TUM Analysis für Informatik [MA0902], WiSe 2022/2023

Mitschriften basierend auf der Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles

Zuletzt aktualisiert: 6. Dezember 2022

Introduction

About

Hier sind die wichtigsten Konzepte / Formeln der Analysis Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles im Wintersemester 2022/2023 zusammengefasst.

Die erstellten Notizen sind stark an den Vorlesungsfolien von Prof. Dr. Silke Rolles orientiert.

Die Mitschriften selbst sind in Markdown geschrieben und werden mithilfe einer GitHub-Action nach jedem Push mithilfe von Pandoc zu einem PDF konvertiert.

Eine stets aktuelle Version der PDFs kann über https://github.com/ManuelLerchner/analysis/releases/download/Release/merge.pdf heruntergeladen werden.

How to Contribute

1. Fork this Repository
2. Commit and push your changes to **your** forked repository
3. Open a Pull Request to this repository
4. Wait until the changes are merged

Contributors



Inhaltsverzeichnis

1. Reelle Zahlen

1.1 Zahlenmengen

Definition Abzählbarkeit

A ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt. ($f : \mathbb{N} \to A$)

- Mit anderen Worten: A kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (Alle Brüche können "schlangenartig" durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

Anordnung von Körpern

Der Körper $\mathbb{R}$ ist angeordnet da:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt entweder:
   - $a = 0$ oder
   - $a > 0$ oder
   - $a < 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt:
   - $a + b > 0$ und
   - $a \cdot b > 0$

Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ dann muss entweder:
  - $a > 0$, und laut definition von Anordnung auch $a \cdot a > 0$ oder
  - $-a > 0$, und somit auch $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall $a^2 > 0$
  - Sei $a = i$ dann gilt $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Beschränktheit

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, falls sein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall s \in M$ gilt: $s \leq s_0$

- Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M

Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke, diese heißt $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge M auch selbst in M liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von M bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

$\mathbb{R}$ ist archimedisch

$\forall a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$

Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $a < r < b$

1.3 Wichtige Ungleichungen

Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
- "Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren"

2. Folgen

2.0 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$

Rechenregeln Grenzwerte:

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2.1 Konvergenz

Definition Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach $a \in \mathbb{C}$ falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

Definition Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

Teilfolgen

- Sollte es eine Teilfolge geben, die nicht konvergiert, dann ist die gesamte Folge nicht konvergent

Asymptotische Äquivalenz

Falls $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ mit $a, b \neq 0$ dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls $a_n \simeq b_n$ dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

Einschließungsregel

Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n dann gilt:

- Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

2.2 Monotone Folgen

Definition

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Hilfreiche Formeln

Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Endliche Geometrische Summe

- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. Reihen

3.1 Definition

Definition

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Reihe für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
- Hierbei ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls s_n konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

Hilfreiche Reihen

Harmonische Reihe

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- s_n divergiert nach ∞

Geometrische Reihe

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$
- s_n divergiert nach ∞ falls $|q| \geq 1$ und konvergiert nach $\frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

Teleskopreihe

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
- s_n konvergiert gegen 1

3.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Damit s_n konvergieren kann muss $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten.

Majorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann ist a_n konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist auch s_n konvergent.

Minorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und a_n divergiert, dann ist auch b_n divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch s_n divergent.

Quotientenkriterium

Sei $q = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

- Falls $q < 1$, dann ist konvergiert die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Für $q > 1$ divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}$
- $q = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da $q < 1$, ist s_n konvergent.

Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\not 0}}$ monoton fallend mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da $a_k = \frac{1}{2^k}$ monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist s_n konvergent.

3.3 Wert einer Reihe

Wert einer Reihe

Die Summe einer Reihe ist der Grenzwert der Partialsummen.

Beispiele für konvergente Reihen:

- $\lim\limits_{n\downarrow 0} x^a =$
  - 0 falls $a > 0$
  - 1 falls $a = 0$
  - ∞ falls $a < 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x^a =$
  - 0 falls $a < 0$
  - 1 falls $a = 0$
  - ∞ falls $a > 0$
- $\lim\limits_{x\downarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(x) = 0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

3.4 Rechenregeln Reihen

Addition von Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **konvergente** Reihen. Dann folgt, dass auch die Summe der Beiden Reihen konvergiert:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Multiplikation mit einer Konstanten

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe ist, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Addition von konvergenten und divergenten Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe. Dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$.

