

EAIiB Informatyka	Ewa Stachów Weronika Olcha	Rok II	Grupa 3	Zespół 6
Pracownia FIZYCZNA WFilS AGH	Temat: <b>Wahadło fizyczne</b>			Nr ćwiczenia: 1
Data wykonania: 14.10.2016	Data oddania: 19.10.2016	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:
OCENA:				

## Ćwiczenie nr 1: Wahadło fizyczne

### 1 Cel ćwiczenia

Opis ruchu drgającego, a w szczególności drgań wahadła fizycznego. Wyznaczenie momentów bezwładności brył sztywnych.

### 2 Wstęp teoretyczny

Moment bezwładności punktu materialnego o masie  $m$  obracającego się wokół osi  $O$  w odległości  $r$  definiujemy jako:

$$I = mr^2$$

Bryłę sztywną można traktować jako ciągły zbiór punktów materialnych o różnych odległościach od osi obrotu. Wobec powyższego moment bezwładności wyraża się następująco:

$$I = \int r^2 dm$$

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna o masie  $m$  zawieszona w punkcie  $O$  różnym od środka ciężkości. Wahadło odchylone od pionu o kąt  $\theta$ , a następnie puszczane swobodnie będzie wykonywać pod wpływem momentu siły ciężkości drgania zwane ruchem wahadłowym. Moment tej siły dla wychylenia  $\theta$  jest równy  $mga \sin \theta$ . Ruch ten opisuje II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, zgodnie z którą iloczyn momentu bezwładności  $I$  i przyspieszenia kąowego  $\varepsilon$  jest równy działającemu momentowi siły, czyli:

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga \sin \theta$$

Siła  $mgsin\theta$  jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia – stąd znak minus we wzorze. Jeżeli rozpatrujemy ruch dla małych kątów wychylenia, to sinus kąta można zastąpić samym kątem w mierze łukowej, ponieważ  $\sin \theta \approx \theta$ . Zatem powyższe równanie przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga\theta}{I_o} = 0,$$

jest to równanie ruchu harmonicznego z okresem:

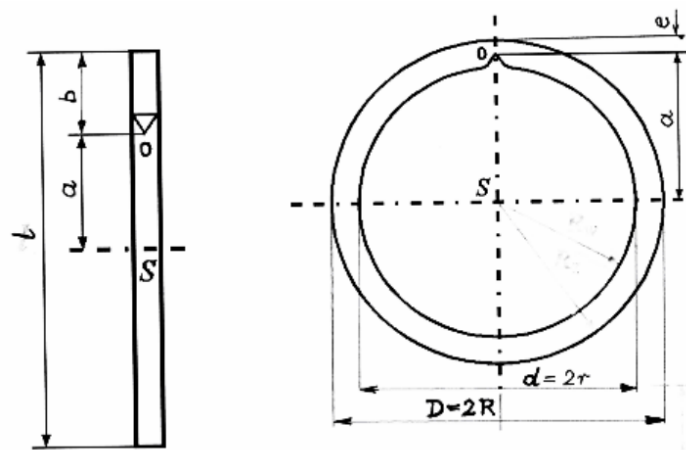
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mga}}$$

**Twierdzenie Steinera** mówi, że jeśli znamy moment bezwładności  $I_S$  danego ciała względem pewnej osi przechodzącej przez środek masy tego ciała, to aby obliczyć moment bezwładności  $I_0$  względem dowolnej innej osi równoległej do niej, należy do momentu  $I_S$  dodać iloczyn masy ciała i kwadratu odległości  $a$  między tymi osiami:

$$I_0 = I_S + ma^2$$

### 3 Układ pomiarowy

- Statyw, na którym zawieszają się badaną bryłę
- Badane bryły: pręt, pierścień
- Metalowy przymiar milimetrowy
- Suwmiarka
- Waga elektroniczna
- Sekundomierz



Rysunek 1: Pręt i pierścień używane w ćwiczeniu.

