

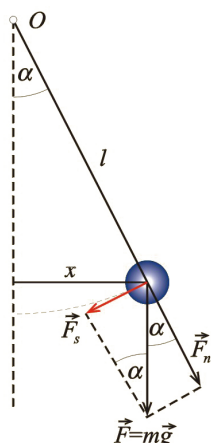
EAIiB Informatyka	Ewa Stachów Weronika Olcha	Rok II	Grupa 3	Zespół 6
Pracownia FIZYCZNA WFIS AGH	Temat: <i>Opracowanie danych pomiarowych</i>			Nr ćwiczenia: 0
Data wykonania: 7.10.2016	Data oddania: 12.10.2016	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:
OCENA:				

## Ćwiczenie nr 0: Opracowanie danych pomiarowych

### 1 Cel ćwiczenia

Zaznajomienie się z typowymi metodami opracowania danych pomiarowych przy wykorzystaniu wyników pomiarów dla wahadła prostego.

### 2 Wstęp teoretyczny



Wahadło matematyczne to punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici.

Na rysunku przedstawione są działające siły, gdzie siły  $\vec{F}_N$  i  $\vec{F}_S$  to siły składowe. Siłę  $\vec{F}_N$  równoważy siła naciągu nitki, więc o ruchu wahadła decyduje tylko siła  $\vec{F}_S$ .

Wychylamy punkt materialny z położenia równowagi o bardzo małe kąty  $\alpha < 5^\circ$ . Możemy wyprowadzić wzór na okres wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres wahadła matematycznego jest wprost proporcjonalny do pierwiastka z długości wahadła. Gdy przekształcimy ten wzór uzyskamy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

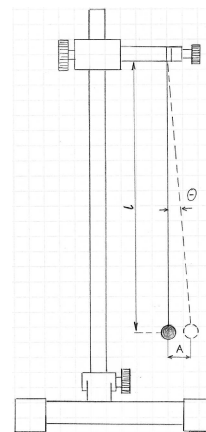
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

### 3 Układ pomiarowy

Do uzyskania pomiarów niezbędny jest zestaw wahadła prostego (rysunek po prawej), sekundomierz (stoper) oraz przymiar milimetrový (linijka).

### 4 Wykonanie ćwiczenia

Przy pomocy linijki dokonujemy pomiaru długości wahadła rozumianą jako odległość od środka ciężarka do punktu zawieszenia nici. Niewielką masę wprawiamy w ruch z małą amplitudą (nieprzekraczającą 3 stopni) i mierzymy czas wykonania się 30 pełnych okresów. Sekundomierz uruchamiamy i zatrzymujemy w tej samej fazie ruchu. Pomiar powtarzamy dziesięciokrotnie.



W następnej kolejności chcemy zbadać pomiar zależności okresu drgań od długości wahadła, więc dziesięciokrotnie mierzymy czas wykonania się 30 pełnych okresów jak wcześniej, lecz na różnych długościach nici w zakresie od 10 cm do długości maksymalnej.

## 5 Wyniki i ich opracowanie

**Tablica 1:** Pomiar okresu drgań przy ustalonej długości wahadła.

Długość wahadła  $l = 395\text{mm}$ , niepewność pomiarowa  $u(l) = 1\text{mm}$ .

Lp.	liczba okresów $k$	czas $t$ dla $k$ okresów w [s]	okres $T_i = t/k$ w [s]
1	30	37,37	1,245667
2	30	37,22	1,240667
3	30	37,25	1,241667
4	30	37,34	1,244667
5	30	37,06	1,235333
6	30	37,32	1,244000
7	30	37,31	1,243667
8	30	37,13	1,237667
9	30	37,47	1,249000
10	30	37,38	1,246000

**Tablica 2:** Pomiar zależności okresu drgań od długości wahadła.

Lp.	$l[\text{mm}]$	$k$	$t[\text{s}]$	$T_i[\text{s}]$	$T_i^2[\text{s}^2]$
1	105	30	19,25	0,641667	0,411736
2	125	30	20,66	0,688667	0,474261
3	148	30	22,62	0,754000	0,568516
4	160	30	23,88	0,796000	0,633616
5	190	30	25,81	0,860333	0,740173
6	202	30	26,47	0,882333	0,778512
7	225	30	28,28	0,942667	0,888620
8	245	30	29,22	0,974000	0,948676
9	280	30	31,16	1,038667	1,078828
10	318	30	33,50	1,116667	1,246944

### 5.1 Błąd grubý

Nie stwierdzamy błędu grubego, żaden z wyników nie różni się znacząco od pozostałych, a przyrządy pomiarowe były umiejętnie użyte.