Divergenz des Kehrwertes

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$.

Umordnungssatz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Multiplikation von Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$ (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

3.5 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

- $\exp(w + z) = \exp(w) + \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \ \forall z \in \mathbb{C}$

4. Stetigkeit

4.1 Definition

Definition Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}$ ist stetig im Punkt x falls:

- Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$
- Man schreibt auch:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist eine Funktion in allen Punkten $x \in \mathbb{D}$ stetig, nennt man sie auch *stetig*.

Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Um die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zu prüfen zeige, dass:

- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Beispiel: $f(x) = |x|$

- $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x_n - x_0|$
  - Für $x_n \to x_0$ gilt $|x_n - x_0| \to 0$
  - $\implies f$ ist stetig

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$, falls alle Komponenten der Folge gegen die entsprechenden Komponenten von x konvergieren.

Beispiel:

- $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$
- Die Folge konvergiert gegen den Punkt $(1, 0)$ da die Komponenten gegen 1 bzw. 0 konvergieren

Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion e^x ist in $\mathbb{C}$ stetig.

Komposition stetiger Funktionen

Seien $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ und $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^\ell$ stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f$ stetig.

Beispiele für stetige Funktionen:

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = x \cdot y$

- $f(x, y) = \frac{x}{y}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Damit sind auch Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

- Somit sind insbesondere auch Polynome stetig
- Rationalen Funktionen mit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit p und q Polynomen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig

4.2 Zwischenwertsatz

Falls eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$ ist, dann nimmt sie jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel:

- Hat $f(x) = \cos(x) - x$ eine Nullstelle auf $[0, \pi/2]$?
  - $f(0) = 1$ und $f(\pi/2) = -\pi/2$
  - Da die Funktion stetig ist, nimmt sie auf $[0, \pi/2]$ jeden Wert zwischen 1 und $-\pi/2$ an. Somit $\exists x \in [0, \pi/2]$ mit $f(x) = 0$

4.3 Häufungspunkte

Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Dann heißt a^* ein *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls es eine Teilfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a^*$ gibt

Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist der Häufungspunkt der Folge gleich dem Grenzwert.

Beispiel:

- $a_n = (-1)^n$
- Diese Folge hat die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ welche jeweils konstant 1 bzw -1 sind.
  - Somit hat die Folge a_n den Häufungspunkt 1 und -1

Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge und somit auch mindestens einen Häufungspunkt.

Diese Aussage lässt sich auch auf $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ übertragen. Dabei heißt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^d$ beschränkt, falls:

- $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ ||x_n||_2 \leq M$.

4.4 Existenz von Maxima und Minima

Ein Punkt $x \in D$ heißt:

- Minimumstellen von f falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in D$
- Maximumstellen von f falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in D$

Nicht jede Funktion hat ein Maximum bzw. Minimum (z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$)

Abgeschlossenheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt abgeschlossen, falls der Grenzwert jeder Konvergenten Folgen aus A wieder in A liegt.

- $x_n \in A\ \forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in A$

Beschränktheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, falls es eine positive Zahl M gibt, sodass für alle $x \in A$ $|x| \leq M$ gilt.

Kompaktheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel: $[0, 1]$

- $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, da für alle $0 \leq x_n \leq 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ gilt, dass $x \in [0, 1]$
- Diese Menge ist auch beschränkt, da z.B. $|x| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$
  - Somit ist $[0, 1]$ kompakt

Beispiel: $[0, 1)$

- Diese Menge ist nicht abgeschlossen, da z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ und $1 \notin [0, 1)$
- Somit ist diese Menge auch nicht kompakt.

Jede kompakte Menge $K \in \mathbb{R}$ $K \neq \emptyset$ ist beschränkt und besitzt somit auch ein Maximum und ein Minimum.

Wenn $K \in \mathbb{R}^d$ kompakt ist $\iff$ Jede Folge aus K besitzt eine Konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K.

Wenn $f : K \to \mathbb{R}$ stetig ist und K kompakt ist, dann ist auch $f(K)$ bzw. das Bild von f kompakt.

- Somit ist insbesondere auch $f([a, b])$ kompakt, falls f stetig ist. Somit besitzt $f([a, b])$ auch ein Maximum und ein Minimum.$$

Satz von Maximum und Minimum

Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum in K. falls K kompakt ist.