### 4 Wykonanie ćwiczenia

Na początku ustalamy masę oraz określamy długości pręta i pierścienia, tak jak pokazano na Rysunku 1 (małe długości mierzymy suwmiarką). Umieszczamy pręt na statywie, wprowadzamy go w ruch drgający o amplitudzie nieprzekraczającej trzech stopni i mierzymy czas trzydziestu drgań. Pomiar ten powtarzamy dziesięciokrotnie. Analogicznie postępujemy z pierścieniem.

### 5 Opracowanie wyników pomiarów

Tablica 1: Pomiar masy i długości pręta.

	wartość	niepewność
$m[g]$	663	0,1
$l[mm]$	750	1
$b[mm]$	100	1
$a[mm]$	275	1

**Tablica 2: Pomiar masy i długości pierścienia.**

	wartość	niepewność
$m[g]$	1360	0,1
$D_W[mm]$	255,6	0,1
$D_Z[mm]$	280,4	0,1
$R_W[mm]$	127,8	0,1
$R_Z[mm]$	140,2	0,1
$e[mm]$	7,6	0,1
$a[mm]$	132,6	0,1

**Tablica 3: Pomiar okresu drgań dla pręta.**

Lp.	liczba okresów $k$	czas $t$ dla $k$ okresów w [s]	okres $T_i = t/k$ w [s]
1	20	26,47	1,3235
2	20	26,84	1,342
3	20	26,68	1,334
4	20	26,69	1,3345
5	20	26,78	1,339
6	20	26,75	1,3375
7	20	26,75	1,3375
8	20	26,87	1,3435
9	20	26,54	1,327
10	20	26,78	1,339
Wartość średnia okresu: $\bar{T} = 1,33575$			
Niepewność: $u(T) \approx 0,0020$			

**Tablica 4: Pomiar okresu drgań dla pierścienia.**

Lp.	liczba okresów $k$	czas $t$ dla $k$ okresów w [s]	okres $T_i = t/k$ w [s]
1	20	20,72	1,036
2	20	20,79	1,0395
3	20	20,75	1,0375
4	20	20,72	1,036
5	20	20,69	1,0345
6	20	20,71	1,0355
7	20	20,69	1,0345
8	20	20,69	1,0345
9	20	20,62	1,031
10	20	20,82	1,041
Wartość średnia okresu: $\bar{T} = 1,036s$			
Niepewność: $u(T) \approx 0,00089s$			

### 5.1 Moment bezwładności $I_0$ względem rzeczywistej osi obrotu korzystając z wzoru na okres drgań

Wzór na okres drgań wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

Przekształcając odpowiednio powyższe równanie otrzymujemy wzór na moment bezwładności:

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2},$$

gdzie  $m$  – masa bryły,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $T$  – okres drgań,  $a$  – odległość środka masy od osi obrotu.

**Momement bezwładności  $I_0$  dla pręta:**

$$I_0 = \frac{0,663kg \cdot 9,811 \frac{m}{s^2} \cdot 0,275m \cdot (1,33575s)^2}{4\pi^2} \approx 0,08084kg \cdot m^2$$

**Momement bezwładności  $I_0$  dla pierścienia:**

$$I_0 = \frac{1,36kg \cdot 9,811 \frac{m}{s^2} \cdot 0,1326m \cdot (1,036s)^2}{4\pi^2} \approx 0,048096 kg \cdot m^2$$

### 5.2 Moment bezwładności $I_S$ względem osi przechodzącej przez środek masy korzystając z twierdzenia Steinera

Twierdzenie Steinera stosuje się do obliczania momentu bezwładności bryły względem osi przesuniętej równolegle o długość  $a$ , gdzie  $I_S$  to moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy bryły.

$$I_0 = I_S + ma^2$$

$$I_S = I_0 - ma^2$$

**Momement bezwładności  $I_S$  dla pręta:**

$$I_S = 0,080836kg \cdot m^2 - 0,663kg \cdot (0,275m)^2 \approx 0,03070 kg \cdot m^2$$

