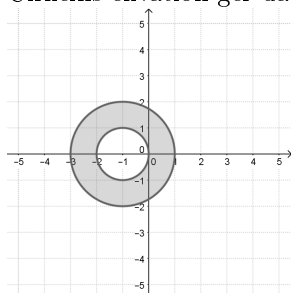


g) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} 1 \leq |z + 1| \leq 2 &\Leftrightarrow 1 \leq |(x + 1) + yi| \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq (x + 1)^2 + y^2 \leq 2^2 \end{aligned}$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten -1 och radien 1 och 2.



6.13 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{cases} |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow x + yi + x - yi = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden.

$$1^2 + (y - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 3 \Leftrightarrow y - 3 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{3}$$

$$z = 1 + (3 \pm \sqrt{3})i$$

Svar: $z = 1 + (3 \pm \sqrt{3})i$

6.14 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |z + 1| \Leftrightarrow |(x - 1) + yi| = |(x + 1) + yi| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ vilket motsvarar $\operatorname{Im} z$ -axeln.

Svar: alla z på $\operatorname{Im} z$ -axeln

6.15 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} |z - 1| &= 2|z + 1| \Leftrightarrow |(x - 1) + yi| = 2|(x + 1) + yi| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + \frac{5}{3})^2 - (\frac{5}{3})^2 + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + \frac{5}{3})^2 + y^2 = (\frac{4}{3})^2 \end{aligned}$$

Cirkelns ekvation ger medelpunkten $(-\frac{5}{3}, 0)$ och radien $\frac{4}{3}$.

Svar: Alla z på cirkeln med medelpunkten $(-\frac{5}{3}, 0)$ och radien $\frac{4}{3}$

6.16 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \left| \frac{4-z}{4z} \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{|4-z|}{|4z|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{|4-z|}{|z|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{|4-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |(4-x) + (-y)i| = |x-yi| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 8x + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} z = 2$ och $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ vilket motsvarar linjen $\operatorname{Re} z = 2$.

Svar: Alla z på linjen $\operatorname{Re} z = 2$

6.17 (s.)

Låt $z = x + yi$. Påståendet är sant när den imaginära delen av uttrycket är noll.

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{(z^2 + 1)\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{((x + yi)^2 + 1)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \\ &= \frac{(x^2 + 2xyi - y^2 + 1)(x - yi)}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^3 - x^2yi + 2x^2yi + 2xy^2 - xy^2 + y^3i + x - yi}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^3 + x^2yi + xy^2 + y^3i + x - yi}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Imaginära delen:

$$\begin{aligned} x^2y + y^3 - y &= 0 \Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \text{faktorsatsen: } &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$y = 0$ är $\operatorname{Re} z$ -axeln men eftersom uttrycket inte är definierat för $z = 0$. $x^2 + y^2 = 1$ är enhetscirkeln.

Svar: Alla talen på $\operatorname{Re} z$ -axeln utom $z = 0$ och alla talen på enhetscirkeln.

Polär form

6.18 a) (s.)

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} i = 1 + i$$

Svar: $1 + i$

b) (s.)

$$1 \cos \pi + i * 1 \sin \pi = 1 * (-1) + 1 * 0 * i = -1$$

Svar: -1

c) (s.)

$$\sqrt{2} \cos \frac{9\pi}{4} + i \sqrt{2} \sin \frac{9\pi}{4} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} i = 1 + i$$

Svar: $1 + i$

d) (s.)

$$1 \cos \frac{\pi}{2} + i * 1 \sin \frac{\pi}{2} = 1 * 0 + 1 * 1 * i = i$$

Svar: i

e) (s.)

$$1 \cos 2\pi + i * 1 \sin 2\pi = 1 * 1 + 1 * 0 * i = 1$$

Svar: 1

f) (s.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos -\frac{\pi}{4} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i = \frac{1}{2}(1-i)$$

Svar: $\frac{1}{2}(1-i)$

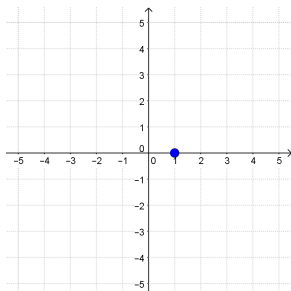
g) (s.)

$$1 \cos 100\pi + i * 1 \sin 100\pi = 1 * 1 + 1 * 0 * i = 1$$

Svar: 1

6.19 a) (s.)