Somit exisiteren $\underline{x}, \overline{x} \in K$ mit $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$ für alle $x \in K$.

- $\underline{x} = \arg\min_{x \in K} f(x)$ bzw. $f(\underline{x}) = \min_{x \in K} f(x)$
- $\overline{x} = \arg\max_{x \in K} f(x)$ bzw. $f(\overline{x}) = \max_{x \in K} f(x)$

5. Wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktion

Definition Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to B \subseteq \mathbb{R}^q$ heißt bijektiv, falls für alle $y \in B$ genau ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt.

- Man schreibt auch: $f^{-1} : B \to \mathbb{D}, y \mapsto x$

Stetigkeit von Umkehrfunktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, und streng monoton wachsende Funktion.

- Dann ist $f : I \to f(I)$ bijektiv.
- Und $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig und streng monoton wachsend.

5.2 Logarithmus

Definition Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ist definiert als:

- $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln(x)$

Er ist die Umkehrfunktion von e^x. Somit gilt auch:

- $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in (0, \infty)$
- $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$
- $\ln(x^k) = k \ln(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x > 0$

Wichige Werte:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

Asymptotisches Verhalten von *exp* und *ln*.

- Die Exponentialfunktion wächst schneller gegen unendlich als jedes Polynom: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$
- x wächst schneller gegen unendlich als jede Potenz des Logarithmus: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{(\ln x)^m} = \infty$
- Mehrfache Anwendung des Logarithmus führt zu langsamerem Wachstum: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\ln \ln x} = \infty$

Allgemeine Potenzfunktion

Definition:

- $x^a = e^{a \ln x}$

Spezialfälle:

- $\forall n \in \mathbb{N} : x^n = e^{n \ln x} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \dots e^{\ln x}(\text{n-mal}) = x \cdot x \dots x(\text{n-mal})$
- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, denn $(x^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n} \ln x})^n = e^{\ln x} = x$

Logarithmus zur Basis b:

$\forall b > 1$ und $a > 0$

$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln b}$

5.3 Trigonometrische Funktionen

Komplexe Zahlen mit Betrag 1 können in folgender Form dargestellt werden (Eulersche Formel):

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies ist äquivalent zu:

- $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Daraus können auch die Additionstheoreme für die Trigonometrischen Funktionen abgeleitet werden:

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

Außerdem wird der Tangens und die Cotangens definiert als:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ wenn $\cos x \neq 0$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ wenn $\sin x \neq 0$

Reihendarstellung der Trigonometrischen Funktionen

Die Trigonometrischen Funktionen können auch als unendliche Summen dargestellt werden:

- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Über diese Reihendarstellung lassen sich auch Grenzwerte bestimmen:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \dots = 1$

Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen sind:

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$
  - $\arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$
  - $\arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$
  - $\arctan(x) : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Differenzierbarkeit

Landau Symbole

Definition

- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ wenn:
  - $\exists \epsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x$ mit $||x - x_0|| < \epsilon \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
  - "f ist in der nähe von x_0 bis auf Konstanten asymptotisch kleiner gleich g"
- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to \infty$ wenn:
  - $\exists M > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x$ mit $x < -M \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
  - "Im unendlichen ist f bis auf Konstanten kleiner gleich g"
- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ wenn:
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
  - "f ist asymptotisch kleiner als g"

Differenzierbarkeit

$f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$, falls für eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ folgende Linearisierung gültig ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \to x_0$$

Hierbei approximiert die Tangente die Funktion für $x \to x_0$ besser als jede andere Gerade:

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Differenzierbarkeit in x_0 impliziert auch Stetigkeit in diesem Punkt.

Die Steigung der Tangente $f'(x_0)$ bezeichnet man als Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Ableitung kann durch Umformung der oben genannten Linearisierung berechnet werden:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \\ \iff &\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{(Differenzenquotient)} \end{aligned}$$

- Ist eine Funktion in jedem Punkt differenzierbar so heißt die Funktion differenzierbar.
- Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar (z.B. Betragsfunktion).

Spezielle Ableitungen

- $f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

Ableitungsregeln

(a) $(cf)'(x) = cf'(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$

(b) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ Summenregel

(c) $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ Produktregel

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ falls $g(x) \neq 0$ Quotientenregel