Inhaltsverzeichnis

1. Reelle Zahlen

1.1 Zahlenmengen

Definition Abzählbarkeit

A ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt. $(f : \mathbb{N} \to A)$

- Mit anderen Worten: A kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (Alle Brüche können "schlangenartig" durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

Anordnung von Körpern

Der Körper $\mathbb{R}$ ist angeordnet da:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt entweder:
   - $a = 0$ oder
   - $a > 0$ oder
   - $a < 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt:
   - $a + b > 0$ und
   - $a \cdot b > 0$

Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ dann muss entweder:
  - $a > 0$, und laut definition von Anordnung auch $a \cdot a > 0$ oder
  - $-a > 0$, und somit auch $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall $a^2 > 0$
  - Sei $a = i$ dann gilt $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Beschränktheit

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, falls sein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall s \in M$ gilt: $s \leq s_0$

- Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M

Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke, diese heißt $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge M auch selbst in M liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von M bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

$\mathbb{R}$ ist archimedisch

$\forall a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$

Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $a < r < b$

1.3 Wichtige Ungleichungen

Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
- "Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren"

2. Folgen

2.0 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$

Rechenregeln Grenzwerte:

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2.1 Konvergenz

Definition Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach $a \in \mathbb{C}$ falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

Definition Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

Asymptotische Äquivalenz

Falls $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ mit $a, b \neq 0$ dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls $a_n \simeq b_n$ dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

Einschließungsregel

Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n dann gilt:

- Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

2.2 Monotone Folgen

Definition

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Hilfreiche Formeln

Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Endliche Geometrische Summe

- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. Reihen

3.1 Definition

Definition

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Reihe für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
- Hierbei ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls s_n konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

Hilfreiche Reihen

Harmonische Reihe

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- s_n divergiert nach ∞

Geometrische Reihe

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$
- s_n divergiert nach ∞ falls $|q| \geq 1$ und konvergiert nach $\frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

Teleskopreihe

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
- s_n konvergiert gegen 1

3.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Damit s_n konvergieren kann muss $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten.

Majorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann ist a_n konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist auch s_n konvergent.

Minorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und a_n divergiert, dann ist auch b_n divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch s_n divergent.

Quotientenkriterium

Sei $q = \lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

- Falls $q < 1$, dann ist konvergiert die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Für $q > 1$ divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}$
- $q = \lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n \to \infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da $q < 1$, ist s_n konvergent.

Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\not{}}}$ monoton fallend mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da $a_k = \frac{1}{2^k}$ monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist s_n konvergent.

3.3 Rechenregeln Reihen

Addition von Reihen

Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ **konvergente** Reihen. Dann konvergiert auch die Summe der Reihen mit: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Umordnungssatz

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut $\iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Multiplikation von Reihen

Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$ (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$\exp(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

- $\exp(w + z) = \exp(w) + \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \ \forall z \in \mathbb{C}$

4. Stetigkeit

4.1 Definition

Definition Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}$ ist stetig im Punkt x falls:

- Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$
- Man schreibt auch:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist eine Funktion in allen Punkten $x \in \mathbb{D}$ stetig, nennt man sie auch *stetig*.

Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Um die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zu prüfen zeige, dass:

- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Beispiel: $f(x) = |x|$

- $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x_n - x_0|$
  - Für $x_n \to x_0$ gilt $|x_n - x_0| \to 0$
  - $\implies f$ ist stetig

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$, falls alle Komponenten der Folge gegen die entsprechenden Komponenten von x konvergieren.

Beispiel:

- $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$
- Die Folge konvergiert gegen den Punkt $(1, 0)$ da die Komponenten gegen 1 bzw. 0 konvergieren

Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion e^x ist in $\mathbb{C}$ stetig.

Komposition stetiger Funktionen

Seien $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ und $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{`}$ stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f$ stetig.

Beispiele für stetige Funktionen:

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = x \cdot y$

- $f(x, y) = \frac{x}{y}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Damit sind auch Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

- Somit sind insbesondere auch Polynome stetig
- Rationalen Funktionen mit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit p und q Polynomen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig

4.2 Zwischenwertsatz