### 5.2 Niepewność typu A - pomiar okresu

Średnia arytmetyczna:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum T_i$$

$$\bar{T} = \frac{1,245667 + 1,245667 + \dots + 1,249000 + 1,246000}{10} \approx 1,242833\text{s}$$

### Estymator odchylenia standardowego:

$$s_T = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n-1}}$$

$$s_T = \sqrt{\frac{(1,245667-1,242833)^2 + (1,240667-1,242833)^2 + \dots + (1,246000-1,242833)^2}{10-1}} \approx 0,004089s$$

Ponieważ za wynik pomiaru przyjmujemy średnią, **niepewność pomiaru**  $u(T)$  utożsamiamy z estymatorem odchylenia standardowego średniej.

### Estymator odchylenia standardowego średniej:

$$u(T) = s_{\bar{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{n}}$$

$$u(T) \approx \frac{0,004089s}{\sqrt{10}} \approx 0,0013s$$

## 5.3 Niepewność typu B - pomiar długości wahadła

Długość wahadła otrzymaliśmy mierząc go przyziarnie milimetrym od środka masy ciała do punktu zawieszenia “na oko” – przyjmujemy niepewność równą  $u(l) = 3mm$ .

## 5.4 Przyspieszenie ziemskie

Aby obliczyć przyspieszenie ziemskie korzystamy ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2},$$

gdzie  $l$ , to długość wahadła, a  $\bar{T}$  to średnia arytmetyczna okresów drgań dla dziesięciu pomiarów.

$$g \approx \frac{4\pi^2 \cdot 0,395m}{(1,242833s)^2} \approx 10,095575 \frac{m}{s^2}$$

## 5.5 Niepewność złożona $u_c(g)$

Niepewność złożoną obliczamy korzystając z **prawa przenoszenia niepewności**.

$$\begin{aligned} u_c(g) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T} u(T)\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} u(l)\right]^2 + \left[\frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3} u(T)\right]^2} \\ &\approx \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{(1,242833s)^2} \cdot 0,003m\right]^2 + \left[\frac{8\pi^2 \cdot 0,395m}{(1,242833s)^3} \cdot 0,0013s\right]^2} \\ &\approx 0,078 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Wyliczoną wartość  $g$  możemy zapisać uwzględniając teraz niepewność złożoną  $u_c(g)$ :

$$g = 10,100(78) \frac{m}{s^2}$$

### 5.6 Niepewność rozszerzona $U(g)$

Niepewność rozszerzoną wyrażamy jako iloczyn niepewności złożonej i bezwymiarowego współczynnika rozszerzenia  $k$  (umowna wartość to  $k = 2$ ).

$$U(g) = k \cdot u_c(g) \approx 2 \cdot 0,078 \frac{m}{s^2} \approx 0,16 \frac{m}{s^2}$$

Wyliczoną wartość  $g$  możemy zapisać uwzględniając teraz niepewność rozszerzoną  $U(g)$ :

$$g = 10,10(16) \frac{m}{s^2}$$

### 5.7 Porównanie z wartością tabelaryczną

Wartość zmierzona  $g_z$ :