**Momement bezwładności  $I_S$  dla pierścienia:**

$$I_S = 0,048096kg \cdot m^2 - 1,36kg \cdot (0,1326m)^2 \approx 0,02418 kg \cdot m^2$$

### 5.3 Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy $I_S^{(geom)}$ na podstawie masy i wymiarów geometrycznych

Moment bezwładności większości regularnych brył można zapisać w postaci:

$$I_S^{(geom)} = k \cdot m \cdot l,$$

gdzie  $m$  – masa bryły,  $l$  – charakterystyczny wymiar bryły (np. długość, promień),  $k$  – bezwymiarowy współczynnik zależny tylko od kształtu bryły i wyboru charakterystycznego wymiaru (np. promień czy średnica), a niezależny od wielkości bryły.

**Momement bezładności  $I_S^{(geom)}$  dla pręta:**

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12} \cdot 0,663kg \cdot (0,75m)^2 \approx 0,031078kg \cdot m^2$$

**Momement bezładności  $I_S^{(geom)}$  dla pierścienia:**

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}m(R^2 + r^2)$$

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12} \cdot 1,36kg \cdot ((0,1402m)^2 + (0,1278m)^2) \approx 0,024472kg \cdot m^2$$

## 5.4 Niepewności mierzonych wielkości

### 5.4.1 Niepewność pomiaru okresu – niepewność typu A

Wzór na niepewność pomiaru  $u(T)$ :

$$u(T) = \frac{\sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}},$$

gdzie  $n$  – liczba pomiarów,  $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum T_i$  – średni czas trwania okresu.

**Niepewność pomiaru okresu dla pręta:**

$$\bar{T} = 1,33575s$$

$$u(T) = \sqrt{\frac{(1,3235s - 1,33575s)^2 + \dots + (1,339s - 1,33575s)^2}{10(10-1)}} \approx 0,0020s$$

**Niepewność pomiaru okresu dla pierścienia:**

$$\bar{T} = 1,036s$$

$$u(T) = \sqrt{\frac{(1,036s - 1,036s)^2 + \dots + (1,041s - 1,036s)^2}{10(10-1)}} \approx 0,00089s$$

### 5.4.2 Niepewność pomiaru masy

Do określenia masy pręta i pierścienia posłużyła nam waga cyfrowa o dokładności  $0,001kg$ , więc  $u(m) = 1g$ .

### 5.4.3 Niepewność pomiaru wymiarów geometrycznych

W pomiarze pręta przyjmujemy niepewność równą działce elementarnej linijki  $u(l) = 1mm$ ,  $u(a) = 1mm$ ,  $u(b) = 1mm$ . Wszystkie wartości długości związanych z pierścieniem były mierzone za pomocą suwmiarki, której dokładność wynosiła  $0,1mm$ , zatem  $u(D_W) = 0,1mm$ ,  $u(D_Z) = 0,1mm$ ,  $u(R_W) = 0,1mm$ ,  $u(R_Z) = 0,1mm$ ,  $u(e) = 0,1mm$ ,  $u(a) = 0,1mm$ .

### 5.5 Niepewność złożona momentu bezwładności $I_0$

Wzór z którego korzystamy:

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2}$$

**Niepewność złożona momentu bezwładności  $I_0$  dla pręta:**

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{0,663}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{0,275}\right)^2 + \left(2\frac{0,0020}{1,33575}\right)^2} \approx 0,0049$$

$$u(I_0) \approx 0,00040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Niepewność złożona momentu bezwładności  $I_0$  dla pierścienia:**

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,36}\right)^2 + \left(\frac{0,0001}{0,1326}\right)^2 + \left(2\frac{0,00089}{1,036}\right)^2} \approx 0,0020$$

$$u(I_0) \approx 0,000097 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 5.6 Niepewność złożona momentu bezwładności $I_S$

