Case 3

Efter analyse i opg 1 ved vi følgende: $f\_hyl := 785\ Hz$ $\quad fs := 48000\ Hz$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{f\_hyl}{fs}\right)$$

Vi ved, da vi gerne vil lave et notch filter, at nulpunktet ved den frekvens/vinkelfrekvens vi gerne vil fjerne/dæmpe skal have længden 1 og polen skal ligge relativt tæt på, så vi ikke dæmper de nærliggende frekvenser for meget.

Komplekse tal for nulpunkt: $Z_n = e^{1j \cdot \omega}$ $\quad \overline{Z_n} = e^{-1j \cdot \omega}$

Komplekse tal for pol: $Z_p = r \cdot e^{1j \cdot \omega}$ $\quad \overline{Z_p} = r \cdot e^{-1j \cdot \omega}$

Overføringsfunktionen for 2. ordens notch filter ser således ud:

$$H(z) = \frac{(z - Z_n) \cdot (z - \overline{Z_n})}{(z - Z_p) \cdot (z - \overline{Z_p})} = \frac{(z - e^{1j \cdot \omega}) \cdot (z - e^{-1j \cdot \omega})}{(z - r \cdot e^{1j \cdot \omega}) \cdot (z - r \cdot e^{-1j \cdot \omega})}$$

Ganger ind i parentes og sætter uden for parentes -->

$$\frac{z^2 - z \cdot (e^{1j \cdot \omega} + e^{-1j \cdot \omega}) + 1}{z^2 - r \cdot z \cdot (e^{1j \cdot \omega} + e^{-1j \cdot \omega}) + r^2}$$

vi ved at: $e^{1j \cdot \omega} = cos(\omega) + 1j \cdot sin(\omega)$ og får derfor -->

$$\frac{z^2 - z \cdot 2 \cdot cos(\omega) + 1}{z^2 - r \cdot z \cdot 2 \cdot cos(\omega) + r^2}$$

ganger med $\frac{z^{-2}}{z^{-2}}$ -->

$$\frac{1 - 2 \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \cdot r \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

Vi har hermed:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2 \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \cdot r \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

Vi kan også opstille vores overføringsfunktion på følgende måde:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

hvor

$b_0 := 1 \quad b_1 := -2 \cdot \cos(\omega) \quad b_2 := 1$

$a_0 := 1 \quad a_1 := -2 \cdot r \cdot cos(\omega) \quad a_2 := r^2$

For at finde differensligningen kan vi gøre følgende:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2 \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \cdot r \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

-->

$$Y(z) = \frac{X(z) - 2 \cdot X(z) \cdot \cos(\omega) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot r \cdot \cos(\omega) \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

$$Y(z) - 2 \cdot Y(z) \cdot r \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + Y(z) \cdot r^2 \cdot z^{-2} = X(z) - 2 \cdot X(z) \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2}$$

$$Y(z) = X(z) - 2 \cdot X(z) \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2} + 2 \cdot Y(z) \cdot r \cdot cos(\omega) \cdot z^{-1} - Y(z) \cdot r^2 \cdot z^{-2}$$

Invers z-transformation:

$$y(n) = x(n) - 2 \cdot \cos(\omega) \cdot x(n-1) + x(n-2) + 2 \cdot r \cdot \cos(\omega) \cdot y(n-1) - r^2 \cdot y(n-2)$$

$r := 0.9$ $\qquad \omega := 2 \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{f\_hyl}{fs}\right)$

$$y(n) := x(n) - 2 \cdot \cos(\omega) \cdot x(n-1) + x(n-2) + 2 \cdot r \cdot \cos(\omega) \cdot y(n-1) - r^2 \cdot y(n-2) \rightarrow 1.7905053947354851$$