Endimensionell analys
HT-2015

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2015–09–23

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Om jag skriver ”alla tal” syftar jag på alla reella tal.

Talsystem

1.1 a) (s. 1)

De naturliga talen ($\mathbb{N}$) innefattar alla heltal som är noll eller större. $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{3}{0.1} = 30$, $\frac{0}{5} = 0$.

Svar:

$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{0}{5}$$

b) (s. 1)

De hela talen ($\mathbb{Z}$) inkluderar de naturliga talen ($\mathbb{N}$) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15$.

Svar:

$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$$

c) (s. 2)

Rationella tal ($\mathbb{Q}$) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen ($\mathbb{Z}$)). $3 = \frac{3}{1}$ osv...

Svar:

$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3}\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$$

d) (s. 2)

Reella tal ($\mathbb{R}$) är alla ”vanliga” tal (inte de komplexa talen ($\mathbb{C}$)).

Svar:

$$\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3},\ \sqrt{2},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5},\ \pi$$

1.2 (saknar sida)

Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal i plus ett rationellt tal r_1 blir det rationella talet r_2. $i + r_1 = r_2 \Rightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

Svar: Nej, båda blir irrationella.

Mängder och intervall

1.3 (s. 4)

$M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.
M_2 är alla tal större än eller lika med 0.
M_3 är alla tal större än eller lika med 1.
$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom M_4 är alla tal ingår $M_1,\ M_2,\ M_3$ i mängden. M_3 är även en delmängd av M_2.

Svar:

$$M_1 \subseteq M_4, \quad M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$$

Implikationer och ekvivalens

1.4 (s. 5-6)

Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att A och C är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än -4 i C implicerar både A och C B

Svar:

$$A \Leftrightarrow C, \quad C \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow B$$

1.5 a) (s. 5-6)

Om A är sant är B sant men om B är sant behöver inte A vara sant. Detta eftersom $a = 1,\ b = -1$ är sant för B men inte för A. A implicerar alltså B. C går att förenkla till $a = b$ genom att dela på b det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan A implicerar C. C och B är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C$$

b) (s. 5-6)

Eftersom specialfallen som nämns i `a)` båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är A, B och C ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i D får man A vilket medför att även D är ekvivalent med alla andra utsagor.

Svar: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 (s. 5-6)

A ger sant för alla tal större än noll. B ger sant för alla tal utom noll. C ger sant för alla tal utom noll. D ger sant för alla tal större än noll.

A och D är alltså ekvivalenta, lika så B och C. $A \subseteq B$ medför då att A och D implicerar både B och C.

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D, \quad B \Leftrightarrow C$$

`1.7 (s. 5-6)`

$$\begin{aligned}
&A: \ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2, \ x_2 = 1 \\
&B: \ |x-2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 3 \\
&C: \ x \geq 1 \\
&D: \ lnx + ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1
\end{aligned}$$

D ingår i alla andra vilket medför att D implicerar alla andra. Eftersom svaren i både A och B är större än eller lika med 1 implicerar A och B C.

Svar:

$$D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

`1.8 (s. 5-6)`

$$\begin{aligned}
&A: \ x \geq 0 \\
&B: \ \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\
&C: \ e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\
&D: \ |x-2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1, \ x - 2 > -1 \Leftrightarrow 1 < x < 3
\end{aligned}$$

Alla implicerar C eftersom C är alla tal. D är en delmängd av B som i sin tur är en delmängd av A. D implicerar alltså A och B och B implicerar A.

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.9 (s. 5-6)

$$
\begin{aligned}
&A: \ |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\
&B: \ e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\
&C: \ \cos x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\
&D: \ \ln(1 + x^2) > 0 \Leftrightarrow 1 + x^{>} e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1 - 1 \Leftrightarrow x \neq 0
\end{aligned}
$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), A och B är alltså inte samma mängd. C implicerar inte D eftersom C innehåller 0 vilket D inte gör. A och D är däremot ekvivalenta och implicerar C.

Svar:

$$B \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D$$

1.10 (s. 5-6)

Låt x representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq \ x \leq \ 10$, $x \in \mathbb{N}$).

$$
\begin{aligned}
&A: \ x = 5 \\
&B: \ x \leq 4 \\
&C: \ x \geq 3 \\
&D: \ x \geq 5 \\
&E: \ x \leq 8
\end{aligned}
$$

A är alltså en delmängd av C, D och E. B är en delmängd av E och D är en delmängd av C.

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow D, \quad A \Rightarrow E, \quad B \Rightarrow E, \quad D \Rightarrow C$$

1.11 (s. 5-6)

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallellogram och en parallellogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.
Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallellogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

Svar:

$$A \Rightarrow C, \ B \Rightarrow A, \ B \Rightarrow C, \ D \Rightarrow A, \ D \Rightarrow C, \ E \Rightarrow A, \ E \Rightarrow C, \ E \Rightarrow B, \ E \Rightarrow D$$

Kapitel 2: Algebra

Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:
$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} + 6x + 9) = -6x - 18$
eller
$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x}-3)-(\cancel{x}+3)) = -6(x+3) = -6x - 18$

Svar: $-6x-18$

b) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:
$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} - 6x + 9) = 6x - 18$
eller
$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3)-(\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x-18$

Svar: $6x-18$

c) (s. 10-11)

$$(3x+5)^2-(3x-5)^2 = \cancel{9x^2} + 30x + \cancel{25} - (\cancel{9x^2} - 30x + \cancel{25}) = 60x$$

Svar: $60x$

2.2 (saknar sida)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Svar: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 (s. 11)

Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b}\\
(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32}\\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \quad VSB.
\end{aligned}$$

2.4 (s. 12)

faktorisera och förenkla:

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2 * 2}{3 * 3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{14} = \frac{\cancel{2} * 2}{\cancel{2} * 7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{48}{168} = \frac{2 * \cancel{2 * 2 * 2 * 3}}{\cancel{2 * 2 * 2 * 3} * 7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{24}{84} = \frac{2 * \cancel{2 * 2 * 3}}{\cancel{2 * 2 * 3} * 7} = \frac{2}{7}$$

multipicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

Svar:

$$\frac{2}{7}, \quad \frac{4}{14}, \quad \frac{48}{168}, \quad \frac{24}{84}$$

2.5 a) (s. 12-14)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14}\right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar:

$$-\frac{10}{7}$$

b) (s. 12-14)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12}\right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Svar:

$$-\frac{1}{4}$$

2.6 a) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60}+\frac{1}{108}-\frac{1}{72} &= \frac{1}{5*3*2*2}+\frac{1}{9*3*2*2}-\frac{1}{6*3*2*2}=\\ &=\frac{1*9*6}{5*12*9*6}+\frac{1*5*6}{9*12*5*6}-\frac{1*9*5}{6*12*9*5}\\ &=\frac{54}{3240}+\frac{30}{3240}-\frac{45}{3240}=\frac{39}{3240}=\frac{13}{1080}\end{aligned}$$

Svar:

$$\frac{13}{1080}$$

b) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=\frac{27}{36}-\frac{30}{36}+\frac{4}{36}=\frac{1}{36}$$

Svar:

$$\frac{1}{36}$$

c) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35}-\frac{1}{25}+\frac{1}{63}-\frac{1}{245}=\frac{6}{245}-\frac{1}{25}+\frac{1}{63}=\frac{89}{2205}-\frac{1}{25}=\frac{445}{11025}-\frac{441}{11025}=\frac{4}{11025}$$

Svar:

$$\frac{4}{11025}$$

2.7 a) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}}=\frac{\cancel{a}*4}{2*\cancel{a}}=\frac{4}{2}=2$$

Svar: 2

b) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}}=\frac{a*a}{2*4}=\frac{a^2}{8}$$

Svar:

$$\frac{a^2}{8}$$

c) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\cancel{14}^{2}a(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = 12a$$

Svar: $12a$

d) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a+3)^{-2}$$

Svar: $(a+3)^{-2}$ eller $\dfrac{1}{(a+3)^2}$

2.8 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{3}{5x}-\frac{x}{15}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{45-5x^2}{75x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{\cancel{3x}(45-5x^2)}{\cancel{75x}^{25}(3-x)} = \frac{45-5x^2}{75-25x} =$$

$$= \frac{\cancel{5}(9-x^2)}{\cancel{5}(15-5x)} = \frac{9-x^2}{15-5x} = \frac{(3+x)\cancel{(3-x)}}{5\cancel{(3-x)}} = \frac{3+x}{5}$$

Svar: $\dfrac{3+x}{5}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop $1+\frac{1}{x^2}$. Utnyttja sedan reglerna för division.

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\cancel{(x^2+1)}x^2}{\cancel{(x^2+1)}} = x^2$$

Svar: x^2

c) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera ut -1.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{(y-x)(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}(x^2-y^2)} = \frac{(y-x)(xy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{\cancel{(y-x)}(xy)}{-\cancel{(y-x)}(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}$$

Svar: $-\dfrac{xy}{x+y}$

2.9 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och den andra kvadreringsregeln bakvänt.

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\frac{\frac{x^2-y^2}{yx}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{yx}}=\frac{\cancel{yx}(x+y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{yx}(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{x+y}{x-y}$$

Svar: $\dfrac{x+y}{x-y}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och konjugatregeln bakvänt två gånger.

$$\frac{\frac{16x^4}{81}-y^4}{\frac{2x}{3}+y}=\frac{\frac{16x^4-81y^4}{81}}{\frac{2x+3y}{3}}=\frac{\cancel{3}(16x^4-81y^4)}{\cancelto{27}{81}(2x+3y)}=\frac{(4x^2+9y^2)(4x^2-9y^2)}{27(2x+3y)}=$$

$$=\frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}}=\frac{8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3}{27}=$$

$$=\frac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$$

eller

$$\dots\frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}}=\frac{(4x^2+9y^2)(2x-3y)}{9*3}=$$

$$=\frac{4x^2+9y^2}{9}*\frac{2x-3y}{3}=(\frac{4x^2}{9}+y^2)(\frac{2x}{3}-y)$$

Svar: $\dfrac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$ eller $(\dfrac{4x^2}{9}+y^2)(\dfrac{2x}{3}-y)$

c) (s. 12-14)

Skriv ihop de övre och undre bråken.

$$\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}}=\frac{(x-\cancel{1}+x+\cancel{1})\cancel{(x+1)(x-1)}}{(\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1))\cancel{(x+1)(x-1)}}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x$$

Svar: x

2.10 a) (s. 13-14)

Sätt in i formeln och förläng till minsta gemensamma nämnare.

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{R}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{R}=\frac{13}{12}\Leftrightarrow R=\frac{12}{13}\Omega$$

Svar: $\dfrac{12}{13}\Omega$

b) (s. 13-14)

Använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{R+5}{5R} \Leftrightarrow 5x = 3R + 15 \Leftrightarrow 2R = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{2}\Omega$$

Svar: $\frac{12}{13}\Omega$

2.11 (s. 13-14)

Sätt in i formel och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{600} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{600+a}{600a} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 60000 + 100a = 600a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 500a = 60000 \Leftrightarrow a = \frac{60000}{500} = 120mm$$

Svar: $120mm$

2.12 (s.)

utnyttja att $1 = 2/2 = 3/3$ osv. och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Svar: $\frac{3}{5}$

Kvadratrötter och potenser

2.13 (s. 16-17)

Förläng med konjugatet för att bli av med roten i nämnaren.

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5}{4-5} = -(6-\sqrt{5}-5) = \sqrt{5}-1$$

Svar: $\sqrt{5}-1$

2.14 a) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{9-2} = \frac{\cancel{7}+\cancel{7}\sqrt{2}}{\cancel{7}} = 1+\sqrt{2}$$

Svar: $1+\sqrt{2}$

b) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{13-11} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$

c) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{2}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

Svar: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

2.15 a) (s. 17)

Faktorisera ena roten för att få samma rot i båda termerna.

$$\sqrt{12}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-\sqrt{3} = \sqrt{3}(2-1) = \sqrt{3}$$

Svar: $\sqrt{3}$

b) (s. 17)

faktorisera täljaren.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{6}}\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \sqrt{7}$$

eller utnyttja reglerna för division med rötter.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$$

Svar: $\sqrt{7}$

c) (s. 17)

Faktorisera.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3} * \sqrt{3} * \sqrt{4} = 3 * 2 = 6$$

eller utnyttja reglerna för multiplikation med rötter.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3 * 12} = \sqrt{36} = 6$$

Svar: 6

d) (s. 17)

Faktorisera termerna i täljaren och skriv ihop.

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

e) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{3^2+4^2}-4-3 = \sqrt{25}-7 = 5-7 = -2$$

Svar: -2

f) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Svar: 13

2.16 a) (s. 17)

Faktorisera rötterna så alla termerna får $\sqrt{2}$ gemensamt.

$$\frac{\sqrt{168}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}+\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(9+7)}{\cancel{\sqrt{2}}(5+1)} = \frac{9+7}{5+1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Svar: $\frac{8}{3}$

b) (s. 17)

Kvadrera under ”roten ur”-tecknet först (minustecknet försvinner).

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

Svar: 1

c) (s. 17)

Skriv först ihop termerna utnyttja sedan reglerna för multiplikation av rötter.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Eller så används den andra kvadreringsregeln.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12-2*\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3} = 12-2*\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{1}{3} = 12-4+\frac{1}{3} = 8+\frac{1}{3} = \frac{24+1}{3} = \frac{25}{3}$$

Svar: $\frac{25}{3}$

d) (s. 17)

Använd konjugatregeln och sen kvadreringsregeln.

$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y}) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y) = x+2\sqrt{xy}+y-x-y = 2\sqrt{xy}$

Svar: $2\sqrt{xy}$

2.17 (s. 17)

$$\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9*2*4*3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3\sqrt{2}}*2\sqrt{3}}{\cancel{3\sqrt{2}}} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{\sqrt{9*4*3}}{3} = \frac{\cancel{3}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4*3} = 2\sqrt{3}$$

Svar: Möjligt att någon får poängavdrag på grund av att hen inte förenklat, alla är dock samma tal.

2.18 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$3^4 * 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6$$

Svar: 3^6

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$2^7 * 2^{-3} = 2^{7-3} = 2^4$$

Svar: 2^4

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$4^2 * 4^{-5} * 4 = 4^{2-5+1} = 4^{-2}$$

Svar: 4^{-2}

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

Svar: 3^4

e) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}$$

Svar: 4^{-4}

f) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}$$

Svar: 2^{-12}

2.19 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$3^5 * 10^5 * 3^{-3} * 10^3 = 3^{5-3} * 10^{5+3} = 3^2 * 10^8 = 9 * 10^8$$

Svar: $9 * 10^8$

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$\frac{2^8 * 5^6}{2^6 * 5^5} = 2^{8-6} * 5^{6-5} = 2^2 * 5 = 4 * 5 = 20$$

Svar: 20

c) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig och utnyttja sedan att $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\frac{2^4 * 10^4}{2 * 10^5} = 2^{4-1} * 10^{4-5} = 2^3 * 10^{-1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Svar: $\dfrac{4}{5}$

2.20 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$b^{-0.2} * b^{1.7} * b^{-2.5} = b^{1.7-2.5-0.2} = b^{-1}$$

Svar: b^{-1}

`b) (s. 18-19)`

Använd räkneregler för potenser.

$$(a^3)^{-0.5} * (a^{-5})^{-0.3} = a^{3*(-0.5)+(-5)*(-0.3)} = a^{-1.5+1.5} = a^0 = 1$$

Svar: 1

`c) (s. 18)`

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a}{a^{-3.7} * a^{0.5}} = a^{1-(-3.7)-0.5} = a^{4.2}$$

Svar: $a^{4.2}$

`d) (s. 18)`

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{x * x^{-1.6} * x^{0.2}}{x^{-1.4}} = \frac{x^{1-1.6+0.2}}{x^{-1.4}} = x^{1-1.6+0.2-(-1.4)} = x$$

Svar: x

`2.21 a) (s. 18-20)`

Faktorisera 6 och använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^2 * 2^4}{6^3} = \frac{3^2 * 2^4}{3^3 * 2^3} = 3^{2-3} * 2^{4-3} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

`b) (s. 20-21)`

Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar ”roten ur”.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1^{-1/2}}{4^{-1/2}} = 1 * \sqrt{4} = 2$$

Svar: 2

`c) (s. 18-21)`

Använd räkneregler för potenser och att tredje roten ur 8 är 2.

$$(\sqrt{64})^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

Svar: 4

d) (s. 19-20)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

Svar: 3

e) (s. 18)

Tänk på parentesen.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

Svar: 256

f) (s. 18)

Tänk på parentesen.

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Svar: 64

2.22 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(\sqrt{5})^{-4} = (5^{1/2})^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Svar: $\frac{1}{25}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Svar: $\frac{1}{27}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar ”roten ur”.

$$16^{1/4} = (16^{1/2})^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

Svar: 2

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(8^{1/2})^{2/3} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = 2$$

Svar: 2

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27^{1/3}}{8^{1/3}}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 3^{-4} * \frac{1}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Svar: $\frac{16}{81}$

2.23 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a^{3.3} * a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$$

Svar: $a^{0.4}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a * a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}$$

Svar: $a^{5/6}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}} * \sqrt[6]{x^{-1}} * (x^2)^{2/3} = x^{1/3*1/2} * x^{-1*1/6} * x^{2*2/3} = x^{1/6} * x^{-1/6} * x^{8/6} = x^{4/3}$$

Svar: $x^{4/3}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}} = \frac{(a^3a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{a^{7/8}}{a^{-1/8}} = a^{8/8} = a$$

Svar: a

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x^2y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{\cancel{x^{1/2}}y^{5/8}}{\cancel{x^{1/2}}y^{1/2}} = y^{5/8-4/8} = y^{1/8}$$

Svar: $y^{1/8}$

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(ab\frac{a^{3/4}}{b^{3/16}}\right)^2 = a^2b^2\frac{a^{6/4}}{b^{6/16}} = a^{8/4+6/4}b^{32/16-6/16} = a^{7/2}b^{13/8}$$

Svar: $a^{7/2}b^{13/8}$

2.24 (s.)

Använd räkneregler för potenser.

$$(4^x)^5 = \frac{(2^6 * 5^5)^3}{(2^4 * 5^2)^4} * \frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{18} * 5^{15}}{2^{16} * 5^8} * \frac{2^{18}}{5^7} = 2^2 * \cancel{5^7} * \frac{2^{18}}{\cancel{5^7}} = 2^{20}$$
$$(4^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow ((2^2)^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{10x} = 2^{20} \Leftrightarrow x = 2$$

Svar: $x = 2$

Polynom och rationella uttryck

2.25 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

c) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

e) (s. 11)

Faktorisera.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

f) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

g) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)$$

h) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = b(a + b)^2$$

i) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a - b)^2$$

2.26 a) (s. 11)

Faktorisera.

$$x(x + 2) - 4(x + 2) = (x - 4)(x + 2)$$

b) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$x^2(x^2 - 9) + x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9) = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

c) (s. 11)

Använd konjugatregeln två gånger.

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera.

$$(a+b)(a-b)+a^2-ab = (a+b)(a-b)+a(a-b) = (a+b+a)(a-b) = (2a+b)(a-b)$$

e) (s. 11)

Skriv om 4 som 2^2 och använd konjugatregeln.

$$(a - b)^2 - 4 = (a - b)^2 - 2^2 = (a - b + 2)(a - b - 2)$$

f) (s. 11)

Använd andra kvadreringsregeln följt av konjugatregeln.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = ((a + b)(a - b))^2 = (a + b)^2(a - b)^2$$

2.27 a) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2-7x+xy-7y = (x^2+xy)-(7x+7y) = x(x+y)-7(x+y) = (x-7)(x+y)$$

b) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$a^6-a^4+a^2-1 = a^4(a^2-1)+(a^2-1) = (a^4+1)(a^2-1) = (a^4+1)(a+1)(a-1)$$

c) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2y+2x^2-y-2 = x^2(y+2)-(y+2) = (x^2-1)(y+2) = (x+1)(x-1)(y+2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera, använd andra kvadreringsregeln och sist konjugatregeln.

$$7x^5+7xy^4-14x^3y^2 = 7x(x^4+y^2-2x^2y^2) = 7x(x^2-y^2)^2 = 7x(x+y)^2(x-y)^2$$

e) (s. 11)

Använd konjugatregeln.

$$a^2 - (b + c)^2 = (a + b + c)(a - b - c)$$

f) (s. 11)

Använd först konjugatregeln och sen båda kvadreringsreglerna.

$(x^2+y^2)^2-(2xy)^2 = (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy) = (x+y)^2(x-y)^2$

g) (s. 11)

Använd konjugatregeln följt av båda kvadreringsreglerna och sen konjugatregeln igen.

$(x^2+y^2-z^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2+2xy)(x^2+y^2-z^2-2xy) =$
$= ((x+y)^2-z^2)((x-y)^2-z^2) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

2.28 a) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2+6x+7 = (x+3)^2 - 9 + 7 = (x+3)^2 - 2$$

b) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 - 7x + 13 = (x-\frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 13 = (x-\frac{7}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

c) (s. 23)

Perfekt kvadrat.

$$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2 - 81 + 81 = (x+9)^2$$

d) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 5x = (x+\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

e) (saknar sida)

Eftersom uttrycket saknar x-term går det inte att kvadratkomplettera.

2.29 (s. 23)

b följer av att det kommer vara 2 x-termer i högerledet och c av att de konstanta termerna ska ta ut varandra i högerledet.

$$x^2 + ax = (x+b)^2 + c$$
$$b = \frac{a}{2}$$
$$c = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$$

Svar: $b = \frac{a}{2}$, $c = -\frac{a^2}{4}$

2.30 a) (s. 24-25)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$\frac{4x^2-4}{2x+2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}(x^2-1)}{\cancel{2}(x+1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = 2x-2$$

Svar: $2x-2$

b) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och andra kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Svar: $\dfrac{x+1}{x-1}$

c) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2-y^2}{(xy)^2} = \frac{\cancel{y^2-x^2+x^2-y^2}}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0$$

Svar: 0

2.31 a) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{2}{3x+9} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6} = \frac{2}{3(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{2(x-3)} =$$

$$= \frac{4(x-3)+6x-3(x+3)}{6(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12+6x-3x-9}{6(x+3)(x-3)} = \frac{7x-21}{6(x+3)(x-3)} =$$

$$= \frac{7\cancel{(x-3)}}{6(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{7}{6x+18}$$

Svar: $\dfrac{7}{6x+18}$

b) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{5}{x-1} + \frac{8}{x+1} - \frac{3x+7}{x^2-1} = \frac{5(x+1)+8(x-1)-(3x+7)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{5x+5+8x-8-3x-7}{x^2-1} = \frac{10x-10}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \frac{10}{x+1}$$

Svar: $\dfrac{10}{x+1}$

2.32 a) (s. 24-25)

Använd andra kvadreringsregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{(x-y)^2}=\frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{3x-y-2x+\cancel{2y-2y}}{(x-y)^2}=\frac{\cancel{x-y}}{(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x-y}$$

Svar: $\dfrac{1}{x-y}$

b) (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

Svar: $\dfrac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.33 (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

Svar: $\dfrac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.34 a) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) : (x^3 + x + 1)$

Ansätter lösning:
$(x^5+3x^4-2x^3+2x-1) = (x^3+x+1)(x^2+Ax+B)+Cx^2+Dx+E =$
$= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + Cx^2 + Dx + E =$
$= x^5 + Ax^4 + (B+1)x^3 + (A+C+1)x^2 + (A+B+D)x + (B+E)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A & = 3 \\ B+1 & = -2 \\ A+C+1 & = 0 \\ A+B+D & = 2 \\ B+E & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = -4 \\ D = 2 \\ E = 2 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$
Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

b) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^6 - 1) : (x - 1)$

Ansätter lösning:
$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + F =$
$= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex - x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E + F =$
$= x^6 + (A-1)x^5 + (B-A)x^4 + (C-B)x^3 + (D-C)x^2 + (E-D)x + (-E+F)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1 & = 0 \\ B-A & = 0 \\ C-B & = 0 \\ D-C & = 0 \\ E-D & = 0 \\ F-E & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Kvot: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
Rest: ingen

c) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:
$(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5)$

Ansätter lösning:
$(x^4 + 2x^3 + 25) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + Ax + B) + Cx + D =$
$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 4x^3 + 4Ax^2 + 4Bx + 5x^2 + 5Ax + 5B + Cx + D =$
$= x^4 + (A + 4)x^3 + (B + 4A + 5)x^2 + (4B + 5A + C)x + (5B + D)$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 4 & = 2 \\ B - 4A + 5 & = 0 \\ 4B + 5A + C & = 0 \\ 5B + D & = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = -2 \\ D = 10 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$
Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

2.35 a) (s. 11)

Konjugatregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 2$ eller $x - 2$).

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 1$).

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

c) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln bakvänt. (går att lösa med polynomdivision).

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x + A) = x^2 + Ax - x - A$

Identifierar variabeln:
$A - 1 = -3 \Leftrightarrow A = -2$

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Svar: $(x - 1)(x - 2)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$2 - x - x^2 = (x-1)(-x+A) = -x^2 + Ax + x - A$

Identifierar variabeln:
$A + 1 = -1 \Leftrightarrow A = -2$

$2 - x - x^2 = (x-1)(-x-2)$

Svar: $(x-1)(-x-2)$

f) (s. 11)

Faktorisera och använd andra kvadreringsregeln.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$$

2.36 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

b) (saknar sida)

Finns inga reella faktorer.

c) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B =$
$= x^3 + (A-1)x^2 + (B-A)x - B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

Svar: $(x-1)(x^2 + x + 1)$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B =$
$= x^3 + (A+1)x^2 + (B+A)x + B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B + A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

Svar: $(x+1)(x^2 - x + 1)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) =$
$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C =$
$= x^4 + (A-1)x^3 + (B-A)x^2 + (C-B)x - C$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2(x+1) + x + 1) = (x-1)(x^2+1)(x+1)$

Svar: $(x-1)(x^2+1)(x+1)$

f) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -3$ och $x = 0$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^4 + 27x = x(x^3 + 27) = x(x+3)(x^2 + Ax + B) =$
$= x(x^3 + Ax^2 + Bx + 3x^2 + 3Ax + 3B) =$
$= x(x^3 + (A+3)x^2 + (B+3A)x + 3B)$

Identifierar variabler:
$A + 3 = 0, \quad B + 3A = 0, \quad 3B = 27 \Leftrightarrow A = -3, \quad B = 9$

$x^4 + 27x = x(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

Svar: $x(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

g) (s. 25-29)

Skriv om x^6 till $(x^3)^2$ och använd konjugatregeln bakvänt. Faktorisera sedan faktorerna var för sig.
$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$

Hittar lösningen $x = -2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + 2x^2 + 2Ax + 2B =$
$= x^3 + (A+2)x^2 + (B+2A)x + 2B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B + 2A = 0 \\ -2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - 2x^2 - 2Ax - 2B =$
$= x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B$

Identifierar variabler:
$A - 2 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad -2B = -8 \rightarrow A = 2, \quad B = 4$

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Slå samman:
$x^6 - 64 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Svar: $(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

2.37 (s. 25-29)

Delar upp problemet i delproblem efter varje faktorisering. Ekvation:
$p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$

$p(1) = 1^5 - 10 * 1^2 + 15 * 1 - 6 = 0$
Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p(x) = (x-1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$
$= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D =$
$= x^5 + (A-1)x^4 + (B-A)x^3 + (C-B)x^2 + (D-C)x - D$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=0 \\ B-A=0 \\ C-B=-10 \\ D-C=15 \\ -D=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-9 \\ D=6 \end{cases}$$

$$p(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2-9x+6)$$

Ekvation: $p_1(x) = x^4+x^3+x^2-9x+6$

$p_1(1) = 1^4+1^3+1^2-9*1+6 = 0$
Hittar lösningen $x=1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p_1(x) = (x-1)(x^3+Ax^2+Bx+C) =$
$= x^4+Ax^3+Bx^2+Cx-x^3-Ax^2-Bx-C =$
$= x^4+(A-1)x^3+(B-A)x^2+(C-B)x-C$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=1 \\ B-A=1 \\ C-B=-9 \\ D-C=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-6 \end{cases}$$

$$p_1(x) = (x-1)(x^3+2x^2+3x-6)$$

Ekvation: $p_2(x) = x^3+2x^2+3x-6$

$p_2(1) = 1^3+2*1^2+3*1-6 = 0$
Hittar lösningen $x=1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:
$p_2(x) = (x-1)(x^2+Ax+B) =$
$= x^3+Ax^2+Bx-x^2-Ax-B =$
$= x^3+(A-1)x^2+(B-A)x-B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1=2 \\ B-A=3 \\ -B=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=6 \end{cases}$$

Ekvation: $p_3(x) = x^2+3x+6$
$p_2(1) = 1^2+3*1+6 = 10$ ($x=1$ är inte en lösning)
pq-formeln:
$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-6} =$
$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} \Rightarrow$ Finns ingen reell lösning

$p(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x^2+3x+6) = (x-1)^3(x^2+3x+6)$

Svar: $(x-1)^3(x^2+3x+6)$, multipliciteten för $x=1$ är 3

2.38 (s. 25-29)

Ekvationen: $p(x) = x^3 - 2x - 4$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).
$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 0 \\ B - 2A = -2 \\ -2B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$p(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$

$p_1(x) = x^2 + 2x + 2$
pq-formeln:
$x = -1 \pm \sqrt{1-2} \Rightarrow$ Finns ingen reell lösning

Svar: $p(x-2)(x^2 + 2x + 2)$

Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

Ekvationer

3.1 a) (s. 33-34)

Utnyttja faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

b) (s. 33-34)

$x(x^2 - 4) = 0$. Faktorisera först $x^2 - 4$ med konjugatregeln.

$$x(x + 2)(x - 2) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

c) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2+10x+24 = 0$. $a = 4$ och $b = 6$.

$$(x + 4)(x + 6) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = -5 \pm 1$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 1 \Leftrightarrow x+5 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -5 \pm 1$$

Svar: $x_1 = -4$ och $x_2 = -6$

d) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2+10x+25 = 0$. $a = 5$ och $b = 5$.

$$(x + 5)^2 = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x + 5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Svar: $x_{1,2} = -5$

e) (s. 33-34)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

Faktorisera ut x ur vänsterledet.

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2+10x+24$ (se c)). Nollproduktionsmetoden ger också lösningen $x = 0$.

Svar: $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ och $x_3 = 0$

f) (s. 33-34)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Faktorisera ut x^2 ur vänsterledet.

$$x^2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2+10x+25$ (se d)). Nollproduktionsmetoden ger också dubbelroten $x = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -5$ och $x_{3,4} = 0$

3.2 a) (s.)

$$x^2 + 4x + a = 0, \quad x = 2$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut a.

$$2^2 + 4 * 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

Svar: $a = -12$

b) (s.)

$$x^2 + bx + 12 = 0, \quad x = 3$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut b.

$$3^2 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 3b = -21 \Leftrightarrow b = -7$$

Svar: $b = -7$

3.3 a) (s.)

$$p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) (s.)

$$p(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = 2, \;\; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 2)(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = (x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) (s.)

$$p(x) = -x^2 + x + 12$$
$$-x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x-4)(x+3)$

Svar: $p(x) = (x-4)(x+3)$

d) (s.)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$
$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$
$$x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$$p(x) = x * g(x) = x(x - \tfrac{1}{2})^2$$

Svar: $p(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

e) (s.)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5)$$
$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$
$$x(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-5} \Rightarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Faktorsatsen ger då att $g(x)$ inte kan faktoriseras.

Svar: $p(x) = 3x(x^2 - 2x + 5)$

f) (s.)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

Använd variabelsubstitution så pq-formeln kan användas.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad t = x^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$t = 3 \pm \sqrt{9-8} \Leftrightarrow t = 3 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 4, \quad t_2 = 2$$

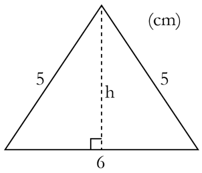
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

Faktorsatsen ger då $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Svar: $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

3.4 (s.)



Satsen om likbent triangel ger att den båda rätvinkliga trianglarna är kongruenta vilket medför att basen för båda är $3cm$. Pyth. sats ger att $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow$ arean: $6 * 4/2 = 12cm^2$ och omkretsen är $16cm$.

Låt benen vara y och basen x

$h = \sqrt{y^2 - (x/2)^2}$
area: $\dfrac{x * h}{2} = \dfrac{x\sqrt{y^2 - (x/2)^2}}{2} = 12cm \Leftrightarrow x\sqrt{y^2 - (x/2)^2} = 24cm$
omkrets: $2y + x = 16cm \Leftrightarrow x = 16 - 2y$

$(16 - 2y)\sqrt{y^2 - (8 - y)^2} = 24 \Leftrightarrow 2(8 - y)4\sqrt{y - 4} = 24 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (8 - y)\sqrt{y - 4} = 3 \Rightarrow (y^2 - 16y + 64)(y - 4) = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 - 16y^2 + 64y + 64y - 256 = 9 \Leftrightarrow y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = 0$

Ansätter lösning med $x - 5$ som faktor från ursprungsfiguren (kan lösas med polynomdivision också):

$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y - 5)(y^2 + Ay + B) = y^3 + (A - 5)y^2 + (B - 5A)y - 5B$

Identifierar variablerna:

$$\begin{cases} A - 5 = -20 \\ B - 5A = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -15 \\ B = 53 \end{cases}$$

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y - 5)(y^2 - 15y + 53)$$

$y^2 - 15y + 53 = 0$
pq-formeln:
$y = \dfrac{15}{2} \pm \sqrt{\dfrac{15^2 - 212}{4}} = \dfrac{15 \pm \sqrt{13}}{2}$
$y_1 = \dfrac{15 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 - \sqrt{13} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ falsk rot
$y_2 = \dfrac{15 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = 16 - 15 + \sqrt{13} = 1 + \sqrt{13}$

Svar: $x = 1 + \sqrt{13}$ och $y = \dfrac{15 - \sqrt{13}}{2}$

3.5 a) (s.)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)+x^2-1+x(x-1)}{x(x^2-1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})=0$$

Faktorsatsen ger då: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) (s.)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{\cancel{x}-4-\cancel{x}+3}{(x-3)(x-4)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x^2-7x+12} \Rightarrow \cancel{x^2}-3x+2=\cancel{x^2}-7x+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Svar: $x=\frac{5}{2}$

c) (s.)

$$\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2+3x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(x+3)+\cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{2}}(x-2)(x+3)}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3+x-2=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Svar: $x=-\frac{1}{2}$

d) (s.)

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{4-x^2}\Leftrightarrow\frac{x-2-(x+2)^2}{x^2-4}=\frac{x^2}{4-x^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(4-x^2)(-x^2-3x-6)=x^2(x^2-4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\cancel{4x^2}-12x-24+\cancel{x^4}+3x^3+6x^2=\cancel{x^4}-\cancel{4x^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-4x-8=0$$

Gissar en lösning till ekvationen och hittar $x=2$. Ansätter lösning med $x-2$ som faktor (kan lösas med polynomdivision också):

$$x^3+2x^2-4x-8=(x-2)(x^2+Ax+B)=x^3+(A-2)x^2+(B-2A)x-2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases}A-2=2\\B-2A=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=4\\B=4\end{cases}$$

$$(x-2)(x^2+4x+4)=0$$

Kvadreringsregeln:

$$(x-2)(x^2+4x+4)=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)^2=0$$

Faktorsatsen: $x_1=2$ och $x_{2,3}=-2$. Både 2 och -2 är dock falska rötter då de resulterar i nolldivision i ursprungsekvationen.

Svar: Ekvationen saknar lösning

3.6 (s.)

Formeln för hastighet, sträcka och tid är $s=v*t\Leftrightarrow t=\frac{s}{v}$. Låt x vara båtens hastighet i stillastående vatten. Den totala tiden för resan är tiden dit (t_1) plus tiden tillbaka (t_1) ($t_1+t_2=t$). Hastigheten båten har dit (v_1) kan beskrivas som $x-2.4$ och hastigheten hem (v_2) som $x+2.4$. $t=2$ och $s=6.4$.

$$t_1+t_2=t\Leftrightarrow\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}=t$$

$$\frac{6.4}{x-2.4}+\frac{6.4}{x+2.4}=2\Leftrightarrow\frac{6.4(x+2.4)+6.4(x-2.4)}{(x-2.4)(x+2.4)}=2\Leftrightarrow$$
$$6.4(2x+\cancel{2.4-2.4})=2(x^2-2.4^2)\Leftrightarrow\cancel{2}*6.4x=\cancel{2}(x^2-2.4^2)\Leftrightarrow$$
$$x^2-6.4x-5.76=0$$

pq-formeln:

$$x=3.2\pm\sqrt{10.24+5.76}=3.2\pm\sqrt{16}=3.2\pm4$$

$x_1=7.2$ och $x_2=-0.8$. Eftersom hastigheten i uppgiften inte kan vara negativ gäller endast x_1

Svar: 7.2 km/h

3.7 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -1$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

Svar: $x = 2$

b) (s.)

$$\sqrt{x+2} = -x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).
$x_2 = -1$

Svar: $x = -1$

c) (s.)

$$x - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \Rightarrow x - 2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$x - 2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 6$
$x_2 = 3$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

Svar: $x = 6$

3.8 a) (s.)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 1$$

Svar: $x = 1$

b) (s.)

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 3x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{Falsk rot.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

c) (s.)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \Rightarrow x+2 = x \Leftrightarrow 2 = 0 \quad \text{Ej ekvivalent.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

d) (s.)

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x \Rightarrow (x-2)(x+3) = x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+x-6 = \cancel{x^2} \Leftrightarrow x = 6$$

Svar: $x = 6$

e) (s.)

$$\begin{aligned} &(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = 8\sqrt{x} \Leftrightarrow 9 - x = 8\sqrt{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 64x \Leftrightarrow x^2 - 82x + 81 = 0 \end{aligned}$$

pq-formeln:

$$x = 41 \pm \sqrt{41^2 - 81} = 41 \pm 40$$

$x_1 = 81$ falsk rot.
$x_2 = 1$

Svar: $x = 1$

f) (s.)

$$\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{x(3+x)} \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{3x+x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 6x + 9 = 3x + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{Falsk rot.}$$

Svar: Lösning saknas

Ekvationer

3.9 (s.)

$2 < 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** än 3"? Ja
$2 \leq 3 \Leftarrow$ är "2 **mindre** eller lika med 3"? Ja
$2 \leq 2 \Leftarrow$ är "2 mindre eller **lika med** 2"? Ja

Svar: Alla tre

3.10 (s.)

Nedan visar jag min tankeprocess för att lösa uppgiften.

$$\frac{2}{0.02} = \frac{2}{2} * \frac{1}{10^{-2}} = 1 * 10^2 = 100$$

$$\frac{31}{0.2} = \frac{31}{2} * \frac{1}{10^{-1}} = 15.5 * 10 = 155$$

$$\frac{0.00009}{0.000006} = \frac{9}{6} * \frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 1.5 * 10 = 15$$

Svar: $\frac{0.00009}{0.000006} < \frac{2}{0.02} < \frac{31}{0.2}$

3.11 a) (s.)

$3x + 1 < 2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

Svar: $x < \frac{1}{3}$

b) (s.)

$-3x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Svar: $x \geq \frac{1}{3}$

c) (s.)

$3x + 1 > 4x + 5 \Leftrightarrow x < -4$

Svar: $x < -4$

d) (s.)

$(x-3)(x+3) \leq x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 9 \leq \cancel{x^2} \Leftrightarrow -9 \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Svar: $x \in \mathbb{R}$

3.12 a) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$\frac{x+4}{x-1} > 0$$

x		-4		1	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x > 1$ eller $x < -4$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger negativa värden.

$$\frac{x+4}{x-1} < 0$$

Svar: teckentabellen i a) ger: $-4 < x < 1$

c) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0$$

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\wr$	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -1$ eller $0 < x < 1$

d) (s.)

Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$(x+2)(2x-1) > 0$$

x		-2		$1/2$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -2$ eller $x > 1/2$

3.13 (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{3x+1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{3x+1-2(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0$$

x		-2		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$

Svar: $-2 < x < 3$

3.14 a) (s. 44-45)

Se sidorna 44-45 i läroboken för förklaring till varför det fungerar såhär.

$$\frac{x^2+1}{x} < x$$

$$\text{om } x > 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2}+1 < \cancel{x^2} \Leftrightarrow \quad 1 < 0$$

$$\text{om } x < 0: \quad \frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \quad \cancel{x^2}+1 > \cancel{x^2} \Leftrightarrow \quad 1 > 0$$

$1 < 0$ är alltid sant vilket innebär att skillnaden gäller för alla x mindre än noll.

Svar: $x < 0$

b) (s.)

Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-(x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x^2-\cancel{x^2}+4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2} < 0$$

x		-2	
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+4}{x+2}$	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -2$

c) (s.)

Eftersom x^2 aldrig kan bli negativt behövs inget motsvarade det i uppgift a) göras.

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2 > \cancel{x^2} + 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Svar: Alla x

3.15 a) (s.)

Skriv om olikheten så att allt är i vänsterledet och använd konjugatregeln baklänges. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) < 0$$

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Svar: $-2 < x < 2$

b) (s.)

Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger positiva värden.

Svar: teckentabellen i a) ger: $x < -2$ eller $x > 2$

c) (s.)

Använd kvadreringsregeln och lös olikheten.

$$(x+1)^2 > (x+5)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 > \cancel{x^2} + 10x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 > 8x \Leftrightarrow x < -3$$

Svar: $x < -3$

3.16 (s.)

Förenkla vänsterledet, flytta över ettan och skriv allt på ett gemensamt bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{1-x^4-2x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{-x^4-2x^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^4-(-x^4-2x^2)}{-x^2(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)} < 0$$

x		0	
$2x^2+1$	$+$	$+$	$+$
$-x^2$	$-$	0	$-$
x^2+2	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)}$	$-$	$\wr$	$-$

Svar: $x \neq 0$

3.17 a) (s.)

Lös ekvationen genom att multiplicera termerna med x. Faktorisera sedan täljaren. Notera att grundekvationen inte är definierad för $x = 0$ därför implicerar endast den första ekvationen den andra.

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Faktorsatsen ger: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

Svar: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

b) (s.)

Skriv om olikheten så alla termer står på samma bråkstreck i vänsterledet. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$x + \frac{4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{x} > 0$$

x		0		1		4	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-4)(x-1)}{x}$	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$	0	$+$

Svar: $0 < x < 1$ eller $x > 4$

Kapitel 4: Summor och talföljder

Summatecken

4.1 a) (s.)

$$\sum_{n=1}^{5} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

Svar: 225

b) (s.)

$$\sum_{k=0}^{4} (k^2 - 3k) = 0^2 - 3*0 + 1^2 - 3*1 + 2^2 - 3*2 + 3^2 - 3*3 + 4^2 - 3*4 =$$

$$= 1 - 3 + 4 - 6 + 9 - 9 + 16 - 12 = 0$$

Svar: 0

c) (s.)

$$\sum_{k=2}^{100} 3 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3 + 3}_{99 \text{ st.}} = 3 * 99 = 297$$

Svar: 297

d) (s.)

Antalet element kommer alltid vara lika med övre gränsen minus undre gränsen plus ett.

$$\sum_{k=m}^{n} 3 = 3(n - m + 1)$$

Svar: $3(n - m + 1)$

4.2 a) (s.)

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10}}_{10 \text{ st. från 1 till 10}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$$

Svar: $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$

b) (s.)

$$\underbrace{2*3+3*4+4*5+\ldots+n(n+1)}_{\text{från 2 till n}}=\sum_{k=2}^{n}k(k+1)$$

Svar: $\sum_{k=2}^{n}k(k+1)$

c) (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det kan skrivas med summatecken.

$$1+3+9+27+81+243=\underbrace{3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5}_{\text{6 st. från 0 till 5}}=\sum_{k=0}^{5}3^k$$

Svar: $\sum_{k=0}^{5}3^k$

Aritmetisk summa

4.3 (s.)

Se formeln för aritmetisk summa.

$$1+2+\ldots+100=\sum_{k=1}^{100}k=\frac{100(100+1)}{2}=5050$$

Svar: 5050

4.4 (s.)

Hitta mönstret och skriv om så det går att skrivas med summatecken.

$$3+6+\ldots+96+99=3*1+3*2+\ldots+3*32+3*33=$$

$$=3\underbrace{(1+2+\ldots+33+44)}_{\text{33 st. från 1 till 33}}=3\sum_{k=1}^{33}k=3*\frac{33*34}{2}=1683$$

Svar: 1683

4.5 a) (s.)

$$1+2+3+\ldots+9+10=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10*11}{2}=55$$

Svar: 55

b) (s.)

bryt ut fyran och skriv om med summatecken.

$$4+8+12+\ldots+36+40 = 4(1+2+3+\ldots+9+10) = 4\sum_{k=1}^{10} k = 4*\frac{10*11}{2} = 220$$

Svar: 220

c) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att fyran kan brytas ut.

$$\begin{aligned}
&3+7+11+\ldots+35+39 = \\
&= (4*1-1)+(4*2-1)+(4*3-1)+\ldots+(4*9-1)+(4*10-1) = \\
&= 4(1+2+3+\ldots+9+10) - (\underbrace{1+1+1\ldots+1+1}_{10 \text{ st.}}) = \\
&= 4\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 = 4*\frac{10*11}{2} - 10*1 = 210
\end{aligned}$$

Svar: 210

d) (s.)

Dela upp serien och inse att den kan delas upp i två separata summor och att tian kan brytas ut.

$$\begin{aligned}
&-3+7+17+\ldots+87+97 = \\
&= (10*0-3)+(10*1-3)+(10*2-3)+\ldots+(10*9-3)+(10*10-3) = \\
&= 10(0+1+2+\ldots+9+10) - (\underbrace{3+3+3\ldots+3+3}_{11 \text{ st.}}) = \\
&= 10\sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^{10} 3 = 10(0+\sum_{k=1}^{10} k) - \sum_{k=0}^{10} 3 10*\frac{10*11}{2} - 11*3 = 517
\end{aligned}$$

Svar: 517

4.6 a) (s.)

Bryt ut trean och använd aritmetisk summa.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15} 3k = 3*1+3*2+\ldots+3*14+3*15 = \\
&= 3(1+2+\ldots+14+15) = 3\sum_{k=1}^{15} k = 3\frac{15*16}{2} = 360
\end{aligned}$$

Svar: 360

b) (s.)

Bryt ut trean och två och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{15}(3k+2) = (3*1+2)+(3*2+2)+\ldots+(3*14+2)+(3*15+2) =$$

$$= 3(1+2+\ldots+14+15)+(\underbrace{2+2+\ldots+2+2}_{\text{15 st.}}) = 3\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2 =$$

$$= 3\frac{15*16}{2}+2*15 = 390$$

Svar: 390

c) (s.)

Bryt ut trean och två som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = 3(1+2+\ldots+(n-1)+n)+(\underbrace{2+2+\ldots+2+2}_{\text{n st.}}) =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2 = 3\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

Svar: $3\frac{n(n+1)}{2}+2n$

d) (s.)

Bryt ut a och d som i förra uppgiften och använd aritmetisk summa.

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+d) = a(1+2+\ldots+(n-1)+n)+(\underbrace{d+d+\ldots+d+d}_{\text{n st.}}) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}d = a\frac{n(n+1)}{2}+dn$$

Svar: $a\frac{n(n+1)}{2}+dn$

Geometrisk summa

4.7 a) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = \sum_{k=0}^{5}2^k = \frac{2^{5+1}-1}{2-1} = 127$$

Svar: 127

`b) (s.)`

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa.
Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 = (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + (-3)^5 =$$
$$= \sum_{k=0}^{5} (-3)^k = \frac{(-3)^{5+1} - 1}{-3 - 1} = -182$$

Svar: -182

`c) (s.)`

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Eftersom start värdet inte är 0 finns det två olika sätt att lösa det på: antingen göra en summa av delmängden där $k \geq 0$ och addera resten efteråt eller genom att bryta ut den minsta exponenten.

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{128} = 2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 =$$
$$= 2 + \sum_{k=0}^{7} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{511}{128}$$

eller

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{128} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} * \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right) =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} * \sum_{k=0}^{8} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{511}{128}$$

Svar: $\dfrac{511}{128}$

d) (s.)

Två alternativa sätt att lösa det: Bryta ut e så att summan får startvärdet 0 eller använd subtraktion så att summan kan skrivas med 0 som startvärde.

$$e + e^2 + e^3 + \ldots + e^{10} = e(e^0 + e^1 + e^2 + \ldots + e^9) = e\sum_{k=0}^{9} e^k = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$$

eller

$$e + e^2 + e^3 + \ldots + e^{10} = \sum_{k=1}^{10} e^k = \sum_{k=0}^{10} e^k - \sum_{k=0}^{0} e^k = \frac{e^{11} - 1}{e - 1} - \frac{e^1 - 1}{e - 1} =$$

$$= \frac{e^{11} - \cancel{1} - (e - \cancel{1})}{e - 1} = e * \frac{e^{10} - 1}{e - 1}$$

Svar: $e * \dfrac{e^{10} - 1}{e - 1}$

e) (s.)

Skriv om termerna så att de kan skrivas som en geometrisk summa. Använd sedan formeln för geometrisk summa.

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^9 = (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \ldots + +(-x)^9 =$$

$$= \sum_{k=0}^{9} (-x)^k = \frac{(-x)^{10} - 1}{-x - 1} = -\frac{x^{10} - 1}{x + 1} = \frac{1 - x^{10}}{x + 1}$$

Svar: $\dfrac{1 - x^{10}}{x + 1}$

4.8 a) (s.)

Se 4.6 a) för resonemang kring varför faktorn 3 kan brytas ut.

$$\sum_{k=0}^{10} (3 * 2^k) = 3 * \sum_{k=0}^{10} 2^k = 3 * \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 3(2^{11} - 1)$$

Svar: $3(2^{11} - 1)$

b) (s.)

Bryt ut en tvåa från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=1}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=1}^{10}2^k = 3*2(2^0+2^1+\ldots+2^9) =$$
$$= 6*\sum_{k=0}^{9}2^k = 6*\frac{2^{10}-1}{2-1} = 6(2^{10}-1)$$

eller

$$\sum_{k=1}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=1}^{10}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{10}2^k - \sum_{k=0}^{0}2^k\right) =$$
$$= 3\left(\frac{2^{11}-\cancel{1}}{2-1} - \frac{2^1-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{11}-2) = 6(2^{10}-1)$$

Svar: $6(2^{10}-1)$

c) (s.)

Bryt ut tre tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=3}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=3}^{10}2^k = 3*2^3(2^0+2^1+\ldots+2^7) =$$
$$= 24*\sum_{k=0}^{7}2^k = 24*\frac{2^8-1}{2-1} = 24(2^8-1)$$

eller

$$\sum_{k=3}^{10}(3*2^k) = 3*\sum_{k=3}^{10}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{10}2^k - \sum_{k=0}^{2}2^k\right) =$$
$$= 3\left(\frac{2^{11}-\cancel{1}}{2-1} - \frac{2^3-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{11}-2^3) = 24(2^{10}-1)$$

Svar: $24(2^{10}-1)$

d) (s.)

Bryt ut m tvåor från summan eller subtrahera en kompletterande summa.

$$\sum_{k=m}^{n}(3*2^k) = 3*\sum_{k=m}^{n}2^k = 3*2^m(2^0+2^1+\ldots+2^{n-m}) =$$

$$= 3*2^m*\sum_{k=0}^{n-m}2^k = 3*2^m*\frac{2^{n-m+1}-1}{2-1} = 3*2^m(2^{n-m+1}-1)$$

eller

$$\sum_{k=m}^{n}(3*2^k) = 3*\sum_{k=m}^{n}2^k = 3\left(\sum_{k=0}^{n}2^k - \sum_{k=0}^{m-1}2^k\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2^{n+1}-\cancel{1}}{2-1} - \frac{2^m-\cancel{1}}{2-1}\right) = 3(2^{n+1}-2^m) = 3*2^m(2^{n-m+1}-1)$$

Svar: $3*2^m(2^{n-m+1}-1)$

4.9 a) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktal.

$$\sum_{k=0}^{n}(3*2^{-k}) = 3*\sum_{k=0}^{n}(2^{-k}) = 3*\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 3*\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= 3*\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{-\frac{1}{2}} = -6\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right) = 6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Svar: $6\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

b) (s.)

Skriv om den negativa exponenten som ett bråktal och fixa till så att startvärdet är noll (båda metoderna i 4.8 b)-c) går att använda).

$$\sum_{k=1}^{n}e^{-k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{e}\right)^k = \tfrac{1}{e}\left(\left(\tfrac{1}{e}\right)^0+\left(\tfrac{1}{e}\right)^1+\ldots+\left(\tfrac{1}{e}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{e}*\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tfrac{1}{e}\right)^k = \tfrac{1}{e}*\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{e}{e}-e} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{1-e} = \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{e-1}$$

Svar: $\dfrac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{e-1}$

c) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$\sum_{n=0}^{100}(1000*(1.05)^n) = 1000*\sum_{n=0}^{100}1.05^n = 1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{1.05-1} =$$

$$= 1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{\frac{1}{20}} = 20*1000*\frac{1.05^{n+1}-1}{1} = 20000(1.05^n+1-1)$$

Svar: $20000(1.05^n+1-1)$

d) (s.)

Använd geometrisk summa.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} = (-\tfrac{1}{2})^0 + (-\tfrac{1}{2})^1 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^3 + \ldots + (-\tfrac{1}{2})^{2n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-\tfrac{1}{2})^k = \frac{(-\frac{1}{2})^{2n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = -2\frac{-\frac{1}{2^{2n+1}} - 1}{3} = \frac{\frac{2}{2^{2n+1}} + 2}{3} = \frac{2^{-2n} + 2}{3}$$

Svar: $\dfrac{2^{-2n} + 2}{3}$

e) (s.)

Det saknas en enkel metod för att lösa uppgiften så lösningen är att iterativt summera allt.

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k(-1)^k}{2^k} = \frac{2 * (-1)^2}{2^2} + \frac{3 * (-1)^3}{2^3} + \frac{4 * (-1)^4}{2^4} + \frac{5 * (-1)^5}{2^5} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \frac{5}{32} = \frac{16}{32} - \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{5}{32} = \frac{7}{32}$$

Svar: $\dfrac{7}{32}$

4.10 (s.)

Skriv om funktionen som en summa och applicera sedan funktionsvärdet 3.

$$p(x) = 2 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^7 = 2(1 + x + x^2 + \ldots + x^7) =$$

$$= 2(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^7) = 2 * \sum_{k=0}^{7} x^k$$

$$\Downarrow$$

$$p(3) = 2 * \sum_{k=0}^{7} 3^k = 2 * \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6560$$

Svar: 6560

4.11 (s.)

Mängden pengar på Lisas bankkonto kommer öka med $2000 * 1.02^k$ varje år där k är antalet år från start. Efter noll år (starten) är mängden pengar: $2000 * 1.02^0 = 2000$. Efter ett år har pengarna som sattes in förra året ökat med en faktor av 1.02 och 2000 till har sats in: $2000 * 1.02^1 + 2000$. Nästa år har de båda 2000 ökat med en faktor av 1.02 och ytterligare 2000 satts in: $2000 * 1.02^2 + 2000 * 1.02^1 + 2000$ osv.

Detta kan alltså beskrivas som en geometrisk summa där 2022/2023 är 11 år efter start:

$$\sum_{k=0}^{11} 2000 * 1.02^k = 2000 * \sum_{k=0}^{11} = 2000 * \frac{1.02^{12} - 1}{1.02 - 1} = 2000 * \frac{1.02^{12} - 1}{\frac{1}{50}} =$$
$$= 50 * 2000(1.02^{12} - 1) = 10^5(1.02^{12} - 1) \approx 26800 \text{ kr}$$

Svar: 26800 kr

4.12 (s.)

Sträckan bollen kommer röra sig efter varje studs är $2 * 0.9^k$ där k är antalet studs sen start (tvåan är där eftersom det både är upp och ner). Undantaget är den metern bollen faller i början. Då sträckan som sökes är fram till studs tio kommer slutvärdet vara nio.

$$1 + \sum_{k=1}^{9} 2 * 0.9^k = 1 + 2(0.9^1 + 0.9^2 + \ldots + 0.9^9) =$$
$$= 1 + 2 * 0.9(0.9^0 + 0.9^1 + \ldots 0.9^8) = 1 + 1.8 * \sum_{k=0}^{8} 0.9^k =$$
$$= 1 + 1.8\frac{0.9^9 - 1}{0.9 - 1} = 1 - 18(0.9^9 - 1) = 1 + 18(1 - 0.9^9) \approx 12 \text{ m}$$

Svar: 12 m

Binomialsatsen

4.13 a) (s.)

$$7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$$

Svar: 5040

b) (s.)

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * 4!} = 35$$

Svar: 35

c) (s.)

$$\binom{1001}{999} = \frac{1001!}{999! * 2!} = 500500$$

Svar: 500500

4.14 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + b^2 = \\
&= a^2 + \frac{2!}{1! * 1!} ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Svar: $a^2 + 2ab + b^2$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + b^3 = \\
&= a^3 + \frac{3!}{1! * 2!} a^2 b + \frac{3!}{2! * 1!} ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Svar: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= a^4 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + b^4 = \\
&= a^4 + \frac{4!}{1! * 3!} a^3 b + \frac{4!}{2! * 2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3! * 1!} ab^3 + b^4 = \\
&= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^3
\end{aligned}$$

Svar: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3$

d) (s.)

Se sidorna 58-59 om du är osäker på vad Pascals triangel är.

Svar:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

4.15 a) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(1+x)^3 = 1^3 + \binom{3}{1}1^2x^1 + \binom{3}{2}1^1x^2 + x^3 =$$
$$= 1 + \frac{3!}{1! * 2!}x + \frac{3!}{2! * 1!}x^2 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Svar: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(3-2x)^3 = (3+(-2x))^3 = 3^3 + \binom{3}{1}3^2(-2x)^1 + \binom{3}{2}3^1(-2x)^2 + (-2x)^3 =$$
$$= 27 - \frac{3!}{1! * 2!}9 * 2 * x + \frac{3!}{2! * 1!}3 * 4 * x^2 - 8x^3 = -8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$$

Svar: $-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$

c) (s.)

Använd binomialsatsen.

$$(1+x)^4 = 1^4 + \binom{4}{1}1^3x^1 + \binom{4}{2}1^2x^2 + \binom{4}{3}1^1x^3 + x^4 =$$
$$= 1 + \frac{4!}{1! * 3!}x + \frac{4!}{2! * 2!}x^2 + \frac{4!}{3! * 1!}x^3 + x^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Svar: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

4.16 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{15}{13}x^{13}1^2 = \frac{15!}{13! * 2!}x^{13} = 105x^{13}$$

Svar: 105

4.17 (s.)

Binomialsatsen ger:

$$\binom{8}{5}3^5(-x)^3 = -\frac{8!}{5! * 3!}243x^3 = -13608x^3$$

Svar: -13608

4.18 (s.)

x-termerna ska ta ut varandra för att termen ska bli konstant.

$$\binom{15}{k}(x^2)^{15-k}(\tfrac{1}{x^3})^k = \binom{15}{k}x^{2(15-k)}x^{-3k}$$

För att x-termerna ska ta ut varandra:

$$2(15-k) - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Sätt in 6 istället för k:

$$\binom{15}{6}x^{2(15-6)}x^{-3*6} = \frac{15!}{6! * 9!}x^{18}x^{-18} = 5005$$

Svar: 5005

4.19 (s.)

Vi börjar med att testa högstagradstermerna i båda potenserna.

Första: $(x^3)^{16} = x^{48}$
Andra: $(x^4)^{12} = x^{48}$

De båda kommer alltså ta ut varandra. Vi får då en nivå lägre.

Första: $\binom{16}{1}(x^3)^{15}(-2)^1 = -\frac{16!}{1!*15!}x^{45} * 2 = -32x^{45}$
Andra: $\binom{12}{1}(x^4)^{11}3^1 = \frac{12!}{1!*11!}x^{44} * 3 = 36x^{44}$

Svar: $-32x^{45}$

4.20 (s.)

Använd binomialsatsen med $a = b = 1$.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^01^n =$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \text{ V.S.V.}$$

Detta innebär att summan av talen i den $(n-1)$:a raden i Pascals triangel är 2^n, t.ex. är $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$.

4.21 (s.)

Använd binomialsatsen baklänges.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} =$$
$$= \binom{n}{0}1^n(-1)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0(-1)^n =$$
$$= (1-1)^n = 0 \text{ V.S.V}$$

4.22 (s.)

x^8 termen ges av:

$$\binom{10}{8} a^2 (2x)^8 = \frac{10!}{8! * 2!} a^2 2^8 x^8 = (45 * 256 * a^2) x^8$$

$$45 * 256 * a^2 = 180 \Leftrightarrow a^2 = \frac{180}{45 * 256} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{8}$$

Svar: $a = \pm\frac{1}{8}$

Talföljder och induktion

4.23 a) (s.)

$a_0 = 1$
$a_1 = 2a_0 = 2 * 1 = 2$
$a_2 = 2a_1 = 2 * 2 = 4$
$a_3 = 2a_2 = 2 * 4 = 8$

Svar: $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$

b) (s.)

$a_0 = 1$
$a_1 = a_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$
$a_3 = a_2^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$

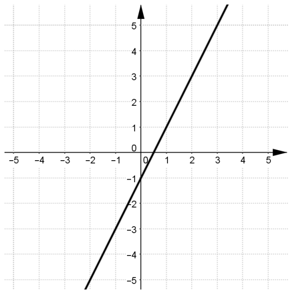
Svar: $a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0$

Kapitel 5: Analytisk Geometri

Räta linjen

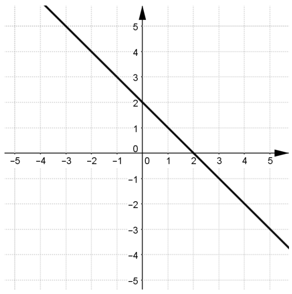
5.1 a) (s.)

$y = 2x - 1 \rightarrow$ Lutning: 2, korsar y-axeln vid: -1



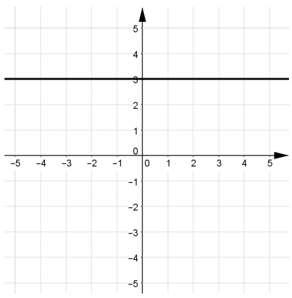
b) (s.)

$y = 2 - x \Leftrightarrow y = -1x + 2 \rightarrow$ Lutning: -1, korsar y-axeln vid: 2



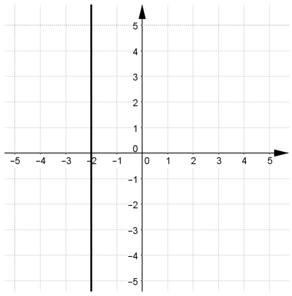
c) (s.)

$y = 3 \Leftrightarrow y = 0x + 3 \rightarrow$ Lutning: 0, korsar y-axeln vid: 3. Kan också ses som att y är konstant tre oberoende av vad x är.



d) (s.)

$x = -2$ kan inte beskrivas med räta linjens ekvation eftersom ekvationen inte är en funktion (saknar värde på y för alla x utom -2 och har oändligt många lösningar på $x = -2$). Se det som att för oberoende av vad y är är $x = -2$.



5.2 a) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna m.

Enpunktsformeln:

$$y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Räta linjens ekvation:

$$2 = -1 * 0 + m \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow y = -x + 2$$

Svar: $y = -x + 2$

b) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna m.

Enpunktsformeln:

$$y - 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 6 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

Räta linjens ekvation:

$$1 = 3 * 2 + m \Leftrightarrow m = -5 \Rightarrow y = 3x - 5$$

Svar: $y = 3x - 5$

c) (s.)

Uppgiften kan lösas på flera sätt, t.ex. med enpunktsformeln eller genom att sätta in värdena i räta linjens ekvation och beräkna m.

Enpunktsformeln:

$$y - b = k(x - a)$$

Räta linjens ekvation:

$$b = ka + m \Leftrightarrow m = b - ka$$

$$y = kx - ka + b \Leftrightarrow y = k(x - a) + b \Leftrightarrow y - b = k(x - a)$$

Svar: $y - b = k(x - a)$

d) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$(\overbrace{a}^{x_1}, \overbrace{b}^{y_1}) \quad (\overbrace{a+1}^{x_2}, \overbrace{b+1}^{y_2})$$

$$y - b = \frac{\cancel{b} + 1 - \cancel{b}}{\cancel{a} + 1 - \cancel{a}}(x - a) \Leftrightarrow y = 1(x - a) + b \Leftrightarrow y = x + b - a$$

Svar: $y = x + b - a$

5.3 (s.)

Använd tvåpunktsformeln med $(-2, 5)$ och $(0, -3)$ som punkter (m-värdet ger den andra punkten).

$$y - 5 = \frac{-3 - 5}{0 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = -4(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = -4x - 3$$

Svar: $a = -4$

5.4 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 1 = \frac{-2 - 1}{1 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{3}(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$$

Svar: $y = -x - 1$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 2 = \frac{2 - 2}{2 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y = 0(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2$$

Svar: $y = 2$

c) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 0 = \underbrace{\frac{2-0}{1-1}}_{\text{ej def.}}(x-1)$$

Att tvåpunktsformeln inte är definierad (nolldivision) innebär att lutningen på linjen är "oändlig" vilket i sin tur innebär att det är en vertikal linje. Eftersom båda punkterna ligger på $x = 1$ måste det vara ekvationen.

Svar: $x = 1$

5.5 a) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y-2 = \frac{3-2}{2+1}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+1)+2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{6}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

Allmän form:

$$\frac{1}{3}x - y + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 7 = 0$$

Svar: k-form: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ och allmän form: $x - 3y + 7 = 0$

b) (s.)

Använd tvåpunktsformeln.

$$y - 3 = \frac{3-3}{-7-2}(x-2) \Leftrightarrow y = 0(x-2)+3 \Leftrightarrow y = 3$$

Allmän form:

$$y - 3 = 0$$

Svar: k-form: $y = 3$ och allmän form: $y - 3 = 0$

5.6 a) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-6, 5)$ och $(-2, 2)$.

$$y - 5 = \frac{2-5}{-2+6}(x+6) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x - \frac{9}{2} + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3 * 10 + 4 * (-8) - 2 = 30 - 32 - 2 = -4 \neq 0$$

Punkten ligger alltså inte på linjen.

Svar: Nej.

b) (s.)

Bestäm först ekvationen för en linje mellan två av punkterna och kolla sedan om den tredje ligger på linjen.

Använd tvåpunktsformeln på $(-7,-5)$ och $(3,1)$.

$$y+5=\frac{1+5}{3+7}(x+7) \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}(x+7)-5 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}-\frac{25}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x-y-\frac{4}{5}=0 \Leftrightarrow 3x-5y-4=0$$

Testa sedan genom att sätta in värdena för den sista punkten.

$$3*8-5*4-4=24-20-4=0$$

Punkten ligger alltså på linjen.

Svar: Ja

5.7 a) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-3x+11 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$2x+1=-3x+11 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2*2+1=5$$

Svar: punkten $(2,5)$

b) (s.)

Lös ekvationssystemet (y-värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=5 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$5=2x-3 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$$

Svar: punkten $(4,5)$

c) (s.)

Lös ekvationssystemet (x-värdet är redan gett i den andra ekvationen).

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$y = 3 * 4 - 2 \Leftrightarrow y = 12 - 2 \Leftrightarrow y = 10$$

Svar: punkten $(4, 10)$

d) (s.)

Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 5x + 6 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$\cancel{5x} - 4 = \cancel{5x} + 6 \Leftrightarrow -4 \neq 6 \Rightarrow \text{Saknar lösning}$$

Svar: Skärning saknas

Parabeln

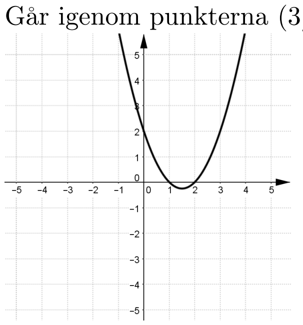
5.8 a) (s.)

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Svar: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b) (s.)

Går igenom punkterna $(3/2; -1/4)$ och $(0, 2)$.



c) (s.)

y är som minst när $(x - \frac{3}{2})^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på y är alltså $-\frac{1}{4}$.

Svar: $-\frac{1}{4}$

d) (s.)

Använd pq-formeln.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

Svar: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

e) (s.)

Faktorisera polynomet och använd sedan en teckentabell.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geq 0$$

x		1		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

När $x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

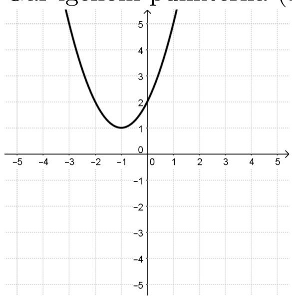
Svar: $x \leq 0$ eller $x \geq 2$

5.9 a) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 - 1^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(1;1)$ och $(0,2)$.



Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på y 1.

Lös ekvationen:

$$x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1\pm\sqrt{1^2 - 2} = -1\pm\sqrt{-1} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$0^2 + 2 * 0 + 2 = 2$$

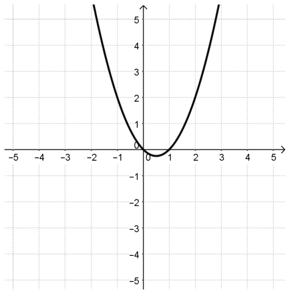
Olikheten är alltså sann för alla värden.

b) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ och $(0, 0)$.



Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på y $-\frac{1}{4}$.

Lös ekvationen:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

Lös olikheten:

$$x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$$

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

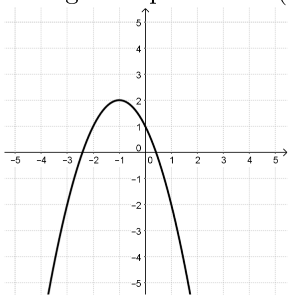
När $x \leq 0$ eller $x \geq 1$.

c) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$1-2x-x^2 = -(x^2+2x)+1 = -((x+1)^2-1^2)+1 = -(x+1)^2+1+1 = 2-(x+1)^2$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(-1, 2)$ och $(0, 1)$.



Minsta värdet:
Saknar mista värde eftersom när x ökar kommer y bli mindre (pga. negationen).

Lös ekvationen:

$$1-2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1^2+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Lös olikheten:

$$1-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2+2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \geq 0$$

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
$x+1-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	0	$-$

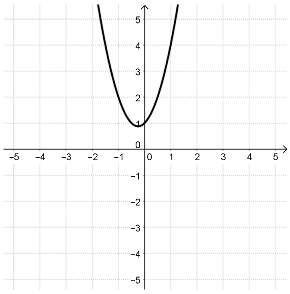
När $-1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}$.

d) (s.)

Kvadratkomplettera:

$$2x^2+x+1 = 2(x^2+\tfrac{1}{2}x)+1 = 2((x+\tfrac{1}{4})^2-(\tfrac{1}{4})^2)+1 = 2(x+\tfrac{1}{4})^2-\tfrac{1}{8}+1 = 2(x+\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{8}$$

Visualisera:
Går igenom punkterna $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$ och $(0, 1)$.



Minsta värdet:
Med samma resonemang som i 5.8 c) så är minsta möjliga värdet på y $\frac{7}{8}$.

Lös ekvationen:

$$2x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pm\sqrt{(\frac{1}{4})^2-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\pm\sqrt{-\frac{7}{16}} \Leftarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Lös olikheten:

$$2x^2+x+1 \geq 0$$

Ekvationen saknar nollställen vilket innebär att om någon punkt på linjen är positiv är alla positiva.

$$2 * 0^2 + 0 + 1 = 1$$

Olikheten är alltså sann för alla värden.

5.10 (s.)

Kvadratkomplettera:

$$y - x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4$$

y är som minst när $(x+2)^2$ är så litet som möjligt och eftersom det kvadreras är minsta möjliga värdet 0. Minsta värdet på y är alltså -4.

Svar: 4

5.11 (s.)

Uppgiften ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 6 = (-1)^2 + a * (-1) + b \\ 3 = 2^2 + a * 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 - a + b \\ 3 = 4 + 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 5 \\ b = -2a - 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$a + 5 = -2a - 1 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -2 + 5 = 3$$

Svar: $a = -2$ och $b = 3$

Absolutbelopp

5.12 a) (s.)

$$|3| = 3$$

Svar: 3

b) (s.)

$$|-3| = 3$$

Svar: 3

c) (s.)

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

Svar: 3

d) (s.)