Wzór z którego korzystamy:

$$u(I_S) = \sqrt{(u(I_0))^2 + (a^2 u(m))^2 + (-2am u(m))^2}$$

**Niepewność złożona momentu bezwładności  $I_S$  dla pręta:**

$$u(I_S) = \sqrt{(0,00040)^2 + (0,275^2 \cdot 0,001)^2 + (-2 \cdot 0,275 \cdot 0,663 \cdot 0,001)^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$u(I_S) \approx 0,00055 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Niepewność złożona momentu bezwładności  $I_S$  dla pierścienia:**

$$u(I_S) = \sqrt{(0,000097)^2 + (0,1326^2 \cdot 0,001)^2 + (-2 \cdot 0,1326 \cdot 1,36 \cdot 0,001)^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$u(I_S) \approx 0,00037 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 5.7 Niepewność $u_c(I_S^{(geom)})$

**Niepewność  $u_c(I_S^{(geom)})$  dla pręta:**

$$u(I_S^{(geom)}) = \sqrt{\left(\frac{l^2}{12} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{2lm}{12} \cdot u(l)\right)^2}$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,000095 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Niepewność  $u_c(I_S^{(geom)})$  dla pierścienia:**

$$u(I_S^{(geom)}) = \sqrt{\left(\frac{R_z^2 + R_w^2}{2} \cdot u(m)\right)^2 + (mR_z \cdot u(R_z))^2 + (mR_w \cdot u(R_w))^2}$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,000058 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Tablica 5: Wyniki obliczeń momentu bezwładności dla pręta.**

	$I_0$ wyznaczone z okresu drgań [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_S$ wyznaczone z twierdzenia Steinera [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_S$ wyznaczone z pomiarów geometrycznych [kg · m <sup>2</sup> ]
wartość	0,08084(40)	0,03070(55)	0,031078(95)
niepewność	0,00040	0,00055	0,000095

**Tablica 6: Wyniki obliczeń momentu bezwładności dla pierścienia.**

	$I_0$ wyznaczone z okresu drgań [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_S$ wyznaczone z twierdzenia Steinera [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_S$ wyznaczone z pomiarów geometrycznych [kg · m <sup>2</sup> ]
wartość	0,048096(97)	0,02418(37)	0,024472(58)
niepewność	0,000097	0,00037	0,000058

## 5.8 Porównanie metod wyznaczenia momentu bezwładności

Na podstawie wartości z tabel 5 i 6 można stwierdzić, że dokładniejsze wartości momentu bezwładności uzyskuje się poprzez pomiary wymiarów geometrycznych, ponieważ niepewności pomiarów są mniejsze.

## 5.9 Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej

Aby wyniki były zgodne w granicach niepewności rozszerzonej to  $|I_s - I_{geom}| < U(I_s - I_{geom})$ .

$$U(I_s - I_{geom}) = k \cdot \sqrt{(u(I_s))^2 + u(I_{geom})^2},$$

gdzie współczynnik rozszerzalności  $k = 2$ .

**Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej dla pręta:**

$$U(I_s - I_{geom}) \approx 0,0011 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$|I_s - I_{geom}| \approx 0,00038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Wyniki pomiarów uznajemy za zgodne ze sobą, ponieważ:

$$0,00038 < 0,0011$$

$$|I_s - I_{geom}| < U(I_s - I_{geom})$$

**Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej dla pierścienia:**

$$U(I_s - I_{geom}) \approx 0,00075 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$|I_s - I_{geom}| \approx 0,00029 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Wyniki pomiarów uznajemy za zgodne ze sobą, ponieważ:

$$0,00029 < 0,00075$$

$$|I_s - I_{geom}| < U(I_s - I_{geom})$$

## 6 Wnioski

- Doświadczenie zostało przeprowadzone prawidłowo, wyniki pomiarów mieszczą się w granicach niepewności rozszerzonej zarówno dla pręta, jak i dla pierścienia.
- Dokładniejszym sposobem wyznaczania momentu bezwładności bryły jest skorzystanie z zależności geometrycznych zamiast z twierdzenia Steinera.
- Twierdzenie Steinera pozwala nam obliczyć momenty bezwładności wobec osi których nie możemy wyliczyć doświadczalnie.