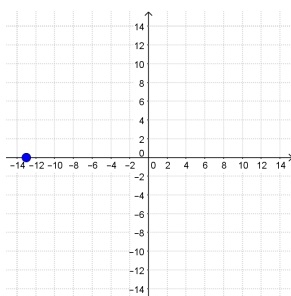
$$|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad 1 = 1 * \cos 0 \Rightarrow \arg z = 0, \quad z = e^{i0}$$



Svar: $|z| = 1$, $\arg z = 0$, $z = e^{i0}$

b) (s.)

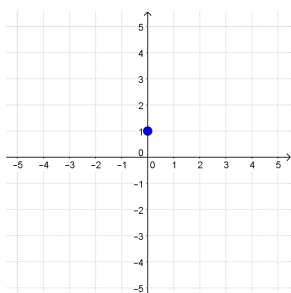
$$|z| = \sqrt{(-13)^2 + 0^2} = 13, \quad 13 = 13 * \cos \pi \Rightarrow \arg z = \pi, \quad z = 13e^{i\pi}$$



Svar: $|z| = 13$, $\arg z = \pi$, $z = 13e^{i\pi}$

c) (s.)

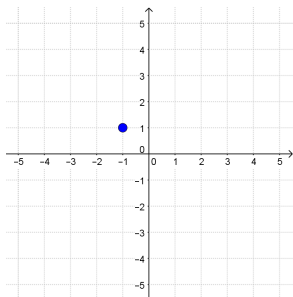
$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad 1 = i * 1 * \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}, \quad z = e^{i\pi/2}$$



Svar: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, $z = e^{i\pi/2}$

d) (s.)

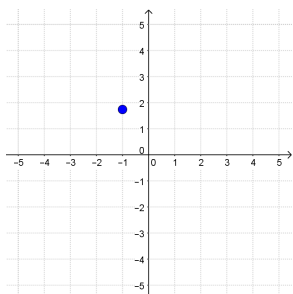
$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, & -1 + i &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \arg z = \frac{3\pi}{4}, & z &= \sqrt{2}e^{i3\pi/4}\end{aligned}$$



Svar: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

e) (s.)

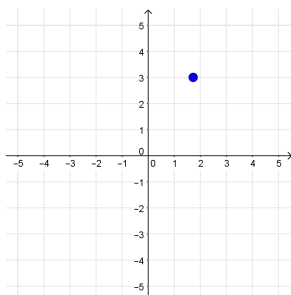
$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, & \sqrt{3}i - 1 &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \arg z = \frac{2\pi}{3}, & z &= 2e^{i2\pi/3}\end{aligned}$$



Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, $z = 2e^{i2\pi/3}$

f) (s.)

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}$$



Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, $z = 2e^{i2\pi/3}$

6.20 a) (s.)

$$z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $|e^{i\theta}| = 1$.

$$z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} = e^{i\frac{\pi}{8}} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

b) (s.)

$$z = \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $|e^{i\theta}| = 1$.

$$z = \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} = e^{i\frac{9\pi}{5}} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

c) (s.)

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $|e^{i\theta}| = 1$.

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

6.21 a) (s.)

Använd att $|e^{i\theta}| = 1$, det kvittar alltså vilken vinkel det är.

$$|e^{i\frac{\pi}{8}}| = 1$$

Svar: 1

b) (s.)

Använd att $|e^{i\theta}| = 1$, det kvittar alltså vilken vinkel det är.

$$|e^{i\frac{9\pi}{5}}| = 1$$

Svar: 1

c) (s.)

Använd att $|e^{i\theta}| = 1$.

$$|e^{i\theta}| = 1$$

Svar: 1

6.22 a) (s.)

Utnyttja att $e^{i\varphi} * e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$ (potensregel).

$$z = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad w = k_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$zw = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}} * k_2 e^{i\frac{\pi}{4}} = k_1 k_2 e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = k_1 k_2 e^{i\frac{7\pi}{12}} \Rightarrow \arg zw = \frac{7\pi}{12}$$

Svar: $\arg zw = \frac{7\pi}{12}$

b) (s.)

Utnyttja att $e^{i\varphi} * e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$ samt att $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ vilket i sin tur medför att $e^{i\varphi}/e^{i\theta} = e^{i\varphi} * e^{-i\theta} = e^{i(\varphi-\theta)}$ (potensregel).

$$z = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad w = k_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$zw = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}} / k_2 e^{i\frac{\pi}{4}} = k_1 k_2 e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = k_1 k_2 e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow \arg zw = \frac{\pi}{12}$$

Svar: $\arg zw = \frac{\pi}{12}$

c) (s.)

Tänk dig att du har två imaginära tal är det ena, z , har argumentet (vinkeln) 0 och den andra, w , har argumentet π men att absolutbeloppen (längderna) inte är angivna. Om z 's absolutbelopp är större än w 's kommer summan ha samma argument som z . Om w 's absolutbelopp däremot är större än z 's kommer summan ha samma argument som w . Man kan alltså inte säga vilket argument summan eller differensen kommer ha.

Svar: Nej det kan man inte.

6.23 (s.)

låt $z = k e^{i\pi/3}$.

$$z^{2000} = (k e^{i\pi/3})^{2000} = k^{2000} e^{i2000\pi/3}$$

Skriv om argumentet i formen $x\pi + n2\pi$ så man kan bryta ut perioden. Eftersom $x\pi + n2\pi = x\pi$ så är det x som är intressant

$$\frac{2000\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{1998}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + 666\pi = \frac{2}{3}\pi + 333 * 2\pi = x\pi + n2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}, \quad n = 333$$

$$\arg z^{2000} = \frac{2}{3}\pi, \quad 0 \leq \arg z^{2000} \leq 2\pi$$

Svar: $\frac{2}{3}\pi$

6.24 (s.)

Då argumentet är det enda som är intressant kan alla faktorer skrivas ihop som k .

$$\begin{aligned} \frac{1 + i\sqrt{3}}{(2 - 2i)^3} &= \frac{2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i))^3} = k \frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{(\cos - \frac{\pi}{4} + i \sin - \frac{\pi}{4})^3} = \\ &= k \frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i3\pi/4}} = k e^{i\pi/3 - (-i3\pi/4)} = k e^{i13\pi/12} \end{aligned}$$

$$\arg z = \frac{13}{12}\pi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $\frac{13}{12}\pi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

6.25 (s.)

Då argumentet är det enda som är intressant kan alla faktorer skrivas ihop som k .

$$\begin{aligned} \frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} &= \frac{2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3i\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})} = \\ &= k \frac{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{i\sin\frac{\pi}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))} = k \frac{e^{i\pi/4}e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/2}e^{-i\pi/6}} = \\ &= ke^{i(\pi/4+\pi/3-\pi/2-(-\pi/6))} = ke^{i(3\pi/12+4\pi/12-6\pi/12+2\pi/12)} = \\ &= ke^{i3\pi/12} = ke^{i\pi/4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arg \frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} &= \arg ke^{i\pi/4} = \frac{\pi}{4} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{4} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

6.26 a) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg(1+2iw) = \arctan \frac{2w}{1} = \arctan 2w$$

Svar: $\arctan 2w$

b) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg(-1+2iw) = \pi + \arctan \frac{2w}{-1} = \pi + \arctan(-2w) = \pi - \arctan 2w$$

Svar: $\pi - \arctan 2w$

c) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \quad \arg(1+2iw) = \arctan 2w \quad (\text{se a)})$$

$$\arg\left(\frac{1}{1+2iw}\right) = \arg 1 - \arg(1+2iw) = 0 - \arctan 2w = -\arctan 2w$$

Svar: $-\arctan 2w$

d) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \quad \arg(-1 + 2iw) = \pi - \arctan 2w \text{ (se b)}$$

$$\arg\left(\frac{1}{-1 + 2iw}\right) = \arg 1 - \arg(-1 + 2iw) = 0 - (\pi - \arctan 2w) = \arctan 2w - \pi$$

Svar: $\arctan 2w - \pi$

e) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \quad \arg(1 + 2iw) = \arctan 2w \text{ (se a)}$$

$$\arg\left(\frac{1}{(1 + 2iw)^2}\right) = \arg 1 - 2 \arg(1 + 2iw) = 0 - 2 \arctan 2w = -2 \arctan 2w$$

