Inhaltsverzeichnis

1. Reele Zahlen

1.1 Zahlenmengen

1. Definition Abzählbarkeit
   - A ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt. ($f : \mathbb{N} \to A$)
   - $\iff$ A kann durchnummeriert werden
   - Beispiele:
     - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (Alle Brüche können "schlangenartig" durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
     - $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)
2. Anordnung von Körpern
   - Der Körper $\mathbb{R}$ ist angeordnet da:
     1. $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt entweder:
        - $a = 0$ oder
        - $a > 0$ oder
        - $a < 0$
     2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt:
        - $a + b > 0$ und
        - $a \cdot b > 0$
   - Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden da:
     - Angenommen: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ dann muss entweder:
       * $a > 0$, und laut definition von Anordnung auch $a \cdot a > 0$ oder
       * $-a > 0$, und somit auch $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
     - Somit gilt in jedem Fall $a^2 > 0$
       * Sei $a = i$ dann gilt $a^2 = -1$
       * Das ist ein Widerspruch

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

1. Beschränktheit
   - Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, falls sein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall s \in M$ gilt: $s \leq s_0$
     - Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M
2. Supremumsaktiome von $\mathbb{R}$
   - Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt $\sup M \in \mathbb{R}$
   - Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke, diese heißt $\inf M \in \mathbb{R}$
   - Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge M auch selbst in M liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von M bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

3. R ist archimedisch
   - $\forall a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$
4. Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$
   - $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $a < r < b$

1.3 Wichtige Ungleichungen

1. Dreiecksungleichung
   - $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
     - $|x + y| \leq |x| + |y|$
     - $|x + y| \geq ||x| - |y||$
2. Cauchy-Schwarz ungleichung
   - $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
   - "Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren"

2. Folgen

1. Definition
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$
2. Rechenregeln Grenzwerte:
   - Falls $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt:
     - $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
     - $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
     - $lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$
     - $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2.1 Konvergenz

1. Definition Konvergenz
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zu $a \in \mathbb{C}$ falls:
     - $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$
       * Kurzschreibweise:
         · $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
         · $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$
2. Definition Divergenz
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert falls:
     - $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ falls (konvergiert uneigentlich):
     - $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ falls (konvergiert uneigentlich):
     - $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$
3. Asymptotische Equivalenz
   - Falls $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ mit $a, b \neq 0$ dann gilt:
     - $a_n \simeq b_n$ falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$
       * Außerdem: Falls $a_n \simeq b_n$ dann gilt:
         · sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
4. Beschränktheit
   - Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$
     - Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert
5. Einschließungsregel
   - Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n dann gilt:
     - Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$ dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

2.2 Monotone Folgen

1. Definition
   - Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
   - Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. Zusammenhang mit Supremum und Infimum
   - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
     - $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
   - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
     - $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$
3. Hilfreiche Formeln
   - Bernoulli'sche Ungleichung
     - $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$
   - Binomialkoeffizienten
     - $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
   - Endliche Geometrische Summe
     - $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. Reihen

3.1 Definition

1. Definition
   - Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Reihe für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
     - $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
     - Hierbei ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe.
   - Falls s_n konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.
   - Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*
2. Hilfreiche Reihen
   - Harmonische Reihe
     - $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
     - s_n divergiert nach ∞
   - Geometrische Reihe
     - $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$
     - s_n divergiert nach ∞ falls $|q| \geq 1$ und konvergiert nach $\frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$
   - Teleskopreihe
     - $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
     - s_n konvergiert gegen 1

3.2 Konvergenzkriterien

1. Notwendige Bedingung
   - s_n konvergiert $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Zusammenhang mit Beschränktheit
   - s_n konvergiert $\iff a_n$ beschränkt falls $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
3. Majorantenkriterium
   - Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann ist a_n konvergent.
4. Minorantenkriterium
   - Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und a_n divergiert, dann ist aucg b_n divergent.
5. Quotientenkriterium
   - Sei $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.
     - Falls $q < 1$, dann ist konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   - Für $q > 1$ divergiert diese.
   - Ansonsten ist keine Aussage möglich.
6. Alternierende Reihen

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\not{0}}}$ monoton fallend mit $lim_{n\to\infty}a_n = 0$ dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$
- Hergeleitet durch Einschließungsregel mit den Folgen der geraden und ungeraden Indizes

3.3 Rechenregeln

3.4 Exponentialfunktion