

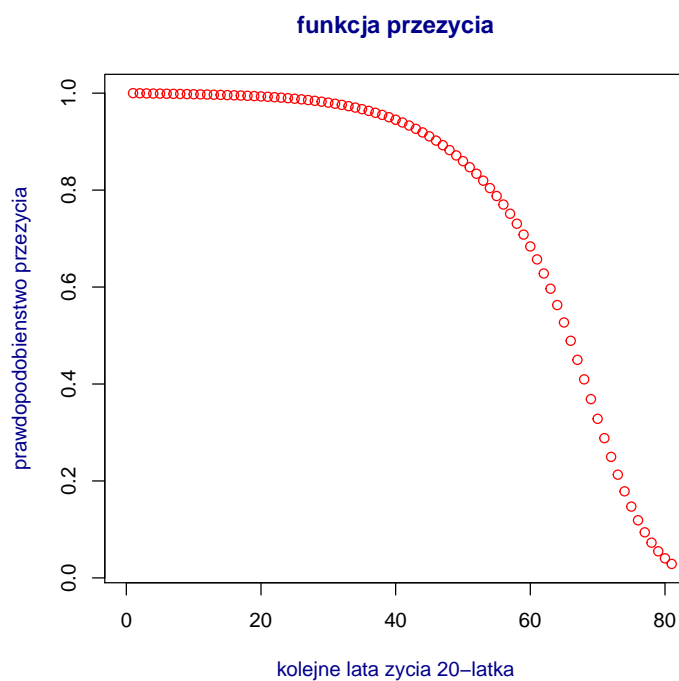
MATEMATYKA UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE

CZĘŚĆ I

Funkcja przeżycia

Prawdopodobieństwo, że x -latek dożyje wieku $x+k$ definiujemy jako ${}_k p_x$. Zmienna l_{x+k} oznacza liczbę x -latków, którzy dożyli wieku $x+k$ a l_x oznacza liczbę osób, które dożyły wieku x . Funkcję zapisujemy wzorem

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}. \quad (1)$$



kP_x

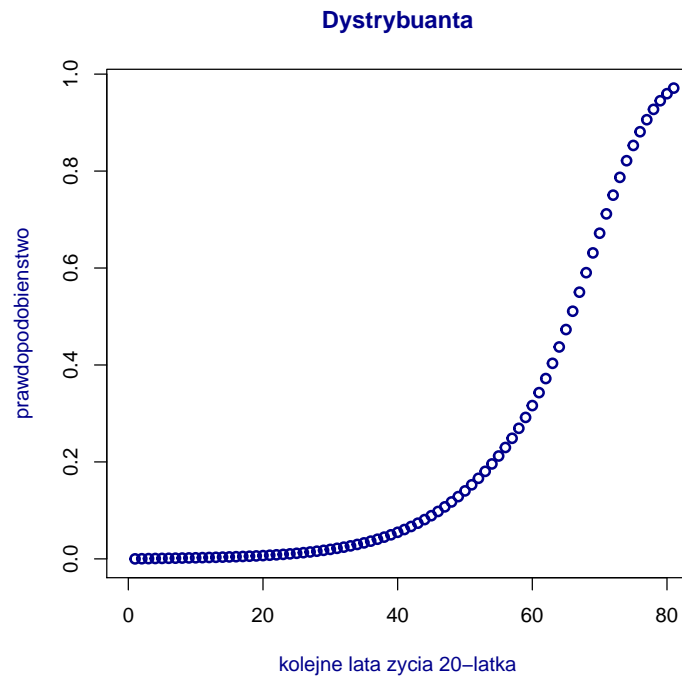
k	kpx	k	kpx	k	kpx	k	kpx
1	0.99973840	21	0.99165904	41	0.93321192	61	0.62803731
2	0.99949693	22	0.99072332	42	0.92640031	62	0.59660526
3	0.99925545	23	0.98968699	43	0.91897494	63	0.56284901
4	0.99902404	24	0.98851986	44	0.91091569	64	0.52692954
5	0.99879262	25	0.98722193	45	0.90218233	65	0.48913864
6	0.99856121	26	0.98578313	46	0.89272455	66	0.44986870
7	0.99831973	27	0.98417330	47	0.88252221	67	0.40958255
8	0.99805814	28	0.98239242	48	0.87155520	68	0.36883357
9	0.99777641	29	0.98043043	49	0.85978328	69	0.32819527
10	0.99746451	30	0.97824709	50	0.84720643	70	0.28827134
11	0.99713248	31	0.97585246	51	0.83378442	71	0.24967552
12	0.99678033	32	0.97319623	52	0.81945688	72	0.21295113
13	0.99639799	33	0.97025828	53	0.80416344	73	0.17862138
14	0.99598547	34	0.96701848	54	0.78780348	74	0.14714908
15	0.99554277	35	0.96344666	55	0.77021602	75	0.11887633
16	0.99504975	36	0.95950256	56	0.75124008	76	0.09404461
17	0.99450643	37	0.95516606	57	0.73064424	77	0.07272435
18	0.99390275	38	0.95040699	58	0.70822727	78	0.05488535
19	0.99323869	39	0.94518508	59	0.68376782	79	0.04035658
20	0.99249414	40	0.93946010	60	0.65707473	80	0.02885631

Tablica 1: tabela prawdopodobieństw

Dystrybuanta

Funkcja rzeczywista jednoznacznie wyznaczająca rozkład prawdopodobieństwa, że osoba umrze przed czasem $k+x$ to dystrybuanta. Jest ona oznaczana przez ${}_kq_x$. Wiemy, że ${}_kp_x$ jest funkcją przeżycia a więc dystrybantę definiujemy wzorem

$${}_kq_x = 1 - {}_kp_x. \quad (2)$$



kq_x

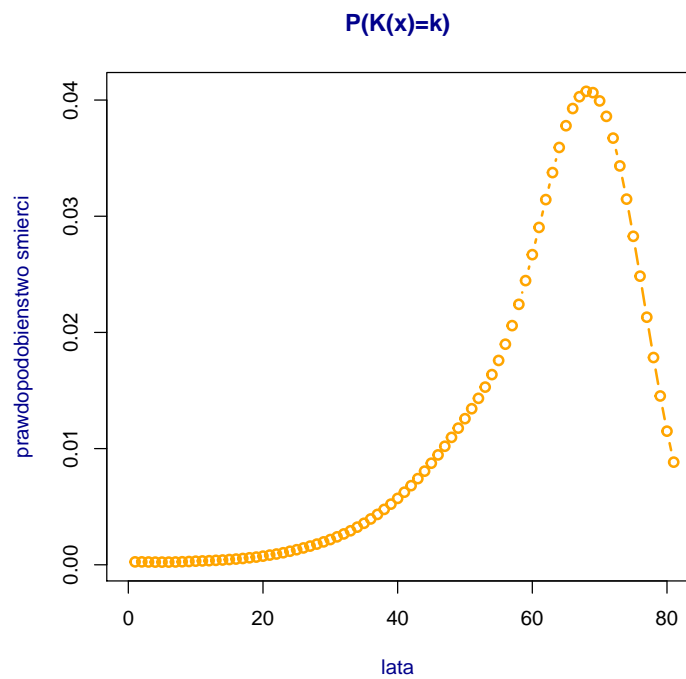
k	kqx	k	kqx	k	kqx	k	kqx
1	0.00026160	21	0.00834096	41	0.06678808	61	0.37196269
2	0.00050307	22	0.00927668	42	0.07359969	62	0.40339474
3	0.00074455	23	0.01031301	43	0.08102506	63	0.43715099
4	0.00097596	24	0.01148014	44	0.08908431	64	0.47307046
5	0.00120738	25	0.01277807	45	0.09781767	65	0.51086136
6	0.00143879	26	0.01421687	46	0.10727545	66	0.55013130
7	0.00168027	27	0.01582670	47	0.11747779	67	0.59041745
8	0.00194186	28	0.01760758	48	0.12844480	68	0.63116643
9	0.00222359	29	0.01956957	49	0.14021672	69	0.67180473
10	0.00253549	30	0.02175291	50	0.15279357	70	0.71172866
11	0.00286752	31	0.02414754	51	0.16621558	71	0.75032448
12	0.00321967	32	0.02680377	52	0.18054312	72	0.78704887
13	0.00360201	33	0.02974172	53	0.19583656	73	0.82137862
14	0.00401453	34	0.03298152	54	0.21219652	74	0.85285092
15	0.00445723	35	0.03655334	55	0.22978398	75	0.88112367
16	0.00495025	36	0.04049744	56	0.24875992	76	0.90595539
17	0.00549357	37	0.04483394	57	0.26935576	77	0.92727565
18	0.00609725	38	0.04959301	58	0.29177273	78	0.94511465
19	0.00676131	39	0.05481492	59	0.31623218	79	0.95964342
20	0.00750586	40	0.06053990	60	0.34292527	80	0.97114369

Tablica 2: tabela prawdopodobieństw

Prawdopodobieństwo $P(K(x)=k)$

Mowa tu o prawdopodobieństwie śmierci x -latka w roku $x+k$ -tym. Zmienna d_{x+k} oznacza ilość x -latków, którzy umierają w wieku $x+k$, a l_x oznacza ilość osób dożywających wieku x .

$$P(K(x) = k) = \frac{d_{x+k}}{l_x} \quad (3)$$



$$P(K(x) = k)$$

k	pk	k	pk	k	pk	k	pk
1	0.00025154	21	0.00092566	41	0.00681162	61	0.03143205
2	0.00024148	22	0.00103633	42	0.00741531	62	0.03375625
3	0.00023141	23	0.00116713	43	0.00805924	63	0.03591947
4	0.00023141	24	0.00129793	44	0.00874342	64	0.03779090
5	0.00023141	25	0.00144885	45	0.00945779	65	0.03926994
6	0.00024148	26	0.00160984	46	0.01020234	66	0.04028615
7	0.00026160	27	0.00178088	47	0.01096701	67	0.04074898
8	0.00028172	28	0.00197205	48	0.01176186	68	0.04063830
9	0.00031191	29	0.00217328	49	0.01257684	69	0.03992394
10	0.00033203	30	0.00240469	50	0.01343207	70	0.03859582
11	0.00035215	31	0.00265623	51	0.01432754	71	0.03672439
12	0.00038234	32	0.00292789	52	0.01529344	72	0.03432975
13	0.00041252	33	0.00323980	53	0.01637002	73	0.03147230
14	0.00045277	34	0.00357182	54	0.01758746	74	0.02827275
15	0.00049301	35	0.00394410	55	0.01898600	75	0.02484178
16	0.00054332	36	0.00433650	56	0.02058578	76	0.02131021
17	0.00060369	37	0.00476914	57	0.02241697	77	0.01783900
18	0.00066406	38	0.00522191	58	0.02445945	78	0.01452877
19	0.00074455	39	0.00571492	59	0.02669309	79	0.01150027
20	0.00083510	40	0.00624818	60	0.02903742	80	0.00883398

Tablica 3: tabela

CZEŚĆ II

Badamy przypadek gdy $x=20$ i $y=25$. Funkcja przeżycia ${}_k p_{x:y} = {}_k p_x \cdot {}_k p_y$, czyli rozpatrujemy status wspólnego życia x -latka i y -latka i mamy 76 prawdopodobieństw przeżycia na kolejne lata. Natomiast ${}_k p_{\overline{x:y}}$ oznacza prawdopodobieństwa przeżycia przynajmniej jednej z osób.

${}_k p_{x:y}$

k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy
0	0.99879262	19	0.97835275	38	0.84553582	57	0.35636810
1	0.99832985	20	0.97578527	39	0.83077046	58	0.31718196
2	0.99784707	21	0.97294310	40	0.81491688	59	0.27799038
3	0.99732419	22	0.96976796	41	0.79792051	60	0.23954583
4	0.99676124	23	0.96626150	42	0.77978695	61	0.20262649
5	0.99613816	24	0.96240581	43	0.76052671	62	0.16796066
6	0.99547510	25	0.95812419	44	0.74012089	63	0.13620265
7	0.99477209	26	0.95343918	45	0.71862639	64	0.10784234
8	0.99400910	27	0.94825580	46	0.69603684	65	0.08320082
9	0.99318621	28	0.94253913	47	0.67232133	66	0.06241322
10	0.99230348	29	0.93625516	48	0.64746057	67	0.04540300
11	0.99132091	30	0.92935154	49	0.62138457	68	0.03194416
12	0.99023864	31	0.92175807	50	0.59394984	69	0.02167903
13	0.98903681	32	0.91344508	51	0.56504387	70	0.01414867
14	0.98771564	33	0.90436535	52	0.53448633	71	0.00885508
15	0.98623537	34	0.89445478	53	0.50219220	72	0.00529522
16	0.98457640	35	0.88365218	54	0.46810361	73	0.00301604
17	0.98271921	36	0.87193725	55	0.43226911	74	0.00163062
18	0.98066436	37	0.85925497	56	0.39490766	75	0.00083369

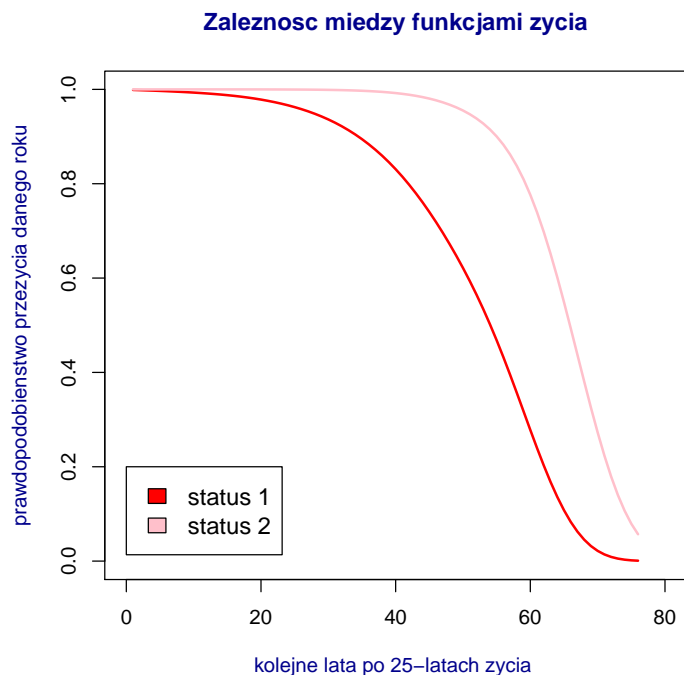
Tablica 4: tabela wspólnego życia

$kP_{x:y}$

k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy
0	0.00120738	19	0.02164725	38	0.15446418	57	0.64363190
1	0.00167015	20	0.02421473	39	0.16922954	58	0.68281804
2	0.00215293	21	0.02705690	40	0.18508312	59	0.72200962
3	0.00267581	22	0.03023204	41	0.20207949	60	0.76045417
4	0.00323876	23	0.03373850	42	0.22021305	61	0.79737351
5	0.00386184	24	0.03759419	43	0.23947329	62	0.83203934
6	0.00452490	25	0.04187581	44	0.25987911	63	0.86379735
7	0.00522791	26	0.04656082	45	0.28137361	64	0.89215766
8	0.00599090	27	0.05174420	46	0.30396316	65	0.91679918
9	0.00681379	28	0.05746087	47	0.32767867	66	0.93758678
10	0.00769652	29	0.06374484	48	0.35253943	67	0.95459700
11	0.00867909	30	0.07064846	49	0.37861543	68	0.96805584
12	0.00976136	31	0.07824193	50	0.40605016	69	0.97832097
13	0.01096319	32	0.08655492	51	0.43495613	70	0.98585133
14	0.01228436	33	0.09563465	52	0.46551367	71	0.99114492
15	0.01376463	34	0.10554522	53	0.49780780	72	0.99470478
16	0.01542360	35	0.11634782	54	0.53189639	73	0.99698396
17	0.01728079	36	0.12806275	55	0.56773089	74	0.99836938
18	0.01933564	37	0.14074503	56	0.60509234	75	0.99916631

Tablica 5: tabela życia

Status 1 oznacza $u = (x : y)$, a status 2 oznacza $u = \overline{(x : y)}$.



Możemy zauważyć, że funkcja przeżycia statusu 2 ma większe prawdopodobieństwa przeżycia w kolejnych latach. Największą różnicę między prawdopodobieństwami status 1 i status 2 widzimy wtedy gdy badani mają przypuszczalnie 85 lat. Większe prawdopodobieństwa przeżycia są dla funkcji, w której żyje przynajmniej jedna osoba, niż dla funkcji, gdzie obie osoby żyją. Wykres jest zrozumiały i łatwy do zinterpretowania.

prawdopodobieństwo, że obie osoby dożyją 60-tego roku życia

$${}_{35}p_{20:25}$$

[1] 0.8944548

prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna osoba dożyje 60- tego roku życia

$${}_{35}p_{\overline{20:25}}$$

[1] 0.997058

prawdopodobieństwo, że obie osoby umrą za k lat

$$1 - {}_k p_{\overline{20:25}}$$

k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy	k	kpxy
0	0.00000000	19	0.00011808	38	0.00647505	57	0.16243639
1	0.00000033	20	0.00014803	39	0.00783792	58	0.19080356
2	0.00000080	21	0.00018518	40	0.00946162	59	0.22349433
3	0.00000143	22	0.00023166	41	0.01139226	60	0.26067727
4	0.00000226	23	0.00028912	42	0.01367570	61	0.30234528
5	0.00000337	24	0.00035977	43	0.01636274	62	0.34830044
6	0.00000477	25	0.00044747	44	0.01951500	63	0.39808965
7	0.00000649	26	0.00055462	45	0.02318939	64	0.45105506
8	0.00000864	27	0.00068691	46	0.02746009	65	0.50630967
9	0.00001128	28	0.00084969	47	0.03241697	66	0.56276037
10	0.00001450	29	0.00104923	48	0.03816159	67	0.61924332
11	0.00001855	30	0.00129357	49	0.04482528	68	0.67448549
12	0.00002357	31	0.00159307	50	0.05258673	69	0.72720299
13	0.00002985	32	0.00195831	51	0.06165559	70	0.77625229
14	0.00003760	33	0.00240249	52	0.07231462	71	0.82065217
15	0.00004733	34	0.00294205	53	0.08488153	72	0.85975862
16	0.00005957	35	0.00359633	54	0.09974140	73	0.89317900
17	0.00007495	36	0.00438530	55	0.11732536	74	0.92086868
18	0.00009402	37	0.00533449	56	0.13807385	75	0.94308619

Tablica 6: tabela życia

prawdopodobieństwo, że jedna osoba umrze po k latach

$${}_kP_{\overline{20:25}} - {}_kP_{20:25}$$

k	kpqxy	k	kpqxy	k	kpqxy	k	kpqxy
0	0.00120738	19	0.02152918	38	0.14798913	57	0.48119551
1	0.00166982	20	0.02406670	39	0.16139163	58	0.49201448
2	0.00215214	21	0.02687172	40	0.17562151	59	0.49851529
3	0.00267438	22	0.03000039	41	0.19068724	60	0.49977691
4	0.00323650	23	0.03344938	42	0.20653735	61	0.49502823
5	0.00385847	24	0.03723441	43	0.22311055	62	0.48373890
6	0.00452014	25	0.04142835	44	0.24036412	63	0.46570770
7	0.00522143	26	0.04600620	45	0.25818422	64	0.44110259
8	0.00598226	27	0.05105729	46	0.27650307	65	0.41048951
9	0.00680251	28	0.05661119	47	0.29526170	66	0.37482641
10	0.00768201	29	0.06269561	48	0.31437785	67	0.33535368
11	0.00866054	30	0.06935488	49	0.33379015	68	0.29357035
12	0.00973779	31	0.07664886	50	0.35346343	69	0.25111799
13	0.01093334	32	0.08459660	51	0.37330053	70	0.20959904
14	0.01224677	33	0.09323216	52	0.39319905	71	0.17049275
15	0.01371729	34	0.10260317	53	0.41292627	72	0.13494616
16	0.01536403	35	0.11275149	54	0.43215498	73	0.10380496
17	0.01720584	36	0.12367744	55	0.45040553	74	0.07750070
18	0.01924162	37	0.13541054	56	0.46701849	75	0.05608012

Tablica 7: tabela życia