Svar: $-2 \arctan 2w$

f) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z . Eftersom $\operatorname{Re} z$ motsvarar x-axeln och $\operatorname{Im} z$ motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Om $a > 0$ är $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

$$\arg(e^{iw}) = w, \quad \arg(1 + 2iw) = \arctan 2w \text{ (se a)}$$

$$\arg\left(\frac{e^{iw}}{(1 + 2iw)^2}\right) = \arg(e^{iw}) - 2 \arg(1 + 2iw) = w - 2 \arctan 2w$$

Svar: $w - 2 \arctan 2w$

6.27 (s.)

Använd faktumet att både sinus och cosinus har perioden 2π .

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{100} = (e^{i\pi/3})^{100} = e^{i100\pi/3} = \\ &= e^{i(102\pi/3 - 2\pi/3)} = e^{i\pi(17 \cdot 2\pi - 2\pi/3)} = e^{-i2\pi/3} = \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

6.28 (s.)

Använd de Moivres formel och identifiera sedan den reella och imaginär delen var för sig.

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i \sin 4\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \\ &= \cos^4 \theta + i4 \cos^3 \theta \sin \theta + i^2 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + i^3 4 \cos \theta \sin^3 \theta + i^4 \sin^4 \theta = \\ &= (\cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) + i(4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\ \sin 4\theta &= 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta\end{aligned}$$

Svar: se ovan

6.29 (s.)

Eulers formler:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \frac{1}{2i}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = \\ &= \frac{1}{4i}(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2i}(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) - \frac{1}{2i}(e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}) \right) = \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$

6.30 (s.)

Använd Eulers formel för sinus.

$$\begin{aligned}\sin^4 \theta &= \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 = \\ &= \frac{1}{16}(e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}) = \\ &= \frac{1}{16}(e^{i4\theta} - 4e^{i2\theta} + 6e^0 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) = \\ &= \frac{1}{8}\left(6\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + \frac{1}{2}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta})\right) = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta\end{aligned}$$

Svar: $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$

6.31 a) (s.)

Att addera $\pi/2$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i\pi/2}$ vilket innebär att $1 * e^{i\pi/2} = i$.

Svar: i

b) (s.)

Att addera $\pi/2$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i\pi/2}$ vilket innebär att:

$$(-3 + 2i)e^{i\pi/2} = (-3 + 2i)i = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$$

Svar: $-2 - 3i$

6.32 a) (s.)

Att addera $5\pi/6$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i5\pi/6}$ och talet förstoras i skalan 3 genom att multiplicera med 3 vilket innebär att:

$$1e^{i5\pi/6} * 3 = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Svar: $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

b) (s.)

Att addera $5\pi/6$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i5\pi/6}$ och talet förstoras i skalan 3 genom att multiplicera med 3 vilket innebär att:

$$\begin{aligned} (-1 + i)e^{i5\pi/6} * 3 &= (-1 + i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) * 3 = \\ &= (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}) * 3 = 3(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i) = \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}i \end{aligned}$$

Svar: $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}i$

6.33 (s.)

Först måste förstoringen och vridningen identifieras. Dessa kan dock göras tillsammans eftersom båda ändå ska multipliceras med hörnen. $2(a + bi) = 7 + i \Rightarrow a = \frac{7}{2}, b = \frac{1}{2}$. $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$ är alltså faktorn alla hörnen ska multipliceras med.

$$0(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = 0$$

$$\begin{aligned} (2 + i)(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) &= 7 + i + \frac{7}{2}i - \frac{1}{2} = \frac{13}{2} + \frac{9}{2}i \\ i(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) &= \frac{7}{2}i + \frac{1}{2}i^2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i \end{aligned}$$

Svar: $0, \frac{13}{2} + \frac{9}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

6.34 a) (s.)

$$e^0 = 1$$

Svar: 1

b) (s.)

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

Svar: i

c) (s.)

$$\begin{aligned} e^{1/2 \ln 2 + i\pi/4} &= e^{1/2 \ln 2} e^{i\pi/4} = \sqrt{e^{\ln 2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 1 + i \end{aligned}$$

Svar: $1 + i$

d) (s.)

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

Svar: -1

e) (s.)

$$e^{3-i} = e^3 e^{-i} = e^3 (\cos(-1) + i \sin(-1)) = e^3 \cos 1 - i e^3 \sin 1$$

Svar: $e^3 \cos 1 - i e^3 \sin 1$

6.35 a) (s.)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1^2 + 2ix + (ix)^2}{1+x^2} = \\ &= \frac{1+2xi-x^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} i \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \operatorname{Im} f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Svar: $\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}$

b) (s.)

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(-1+i)x} = e^{-x+ix} = e^{-x}e^{ix} = e^{-x}(\cos x + i \sin x) = \\ &= e^{-x} \cos x + ie^{-x} \sin x \end{aligned}$$

$$\operatorname{Reg}(x) = e^{-x} \cos x, \quad \operatorname{Im} f(x) = e^{-x} \sin x$$

Svar: $e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x$

6.36 (s.)

Använd $|e^{i\theta}| = 1$ samt att e^x alltid är positivt oberoende av vad x är.

$$\begin{aligned} |e^{x+yi}| &= |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = |e^x| = e^x \\ \arg e^{x+yi} &= \arg(e^x e^{iy}) = y + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Svar: $y + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Polynomekvationer

6.37 a) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a + bi)^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |5 + 12i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 5 + 13 \Leftrightarrow 2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

$$9 + b^2 = 13 \Leftrightarrow b^2 = 13 - 9 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

Ekvationen $2ab = 12$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $3 + 2i$ samt $-3 - 2i$.

Svar: $3 + 2i$ och $-3 - 2i$

b) (s.)

$$z^2 - (2 + 2i)z - 5 - 10i = 0$$

Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$$z^2 - (2 + 2i)z - 5 - 10i = (z - (1 + i))^2 - 2i - 5 - 10i = (z - 1 - i)^2 - 5 - 12i$$

Låt $w = z - 1 - i = a + bi$.

$$(a + bi)^2 - 5 - 12i = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 5 + 12i$$

Se uppgift a) och för lösning till ekvationen.

$$\begin{cases} w_1 = 3 + 2i \Leftrightarrow 3 + 2i = z_1 - 1 - i \Leftrightarrow z_1 = 4 + 3i \\ w_2 = -3 - 2i \Leftrightarrow -3 - 2i = z_2 - 1 - i \Leftrightarrow z_2 = -2 - i \end{cases}$$

Svar: $4 + 3i$ och $-2 - i$

6.38 a) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a + bi)^2 = -i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -1 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a + bi)^2| = |-i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ekvationen $2ab = -1$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har olika tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ samt $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ som kan skrivas $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$.

Svar: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

b) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a + bi)^2 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = \sqrt{3} \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |1+i\sqrt{3}| \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{1+3} = 2$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 1 + 2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{2} + b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ekvationen $2ab = \sqrt{3}$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ samt $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Svar: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i)$ (vilket är lika med det i facit)

c) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a + bi)^2 = 4i + 3 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |3+4i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{9+16} = 5$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 3 + 5 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

$$4 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Ekvationen $2ab = 4$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $2 + i$ samt $-2 - i$.

Svar: $\pm(2 + i)$

6.38 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

6.40 (s.)

Svar:

6.41 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

e) (s.)

Svar:

f) (s.)

Svar:

6.42 (s.)

Svar:

6.43 (s.)

Svar:

6.44 (s.)

Svar:

6.45 (s.)

Svar:

6.46 (s.)

Svar:

6.47 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

6.48 (s.)

Svar:

6.49 (s.)

Svar:

6.50 (s.)

Svar:

6.51 (s.)

Svar:

6.52 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

6.53 (s.)

Svar:

6.54 (s.)

Svar:

Blandade problem

6.55 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

6.56 (s.)

Svar:

6.57 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

6.58 (s.)

Svar:

6.59 (s.)

Svar:

6.60 (s.)

Svar:

6.61 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

6.62 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

6.63 (s.)

Svar:

6.64 (s.)

Svar:

6.65 (s.)

Svar:

6.66 (s.)

Svar:

6.67 (s.)

Svar:

6.68 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar: