

Endimensionell analys

HT-2015

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2015-09-23

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Om jag skriver ”alla tal” syftar jag på alla reella tal.

Talsystem

1.1 a) (s. 1)

De naturliga talen (\mathbb{N}) innefattar alla heltal som är noll eller större.
 $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{3}{0.1} = 30$, $\frac{0}{5} = 0$.

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, \frac{3}{0.1}, \frac{0}{5}$$

b) (s. 1)

De hela talen (\mathbb{Z}) inkluderar de naturliga talen (\mathbb{N}) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15$.

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}$$

c) (s. 2)

Rationella tal (\mathbb{Q}) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen (\mathbb{Z})). $3 = \frac{3}{1}$ osv...

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}$$

d) (s. 2)

Reella tal (\mathbb{R}) är alla ”vanliga” tal (inte de komplexa talen (\mathbb{C})).

Svar:

$$\frac{6}{2}, 0, 3, -3, \frac{3}{0.1}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \sqrt{2}, -\frac{0.3}{0.02}, \frac{0}{5}, \pi$$

1.2 (saknar sida)

Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal i plus ett rationellt tal r_1 blir det rationella talet r_2 . $i + r_1 = r_2 \Rightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

Svar: Nej, båda blir irrationella.

Mängder och intervall

1.3 (s. 4)

$M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.

M_2 är alla tal större än eller lika med 0.

M_3 är alla tal större än eller lika med 1.

$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom M_4 är alla tal ingår M_1 , M_2 , M_3 i mängden. M_3 är även en delmängd av M_2 .

Svar:

$$M_1 \subseteq M_4, \quad M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$$

Implikationer och ekvivalens

1.4 (s. 5-6)

Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att A och C är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än -4 i C implicerar både A och C B .

Svar:

$$A \Leftrightarrow C, \quad C \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow B$$

1.5 a) (s. 5-6)

Om A är sant är B sant men om B är sant behöver inte A vara sant. Detta eftersom $a = 1$, $b = -1$ är sant för B men inte för A . A implicerar alltså B . C går att förenkla till $a = b$ genom att dela på b det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0$, $a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan A implicerar C . C och B är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C$$

b) (s. 5-6)

Eftersom specialfallen som nämns i a) båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är A , B och C ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i D får man A vilket medför att även D är ekvivalent med alla andra utsagor.

Svar: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 (s. 5-6)

A ger sant för alla tal större än noll. B ger sant för alla tal utom noll. C ger sant för alla tal utom noll. D ger sant för alla tal större än noll.

A och D är alltså ekvivalenta, lika så B och C . $A \subseteq B$ medför då att A och D implicerar både B och C .

Svar:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D, \quad B \Leftrightarrow C$$

1.7 (s. 5-6)

$$A: x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

$$B: |x - 2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

$$C: x \geq 1$$

$$D: \ln x + \ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1$$

D ingår i alla andra vilket medför att D implicerar alla andra. Eftersom svaren i både A och B är större än eller lika med 1 implicerar A och B C .

Svar:

$$D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.8 (s. 5-6)

$$A: x \geq 0$$

$$B: \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$C: e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D: |x - 2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1, \quad x - 2 > -1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Alla implicerar C eftersom C är alla tal. D är en delmängd av B som i sin tur är en delmängd av A . D implicerar alltså A och B och B implicerar A .

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow C$$

1.9 (s. 5-6)

$$A : |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$B : e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$C : \cos x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D : \ln(1+x^2) > 0 \Leftrightarrow 1+x^2 > e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1-1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), A och B är alltså inte samma mängd. C implicerar inte D eftersom C innehåller 0 vilket D inte gör. A och D är däremot ekvivalenta och implicerar C .

Svar:

$$B \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow C, \quad A \Leftrightarrow D$$

1.10 (s. 5-6)

Låt x representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq x \leq 10$, $x \in \mathbb{N}$).

$$A : x = 5$$

$$B : x \leq 4$$

$$C : x \geq 3$$

$$D : x \geq 5$$

$$E : x \leq 8$$

A är alltså en delmängd av C , D och E . B är en delmängd av E och D är en delmängd av C .

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow D, \quad A \Rightarrow E, \quad B \Rightarrow E, \quad D \Rightarrow C$$

1.11 (s. 5-6)

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallelogram och en parallelogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallelogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

Svar:

$$A \Rightarrow C, \quad B \Rightarrow A, \quad B \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow A, \quad D \Rightarrow C, \quad E \Rightarrow A, \quad E \Rightarrow C, \quad E \Rightarrow B, \quad E \Rightarrow D$$

Kapitel 2: Algebra

Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} + 6x + 9) = -6x - 18$$

eller

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x}-3) - (\cancel{x}+3)) = -6(x+3) = -6x - 18$$

Svar: $-6x - 18$

b) (s. 10-11)

Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3) - (x-3)^2 = \cancel{x^2} - 9 - (\cancel{x^2} - 6x + 9) = 6x - 18$$

eller

$$(x+3)(x-3) - (x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3) - (\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x - 18$$

Svar: $6x - 18$

c) (s. 10-11)

$$(3x+5)^2 - (3x-5)^2 = \cancel{9x^2} + 30x + \cancel{25} - (\cancel{9x^2} - 30x + \cancel{25}) = 60x$$

Svar: $60x$

2.2 (saknar sida)

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Svar: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 (s. 11)

Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b} \\(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \\a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \quad VSB.\end{aligned}$$

2.4 (s. 12)

faktorisera och förenkla:

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} \\ \frac{4}{9} &= \frac{2 * 2}{3 * 3} = \frac{4}{9} \\ \frac{4}{14} &= \frac{\cancel{2} * 2}{\cancel{2} * 7} = \frac{2}{7} \\ \frac{48}{168} &= \frac{2 * \cancel{2} * \cancel{2} * \cancel{2} * 3}{\cancel{2} * \cancel{2} * \cancel{2} * 3 * 7} = \frac{2}{7} \\ \frac{24}{84} &= \frac{2 * \cancel{2} * \cancel{2} * 3}{\cancel{2} * \cancel{2} * 3 * 7} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

multiplicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

Svar:

$$\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{48}{168}, \frac{24}{84}$$

2.5 a) (s. 12-14)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14} \right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar:

$$-\frac{10}{7}$$

b) (s. 12-14)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Svar:

$$-\frac{1}{4}$$

2.6 a) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72} &= \frac{1}{5 * 3 * 2 * 2} + \frac{1}{9 * 3 * 2 * 2} - \frac{1}{6 * 3 * 2 * 2} = \\ &= \frac{1 * 9 * 6}{5 * 12 * 9 * 6} + \frac{1 * 5 * 6}{9 * 12 * 5 * 6} - \frac{1 * 9 * 5}{6 * 12 * 9 * 5} = \\ &= \frac{54}{3240} + \frac{30}{3240} - \frac{45}{3240} = \frac{39}{3240} = \frac{13}{1080}\end{aligned}$$

Svar:

$$\frac{13}{1080}$$

b) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{27}{36} - \frac{30}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{36}$$

Svar:

$$\frac{1}{36}$$

c) (s. 12-14)

Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245} = \frac{6}{245} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} = \frac{89}{2205} - \frac{1}{25} = \frac{445}{11025} - \frac{441}{11025} = \frac{4}{11025}$$

Svar:

$$\frac{4}{11025}$$

2.7 a) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{\cancel{a} * 4}{2 * \cancel{a}} = \frac{4}{2} = 2$$

Svar: 2

b) (s. 14)

utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a * a}{2 * 4} = \frac{a^2}{8}$$

Svar:

$$\frac{a^2}{8}$$

c) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\cancel{14}a^2(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a(\cancel{a+2})}{\cancel{a+2}} = 12a$$

Svar: $12a$

d) (s. 14)

utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a+3)^{-2}$$

Svar: $(a+3)^{-2}$ eller $\frac{1}{(a+3)^2}$

2.8 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{5x} - \frac{x}{15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}} &= \frac{\frac{45-5x^2}{75x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{\cancel{3x}(45-5x^2)}{\cancel{75x}^{25}(3-x)} = \frac{45-5x^2}{75-25x} = \\ \frac{\cancel{5}(9-x^2)}{\cancel{5}(15-5x)} &= \frac{9-x^2}{15-5x} = \frac{(3+x)(\cancel{3-x})}{5(\cancel{3-x})} = \frac{3+x}{5} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{3+x}{5}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop $1 + \frac{1}{x^2}$. Utnyttja sedan reglerna för division.

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{(\cancel{x^2+1})x^2}{(\cancel{x^2+1})} = x^2$$

Svar: x^2

c) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera ut -1 .

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{(y-x)(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}(x^2-y^2)} = \frac{(y-x)(xy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{(\cancel{y-x})(xy)}{-\cancel{(y-x)}(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}$$

Svar: $-\frac{xy}{x+y}$

2.9 a) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bräken. Utnyttja sedan reglerna för division och den andra kvadreringsregeln bakvänt.

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{yx}}{\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{yx}} = \frac{\cancel{yx}(x+y)(\cancel{x-y})}{\cancel{yx}(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Svar: $\frac{x+y}{x-y}$

b) (s. 12-14)

Skriv först ihop de övre och undre bräken. Utnyttja sedan reglerna för division och konjugatregeln bakvänt två gånger.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{16x^4}{81} - y^4}{\frac{2x}{3} + y} &= \frac{\frac{16x^4 - 81y^4}{81}}{\frac{2x+3y}{3}} = \frac{\cancel{81}(16x^4 - 81y^4)}{\cancel{81}(2x+3y)} = \frac{(4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2)}{27(2x+3y)} = \\ &= \frac{(4x^2 + 9y^2)(\cancel{2x+3y})(2x-3y)}{\cancel{27(2x+3y)}} = \frac{8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3}{27} = \\ &= \frac{1}{27}(8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} &\dots \frac{(4x^2 + 9y^2)(\cancel{2x+3y})(2x-3y)}{\cancel{27(2x+3y)}} = \frac{(4x^2 + 9y^2)(2x-3y)}{9 \cdot 3} = \\ &= \frac{4x^2 + 9y^2}{9} \cdot \frac{2x-3y}{3} = \left(\frac{4x^2}{9} + y^2\right)\left(\frac{2x}{3} - y\right) \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{27}(8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3)$ eller $\left(\frac{4x^2}{9} + y^2\right)\left(\frac{2x}{3} - y\right)$

c) (s. 12-14)

Skriv ihop de övre och undre bräken.

$$\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{(x-\cancel{1}+x+\cancel{1})(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})}{(\cancel{x+1}-\cancel{(x-1))}(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

Svar: x

2.10 a) (s. 13-14)

Sätt in i formeln och förläng till minsta gemensamma nämnare.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{13}{12} \Leftrightarrow R = \frac{12}{13}\Omega$$

Svar: $\frac{12}{13}\Omega$

b) (s. 13-14)

Använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{R+5}{5R} \Leftrightarrow 5x = 3R+15 \Leftrightarrow 2R = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{2}\Omega$$

Svar: $\frac{12}{13}\Omega$

2.11 (s. 13-14)

Sätt in i formel och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{600} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{600+a}{600a} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 60000 + 100a = 600a \Leftrightarrow 500a = 60000 \Leftrightarrow a = \frac{60000}{500} = 120mm$$

Svar: 120mm

2.12 (s.)

utnyttja att $1 = 2/2 = 3/3$ osv. och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Svar: $\frac{3}{5}$

Kvadratrötter och potenser

2.13 (s. 16-17)

Förläng med konjugatet för att bli av med roten i nämnaren.

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{6 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5}{4 - 5} = -(6 - \sqrt{5} - 5) = \sqrt{5} - 1$$

Svar: $\sqrt{5} - 1$

2.14 a) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + 2\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 4}{9 - 2} = \frac{7 + 7\sqrt{2}}{7} = 1 + \sqrt{2}$$

Svar: $1 + \sqrt{2}$

b) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{(\sqrt{13} + \sqrt{11})(\sqrt{13} - \sqrt{11})} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{13 - 11} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2}$

c) (s. 16-17)

Förläng med konjugatet.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \frac{2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = \\ \frac{2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{x+1 - (x-1)} &= \frac{\cancel{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{\cancel{2}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

2.15 a) (s. 17)

Faktoriser ena roten för att få samma rot i båda termerna.

$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}(2 - 1) = \sqrt{3}$$

Svar: $\sqrt{3}$

b) (s. 17)

faktorisera täljaren.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{6}}\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \sqrt{7}$$

eller utnyttja reglerna för division med rötter.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$$

Svar: $\sqrt{7}$

c) (s. 17)

Faktoriser.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3} * \sqrt{3} * \sqrt{4} = 3 * 2 = 6$$

eller utnyttja reglerna för multiplikation med rötter.

$$\sqrt{3} * \sqrt{12} = \sqrt{3 * 12} = \sqrt{36} = 6$$

Svar: 6

d) (s. 17)

Faktorisera termerna i täljaren och skriv ihop.

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{5} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

e) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{3^2 + 4^2} - 4 - 3 = \sqrt{25} - 7 = 5 - 7 = -2$$

Svar: -2

f) (s. 17)

Addera termerna i roten.

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Svar: 13

2.16 a) (s. 17)

Faktorisera rötterna så alla termerna får $\sqrt{2}$ gemensamt.

$$\frac{\sqrt{168} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} + \sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(9+7)}{\cancel{\sqrt{2}}(5+1)} = \frac{9+7}{5+1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Svar: $\frac{8}{3}$

b) (s. 17)

Kvadrera under "roten ur"-tecknet först (minustecknet försvinner).

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

Svar: 1

c) (s. 17)

Skriv först ihop termerna utnyttja sedan reglerna för multiplikation av rötter.

$$\left(\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{36} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Eller så används den andra kvadreringsregeln.

$$\left(\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12 - 2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 2 \cdot \sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 4 + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = \frac{24+1}{3} = \frac{25}{3}$$

Svar: $\frac{25}{3}$

d) (s. 17)

Använd konjugatregeln och sen kvadreringsregeln.

$$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y}) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y) = x+2\sqrt{xy}+y-x-y = 2\sqrt{xy}$$

Svar: $2\sqrt{xy}$

2.17 (s. 17)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{9*2*4*3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{2}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{108}}{3} &= \frac{\sqrt{9*4*3}}{3} = \frac{\cancel{3}*2\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{12} &= \sqrt{4*3} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Svar: Möjligt att någon får poängavdrag på grund av att hen inte förenklat, alla är dock samma tal.

2.18 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$3^4 * 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6$$

Svar: 3^6

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$2^7 * 2^{-3} = 2^{7-3} = 2^4$$

Svar: 2^4

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$4^2 * 4^{-5} * 4 = 4^{2-5+1} = 4^{-2}$$

Svar: 4^{-2}

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

Svar: 3^4

e) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}$$

Svar: 4^{-4}

f) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}$$

Svar: 2^{-12}

2.19 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$3^5 * 10^5 * 3^{-3} * 10^3 = 3^{5-3} * 10^{5+3} = 3^2 * 10^8 = 9 * 10^8$$

Svar: $9 * 10^8$

b) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$\frac{2^8 * 5^6}{2^6 * 5^5} = 2^{8-6} * 5^{6-5} = 2^2 * 5 = 4 * 5 = 20$$

Svar: 20

c) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig och utnyttja sedan att $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\frac{2^4 * 10^4}{2 * 10^5} = 2^{4-1} * 10^{4-5} = 2^3 * 10^{-1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Svar: $\frac{4}{5}$

2.20 a) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$b^{-0.2} * b^{1.7} * b^{-2.5} = b^{1.7-2.5-0.2} = b^{-1}$$

Svar: b^{-1}

b) (s. 18-19)

Använd räkneregler för potenser.

$$(a^3)^{-0.5} * (a^{-5})^{-0.3} = a^{3*(-0.5)+(-5)*(-0.3)} = a^{-1.5+1.5} = a^0 = 1$$

Svar: 1

c) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a}{a^{-3.7} * a^{0.5}} = a^{1-(-3.7)-0.5} = a^{4.2}$$

Svar: $a^{4.2}$

d) (s. 18)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{x * x^{-1.6} * x^{0.2}}{x^{-1.4}} = \frac{x^{1-1.6+0.2}}{x^{-1.4}} = x^{1-1.6+0.2-(-1.4)} = x$$

Svar: x

2.21 a) (s. 18-20)

Faktorisera 6 och använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^2 * 2^4}{6^3} = \frac{3^2 * 2^4}{3^3 * 2^3} = 3^{2-3} * 2^{4-3} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

b) (s. 20-21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen $1/2$ motsvarar "roten ur".

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1^{-1/2}}{4^{-1/2}} = 1 * \sqrt{4} = 2$$

Svar: 2

c) (s. 18-21)

Använd räkneregler för potenser och att tredje roten ur 8 är 2.

$$(\sqrt[3]{64})^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

Svar: 4

d) (s. 19-20)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

Svar: 3

e) (s. 18)

Tänk på parenteser.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

Svar: 256

f) (s. 18)

Tänk på parenteser.

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Svar: 64

2.22 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(\sqrt{5})^{-4} = (5^{1/2})^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Svar: $\frac{1}{25}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Svar: $\frac{1}{27}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser och att potensen $1/2$ motsvarar "roten ur".

$$16^{1/4} = (16^{1/2})^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

Svar: 2

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$(8^{1/2})^{2/3} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = 2$$

Svar: 2

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27^{1/3}}{8^{1/3}}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 3^{-4} * \frac{1}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Svar: $\frac{16}{81}$

2.23 a) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a^{3.3} * a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$$

Svar: $a^{0.4}$

b) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a * a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}$$

Svar: $a^{5/6}$

c) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\sqrt{\sqrt[3]{x} * \sqrt[6]{x^{-1}}} * (x^2)^{2/3} = x^{1/3 * 1/2} * x^{-1 * 1/6} * x^{2 * 2/3} = x^{1/6} * x^{-1/6} * x^{8/6} = x^{4/3}$$

Svar: $x^{4/3}$

d) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}} = \frac{(a^3a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{a^{7/8}}{a^{-1/8}} = a^{8/8} = a$$

Svar: a

e) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x^2y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{x^{1/2}y^{5/8}}{x^{1/2}y^{1/2}} = y^{5/8-4/8} = y^{1/8}$$

Svar: $y^{1/8}$

f) (s. 21)

Använd räkneregler för potenser.

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(ab\frac{a^{3/4}}{b^{3/16}}\right)^2 = a^2b^2\frac{a^{6/4}}{b^{6/16}} = a^{8/4+6/4}b^{32/16-6/16} = a^{7/2}b^{13/8}$$

Svar: $a^{7/2}b^{13/8}$

2.24 (s.)

Använd räkneregler för potenser.

$$(4^x)^5 = \frac{(2^6 * 5^5)^3}{(2^4 * 5^2)^4} * \frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{18} * 5^{15}}{2^{16} * 5^8} * \frac{2^{18}}{5^7} = 2^2 * \cancel{5^7} * \frac{2^{18}}{\cancel{5^7}} = 2^{20}$$

$$(4^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow ((2^2)^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{10x} = 2^{20} \Leftrightarrow x = 2$$

Svar: $x = 2$

Polynom och rationella uttryck

2.25 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

c) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

e) (s. 11)

Faktorisera.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

f) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

g) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)$$

h) (s. 11)

Första kvadreringsregeln.

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = b(a + b)^2$$

i) (s. 11)

Andra kvadreringsregeln.

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a - b)^2$$

2.26 a) (s. 11)

Faktorisera.

$$x(x + 2) - 4(x + 2) = (x - 4)(x + 2)$$

b) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$x^2(x^2 - 9) + x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9) = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

c) (s. 11)

Använd konjugatregeln två gånger.

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera.

$$(a+b)(a-b)+a^2-ab = (a+b)(a-b)+a(a-b) = (a+b+a)(a-b) = (2a+b)(a-b)$$

e) (s. 11)

Skriv om 4 som 2^2 och använd konjugatregeln.

$$(a-b)^2 - 4 = (a-b)^2 - 2^2 = (a-b+2)(a-b-2)$$

f) (s. 11)

Använd andra kvadreringsregeln följt av konjugatregeln.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = ((a+b)(a-b))^2 = (a+b)^2(a-b)^2$$

2.27 a) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2 - 7x + xy - 7y = (x^2 + xy) - (7x + 7y) = x(x+y) - 7(x+y) = (x-7)(x+y)$$

b) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$a^6 - a^4 + a^2 - 1 = a^4(a^2 - 1) + (a^2 - 1) = (a^4 + 1)(a^2 - 1) = (a^4 + 1)(a+1)(a-1)$$

c) (s. 11)

Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2y + 2x^2 - y - 2 = x^2(y+2) - (y+2) = (x^2-1)(y+2) = (x+1)(x-1)(y+2)$$

d) (s. 11)

Faktorisera, använd andra kvadreringsregeln och sist konjugatregeln.

$$7x^5 + 7xy^4 - 14x^3y^2 = 7x(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) = 7x(x^2 - y^2)^2 = 7x(x+y)^2(x-y)^2$$

e) (s. 11)

Använd konjugatregeln.

$$a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

f) (s. 11)

Använd först konjugatregeln och sen båda kvadreringsreglerna.

$$(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy) = (x + y)^2(x - y)^2$$

g) (s. 11)

Använd konjugatregeln följt av båda kvadreringsreglerna och sen konjugatregeln igen.

$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) = ((x + y)^2 - z^2)((x - y)^2 - z^2) = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)$$

2.28 a) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 6x + 7 = (x + 3)^2 - 9 + 7 = (x + 3)^2 - 2$$

b) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 - 7x + 13 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 13 = (x - \frac{7}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

c) (s. 23)

Perfekt kvadrat.

$$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2 - 81 + 81 = (x + 9)^2$$

d) (s. 23)

Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 5x = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

e) (saknar sida)

Eftersom uttrycket saknar x -term går det inte att kvadratkomplettera.

2.29 (s. 23)

b följer av att det kommer vara 2 x -termer i högerledet och c av att de konstanta termerna ska ta ut varandra i högerledet.

$$x^2 + ax = (x + b)^2 + c$$

$$b = \frac{a}{2}$$

$$c = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$\text{Svar: } b = \frac{a}{2}, c = -\frac{a^2}{4}$$

2.30 a) (s. 24-25)

Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$\frac{4x^2 - 4}{2x + 2} = \frac{\cancel{4}^2(x^2 - 1)}{\cancel{2}(x + 1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}(x - 1)}{\cancel{x+1}} = 2x - 2$$

Svar: $2x - 2$

b) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och andra kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Svar: $\frac{x + 1}{x - 1}$

c) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2 - y^2}{(xy)^2} = \frac{\cancel{y^2 - x^2} + \cancel{x^2 - y^2}}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0$$

Svar: 0

2.31 a) (s. 24-25)

Använd konjugatregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 6} &= \frac{2}{3(x + 3)} + \frac{x}{(x + 3)(x - 3)} - \frac{1}{2(x - 3)} = \\ \frac{4(x - 3) + 6x - 3(x + 3)}{6(x + 3)(x - 3)} &= \frac{4x - 12 + 6x - 3x - 9}{6(x + 3)(x - 3)} = \frac{7x - 21}{6(x + 3)(x - 3)} = \\ \frac{\cancel{7(x - 3)}}{6(x + 3)\cancel{(x - 3)}} &= \frac{7}{6x + 18} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{7}{6x + 18}$

b) (s. 24-25)

Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{5}{x - 1} + \frac{8}{x + 1} - \frac{3x + 7}{x^2 - 1} &= \frac{5(x + 1) + 8(x - 1) - (3x + 7)}{x^2 - 1} = \\ \frac{5x + 5 + 8x - 8 - 3x - 7}{x^2 - 1} &= \frac{10x - 10}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{10\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \\ \frac{10}{x + 1} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{10}{x + 1}$

2.32 a) (s. 24-25)

Använd andra kvadreringsregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{2y}{(x-y)^2} &= \frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2} = \\ \frac{3x-y-2x+2y-2y}{(x-y)^2} &= \frac{x-y}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{x-y}$

b) (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+4ab+4b^2} + \frac{2b}{a^2-4b^2} &= \frac{a}{(a+2b)^2} + \frac{2b}{(a+2b)(a-2b)} = \\ \frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)} &= \frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.33 (s. 24-25)

Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+4ab+4b^2} + \frac{2b}{a^2-4b^2} &= \frac{a}{(a+2b)^2} + \frac{2b}{(a+2b)(a-2b)} = \\ \frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)} &= \frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} = \frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.34 a) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) : (x^3 + x + 1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) &= (x^3 + x + 1)(x^2 + Ax + B) + Cx^2 + Dx + E = \\ &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + Cx^2 + Dx + E = \\ &= x^5 + Ax^4 + (B + 1)x^3 + (A + C + 1)x^2 + (A + B + D)x + (B + E)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A &= 3 \\ B + 1 &= -2 \\ A + C + 1 &= 0 \\ A + B + D &= 2 \\ B + E &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = -4 \\ D = 2 \\ E = 2 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$

Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

b) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^6 - 1) : (x - 1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^6 - 1) &= (x - 1)(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + F = \\ &= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex - x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E + F = \\ &= x^6 + (A - 1)x^5 + (B - A)x^4 + (C - B)x^3 + (D - C)x^2 + (E - D)x + \\ &\quad (-E + F)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 &= 0 \\ B - A &= 0 \\ C - B &= 0 \\ D - C &= 0 \\ E - D &= 0 \\ F - E &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Kvot: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Rest: ingen

c) (s. 25-27)

Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}(x^4 + 2x^3 + 25) &= (x^2 + 4x + 5)(x^2 + Ax + B) + Cx + D = \\ &= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 4x^3 + 4Ax^2 + 4Bx + 5x^2 + 5Ax + 5B + Cx + D = \\ &= x^4 + (A + 4)x^3 + (B + 4A + 5)x^2 + (4B + 5A + C)x + (5B + D)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 4 &= 2 \\ B - 4A + 5 &= 0 \\ 4B + 5A + C &= 0 \\ 5B + D &= 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = -2 \\ D = 10 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$

Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

2.35 a) (s. 11)

Konjugatregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 2$ eller $x - 2$).

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

b) (s. 11)

Första kvadreringsregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x + 1$).

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

c) (s. 11)

Faktorisera och använd konjugatregeln bakvänt. (går att lösa med polynomdivision).

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x + A) = x^2 + Ax - x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A - 1 = -3 \Leftrightarrow A = -2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Svar: $(x - 1)(x - 2)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$2 - x - x^2 = (x - 1)(-x + A) = -x^2 + Ax + x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A + 1 = -1 \Leftrightarrow A = -2$$

$$2 - x - x^2 = (x - 1)(-x - 2)$$

Svar: $(x - 1)(-x - 2)$

f) (s. 11)

Faktorisera och använd andra kvadreringsregeln.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$$

2.36 a) (s. 11)

Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

b) (saknar sida)

Finns inga reella faktorer.

c) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B = x^3 + (A - 1)x^2 + (B - A)x - B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Svar: $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

d) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B = x^3 + (A + 1)x^2 + (B + A)x + B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B + A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Svar: $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

e) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C = x^4 + (A - 1)x^3 + (B - A)x^2 + (C - B)x - C$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2(x + 1) + x + 1) = (x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$$

Svar: $(x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$

f) (s. 25-29)

Hittar lösningen $x = -3$ och $x = 0$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^4 + 27x = x(x^3 + 27) = x(x + 3)(x^2 + Ax + B) = x(x^3 + Ax^2 + Bx + 3x^2 + 3Ax + 3B) = x(x^3 + (A + 3)x^2 + (B + 3A)x + 3B)$$

Identifierar variabler:

$$A + 3 = 0, \quad B + 3A = 0, \quad 3B = 27 \Leftrightarrow A = -3, \quad B = 9$$

$$x^4 + 27x = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Svar: $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

g) (s. 25-29)

Skriv om x^6 till $(x^3)^2$ och använd konjugatregeln bakvänt. Faktorisera sedan faktorerna var för sig.

$$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$$

Hittar lösningen $x = -2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= (x + 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + 2x^2 + 2Ax + 2B = \\ &= x^3 + (A + 2)x^2 + (B + 2A)x + 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B + 2A = 0 \\ -2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - 2x^2 - 2Ax - 2B = \\ &= x^3 + (A - 2)x^2 + (B - 2A)x - 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$A - 2 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad -2B = -8 \rightarrow A = 2, \quad B = 4$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Slå samman:

$$x^6 - 64 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\textbf{Svar: } (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

2.37 (s. 25-29)

Delar upp problemet i delproblem efter varje faktorisering. Ekvation:

$$p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$$

$$p(1) = 1^5 - 10 * 1^2 + 15 * 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \\ &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = \\ &= x^5 + (A - 1)x^4 + (B - A)x^3 + (C - B)x^2 + (D - C)x - D \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = -10 \\ D - C = 15 \\ -D = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -9 \\ D = 6 \end{cases}$$

$$p(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6)$$

Ekvation: $p_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6$

$$p_1(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 + 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \\ x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C &= \\ x^4 + (A - 1)x^3 + (B - A)x^2 + (C - B)x - C & \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A = 1 \\ C - B = -9 \\ D - C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -6 \end{cases}$$

$$p_1(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + 3x - 6)$$

Ekvation: $p_2(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

$$p_2(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x - 1)(x^2 + Ax + B) = \\ x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B &= \\ x^3 + (A - 1)x^2 + (B - A)x - B & \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 2 \\ B - A = 3 \\ -B = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 6 \end{cases}$$

Ekvation: $p_3(x) = x^2 + 3x + 6$

$$p_2(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 6 = 10 \quad (x = 1 \text{ är inte en lösning})$$

pq-formeln:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 6} =$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} \Rightarrow \text{Finns ingen reell lösning}$$

$$p(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 3x + 6) = (x - 1)^3(x^2 + 3x + 6)$$

Svar: $(x - 1)^3(x^2 + 3x + 6)$, multipliciteten för $x = 1$ är 3

2.38 (s. 25-29)

Ekvationen: $p(x) = x^3 - 2x - 4$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A - 2)x^2 + (B - 2A)x - 2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 0 \\ B - 2A = -2 \\ -2B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$p_1(x) = x^2 + 2x + 2$$

pq-formeln:

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 2} \Rightarrow \text{Finns ingen reell lösning}$$

$$\textbf{Svar: } p(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

Ekvationer

3.1 a) (s. 33-34)

Utnyttja faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

b) (s. 33-34)

$x(x^2 - 4) = 0$. Faktorisera först $x^2 - 4$ med konjugatregeln.

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

c) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 24 = 0$. $a = 4$ och $b = 6$.

$$(x+4)(x+6) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = -5 \pm 1$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 1 \Leftrightarrow x+5 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -5 \pm 1$$

Svar: $x_1 = -4$ och $x_2 = -6$

d) (s. 33-34)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 25 = 0$. $a = 5$ och $b = 5$.

$$(x + 5)^2 = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x + 5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Svar: $x_{1,2} = -5$

e) (s. 33-34)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

Faktorisera ut x ur vänsterledet.

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 24$ (se c). Nollproduktionsmetoden ger också lösningen $x = 0$.

Svar: $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ och $x_3 = 0$

f) (s. 33-34)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Faktorisera ut x^2 ur vänsterledet.

$$x^2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 25$ (se d). Nollproduktionsmetoden ger också dubbelroten $x = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -5$ och $x_{3,4} = 0$

3.2 a) (s.)

$$x^2 + 4x + a = 0, \quad x = 2$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut a .

$$2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

Svar: $a = -12$

b) (s.)

$$x^2 + bx + 12 = 0, \quad x = 3$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut b .

$$3^2 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3b + 12 = 0 \Leftrightarrow 3b = -21 \Leftrightarrow b = -7$$

Svar: $b = -7$

3.3 a) (s.)

$$p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) (s.)

$$p(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 2)(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = (x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) (s.)

$$p(x) = -x^2 + x + 12$$
$$-x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - 4)(x + 3)$

Svar: $p(x) = (x - 4)(x + 3)$

d) (s.)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right)$$

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$$p(x) = x * g(x) = x(x - \frac{1}{2})^2$$

Svar: $p(x) = x \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$

e) (s.)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$x(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x * g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} \Rightarrow \text{Saknar reell lösning}$$

Faktorsatsen ger då att $g(x)$ inte kan faktoriseras.

Svar: $p(x) = 3x(x^2 - 2x + 5)$

f) (s.)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

Använd variabelsubstitution så pq-formeln kan användas.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad t = x^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$t = 3 \pm \sqrt{9 - 8} \Leftrightarrow t = 3 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 4, \quad t_2 = 2$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

Faktorsatsen ger då $p(x) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

Svar: $p(x) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

3.4 (s.)

Svar:

3.5 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

3.6 (s.)

Svar:

3.7 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar: