UNIWERSYTET GDAŃSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI

Ewa Bojke

MODELOWANIE MATEMATYCZNE
I ANALIZA DANYCH

Szeregi Fouriera - Maxima

Projekt zaliczeniowy
dr. Marta Frankowska

Gdańsk 2022

Dana jest funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[0, t]$ taka, że

$$f(x) = 0.1x^3 - 4.5x, t = 5.$$

Pierwszym etapem będzie przedłużenie funkcji f do funkcji parzystej f_p oraz do funkcji nieparzystej f_n na przedziale $[-t, t]$ spełniającej warunki Dirichleta.

Sprawdźmy, czy funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta, czyli

- $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna na odcinku $[-5, 5]$,
- funkcja $f(x)$ w przedziale jednego okresu posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- wartości funkcji $f(x)$ na krańcach przedziału $[-5, 5]$ są równe, czyli $f(-5) = f(5)$.

```
'limit(f(x),x,inf)=limit(f(x),x,inf);
```

$$\lim_{x \to \infty} 0.1\, x^3 - 4.5\, x = \infty$$

```
'limit(f(x),x,5,minus)=limit(f(x),x,5,minus);
```

$$\lim_{x \to 5-} 0.1\, x^3 - 4.5\, x = -10.0$$

```
'limit(f(x),x,-5,plus)=limit(f(x),x,-5,plus);
```

$$\lim_{x \to -5+} 0.1\, x^3 - 4.5\, x = 10.0$$

Wnioski: Funkcja $f(x)$ nie spełnia warunków Dirichleta, co widać poniżej:

```
/*Średnia arytmetyczna granicy prawostronnej funkcji f w -t oraz granicy
 lewostronnej f w t. */
((limit(f(x),x,-5,plus)) + (limit(f(x),x,5,minus)))/2;
0.0


f(-5);f(5);
10.0
-10.0
```

Widzimy że wartości funkcji na krańcach przedziału nie są równe średniej arytmetycznej granic. Funkcja f nie spełnia warunków Dirichleta, musimy zatem zamienić krańcowa wartość funkcji nieparzystej na 0.

Przedłużmy funkcję $f(x)$ do funkcji parzystej f_p i funkcji nieparzystej f_n zgodnie ze wcześniejszymi założeniami.

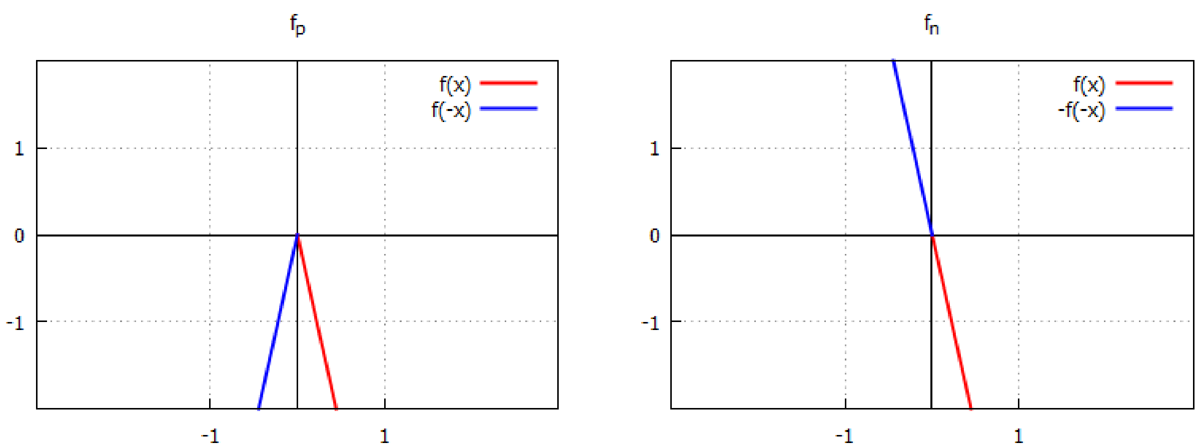
```
f_p(x):=if x>=-5 and x<0 then f(-x) elseif x>=0 and x<=5 then f(x);
```

$f_p(x) := \text{if } x \geq -5 \text{ and } x < 0 \text{ then } f(-x) \text{ elseif } x \geq 0 \text{ and } x \leq 5 \text{ then } f(x)$

```
f_n(x):=if x>-5 and x<0 then -f(-x) elseif x>=0 and x<5 then f(x)
elseif x=-5 or x=5 then 0;
```

$f_n(x) := \text{if } x > -5 \text{ and } x < 0 \text{ then } -f(-x) \text{ elseif } x \geq 0 \text{ and } x < 5 \text{ then } f(x) \text{ elseif } x = -5 \text{ or } x = 5 \text{ then } 0$

Poniżej zamieszczony został wykres tych dwóch funkcji.



Rysunek 1: Ilustracja funkcji parzystej i nieparzystej f(x)

Podajmy współczynniki rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera w przedziale [-5,5].

```
fourier(f(x),x,5);
rat: replaced -9.0 by -9/1 = -9.0
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
```

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

```
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 75.0 by 75/1 = 75.0
rat: replaced 22.5 by 45/2 = 22.5
rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5
rat: replaced 7.5 by 15/2 = 7.5
```

$$b_n = \frac{2\left(\frac{75.0\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{375.0\sin(\pi n)}{\pi^4 n^4} + \frac{50.0\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{375.0\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}\right)}{5}$$

A tak prezentują się współczynniki rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera według sinusów i cosinusów.

```
wsin:foursin(f(x),x,5);
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 75.0 by 75/1 = 75.0
rat: replaced 22.5 by 45/2 = 22.5
rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5
rat: replaced 7.5 by 15/2 = 7.5
```

$$b_n = \frac{2\left(\frac{75.0\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{375.0\sin(\pi n)}{\pi^4 n^4} + \frac{50.0\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{375.0\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}\right)}{5}$$

```
wcos:fourcos(f(x),x,5);
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced -75.0 by -75/1 = -75.0
rat: replaced -22.5 by -45/2 = -22.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
```

$$a_0 = -8.125$$

$$a_n = \frac{2\left(-\frac{50.0\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{375.0\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{75.0\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{375.0\cos(\pi n)}{\pi^4 n^4} + \frac{112.5}{\pi^2 n^2} + \frac{375.0}{\pi^4 n^4}\right)}{5}$$

Rysunek 2: Rozwinięcie w szereg Fouriera wg. sinusów i cosinusów

Dla każdego z tych szeregu zdefiniowano funkcję, która wyznacza n-tą sumę częściową:

```
s(n):=fourexpand(wsin,x,t,n);
```

$$s(n) := fourexpand(wsin, x, t, n)$$

```
s(n);
rat: replaced 375.0 by 375/1 = 375.0
rat: replaced 50.0 by 50/1 = 50.0
rat: replaced 375.0 by 375/1 = 375.0
rat: replaced 50.0 by 50/1 = 50.0
```

$$\frac{2\sum_{n=1}^{n}\left(\left(\frac{50.0\,(-1)^{n}}{\pi\, n}+\frac{375.0\,(-1)^{n}}{\pi^{3}\, n^{3}}\right)\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{5}\right)\right)}{5}$$

```
s1(n):=fourexpand(wcos,x,t,n);
```

$$s1(n) := fourexpand(wcos, x, t, n)$$

```
s1(n);
rat: replaced 375.0 by 375/1 = 375.0
rat: replaced 112.5 by 225/2 = 112.5
rat: replaced -375.0 by -375/1 = -375.0
rat: replaced 75.0 by 75/1 = 75.0
rat: replaced 375.0 by 375/1 = 375.0
rat: replaced 112.5 by 225/2 = 112.5
rat: replaced -375.0 by -375/1 = -375.0
rat: replaced 75.0 by 75/1 = 75.0
```

$$\frac{2\sum_{n=1}^{n}\left(\left(\frac{75.0\,(-1)^{n}}{\pi^{2}\, n^{2}}-\frac{375.0\,(-1)^{n}}{\pi^{4}\, n^{4}}+\frac{112.5}{\pi^{2}\, n^{2}}+\frac{375.0}{\pi^{4}\, n^{4}}\right)\cos\left(\frac{\pi\, n\, x}{5}\right)\right)}{5}-8.125$$

Zestawienie funkcji $f_p(x)$ oraz $f_n(x)$ wraz ze zmieniającymi się sumami częściowymi szeregu zostały zaprezentowane na dwóch animacjach. Oto jak powstała jedna z animacji:

```
apply(draw,
append([terminal='animated_gif,delay=70,
        file_name="Szereg_Fouriera_a",
        dimensions=[800,800]],
    makelist(gr2d(title="f_p",proportional_axes=xy,
            xrange=[-2.5,2.5],yrange=[-4,4],
            font="Sheriff",font_size=14,point_size=1.5,line_width=2.5,
            xaxis=true,yaxis=true,xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,
            xtics_axis=true,ytics_axis=true,xtics={-2,-1,1,2},ytics=[-3,1,3],
            explicit(f(x),x,0,5),
            color=blue,
            explicit(-f(-x),x,-5,5),
            point_type=filled_circle,
            points([[0,0]]),
            color=red,key=sconcat("k=",k),
            explicit(Fa(k-1),x,-4,4)),k,1,15)))$
```

Gdzie:

```
wa:foursin(f(x),x,t)$

fourexpand(wa,x,t,inf);intosum(%);

wb:fourcos(f(x),x,t)$

wb:foursimp(wb)$

fourexpand(wb,x,t,inf);intosum(%);

Fa(n):=fourexpand(wa,x,t,n)$

trunc(Fa(5));

Fb(n):=fourexpand(wb,x,t,n)$

trunc(Fb(5));
```