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Svar: 3

e) (s.)

$$\sqrt{x^2} = x$$

Svar: x

f) (s.)

$$\sqrt{(-x)^2} = x$$

Svar: x

5.13 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 4 \\ x < 0: &\quad -x = 4 \Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -4$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Andra är en falsk lösning eftersom lösningen inte ligger inom intervallet som x får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 0 \\ x < 0: &\quad -x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

Svar: $x = 0$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp. Båda är en falsk lösning eftersom lösningarna inte ligger inom intervallet som x får vara.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = -1 \not\geq 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < 0: &\quad -x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \not< 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

Svar: ekvationen saknar lösning

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x-2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x-2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\quad x-2=4 \Leftrightarrow x=6 \\ x < 2: &\quad -(x-2)=4 \Leftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

Svar: $x=6$ eller $x=-2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{då } x+4 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -4 \\ -(x+4) & \text{då } x+4 < 0 \text{ dvs. } x < -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -4: &\quad x+4=3 \Leftrightarrow x=-1 \\ x < -4: &\quad -(x+4)=3 \Leftrightarrow x=-7 \end{aligned}$$

Svar: $x=-1$ eller $x=-7$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } 2x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{då } 2x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -\tfrac{1}{2}: &\quad 2x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \\ x < -\tfrac{1}{2}: &\quad -(2x+1)=1 \Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Svar: $x=0$ eller $x=-1$

g) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{då } 1-x \geq 0 \text{ dvs. } x \leq 1 \\ -(1-x) & \text{då } 1-x < 0 \text{ dvs. } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad 1-x=1 \Leftrightarrow x=0 \\ x > 1: &\quad -(1-x)=1 \Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Svar: $x=0$ eller $x=2$

5.14 a) (s.)

Definitionen av kvadratroten:

$$\text{Om } a^2 = b \text{ och } a \geq 0 \text{ då är } a = \sqrt{b}$$

Vilket innebär att $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$.

Använd nu faktumet att $|a|$ alltid är positivt och regeln $a^2 = |a|^2$.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \text{ V.S.V}$$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp och att $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \\ x > 1: &\quad -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -2$

5.15 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x = 3 \\ x < 0: &\quad -x = 3 \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Svar: $x = 3$ eller $x = -3$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x < 3 \\ x < 0: &\quad -x < 3 \Leftrightarrow x > -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < 0 \text{ eller } 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Svar: $-3 < x < 3$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \geq 3 \\ x < 0: &\quad -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 3 \text{ eller } x \leq -3$$

Svar: $x \geq 3$ eller $x \leq -3$

d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \\ x > 1: &\quad -(x-1) = 3 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Svar: $x = 4$ eller $x = -2$

e) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 < 3 \Leftrightarrow x < 4 \\ x < 1: &\quad -(x-1) < 3 \Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-2 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

Svar: $-2 < x < 4$

f) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ x < 1: &\quad -(x-1) \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$x \geq 4 \text{ eller } x \leq -2$$

Svar: $x \geq 4$ eller $x \leq -2$

5.16 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

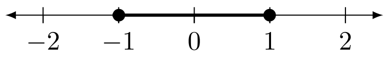
$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \leq 1 \\ x < 0: &\quad -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-1 \leq x < 0 \text{ eller } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$-1 \leq x \leq 1$



b) (s.)

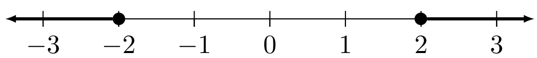
Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x \geq 2 \\ x < 0: &\quad -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$x \leq -2$ eller $x \geq 2$



c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

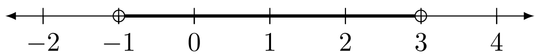
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x-1 < 0 \text{ dvs. } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\quad x-1 < 2 \Leftrightarrow x < 3 \\ x < 1: &\quad -(x-1) < 2 \Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-1 < x < 1 \text{ eller } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

$-1 < x < 3$



d) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

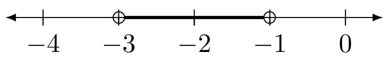
$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{då } x+2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{då } x+2 < 0 \text{ dvs. } x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -2: &\quad x+2 < 1 \Leftrightarrow x < -1 \\ x < -2: &\quad -(x+2) < 1 \Leftrightarrow x > -3 \end{aligned}$$

Kombinera sedan definitionsmängden för uttrycket och uttrycket.

$$-3 < x < -2 \text{ eller } -2 \leq x < -1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

$-3 < x < -1$



Svar:

5.17 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{då } x-3 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{då } x-3 < 0 \text{ dvs. } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 3: &\quad x-3 = 1-2x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \ngeq 3 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < 3: &\quad -(x-3) = 1-2x \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Svar: $x = -2$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x-2 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x-2 < 0 \text{ dvs. } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\quad x-2 = x+1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ingen lösning} \\ x < 2: &\quad -(x-2) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } 2x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{då } 2x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq -\frac{1}{2}: &\quad 2x+1 = x-1 \Leftrightarrow x = -2 \ngeq -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < -\frac{1}{2}: &\quad -(2x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = 0 \nless -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

Svar: Saknar lösning

5.18 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x-x = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow \text{ingen lösning} \\ x < 0: &\quad -x-x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Svar: $x = -1$

b) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0: &\quad x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \ngeq 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ x < 0: &\quad x^2+2(-x)-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \nless 0 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $x = -1$ eller $x = 1$

c) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp.

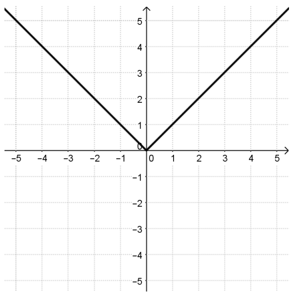
$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x+1 \geq 0 \text{ dvs. } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x+1 < 0 \text{ dvs. } x < -1 \end{cases}$$

$$x \geq -1: \quad x^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x < -1: \quad x^2 + 2(-x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \not< -1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

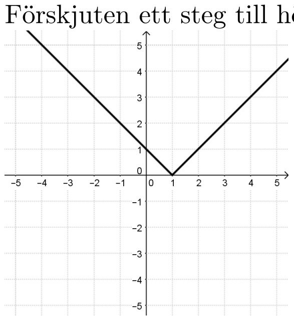
Svar: $x = -1$

5.19 a) (s.)



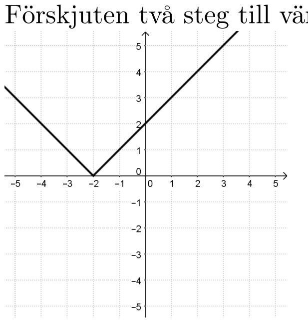
b) (s.)

Förskjuten ett steg till höger.



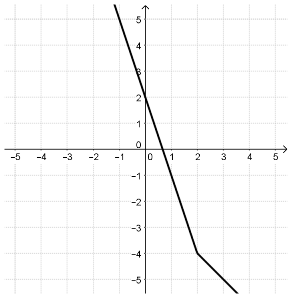
c) (s.)

Förskjuten två steg till vänster.



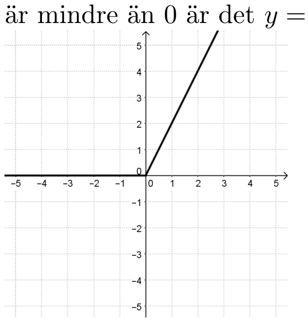
5.20 a) (s.)

När x är större än 2 är det $y = x - 2 - 2x = -x - 2$ som gäller och när x är mindre än 2 är det $y = -(x-2) - 2x = -3x + 2$.



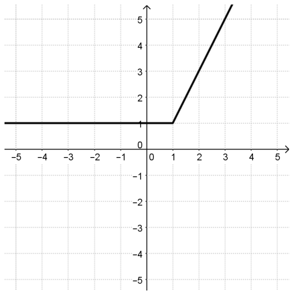
b) (s.)

När x är större än 0 så är det $y = x + x = 2x$ som gäller och när x är mindre än 0 är det $y = -x + x = 0$.



c) (s.)

När x är större än 1 så är det $y = x - 1 + x = 2x - 1$ som gäller och när x är mindre än 1 är det $y = -(x-1) + x = 1$.



5.21 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| + |x-1| = \begin{cases} x+1+x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ x+1-(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)-(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1+x-1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1-(x-1) = 4 \Leftrightarrow 2 \neq 4 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)-(x-1) = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Svar: $x = 2$ eller $x = -2$

5.22 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{då } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{då } x < -1 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x+1| - |x-1| = \begin{cases} x+1-(x-1) & \text{då } x \geq 1 \\ x+1+(x-1) & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ -(x+1)+(x-1) & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1-(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2 \neq 1 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1+(x-1) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)+(x-1) = 1 \Leftrightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \end{aligned}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$\begin{aligned} x \geq 1: &\ \ x+1-(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ -1 \leq x < 1: &\ \ x+1+(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \not< 1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ x < -1: &\ \ -(x+1)+(x-1) = 3 \Leftrightarrow -2 \neq 3 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \end{aligned}$$

Svar: saknar lösning

c) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

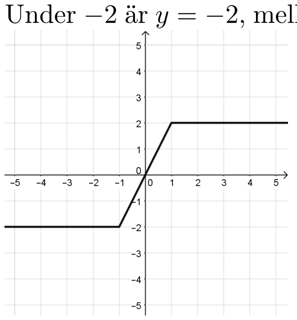
$$\begin{aligned}
x \geq 1: &\quad x+1-(x-1) = -2 \Leftrightarrow 2 \neq -2 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\
-1 \leq x < 1: &\quad x+1+(x-1) = -2 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \\
x < -1: &\quad -(x+1)+(x-1) = -2 \Leftrightarrow -2 = -2 \Rightarrow \text{ alla lösningar}
\end{aligned}$$

$$x < -1 \text{ eller } x = -1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Svar: $x \leq -1$

d) (s.)

Under -2 är $y = -2$, mellan -2 och 2 är $y = 2x$ och efter 2 är $y = 2$.



5.23 a) (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x-1| + |x-2| = \begin{cases} x-1+x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ x-1-(x-2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x-1)-(x-2) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x \geq 2: &\quad x-1+x-2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \\
1 \leq x < 2: &\quad x-1-(x-2) = 2 \Leftrightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\
x < 1: &\quad -(x-1)-(x-2) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$ eller $x = \frac{5}{2}$

b) (s.)

Använd resonemanget från uppgift a) för intervallen.

$$\begin{aligned} x \geq 2: &\quad x - 1 + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \ngeq 2 \Rightarrow \text{falsk lösning} \\ 1 \leq x < 2: &\quad x - 1 - (x - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ ingen lösning} \\ x < 1: &\quad -(x - 1) - (x - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \nless 1 \Rightarrow \text{falsk lösning} \end{aligned}$$

Svar: saknar lösning

5.24 (s.)

Använd definitionen av absolutbelopp (hoppat över ett steg för att det ska vara mer lättläst).

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{då } x < 1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{då } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Slå samman båda till ett gemensamt uttryck.

$$|x-1| + 2|x-2| = \begin{cases} x - 1 + 2(x-2) & \text{då } x \geq 2 \\ x - 1 - 2(x-2) & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ -(x-1) - 2(x-2) & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

För att lösa uppgiften behöver vi veta värdemängden för varje uttryck och eftersom de är linjär kommer det endast finnas ett värde på x för varje värde på a och ändarna kommer alltid vara minsta respektive största värdet.

Värdemängden för första uttrycket ges av $x = 2 \Rightarrow a = 1$ och $x \to \infty \Rightarrow a \to \infty$.

Värdemängden för andra uttrycket ges av $x = 1 \Rightarrow a = 2$ och $x \to 2 \Rightarrow a \to 1$.

Värdemängden för tredje uttrycket ges av $x \to -\infty \Rightarrow a \to \infty$ och $x \to 1 \Rightarrow a \to 2$.

För alla a större än 1 kommer det alltså finnas två lösningar.

Svar: $a > 1$

5.25 (s.)

Utnyttja faktumen att $\sqrt{a^2} = |a|$, att $|a| = -a$ eftersom $a < 0$ och att $a^2 + b^2 >= 0$ oberoende av värden på a och b.

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4} = \sqrt{a^2}\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = |a|\sqrt{(a^2+b^2)^2} = \\ &= -a|a^2 + b^2| = -a(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Svar: $-a(a^2 + b^2)$

5.26 (s.)

Avståndet mellan punkterna i x-led kan skrivas som $|x_2 - x_1|$ och i y-led som $|y_2 - y_1|$. Eftersom x- och y-axeln är vinkelräta mot varandra kan en vinkelrät triangel ritas upp där avståndet mellan punkterna är hypotenusan och avståndet i x- respektive y-led är kateterna. Pyth. sats säger då att:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Leftrightarrow d = {}_{(\overset{+}{-})}\sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ V.S.V.}$$

Cirkeln, ellipsen och hyperbeln

5.27 (s.)

Kvadratkomplettera och använd sedan cirkelns ekvation för att identifiera medelpunkten och radien.

$$x^2 + y^2 + 2(2x - y) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 + (y-1)^2 - 1^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4 + 4 + 1 \Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

Medelpunkten blir då $(-2, 1)$ och radien blir 3.

Svar: medelpunkt: $(-2, 1)$, radie: 3

5.28 (s.)

Kvadratkomplettera och använd sedan cirkelns ekvation för att identifiera radien.

$$x^2 - ax + y^2 + 2y = a \Leftrightarrow (x - \tfrac{a}{2})^2 - (\tfrac{a}{2})^2 + (y+1)^2 - 1^2 = a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - \tfrac{a}{2})^2 + (y+1)^2 = a + \tfrac{a^2}{4} + 1$$

Cirkelns ekvation ger:

$$r^2 = a + \tfrac{a^2}{4} + 1, \quad r = 2$$

$$a + \tfrac{a^2}{4} + 1 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 - 4 * 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$$

pq-formeln:

$$a = -2 \pm \sqrt{2^2 + 12} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = -6$$

Svar: $a_1 = 2$ eller $a_2 = -6$

5.29 a) (s.)

Skriv om ekvationen så den passar ellipsens ekvation och identifiera sedan radien och halvaxlarna.

$$2x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1$$

radien är $(0,1)$ och halvaxlarna är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1

Svar: radie: $(0,1)$, halvaxlar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1

b) (s.)

Kvadratkomplettera, skriv om ekvationen så den passar ellipsens ekvation och identifiera sedan radien och halvaxlarna.

$$2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x) + (y+1)^2 - 1^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2((x-2)^2 - 2^2) + (y+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 8 + (y+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-(-1)}{2}\right)^2 = 1$$

radien är $(2,-1)$ och halvaxlarna är $\sqrt{2}$ och 2

Svar: radie: $(2,-1)$, halvaxlar: $\sqrt{2}$ och 2

5.30 (s.)

$$y^2 + 2y - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 1^2 - (2x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-(-1))^2 - (2(x-0))^2 = 1$$

Hyperbelns ekvation ger då att medelpunkten är $(0,-1)$.

Kolla sedan vad som händer när $x \to \infty$ för att bestämma lutningen på asymptoterna.

$$(y-(-1))^2 - (2(x-0))^2 = 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = (2x)^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + 1 = \sqrt{(2x)^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \pm\sqrt{(2x)^2 + 1} - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{(2x)^2} = \pm 2x$$

Lutningen på asymptoterna är alltså $\pm 2x$ och eftersom de ska passera igenom medelpunkten blir ekvationen för respektive asymptot $y = 2x - 1$ samt $y = -2x - 1$.

Svar: medelpunkt: $(0,-1)$, asymptoter: $y = 2x - 1$ och $y = -2x - 1$

5.31 a) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*hyperbel* eftersom en av x och y är negativ).

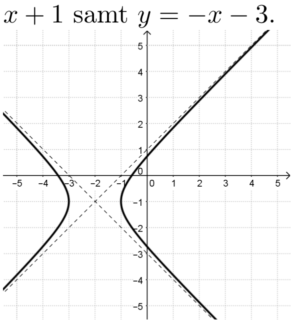
$$x^2 - y^2 + 4x - 2y = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 - ((y+1)^2 - 1^2) = -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$$

Medelpunkten är $(-2, -1)$ och eftersom det är y-termen som är negativ går linjerna på höger och vänster sida om asymptoterna.

Lutning på asymptoterna:

$$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} y = \pm\sqrt{(x+2)^2 - 1} - 1 \Leftrightarrow y = \pm x$$

Lutningen på asymptoterna är alltså $\pm x$ och eftersom de ska passera igenom medelpunkten blir ekvationen för respektive asymptot $y = x + 1$ samt $y = -x - 3$.

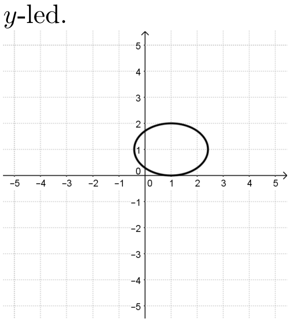


b) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*ellips* eftersom x och y är positiva och det är ett ojämnt antal x^2- och y^2-termer).

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1^2 + 2((y+1)^2 - 1^2) = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{1}\right)^2 = 1$$

Medelpunkten är $(1, 1)$ och halvaxlarna är $\sqrt{2}$ och 1 i x- respektive y-led.

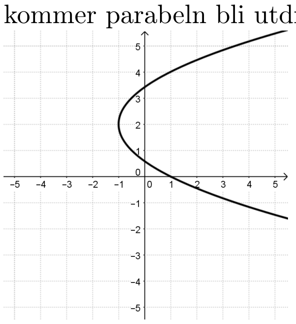


c) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*liggandes parabel* eftersom att en y^2-term men inte en x^2-term).

$$y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = y^2 - 4y + 2 \Leftrightarrow 2x = (y-2)^2 - 2^2 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y-2)^2 - 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y-2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1$$

Vertex är i punkten $(-1, 2)$ och eftersom faktorn i y-termen är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kommer parabeln bli utdragen med en faktor av det.

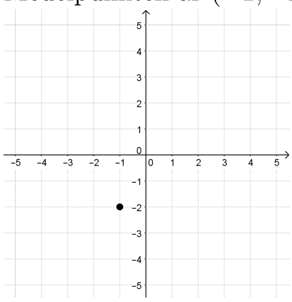


d) (s.)

Identifiera vilken andragradskurva det är (*cirkel* eftersom x och y är positiva och det är ett jämnt antal x^2- och y^2-termer).

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1^2 + (y+2)^2 - 2^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

Medelpunkten är $(-1, -2)$ och radien är 0 (är en punkt).



5.32 (s.)

Lös det med hjälp av ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$x^2 + (\tfrac{1}{2}x - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} - x + 1 = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{4}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{12}{5}} = \frac{4}{10} \pm \sqrt{\frac{16 + 240}{100}} = \frac{4}{10} \pm \frac{16}{10}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} * 2 - 1 = 0 \\ x_2 = -\frac{6}{5} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2} * (-\frac{6}{5}) - 1 = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Punkterna är $(2, 0)$ och $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$.

Svar: $(2, 0)$ och $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$

5.33 (s.)

Skriv om den räta linjen som $y = kx + m$ med tvåpunktsformeln och använd sen ett ekvationssystem.

Tvåpunktsformeln:

$$y - 1 = \frac{4 - 1}{2 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{3}(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$$

Ekvationssystem:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y = 3 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden:

$$3x^2 - 2(x + 2)^2 + 6x + 4(x + 2) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(x^2 + 4x + 4) + 6x + 4x + 8 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x^2 - 8x - \cancel{8} + 10x + \cancel{8} = 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

pq-formeln:

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = -1 \pm 2$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -3 + 2 = -1 \end{cases}$$

Punkterna är $(1, 3)$ och $(-3, -1)$.

Svar: $(1, 3)$ och $(-3, -1)$

Kapitel 6: Komplexa tal

6.1 a) (s.)

$2 + 3i$
Re $z = 2$ och Im $z = 3$

Svar: 2, 3

b) (s.)

$-1 - i = -1 - 1i$
Re $z = -1$ och Im $z = -1$

Svar: -1, -1

c) (s.)

$3 = 3 + 0i$
Re $z = 3$ och Im $z = 0$

Svar: 3, 0

d) (s.)

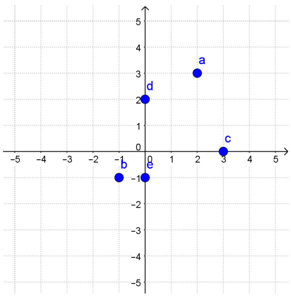
$2i = 0 + 2i$
Re $z = 0$ och Im $z = 2$

Svar: 0, 2

e) (s.)

$-i = 0 + -1i$
Re $z = 0$ och Im $z = -1$

Svar: 0, -1



6.2 a) (s.)

$$(1 + i) + (-3 - 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - i$$

Svar: $-2 - i$

b) (s.)

$$(1+i)-(3-4i) = (1+i)+(-3+4i) = (1-3)+(1+4)i = -2+4i$$

Svar: $-2+4i$

c) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller parentesmultiplikation.

Räkneregel:

$$(1+i)(3-4i) = (1+i)(3+(-4)i) = (1*3-1*(-4))+(1*(-4)+1*3)i =$$
$$=(3+4)+(-4+3)i = 7-i$$

parentesmultiplikation:

$$(1+i)(3-4i) = 3-4i+3i-4i^2 = 3-i+4 = 7-i$$

Svar: $7-i$

d) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller kvadreringsregeln.

Räkneregel:

$$\begin{aligned}(1-i)^2 &= (1+(-i))(1+(-i)) = \\ &=(1*1-(-1)*(-1))+(1*(-1)+(-1)*1)i = \\ &=(1-1)+(-1-1)i = -2i\end{aligned}$$

Kvadreringsregeln:

$$(1-i)^2 = 1^2-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$$

Svar: $-2i$

e) (s.)

Använd antingen räkneregeln för multiplikation av komplexa tal eller parentesmultiplikation.

Räkneregel:

$$
\begin{aligned}
&(5-2i)^3 = (5+(-2i))(5+(-2i))(5+(-2i)) = \\
=&((5*5-(-2)*(-2)) + (5*(-2)+(-2)*5)i)(5+(-2i)) = \\
=&((25-4)+(-10-10)i)(5+(-2i)) = (21+(-20)i)(5+(-2i)) = \\
=&(21*5-(-20)*(-2)) + (21*(-2)+(-20)*5)i = \\
=&(105-40)+(-42-100)i = 65-142i
\end{aligned}
$$

parentesmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
&(5-2i)^3 = 5^3 - 3*5^2*2i + 3*5*(2i)^2 - (2i)^3 = \\
=&125 - 150i - 60 + 8i = 65 - 142i
\end{aligned}
$$

Svar: $65-142i$

f) (s.)

Uppgift d) ger att $(x-i)^2 = -2i$ (kan också lösas med båda metoderna som tidigare använts).

$$(x-i)^4 = ((x-i)^2)^2 = (-2i)^2 = 4*(-1) = -4$$

Svar: -4

6.3 a) (s.)

$$\overline{1+i} = 1-i$$

Svar: $1-i$

b) (s.)

$$\overline{3-5i} = 3+5i$$

Svar: $3+5i$

c) (s.)

$$\overline{-7} = -7$$

Svar: -7

d) (s.)

$$(1+i)\overline{(1+i)} = (1+i)(1-i) = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$$

Svar: $-2i$

e) (s.)

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

f) (s.)

$$|i| = |0+i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

Svar: 1

g) (s.)

$$|3-2i| = |3+(-2)i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$

Svar: $\sqrt{13}$

h) (s.)

$$|-5i| = |0+(-5)i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$$

Svar: 5

6.4 a) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{\overline{1+i}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Svar: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{\overline{3-4i}}{(3-4i)\overline{(3-4i)}} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Svar: $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

c) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{3-4i}{1+i} = \frac{(3-4i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-4i-4}{1^2+1} =$$
$$= \frac{-1-7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

Svar: $-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

d) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-i-1}{1^2+1} =$$
$$= \frac{-2i}{2} = -i$$

Svar: $-i$

e) (s.)

Förenkla och förläng med konjugatet.

$$(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1^2+2i+i^2} = \frac{1}{2i} =$$
$$= \frac{\overline{2i}}{2i\overline{2i}} = \frac{-2i}{2i(-2i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

Svar: $-\frac{1}{2}i$

f) (s.)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

Svar: $-i$

6.5 a) (s.)

Använd räknelagen $|zw| = |z||w|$ (upprepade gånger).

$$|(1-i)^{14}| = |1-i|^{14} = \sqrt{1^2+(-1)^2}^{14} = \sqrt{2}^{14} = 2^7 = 128$$

Svar: 128

b) (s.)

Använd räknelagen $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

$$\left|\frac{3+i}{4+3i}\right| = \frac{|3+i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Svar: $\frac{\sqrt{10}}{5}$

6.6 (s.)

Använd räknelagarna $|zw| = |z||w|$ och $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

$$\left|\frac{(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2}{(5+i)^2}\right| = \frac{|(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2|}{|(5+i)^2|} = \frac{|1+2i||7+\sqrt{3}i|^2}{|5+i|^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{7^2+\sqrt{3}^2}^2}{\sqrt{5^2+1^2}^2} = \frac{\sqrt{5}*52}{26} = 2\sqrt{5}$$

Svar: $2\sqrt{5}$

6.7 (s.)

Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b var för sig.

$$z + 2\overline{z} = 2 - i \Leftrightarrow (a+bi) + 2\overline{(a+bi)} = 2 - i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = 2 - i \Leftrightarrow 3a - bi = 2 - i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \\ -b = -1 \Leftrightarrow b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + i$$

Svar: $z = \frac{2}{3} + i$

6.8 a) (s.)

Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b med ett ekvationssystem.

$$3z - i\overline{z} = 7 - 5i \Leftrightarrow 3(a+bi) - i\overline{(a+bi)} = 7 - 5i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a + 3bi - i(a - bi) = 7 - 5i \Leftrightarrow 3a + 3bi - ai - b = 7 - 5i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3a - b) + (3b - a)i = 7 - 5i \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}z: & 3a - b = 7 \Leftrightarrow b = 3a - 7 \\ \text{Im}z: & 3b - a = -5 \Leftrightarrow b = \frac{a-5}{3} \end{cases} \overset{\text{sub.met.}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 3a - 7 = \frac{a-5}{3} \Leftrightarrow 9a - 21 = a - 5 \Leftrightarrow 8a = 16 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = 3 * 2 - 7 = -1 \Rightarrow z = 2 - i$$

Svar: $z = 2 - i$

b) (s.)

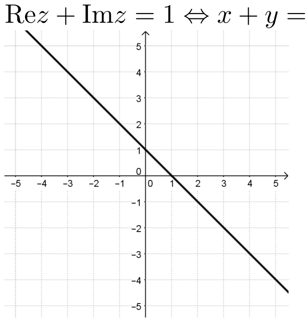
Använd $z = a + bi$ och identifiera sedan a och b med ett ekvationssystem.

$$z * 2\overline{z} = 1 + i \Leftrightarrow (a + bi) * 2\overline{(a + bi)} = 1 + i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a + bi)(a - bi) = 1 + i \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) = 1 + i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}z: & 2(a^2 + b^2) = 1 \\ \text{Im}z: & 0 = 1 \Rightarrow \text{ ekvationen saknar lösning} \end{cases}$$

Svar: saknar lösning

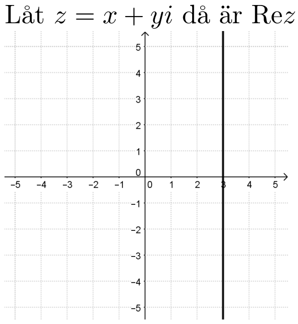
6.9 (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Re}z = x$ och $\text{Im}z = y$ vilket innebär att $\text{Re}z + \text{Im}z = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$



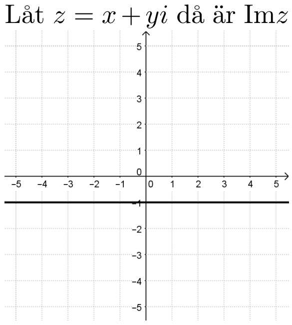
6.10 a) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Re}z = x$ vilket medför att $\text{Re}z = 3 \Leftrightarrow x = 3$



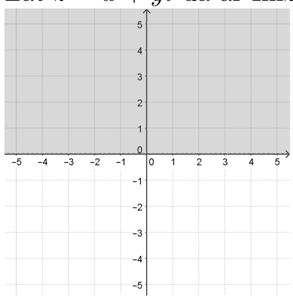
b) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\text{Im}z = y$ vilket medför att $\text{Im}z = -1 \Leftrightarrow y = -1$



c) (s.)

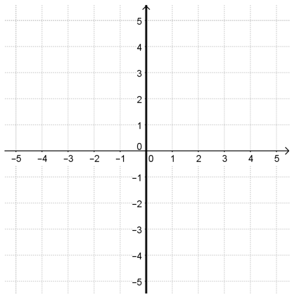
Låt $z = x + yi$ då är $\text{Im}z = y$ vilket medför att $\text{Im}z > 0 \Leftrightarrow y > 0$



d) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\overline{z} = x - yi$.

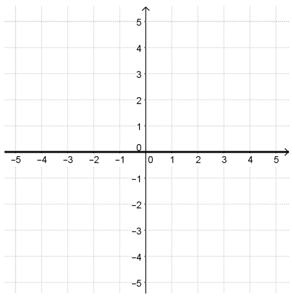
$$z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow x + \cancel{yi} + x + \cancel{yi} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



e) (s.)

Låt $z = x + yi$ då är $\overline{z} = x - yi$.

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow \cancel{x} + yi = \cancel{x} - yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0$$



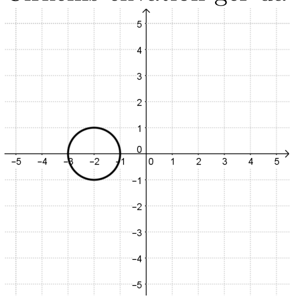
6.11 (s.)

(*taget från boken*)
Eftersom $|z-u|$ anger avståndet från z till u, så är $|z+2| = |z-(-2)|$ avståndet från |z| till |-2|. Relationen $|z+2| = 1$ är alltså uppfylld av alla z vars avstånd till -2 är 1, dvs. alla z på cirkeln med radie 1 och medelpunkt -2.

Algebraisk lösning (låt $z = x + yi$):

$$|z+2| = 1 \Leftrightarrow |(x+2)+yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)+y^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten -2 och radien 1.

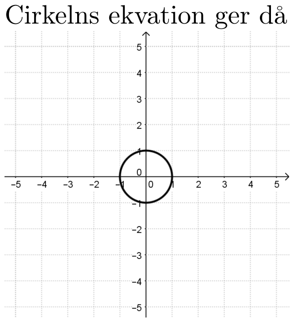


6.12 a) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 1.

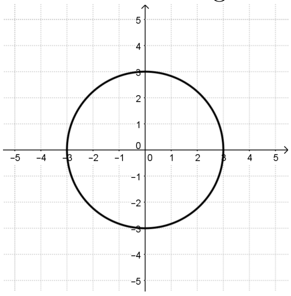


b) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 3.

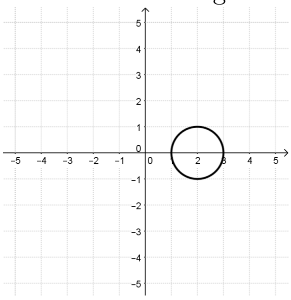


c) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z-2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2)+yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = 1$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 2 och radien 1.

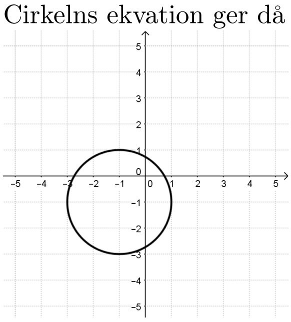


d) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z + 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |(x + 1) + (y + 1)i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten $-1 - i$ och radien 2.

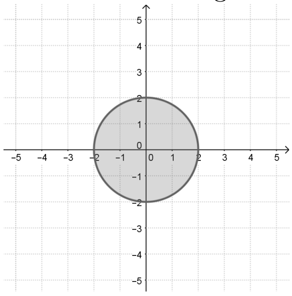


e) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 2.

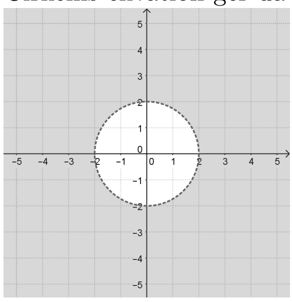


f) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$|z| > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten 0 och radien 2.

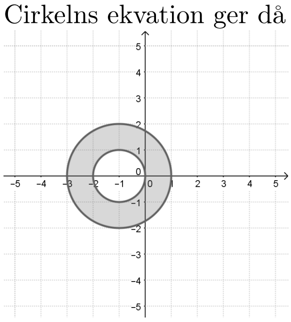


g) (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$1 \leq |z + 1| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |(x + 1) + yi| \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq (x + 1)^2 + y^2 \leq 2^2$$

Cirkelns ekvation ger då medelpunkten -1 och radien 1 och 2.



6.13 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{cases} |z-3i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 4 \\ z+\overline{z} = 2 \Leftrightarrow x+yi+x-yi = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden.

$$1^2+(y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 3 \Leftrightarrow y-3 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3\pm\sqrt{3}$$

$$z = 1+(3\pm\sqrt{3})i$$

Svar: $z = 1+(3\pm\sqrt{3})i$

6.14 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} &|z-1| = |z+1| \Leftrightarrow |(x-1)+yi| = |(x+1)+yi| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &x^2-2x+1+y^2 = x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}z = 0$ och $\mathrm{Im}z \in \mathbb{R}$ vilket motsvarar $\mathrm{Im}z$-axeln.

Svar: alla z på $\mathrm{Im}z$-axeln

6.15 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} &|z-1| = 2|z+1| \Leftrightarrow |(x-1)+yi| = 2|(x+1)+yi| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &x^2-2x+1+y^2 = 4x^2+8x+4+4y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &3x^2+10x+3y^2+3 = 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{10}{3}x+y^2+1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &(x+\tfrac{5}{3})^2-(\tfrac{5}{3})^2+y^2+1 = 0 \Leftrightarrow (x+\tfrac{5}{3})^2+y^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &(x+\tfrac{5}{3})^2+y^2 = (\tfrac{4}{3})^2 \end{aligned}$$

Cirkelns ekvation ger medelpunkten $(-\frac{5}{3}, 0)$ och radien $\frac{4}{3}$.

Svar: Alla z på cirkeln med medelpunkten $(-\frac{5}{3}, 0)$ och radien $\frac{4}{3}$

6.16 (s.)

Låt $z = x + yi$.

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{4-z}{4z}\right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{|4-z|}{|4z|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{|4-z|}{|z|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{|4-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |(4-x)+(-y)i| = |x-yi| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4^2 - 8x + \cancel{x^2+y^2} = \cancel{x^2+y^2} \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$$

$\text{Re}z = 2$ och $\text{Im}z \in \mathbb{R}$ vilket motsvarar linjen $\text{Re}z = 2$.

Svar: Alla z på linjen $\text{Re}z = 2$

6.17 (s.)

Låt $z = x + yi$. Påståendet är sant när den imaginära delen av uttrycket är noll.

$$z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} = \frac{(z^2+1)\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{((x+yi)^2+1)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} =$$
$$= \frac{(x^2+2xyi-y^2+1)(x-yi)}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{x^3 - x^2yi + 2x^2yi + 2xy^2 - xy^2 + y^3i + x - yi}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{x^3 + x^2yi + xy^2 + y^3i + x - yi}{x^2+y^2}$$

Imaginära delen:

$$x^2y + y^3 - y = 0 \Leftrightarrow y(x^2+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\text{faktorsatsen: } \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$y = 0$ är $\text{Re}z$-axeln men eftersom uttrycket inte är definierat för $z = 0$. $x^2 + y^2 = 1$ är enhetscirkeln.

Svar: Alla talen på $\text{Re}z$-axeln utom $z = 0$ och alla talen på enhetscirkeln.

Polär form

6.18 a) (s.)

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}i = 1 + i$$

Svar: $1 + i$

b) (s.)

$$1\cos\pi + i * 1\sin\pi = 1 * (-1) + 1 * 0 * i = -1$$

Svar: -1

c) (s.)

$$\sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}i = 1 + i$$

Svar: $1 + i$

d) (s.)

$$1\cos\frac{\pi}{2} + i * 1\sin\frac{\pi}{2} = 1 * 0 + 1 * 1 * i = i$$

Svar: i

e) (s.)

$$1\cos 2\pi + i * 1\sin 2\pi = 1 * 1 + 1 * 0 * i = 1$$

Svar: 1

f) (s.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos -\frac{\pi}{4} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}})i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1-i)$$

Svar: $\frac{1}{2}(1 - i)$

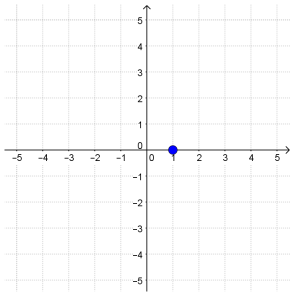
g) (s.)

$$1\cos 100\pi + i * 1\sin 100\pi = 1 * 1 + 1 * 0 * i = 1$$

Svar: 1

6.19 a) (s.)

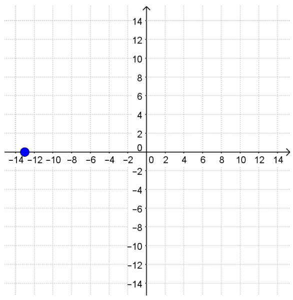
$$|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \qquad 1 = 1 * \cos 0 \Rightarrow \arg z = 0, \qquad z = e^{i0}$$



Svar: $|z| = 1$, $\arg z = 0$, $z = e^{i0}$

b) (s.)

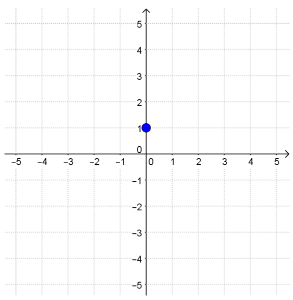
$$|z| = \sqrt{(-13)^2 + 0^2} = 13, \qquad 13 = 13 * \cos \pi \Rightarrow \arg z = \pi, \qquad z = 13e^{i\pi}$$



Svar: $|z| = 13$, $\arg z = \pi$, $z = 13e^{i\pi}$

c) (s.)

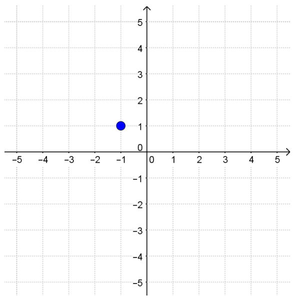
$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \qquad 1 = i * 1 * \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}, \qquad z = e^{i\pi/2}$$



Svar: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, $z = e^{i\pi/2}$

d) (s.)

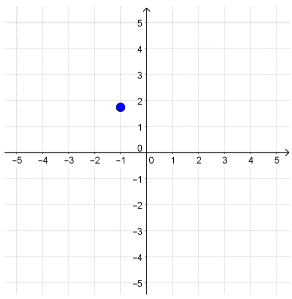
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad -1 + i = \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) =$$
$$=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \arg z = \frac{3\pi}{4}, \qquad z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$



Svar: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

e) (s.)

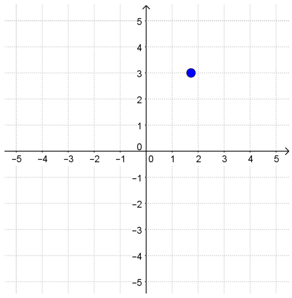
$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \qquad \sqrt{3}i - 1 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}) =$$
$$=2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \arg z = \frac{2\pi}{3}, \qquad z = 2e^{i2\pi/3}$$



Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, $z = 2e^{i2\pi/3}$

f) (s.)

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) =$$
$$=2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \qquad z = 2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}$$



Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, $z = 2e^{i2\pi/3}$

6.20 a) (s.)

$$z = \cos\tfrac{\pi}{8} + i\sin\tfrac{\pi}{8}$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos\tfrac{\pi}{8} + i\sin\tfrac{\pi}{8}) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

$$z = \cos\tfrac{\pi}{8} + i\sin\tfrac{\pi}{8} = e^{i\frac{\pi}{8}} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

b) (s.)

$$z = \cos\tfrac{9\pi}{5} + i\sin\tfrac{9\pi}{5}$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos\tfrac{9\pi}{5} + i\sin\tfrac{9\pi}{5}) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

$$z = \cos\tfrac{9\pi}{5} + i\sin\tfrac{9\pi}{5} = e^{i\frac{9\pi}{5}} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

c) (s.)

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

Använd definitionen av polär form och resonera att $r = 1$.

$$z = 1 * z = 1(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow r = |z| = 1$$

eller använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \Rightarrow |z| = 1$$

Svar: $|z| = 1$

6.21 a) (s.)

Använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, det kvittar alltså vilken vinkel det är.

$$|e^{i\frac{\pi}{8}}| = 1$$

Svar: 1

b) (s.)

Använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, det kvittar alltså vilken vinkel det är.

$$|e^{i\frac{9\pi}{5}}| = 1$$

Svar: 1

c) (s.)

Använd att $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

$$|e^{i\theta}| = 1$$

Svar: 1

6.22 a) (s.)

Utnyttja att $e^{i\varphi} * e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$ (potensregel).

$$z = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad w = k_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$zw = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}} * k_2 e^{i\frac{\pi}{4}} = k_1 k_2 e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = k_1 k_2 e^{i\frac{7\pi}{12}} \Rightarrow \arg zw = \frac{7\pi}{12}$$

Svar: $\arg zw = \frac{7\pi}{12}$

b) (s.)

Utnyttja att $e^{i\varphi} * e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$ samt att $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ vilket i sin tur medför att $e^{i\varphi}/e^{i\theta} = e^{i\varphi} * e^{-i\theta} = e^{i(\varphi-\theta)}$ (potensregel).

$$z = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad w = k_2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$zw = k_1 e^{i\frac{\pi}{3}}/k_2 e^{i\frac{\pi}{4}} = k_1 k_2 e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = k_1 k_2 e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow \arg zw = \frac{\pi}{12}$$

Svar: $\arg zw = \frac{\pi}{12}$

c) (s.)

Tänk dig att du har två imaginära tal är det ena, z, har argumentet (vinkeln) 0 och den andra, w, har argumentet π men att absolutbeloppen (längderna) inte är angivna. Om z:s absolutbelopp är större än w:s kommer summan ha samma argument som z. Om w:s absolutbelopp däremot är större än z:s kommer summan ha samma argument som w. Man kan alltså inte säga vilket argument summan eller differensen kommer ha.

Svar: Nej det kan man inte.

6.23 (s.)

låt $z = ke^{i\pi/3}$.

$$z^{2000} = (ke^{i\pi/3})^{2000} = k^{2000} e^{i2000\pi/3}$$

Skriv om argumentet i formen $x\pi + n2\pi$ så man kan bryta ut perioden. Eftersom $x\pi + n2\pi = x\pi$ så är det x som är intressant

$$\frac{2000\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{1998}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + 666\pi = \frac{2}{3}\pi + 333 * 2\pi = x\pi + n2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}, \qquad n = 333$$

$\arg z^{2000} = \frac{2}{3}\pi, \quad 0 \leq \arg z^{2000} \leq 2\pi$

Svar: $\frac{2}{3}\pi$

6.24 (s.)

Då argumentet är det enda som är intressant kan alla faktorer skrivas ihop som k.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{(2-2i)^3} = \frac{2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i))^3} = k\frac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4})^3} =$$

$$=k\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i3\pi/4}} = ke^{i\pi/3-(-i3\pi/4)} = ke^{i13\pi/12}$$

$$\arg z = \frac{13}{12}\pi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $\frac{13}{12}\pi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

6.25 (s.)

Då argumentet är det enda som är intressant kan alla faktorer skrivas ihop som k.

$$\begin{aligned}
&\frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} = \frac{2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}{3i\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})} = \\
=&k\frac{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{i\sin\frac{\pi}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))} = k\frac{e^{i\pi/4}e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/2}e^{-i\pi/6}} = \\
=&ke^{i(\pi/4+\pi/3-\pi/2-(-\pi/6))} = ke^{i(3\pi/12+4\pi/12-6\pi/12+2\pi/12)} = \\
=&ke^{i3\pi/12} = ke^{i\pi/4} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \arg\frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} = \arg ke^{i\pi/4} = \frac{\pi}{4}+n2\pi, \quad n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{4}+n2\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$

6.26 a) (s.)

Låt $z = a+bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a}, \ a\neq 0$.Om $a>0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a<0$ är $\theta = \pi+\arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg(1+2iw) = \arctan\frac{2w}{1} = \arctan 2w$$

Svar: $\arctan 2w$

b) (s.)

Låt $z = a+bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a}, \ a\neq 0$.Om $a>0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a<0$ är $\theta = \pi+\arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg(-1+2iw) = \pi+\arctan\frac{2w}{-1} = \pi+\arctan(-2w) = \pi-\arctan 2w$$

Svar: $\pi-\arctan 2w$

c) (s.)

Låt $z = a+bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a}, \ a\neq 0$.Om $a>0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a<0$ är $\theta = \pi+\arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \qquad \arg(1+2iw) = \arctan 2w \ \text{(se a))}$$

$$\arg\left(\frac{1}{1+2iw}\right) = \arg 1-\arg(1+2iw) = 0-\arctan 2w = -\arctan 2w$$

Svar: $-\arctan 2w$

d) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a},\ a \neq 0$.Om $a > 0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \quad \arg(-1 + 2iw) = \pi - \arctan 2w \text{ (se b))}$$

$$\arg\left(\frac{1}{-1+2iw}\right) = \arg 1 - \arg(-1+2iw) = 0 - (\pi - \arctan 2w) = \arctan 2w - \pi$$

Svar: $\arctan 2w - \pi$

e) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a},\ a \neq 0$.Om $a > 0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg 1 = 0, \quad \arg(1 + 2iw) = \arctan 2w \text{ (se a))}$$

$$\arg\left(\frac{1}{(1+2iw)^2}\right) = \arg 1 - 2\arg(1+2iw) = 0 - 2\arctan 2w = -2\arctan 2w$$

Svar: $-2\arctan 2w$

f) (s.)

Låt $z = a + bi$ och θ ett argument till z. Eftersom Rez motsvarar x-axeln och Imz motsvarar y-axeln i ett koordinatsystem är $\tan\theta = \frac{b}{a},\ a \neq 0$.Om $a > 0$ är $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ och om $a < 0$ är $\theta = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

$$\arg(e^{iw}) = w, \quad \arg(1 + 2iw) = \arctan 2w \text{ (se a))}$$

$$\arg\left(\frac{e^{iw}}{(1+2iw)^2}\right) = \arg(e^{iw}) - 2\arg(1+2iw) = w - 2\arctan 2w$$

Svar: $w - 2\arctan 2w$

6.27 (s.)

Använd faktumet att både sinus och cosinus har perioden 2π.

$$\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})^{100} = (e^{i\pi/3})^{100} = e^{i100\pi/3} =$$
$$= e^{i(102\pi/3 - 2\pi/3)} = e^{i\pi(17*2\pi - 2\pi/3)} = e^{-i2\pi/3} =$$
$$= \cos(-\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Svar: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

6.28 (s.)

Använd de Moivres formel och identifiera sedan den reella och imaginär delen var för sig.

$$\begin{aligned}
&\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \\
=&\cos^4\theta + i4\cos^3\theta\sin\theta + i^2 6\cos^2\theta\sin^2\theta + i^3 4\cos\theta\sin^3\theta + i^4\sin^4\theta = \\
=&(\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$
$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Svar: se ovan

6.29 (s.)

Eulers formler:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\frac{1}{2i}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = \\
=&\frac{1}{4i}(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) = \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i}(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) - \frac{1}{2i}(e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)})\right) = \\
=&\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$

6.30 (s.)

Använd Eulers formel för sinus.

$$\begin{aligned}
&\sin^4\theta = (\tfrac{1}{2i})^4(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 = \\
=&\frac{1}{16}(e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}) = \\
=&\frac{1}{16}(e^{i4\theta} - 4e^{i2\theta} + 6e^{0} - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) = \\
=&\frac{1}{8}(6\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + \frac{1}{2}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta})) = \\
=&\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$

6.31 a) (s.)

Att addera $\pi/2$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i\pi/2}$ vilket innebär att $1 * e^{i\pi/2} = i$.

Svar: i

b) (s.)

Att addera $\pi/2$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i\pi/2}$ vilket innebär att:

$$(-3+2i)e^{i\pi/2} = (-3+2i)i = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$$

Svar: $-2-3i$

6.32 a) (s.)

Att addera $5\pi/6$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i5\pi/6}$ och talet förstoras i skalan 3 genom att multiplicera med 3 vilket innebär att:

$$1e^{i5\pi/6} * 3 = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Svar: $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

b) (s.)

Att addera $5\pi/6$ till argumentet är samma som att multiplicera med $e^{i5\pi/6}$ och talet förstoras i skalan 3 genom att multiplicera med 3 vilket innebär att:

$$(-1+i)e^{i5\pi/6} * 3 = (-1+i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) * 3 =$$
$$=(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}) * 3 = 3(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i) =$$
$$=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}i$$

Svar: $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}i$

6.33 (s.)

Först måste förstoringen och vridningen identifieras. Dessa kan dock göras tillsammans eftersom båda ändå ska multipliceras med hörnen. $2(a+bi) = 7+i \Rightarrow a = \frac{7}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$. $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$ är alltså faktorn alla hörnen ska multipliceras med.

$$0(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = 0$$
$$(2+i)(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = 7 + i + \frac{7}{2}i - \frac{1}{2} = \frac{13}{2} + \frac{9}{2}i$$
$$i(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{7}{2}i + \frac{1}{2}i^2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

Svar: 0, $\frac{13}{2} + \frac{9}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

6.34 a) (s.)

$$e^0 = 1$$

Svar: 1

b) (s.)

$$e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

Svar: i

c) (s.)

$$\begin{aligned} &e^{1/2\ln 2 + i\pi/4} = e^{1/2\ln 2}e^{i\pi/4} = \sqrt{e^{\ln 2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \\ =&\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i \end{aligned}$$

Svar: $1 + i$

d) (s.)

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Svar: -1

e) (s.)

$$e^{3-i} = e^3e^{-i} = e^3(\cos(-1) + i\sin(-1)) = e^3\cos 1 - ie^3\sin 1$$

Svar: $e^3\cos 1 - ie^3\sin 1$

6.35 a) (s.)

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1^2 + 2ix + (ix)^2}{1+x^2} = \\ =& \frac{1+2xi-x^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}i \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \mathrm{Im}f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

Svar: $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\frac{2x}{1+x^2}$

b) (s.)

$$\begin{aligned} g(x) = & e^{(-1+i)x} = e^{-x+ix} = e^{-x}e^{ix} = e^{-x}(\cos x + i\sin x) = \\ = & e^{-x}\cos x + ie^{-x}\sin x \end{aligned}$$

$\mathrm{Re} g(x) = e^{-x}\cos x, \quad \mathrm{Im} f(x) = e^{-x}\sin x$

Svar: $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$

6.36 (s.)

Använd $|e^{i\theta}| = 1$ samt att e^x alltid är positivt oberoende av vad x är.

$$|e^{x+yi}| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = |e^x| = e^x$$
$$\arg e^{x+yi} = \arg(e^x e^{iy}) = y + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $y + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Polynomekvationer

6.37 a) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a+bi)^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |5 + 12i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 5 + 13 \Leftrightarrow 2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

$$9 + b^2 = 13 \Leftrightarrow b^2 = 13 - 9 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

Ekvationen $2ab = 12$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $3 + 2i$ samt $-3 - 2i$.

Svar: $3 + 2i$ och $-3 - 2i$

b) (s.)

$$z^2 - (2+2i)z - 5 - 10i = 0$$

Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$z^2-(2+2i)z-5-10i = (z-(i+i))^2-2i-5-10i = (z-1-i)^2-5-12i$

Låt $w = z - 1 - i = a + bi$.

$$(a+bi)^2 - 5 - 12i = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 5 + 12i$$

Se uppgift a) och för lösning till ekvationen.

$$\begin{cases} w_1 = 3 + 2i \Leftrightarrow 3 + 2i = z_1 - 1 - i \Leftrightarrow z_1 = 4 + 3i \\ w_2 = -3 - 2i \Leftrightarrow -3 - 2i = z_2 - 1 - i \Leftrightarrow z_2 = -2 - i \end{cases}$$

Svar: $4 + 3i$ och $-2 - i$

6.38 a) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a+bi)^2 = -i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -1 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |-i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ekvationen $2ab = -1$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har olika tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ samt $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ som kan skrivas $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Svar: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

b) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a+bi)^2 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = \sqrt{3} \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |1+i\sqrt{3}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{1+3} = 2$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 1 + 2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{2} + b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ekvationen $2ab = \sqrt{3}$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ samt $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Svar: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)$ (vilket är lika med det i facit)

c) (s.)

Låt $z = a + bi$.

$$(a+bi)^2 = 4i + 3 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |3+4i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 3 + 5 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

$$4 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Ekvationen $2ab = 4$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till huvudekvationen är $2 + i$ samt $-2 - i$.

Svar: $\pm(2+i)$

6.39 a) (s.)

$$z^2 + 2iz - 1 + 2i = 0$$

Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$$z^2 + 2iz - 1 + 2i = (z+i)^2 - (-1) - 1 + 2i = (z+i)^2 + 2i$$

Låt $w = z + i = a + bi$.

$$(a+bi)^2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |-2i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 0 + 2 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

$$1 + b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Ekvationen $2ab = -2$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har olika tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till w är $-1 + i$ samt $1 - i$.

$$\begin{cases} w_1 = -1 + i \Leftrightarrow -1 + i = z_1 + i \Leftrightarrow z_1 = -1 \\ w_2 = 1 - i \Leftrightarrow 1 - i = z_2 + i \Leftrightarrow z_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

Svar: $z_1 = -1$ och $z_2 = 1 - 2i$

b) (s.)

$$z^2 + (2-2i)z - 6i - 3 = 0$$

Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$$z^2+2iz-1+2i = (z+1-i)^2 - (-2i) - 6i - 3 = (z+1-i)^2 - 3 - 4i$$

Låt $w = z+1-i = a+bi$.

$$(a+bi)^2 - 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |3+4i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 3 + 5 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

$$4 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Ekvationen $2ab = 4$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till w är $2+i$ samt $-2-i$.

$$\begin{cases} w_1 = 2 + i \Leftrightarrow 2 + i = z_1 + 1 - i \Leftrightarrow z_1 = 1 + 2i \\ w_2 = -2 - i \Leftrightarrow -2 - i = z_2 + 1 - i \Leftrightarrow z_2 = -3 \end{cases}$$

Svar: $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = -3$

6.40 (s.)

$$(2+i)z^2+(1-7i)z-5=0$$

Dela alla termerna med $2-i$.

$$z^2+\frac{1-7i}{2+1}z-\frac{5}{2+i}=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{(1-7i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}z-\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z^2+\frac{2-i-14i-7}{4+1}z-\frac{5(2-i)}{4+1}=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{5(-1-3i)}{5}z-\frac{5(2-i)}{5}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z^2+(-1-3i)z-(2-i)=0$$

Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$$z^2+(-1-3i)z-(2-i)=(z-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}i))^2-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}i)^2-2+i=$$
$$=(z-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}i)^2-(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{2}i-\tfrac{9}{4})-2+i=(z-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}i)^2+2-\tfrac{3}{2}i-2+i=$$
$$=(z-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}i)^2-\tfrac{1}{2}i$$

Låt $w=z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i=a+bi$.

$$(a+bi)^2-\tfrac{1}{2}i=0 \Leftrightarrow a^2+2abi-b^2=\tfrac{1}{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2|=|\frac{1}{2}i| \Leftrightarrow a^2+b^2=\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ a^2+b^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2-\cancel{b^2}+a^2+\cancel{b^2}=0+\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2=\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2=\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow a=\pm\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{4}+b^2=\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow b^2=\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow b=\pm\tfrac{1}{2}$$

Ekvationen $2ab=\frac{1}{2}$ från första ekvationssystemet kräver att a och b har samma tecken för att det ska stämma vilket innebär att lösningarna till w är $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ samt $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

$$\begin{cases} w_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=z_1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \Leftrightarrow z_1=1+2i \\ w_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=z_2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \Leftrightarrow z_2=i \end{cases}$$

Svar: $z_1=1+2i$ och $z_2=i$

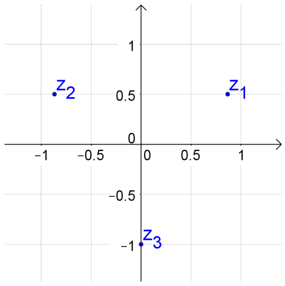
6.41 a) (s.)

Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form.

$$z^3 = i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$ ger tre unika rötter.

$$z_1 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = e^{i3\pi/2} = -i$$



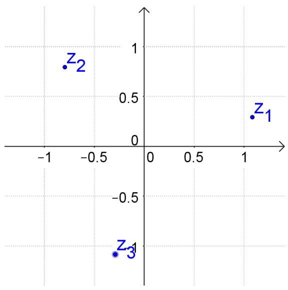
b) (s.)

Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form.

$$z^3 = 1+i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/6} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$ ger tre unika rötter.

$$z_1 = 2^{1/6}e^{i\pi/12}, \quad z_2 = 2^{1/6}e^{i3\pi/4}, \quad z_3 = 2^{1/6}e^{i17\pi/12}$$



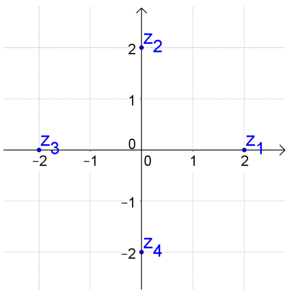
c) (s.)

Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form. (r kan endast vara positiv eftersom det är ett avstånd)

$$z^4 = 16 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \overset{+}{\scriptscriptstyle(-)}2 \\ \theta = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, 3$ ger fyra unika rötter.

$z_1 = 2e^{i0} = 2,\ \ z_2 = 2e^{i\pi/2} = 2i,\ \ z_3 = 2e^{i\pi} = -2,\ \ z_4 = 2e^{i3\pi/2} = -2i$



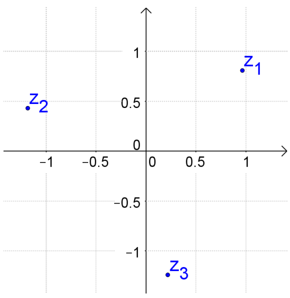
d) (s.)

Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form.

$$z^3 = i\sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 2e^{i2\pi/3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/3} \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$ ger tre unika rötter.

$$z_1 = 2^{1/3}e^{i2\pi/9},\ \ z_2 = 2^{1/3}e^{i8\pi/9},\ \ z_3 = 2^{1/3}e^{i14\pi/9}$$



e) (s.)

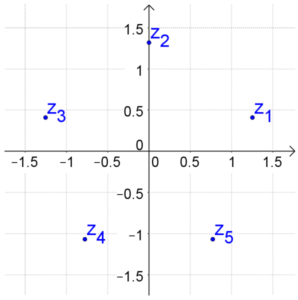
Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form.

$$z^5 = 4i \Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = 4e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 4 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4^{1/5} \\ \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ ger fem unika rötter.

$$z_1 = 4^{1/5}e^{i\pi/10}, \quad z_2 = 4^{1/5}e^{i\pi/2} = 4^{1/5}i, \quad z_3 = 4^{1/5}e^{i9\pi/10},$$

$$z_4 = 4^{1/5}e^{i13\pi/10}, \quad z_5 = 4^{1/5}e^{i17\pi/10}$$



f) (s.)

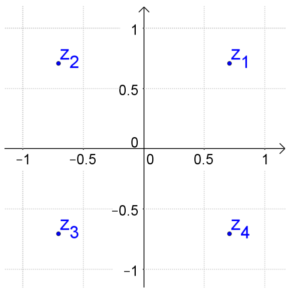
Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet till polär form. (r kan endast vara positiv eftersom det är ett avstånd)

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = {\scriptstyle(\pm)}1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, 3$ ger fyra unika rötter.

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad z_2 = e^{i3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$z_3 = e^{i5\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad z_4 = e^{i7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$



6.42 (s.)

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0$$

Låt $w = z^3$. Förenkla först vänsterledet genom att kvadratkomplettera.

$$z^6 - 2z^3 + 2 = w^2 - 2w + 2 = (w-1)^2 - 1 + 2 = (w-1)^2 + 1$$

Låt $u = w - 1 = a + bi$.

$$(a+bi)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |-1| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = -1 + 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$0 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Lösningarna till u är i samt $-i$.

$$\begin{cases} u_1 = i \Leftrightarrow i = w_1 - 1 \Leftrightarrow w_1 = 1 + i \\ u_2 = -i \Leftrightarrow -i = w_2 - 1 \Leftrightarrow w_2 = 1 - i \end{cases}$$

Låt $z = re^{i\theta}$ och skriv om w_1 och w_2 i polär form.

$$\begin{cases} (z_{1,2,3})^3 = w_1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ (z_{4,5,6})^3 = w_2 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{cases}$$

$$z_{1,2,3} = \begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/6} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_1 = 2^{1/6}e^{\pi/12}, \quad z_2 = 2^{1/6}e^{3\pi/4}, \quad z_3 = 2^{1/6}e^{17\pi/12}$$

$$z_{4,5,6} = \begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{1/6} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_4 = 2^{1/6}e^{23\pi/12}, \quad z_5 = 2^{1/6}e^{7\pi/12}, \quad z_6 = 2^{1/6}e^{5\pi/4}$$

Svar: $2^{1/6}e^{\pi/12}$, $2^{1/6}e^{7\pi/12}$, $2^{1/6}e^{3\pi/4}$, $2^{1/6}e^{5\pi/4}$, $2^{1/6}e^{17\pi/12}$, $2^{1/6}e^{23\pi/12}$

6.43 (s.)

Låt $w = 1 + z^2 = re^{i\theta}$ och skriv om högerledet i polär form.

$$(1+z^2)^3 = -8 \Leftrightarrow w^3 = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$ ger tre unika rötter.

$$w_1 = 2e^{i\pi/3} = 2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + i\sqrt{3}$$
$$w_2 = 2e^{i\pi} = -2$$
$$w_3 = 2e^{i5\pi/3} = 2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 - i\sqrt{3}$$

Låt $z = a + bi$ och lös z för w_1 och w_3 först och sen w_2.

$$w_{1,3} = 1 + z^2 \Leftrightarrow 1 \pm i\sqrt{3} = 1 + (a+bi)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = \pm i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |i\sqrt{3}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3}$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 0 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2a^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + b^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}$$

Ekvationen $2ab = \pm\sqrt{3}$ från första ekvationssystemet ger att a och b kan ha samma och olika tecken för att det ska stämma. Lösningarna är alltså: $\pm\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \pm \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} i = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}(\pm 1 \pm i)$.

$$w_2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow -2 = 1 + (a+bi)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Istället för att lösa ekvationssystemet nu utnyttjar vi att $|(a+bi)^2| = |-3| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$

Additionsmetoden:

$$a^2 - \cancel{b^2} + a^2 + \cancel{b^2} = 3 - 3 \Leftrightarrow 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$
$$0 + b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

Lösningarna till $w_2 = \pm i\sqrt{3}$.

Svar: $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}(\pm 1 \pm i)$ och $\pm i\sqrt{3}$

6.44 (s.)

Ansätter lösning med $x-1$ som faktor (kan lösas med polynomdivision också):

$$x^3-2x^2-19x+a=(x-1)(x^2+Ax+B)=x^3+(A-1)x^2+(B-A)x-B$$

Identifierar variablerna:

$$\begin{cases} A-1=-2 \\ B-A=-19 \\ -B=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-20 \\ a=20 \end{cases}$$

$$x^3-2x^2-19x+20=(x-1)(x^2-x-20)$$

Faktorisera x^2-x-20 med pq-formeln.

$$x^2-x-20=0$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+20}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2}$$

$$x_1=5, \quad x_2=-4$$

$$(x-1)(x^2-x-20)=(x-1)(x-5)(x+4)$$

Svar: $a=20$, $p(x)=(x-1)(x-5)(x+4)$

6.45 (s.)

Eftersom polynomets koefficienter är reella kommer varje komplex rots konjugat också vara en lösning. Detta innebär att eftersom $2-i$ och $-1-2i$ är rötter är $2+i$ och $-1+2i$ också det. Eftersom polynomets grad är fyra och vi har fyra rötter har vi hittat alla lösningar.

Svar: $2\pm i$ och $-1\pm 2i$

6.46 (s.)

Pga. reella koefficienter kommer nollställenas konjugat också vara rötter vilket innebär att det polynomet har enkelt nollställe i $z=2+i$ och dubbelt nollställe i $z=-i$.

$$\begin{aligned} &(z-(2-i))(z-(2+i))(z-i)(z-i)(z+i)(z+i)= \\ =&z^6-4z^5+7z^4-8z^3+11z^2-4z+5 \end{aligned}$$

Svar:

6.47 a) (s.)

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

pq-formeln:

$$z = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$z_1 = 5, \quad z_2 = 2$$

Svar: $z_1 = 5$, $z_2 = 2$, $z_1 + z_2 = 7$, $z_1 z_2 = 10$

b) (s.)

$$3z^2 - 21z + 30 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 10 = 0$$

Se a) för lösning.

Svar: $z_1 = 5$, $z_2 = 2$, $z_1 + z_2 = 7$, $z_1 z_2 = 10$

c) (s.)

Faktorisera polynomet (se a)).

$$z^3 - 7z^2 + 10z = z(z^2 - 7z + 10) = z(z-5)(z-2) = 0$$

Faktorsatsen ger:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 5, \quad z_3 = 2$$

Svar: $z_1 = 0$, $z_2 = 5$, $z_3 = 2$, $z_1 + z_2 + z_3 = 7$, $z_1 z_2 z_3 = 0$

6.48 (s.)

Använd Vieta's formler där r_1 är den första roten enligt nedan.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 r_2 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Använd reglerna för att räkna ut summan och produkten av rötterna.

$$z^7 + (3-i)z^6 + \pi z^3 + e = 0$$

$$S_r = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(3-i)}{1} = -3 + i$$

$$P_r = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = -1 \cdot \frac{e}{1} = -e$$

Svar: $-3 + i$ och $-e$

6.49 (s.38)

Låt $z = bi$.
Skriv om.

$$b^4 - 7b^2 - 18 + (b^3 - 9b)i = 0$$

Jämför real- och imaginärdelar.

$$\begin{cases} b^3 - 9b = 0 \\ b^4 - 7b^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$b^3 - 9b = 0 \Leftrightarrow b_1 = \pm 3 \quad b_2 = 0$$

Från andra ekvationen följer att endast $b = \pm 3 \Leftrightarrow z = \pm 3i$ är giltig rot
Alltså borde

$$p(z) = (z - 3i)(z + 3i) * g(z)$$

Polynomdivision visar att detta stämmer och att

$$p(z) = (z \pm 3i)(z - 2)(z + 1)$$

Svar: $z_1 = \pm 3, z_2 = 2, z_3 = -1$

6.50 (s.38)

Polynomdivision ger:

$$p(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1) \text{ då } a = 2$$

pq.

$$x^2 + 2x + 2 \Longrightarrow x = -1 \pm i$$

$$x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm i$$

Svar: $a = 2, x_1 = -1 \pm i, x_2 = \pm i$

6.51 (s.38)

Låt $z = (1 + bi)$
Reella koefficienter kan då garantera att även $\overline{z}$ är en rot.

$$(z - z_0)(z - z_1) = z^2 - 2z + 1 + b^2$$

Polynomdivision ger att $b = 2$ vilket medför

$$p(z) = q(z)*g(z) \Leftrightarrow (z-(1\pm 2b))(z^2+11-2b) \Leftrightarrow p(z) = (z-(1\pm 2i))(z\pm i\sqrt{7})$$

Faktorsatsen

Svar: $z_1 z_2 = 1 \pm 2i, z_3 z_4 = \pm i\sqrt{7}$

6.52 a) (s.)

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x)(x-1)(x+1))$$

Svar: $x(x-1)(x+1)$

b) (s.)

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

Rötterna av $x^2 + 1$ är ej reella. (pq)

Svar: $x(x^2 + 1)$

c) (s.)

Utnyttja konjugatregeln

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x-1)(x+1)$$

.se a) och b)

Svar: $(x^2 + 1)(x-1)(x+1)$

d) (s.)

Se bokens lösning

Svar:

6.53 (s.)

Gissa en rot $p(1) = 0$. Använd polynomdivision.

$$p(x) = (x-1)\left(x^4 + 4\right)$$

Skriv om $x^4 + 4$ som en binomisk ekvation

$$|z|^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} |z|^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2\pi n, n \text{ heltal} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 - i \\ z_2 &= -1 + i \\ z_3 &= 1 - i \\ z_4 &= 1 + i \end{aligned}$$

Använd faktorsatsen och konjugatregeln

$$x^4 + 4 = \left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)$$

<u>Metod 2</u>

$$x^4 = -4 \Leftrightarrow x^2 = \pm 2i$$

Använd kvadreringsregeln

$$\left(x^2 \pm 2x + 2\right)$$

Svar: $p(x) = (x-1)\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)$

6.54 (s.)

<u>Metod 1</u>
Skriv om $x^6 - 8$ som en binomisk ekvation.
Polär form.

$$|z|^6 e^{i6\theta} = 8e^{i0}$$

$$\begin{cases} 6\theta = 0 + 2\pi n, & n \ \ heltal \\ |z|^6 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3}n, & n \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Lös och översätt från polär form

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm\sqrt{-1 - i\sqrt{3}} \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{-1 + i\sqrt{3}} \\ x_{5,6} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Använd faktorsatsen

$$\begin{aligned} &(x \pm \sqrt{2})\left(x \pm \sqrt{-1 - i\sqrt{3}}\right)\left(x \pm \sqrt{-1 + i\sqrt{3}}\right) \\ =&(x \pm \sqrt{2})\left(x^2 - (-1 - i\sqrt{3})\right)\left(x^2 - (-1 + i\sqrt{3})\right) \\ =&(x \pm \sqrt{2})\left(x^4 + 2x^2 + 4\right) \end{aligned}$$

<u>Metod 1</u>
Använd formeln för differansen av kuber.

$$\left(x^2\right)^3 - 2^3 = \left(x^2 - 2\right)\left(x^4 + 2x^2 + 4\right)$$

Använd konjugatregeln

$$(x \pm \sqrt{2})\left(x^4 + 2x^2 + 4\right)$$

Svar: $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})\left(x^4 + 2x^2 + 4\right)$

Blandade problem

6.55 a) (s.)

Binomialsatsen

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Expandera och förenkla

$$(1+\sqrt{3}i)^5 = \sum_{k=0}^{5} \left(\begin{array}{c} 5 \\ k \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-k}(1)^k = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-0}(1)^0 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-1}(1)^1$$
$$+ \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-2}(1)^2 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-3}(1)^3 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-4}(1)^4 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}\right) (\sqrt{3}i)^{5-5}(1)^5$$
$$= 16 - 16\sqrt{3}i$$

Svar: $16 - 16\sqrt{3}i$

b) (s.)

$$|(1+i\sqrt{3})| = 2$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 2^5\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i)$$

Svar: $16 - 16\sqrt{3}i$

6.56 (s.)

$$1 + e^{i\pi/2} = 1 + \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \tag{1}$$

Svar: $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

6.57 a) (s.)

$$\frac{5+14i}{2+3i} = \frac{(5+14i)(2-3i)}{4+9} = 4+i \tag{2}$$

Svar: $arctan(1/4)$

b) (s.)

Svar:

6.58 (s.)

Svar:

6.59 (s.)

Svar:

6.60 (s.)

Svar:

6.61 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

6.62 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

6.63 (s.)

Svar:

6.64 (s.)

Svar:

6.65 (s.)

Svar:

6.66 (s.)

Svar:

6.67 (s.)

Svar:

6.68 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

12.11 a) (s.)

$$\int \tfrac{1}{x}(\ln x)^2 = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \tfrac{1}{x}dx \end{array} \right] = \\ = \int t^2 dt = \tfrac{t^3}{3} = \tfrac{(\ln x)^3}{3} \tag{3}$$

uppgift b-d löses på samma sätt.

Svar: $\frac{(\ln x)^3}{3}$

e) (s.)

$$\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = \tfrac{1}{x}dx \end{array} \right] = \int \sin(t)dt = -\cos(\ln x) \tag{4}$$

Svar: $-\cos(\ln x)$

c) (s.)

Svar: