Projet informatique

Simulation d'un pendule double à l'aide de la projection stéréographique en 3D

BATAILLE Ewan

1 Projection stéréographique

En géométrie, la projection stéréographique correspond à la projection d'une sphère sur un plan. Ici, on considère la sphère S de rayon 1 et de centre O = (0,0,0) et le plan P (x,y,z=-1). Le but est donc de projeter S sur P en considérant la droite entre le pôle nord de S, appelé N = (0,0,1), et un point quelconque M = (ξ, η, ζ) de la sphère vérifiant :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad (1.1)$$

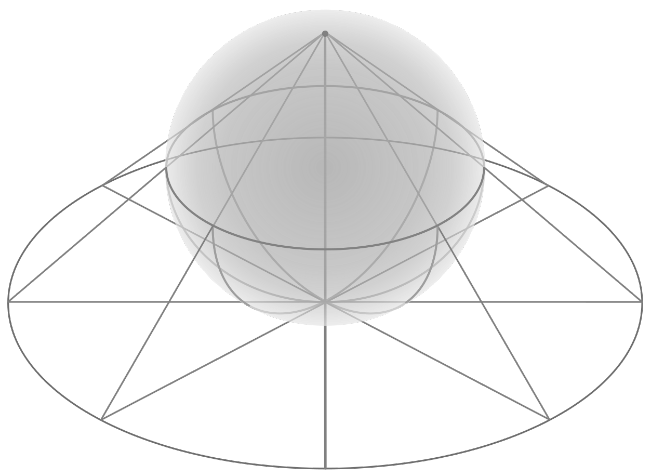

Figure 1 – Illustration 3D d'une projection stéréographique du pôle nord sur un plan sous la sphère (Wikipédia)

La droite NM a pour équation :

$$\begin{cases} x = t * \xi \\ y = t * \eta \\ z = 1 + t * (\zeta - 1) \end{cases}$$

et croise le plan P en Z=-1. Les coordonnées stéréographiques s'expriment donc selon M sous la forme :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\xi}{1-\zeta} \\ y = \dfrac{2\eta}{1-\zeta} \end{cases} \qquad (1.2)$$

La transformation inverse se trouve grâce aux équations (1.1) et (1.2) et donnent :

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) \tag{1.3}$$

Il suffit de multiplier (1.3) par une longueur r pour généraliser la transformation à une sphère de tel rayon.

N.b : Le point N n'est pas représentable par ce système de coordonnées. Il s'agit d'un point de divergence car pour $\zeta = 1$, on divise par 0. Toute modélisation qui fera passer un point trop proche de N se verra diverger à cause de cette condition.

2 Simulation d'un pendule simple

On considère un pendule simple M de masse m et de longueur l fixé à l'origine O. On se place en coordonnées sphériques et on considère la force gravitationnelle sur le pendule :

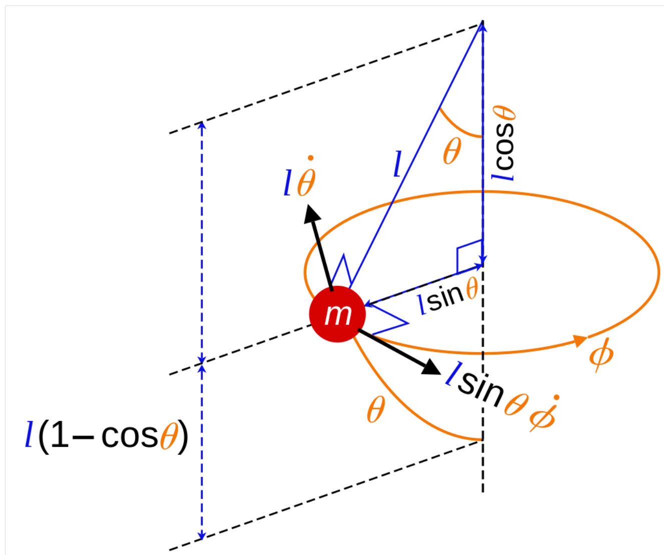

FIGURE 2 – Pendule sphérique : angles et vitesses (Wikipédia)

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit en projection sur les axes :

$$\begin{cases} l * \ddot{\theta} - l * \dot{\phi}^2 = -g * sin(\theta) \\ l * \ddot{\phi} + 2 * l * \dot{\theta} * \dot{\phi} * cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre numériquement les équations différentielles du mouvement et déterminer la trajectoire d'un pendule simple en 3D.

3 Etude d'un pendule double, équations d'Hamilton

On considère dans cette section deux pendules de longueurs et masses respectives (l_1, m_1) et (l_2, m_2) accrochés entre eux subissant l'attraction gravitationnelle. Le premier pendule noté 1 est fixé à l'origine et le second noté 2 est attaché à l'extrémité de 1. A partir d'ici q_3, q_4 et p_3, p_4 expriment les coordonnées et les moments stéréographiques du pendule 1 et q_1, q_2 et p_1, p_2 les coordonnées et les moments stéréographiques du pendule 2.

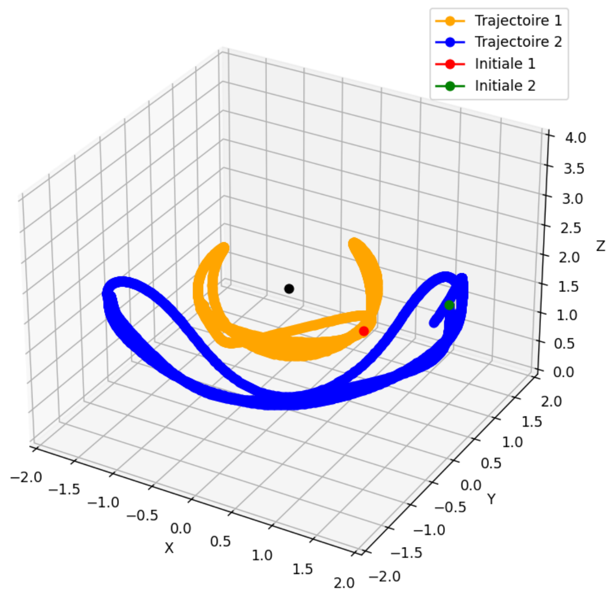

FIGURE 3 – Trajectoire d'un pendule double

A l'aide des travaux de Kristian Egeris (zymplectic.com), l'hamiltonien du pendule double s'exprime en coordonnées stéréographiques par :

H $= ((A-B+C-D)^2 * \frac{m_1}{m_2} + (A-B)^2 + \frac{m_2}{m_1} * (y_1^2 + y_2^2) + (y_1 - y_3)^2 + (y_2 - y_4)^2 + 2F(q_1 * y_3 + q_2 * y_4) + 2G(q_3 * y_1 + q_4 * y_2) - 2FG(1 + q_1 * q_3 + q_2 * q_4))/(2 * l_1^2 l_2^2 (m_2 * a^2 b^2 + 4 * m_1 * k * (a * b - k))) + g * ((m_1 + m_2) * (1 - 2/b) * l_2 + m_1 * (1 - 2/a) * l_1$ (2.1)

On notera plus simplement H $= \dfrac{h}{f} + l$ avec h le numérateur, f le dénominateur et l le terme additionné. La fraction $\frac{h}{f}$ représente l'énergie cinétique du système. Son écriture complexe provient du couplage des degrés de libertés des deux pendules. Le terme l représente l'énergie potentielle gravitationnelle du système. Toutes les inconnues définies dans l'hamiltonien sont fonctions des $\{q_i, p_i\}$ et sont décrites en annexe.

Les $\{p_i\}$ ayant été définis d'après le lagrangien du système, les équations d'Hamilton restent vérifiées en coordonnées stéréographiques :

$$\forall \text{ i}, \quad q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ; \ p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Il suffit d'exprimer la différentielle de H selon les différentielles de h,f et l et de faire de même avec h,f et l selon toutes les fonctions définies au-dessus. La différentielle de H s'écrit :

$$\text{dH} = \frac{dh * f - h * df}{f^2} + dl$$

Ainsi, on obtient directement des équations différentielles pour chaque coordonnée et chaque moment. Le système peut alors être résolu avec une méthode numérique comme la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4.

Annexe

Cette section est utlisée pour détailler les fonctions intermédiaires utilisées pour résoudre les équations d'Hamilton pour le pendule double. Chaque fonction dépend des coordonnées et des moments stéréographiques des pendules.

$$\text{g} = 9.81\ m.s^{-2} \text{ constante gravitationnelle terrestre}$$

$$\text{a} = 1 + q_1^2 + q_2^2$$

$$\text{b} = 1 + q_3^2 + q_4^2$$

$$\text{k} = (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2$$

$$\text{A} = p_1 * l_2 * a * (a * (q_4 - q_2) + q_2 * k)$$

$$\text{B} = p_2 * l_2 * a * (a * (q_3 - q_1) + q_1 * k)$$

$$\text{C} = p_3 * l_1 * b * (b * (q_2 - q_4) + q_4 * k)$$

$$\text{D} = p_4 * l_1 * b * (b * (q_1 - q_3) + q_3 * k)$$

$$y_1 = p_1 * l_2 * b * \frac{b^2}{2}$$

$$y_2 = p_2 * l_2 * b * \frac{b^2}{2}$$

$$y_3 = p_3 * l_1 * a * \frac{b^2}{2}$$

$$y_4 = p_4 * l_1 * a * \frac{b^2}{2}$$

$$\text{F} = a * b * l_2 * (q_1 * p_1 + q_2 * p_2)$$

$$\text{G} = a * b * l_1 * (q_4 * p_4 + q_3 * p_3)$$