$$g_z = 10,10 \frac{m}{s^2}$$

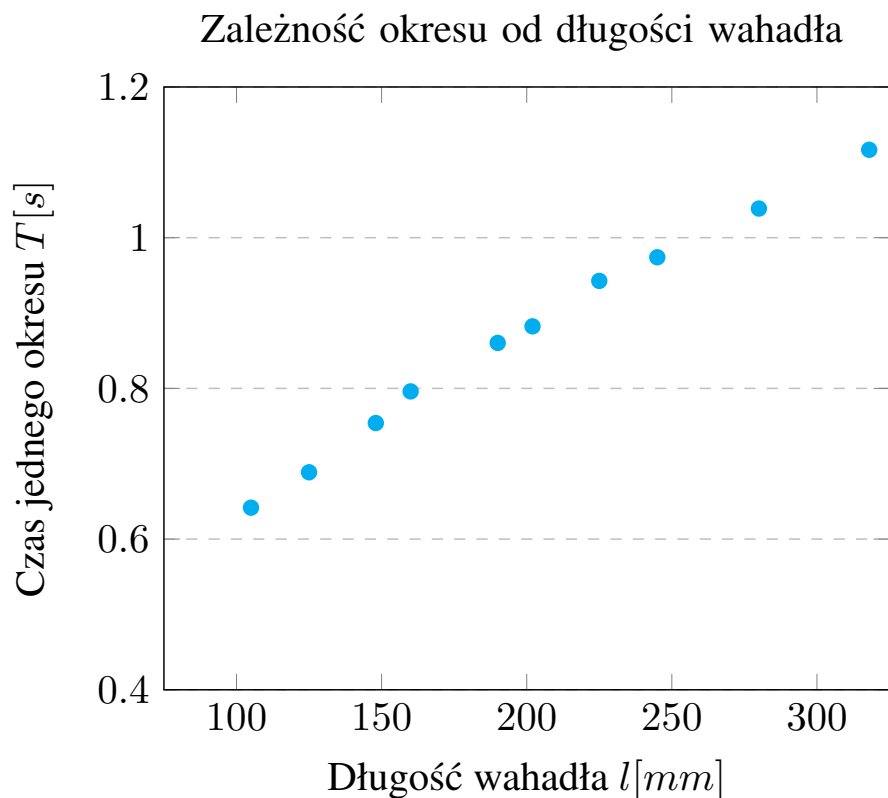
Wartość tabelaryczna  $g$ :

$$g = 9,811 \frac{m}{s^2}$$

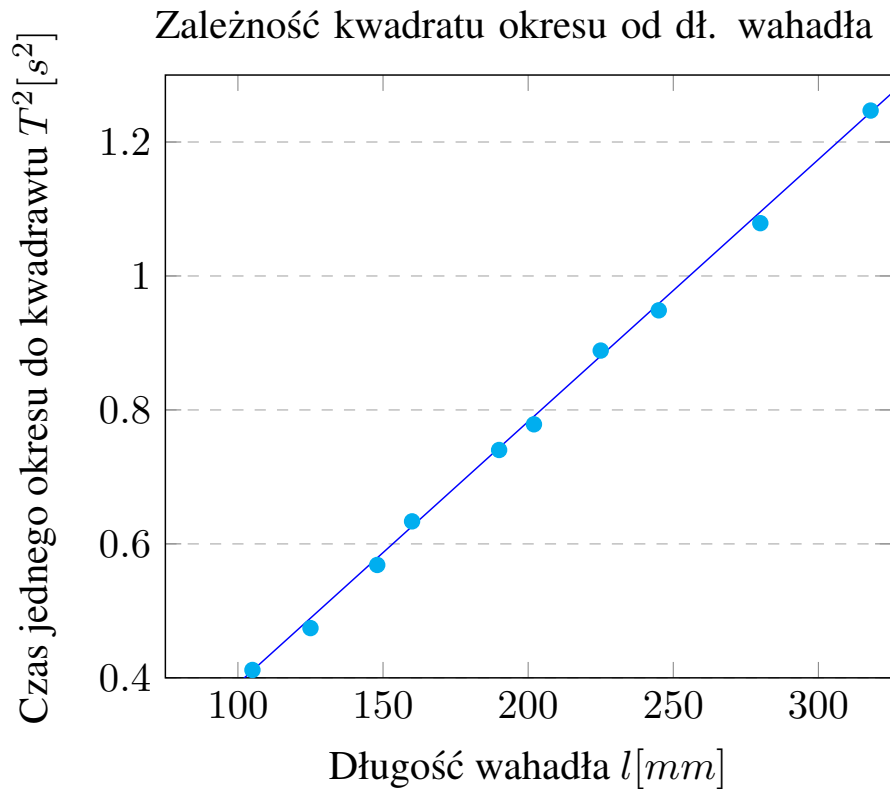
$$|g - g_z| = 0,289 \frac{m}{s^2} > 0,16 \frac{m}{s^2}$$

Wartość zmierzona nie mieści się w granicach niepewności rozszerzonej, a co za tym idzie również złożonej.

### 5.8 Wykres zależności okresu od długości wahadła $T(l)$



### 5.9 Wykres zlinearyzowany $T^2$ w funkcji $l$



### 5.10 Dopasowanie prostej typu $y = ax$

Korzystając z funkcji REGLINP() w arkuszu kalkulacyjnym obliczyliśmy współczynnik  $a$  prostej  $y = ax$ , który wyniósł:

$$a \approx 3,912982 \frac{s^2}{m}$$

Niepewność współczynnika kierunkowego prostej:

$$u(a) \approx 0,048 \frac{s^2}{m}$$

Wyliczoną wartość  $a$  możemy zapisać uwzględniając teraz niepewność  $u(a)$ :

$$a = 3,913(48) \frac{s^2}{m}$$

Korelacja liniowa danych wyniosła  $r^2 \approx 0,998809 \pm 0,009794$ , co świadczy o tym, że uzyskaliśmy dobre dopasowanie danych. Punkty układają się na lub bardzo blisko linii prostej  $y = 3,913x$ , co widać to także na powyższym wykresie.

### 5.11 Wartość przyspieszenia ziemskiego z otrzymanej wartości współczynnika nachylenia $a = \frac{4\pi^2}{g}$

Przekształcając wzór do postaci:

$$g = \frac{4\pi^2}{a}$$

oraz podstawiając współczynnik kierunkowy  $a$  wyliczony w poprzednim podpunkcie otrzymujemy:

$$g \approx \frac{4\pi^2}{3,912982 \frac{s^2}{m}} \approx 10,089088 \frac{m}{s^2}$$

### 5.12 Niepewność $u(g)$ na podstawie uzyskanej z dopasowania niepewności $u(a)$

Wyprowadzając wzór i podstawiając otrzymane wcześniej wartości  $a$  oraz  $u(a)$  otrzymujemy:

$$u(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial a} u(a)\right]^2} = \left|\frac{\partial g}{\partial a} u(a)\right| = \left|\frac{\partial \frac{4\pi^2}{a}}{\partial a} u(a)\right| = \left|\frac{-4\pi^2}{a^2} u(a)\right|$$

$$u(g) \approx \left| \frac{-4\pi^2}{\left(3,913 \frac{s^2}{m}\right)^2} 0,048 \frac{s^2}{m} \right| \approx 0,12 \frac{m}{s^2}$$

Wyliczoną wartość  $g$  możemy zapisać uwzględniając teraz niepewność  $u(g)$  na podstawie uzyskanej z dopasowania niepewności  $u(a)$ :

$$g = 10,10(12) \frac{m}{s^2}$$

### 5.13 Porównanie z wartością tabelaryczną

Wartość zmierzona  $g_z$ :

$$g_z = 10,10 \frac{m}{s^2}$$

Wartość tabelaryczna  $g$ :

$$g = 9,811 \frac{m}{s^2}$$

$$|g - g_z| = 0,289 \frac{m}{s^2} > 0,12 \frac{m}{s^2}$$

Wartość zmierzona nie mieści się w granicach niepewności  $u(g)$  na podstawie uzyskanej z dopasowania niepewności  $u(a)$ .

## 6 Wnioski

- Otrzymane wartości nie zgadzają się z wartościami tabelarycznymi i nie mieszczą się również w zakresie niepewności. Przyczyną błędu mogą być niewystarczająco dokładne przyrządy pomiarowe, niewykryty wcześniej błąd systematyczny np. związany z uruchamianiem i zatrzymywaniem stopera lub zbyt duża amplituda z jaką wahał się ciężarek.
- Różnica otrzymanego przez nas przyspieszenia i standardowego przyspieszenia dla Krakowa  $g = 9,811 \frac{m}{s^2}$  nie jest jednak tak wielka, więc można stwierdzić, że błędu grubego nie popełniono.
- Wraz z wydłużeniem nici, na której zawieszony jest ciężarek rośnie też okres wahadła. Tak jak zostało to przedstawione na wykresie w podpunkcie 5.8, zależność kwadratu okresu od długości wahadła jest zależnością proporcjonalną.