

TUM Analysis für Informatik [MA0902], WiSe 2022/2023

Mitschriften basierend auf der Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles

Zuletzt aktualisiert: 19. Dezember 2022

Introduction

About

Hier sind die wichtigsten Konzepte / Formeln der Analysis Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles im Wintersemester 2022/2023 zusammengefasst.

Die erstellten Notizen sind stark an den Vorlesungsfolien von Prof. Dr. Silke Rolles orientiert.

Die Mitschriften selbst sind in Markdown geschrieben und werden mithilfe einer GitHub-Action nach jedem Push mithilfe von [Pandoc](#) zu einem PDF konvertiert.

Eine stets aktuelle Version der PDFs kann über <https://github.com/ManuelLerchner/analysis/releases/download/Release/merge.pdf> heruntergeladen werden.

How to Contribute

1. Fork [this](#) Repository
2. Commit and push your changes to **your** forked repository
3. Open a Pull Request to this repository
4. Wait until the changes are merged

Contributors



Inhaltsverzeichnis

Introduction	1
About	1
How to Contribute	1
Contributors	1
1. Reelle Zahlen	4
1.1 Zahlenmengen	4
Definition Abzählbarkeit	4
Anordnung von Körpern	4
1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen	4
Beschränktheit	4
Supremumsaxiom in den reellen Zahlen	4
\mathbb{R} ist archimedisch	5
Die rationalen Zahlen liegen dicht in \mathbb{R}	5
1.3 Wichtige Ungleichungen	5
Dreiecksungleichung	5
Cauchy-Schwarz Ungleichung	5
2. Folgen	6
2.0 Definition	6
Rechenregeln Grenzwerte:	6
2.1 Konvergenz	6
Definition Konvergenz	6
Definition Divergenz	6
Asymptotische Äquivalenz	6
Beschränktheit	7
Einschließungsregel	7
2.2 Monotone Folgen	7
Definition	7
Hilfreiche Formeln	7
3. Reihen	8
3.1 Definition	8
Definition	8
Hilfreiche Reihen	8
3.2 Konvergenzkriterien	8
Notwendige Bedingung	8
Majorantenkriterium	8
Minorantenkriterium	9
Quotientenkriterium	9
Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)	9
3.3 Wert einer Reihe	9
Wert einer Reihe	9
3.4 Rechenregeln Reihen	10
Addition von Reihen	10
Multiplikation mit einer Konstanten	10
Addition von konvergenten und divergenten Reihen	10
Divergenz des Kehrwertes	10

Umordnungssatz	10
Multiplikation von Reihen	10
3.5 Eigenschaften der Exponentialfunktion	10
4. Stetigkeit	11
4.1 Definition	11
Definition Stetigkeit	11
Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$	11
Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}^d	11
Stetigkeit der Exponentialfunktion in \mathbb{C}	11
Komposition stetiger Funktionen	11
4.2 Zwischenwertsatz	12
4.3 Häufungspunkte	12
Satz von Bolzano-Weierstrass	12
4.4 Existenz von Maxima und Minima	12
Abgeschlossenheit von Mengen	12
Beschränktheit von Mengen	12
Kompaktheit von Mengen	13
Satz von Maximum und Minimum	13
5. Wichtige Funktionen	14
5.1 Umkehrfunktion	14
Definition Umkehrfunktion	14
Stetigkeit von Umkehrfunktionen	14
5.2 Logarithmus	14
Definition Logarithmus	14
Asymptotisches Verhalten von \exp und \ln	14
Allgemeine Potenzfunktion	15
5.3 Trigonometrische Funktionen	15
Reihendarstellung der Trigonometrischen Funktionen	15
Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen	15
Differenzierbarkeit	16
Landau Symbole	16
Definition	16
Differenzierbarkeit	16
Spezielle Ableitungen	16
Ableitungsregeln	17
Ableitungsregeln für Potenzen	17
Ableitungen Triigonometrischer Funktionen	17
Kettenregel	17
Ableitung der Umkehrfunktion	17
Beispiele:	17
Anwendungen der Ableitung	18
Extrema	18
Mittelwertsatz	18
Spezialfall Satz von Rolle	18
Monotonie	18
Monotoniekriterium	18
Hinreichende Kriterien für Extrema	19
Berechnung von Grenzwerten	19
Regel von L'Hospital	19

1. Reelle Zahlen

1.1 Zahlenmengen

Definition Abzählbarkeit

A ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} auf A gibt. ($f : \mathbb{N} \rightarrow A$)

- Mit anderen Worten: A kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
 - \mathbb{Q} ist abzählbar (Alle Brüche können “schlangenartig” durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
 - \mathbb{R} ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

Anordnung von Körpern

Der Körper \mathbb{R} ist angeordnet da:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt entweder:
 - $a = 0$ oder
 - $a > 0$ oder
 - $a < 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt:
 - $a + b > 0$ und
 - $a \cdot b > 0$

Der Körper \mathbb{C} kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ dann muss entweder:
 - $a > 0$, und laut definition von Anordnung auch $a \cdot a > 0$ oder
 - $-a > 0$, und somit auch $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall $a^2 > 0$
 - Sei $a = i$ dann gilt $a^2 = -1$
 - Das ist ein Widerspruch

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Beschränktheit

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, falls sein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall s \in M$ gilt: $s \leq s_0$

- Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M

Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von \mathbb{R} hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von \mathbb{R} hat eine größte untere Schranke, diese heißt $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge M auch selbst in M liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von M bezeichnet

- Konventionen:
 - $\sup M = \infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist
 - $\inf M = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist
 - $\sup \emptyset = -\infty$

\mathbb{R} ist archimedisch

$\forall a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$

Die rationalen Zahlen liegen dicht in \mathbb{R}

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $a < r < b$

1.3 Wichtige Ungleichungen

Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|\langle x, y \rangle| \leq ||x| \cdot |y||$
- “Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren”

2. Folgen

2.0 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$

Rechenregeln Grenzwerte:

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2.1 Konvergenz

Definition Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach $a \in \mathbb{C}$ falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Definition Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

Teilfolgen

- Sollte es eine Teilfolge geben, die nicht konvergiert, dann ist die gesamte Folge nicht konvergent

Asymptotische Äquivalenz

Falls $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ mit $a, b \neq 0$ dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$ falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls $a_n \simeq b_n$ dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

Einschließungsregel

Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n dann gilt:

- Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

2.2 Monotone Folgen

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
 - Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
 - * $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
 - Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
 - * $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Hilfreiche Formeln

Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Endliche Geometrische Summe

- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. Reihen

3.1 Definition

Definition

Eine Reihe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Reihe für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

- $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$
- Hierbei ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls s_n konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

Hilfreiche Reihen

Harmonische Reihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- s_n divergiert nach ∞

Geometrische Reihe

- $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$
- s_n divergiert nach ∞ falls $|q| \geq 1$ und konvergiert nach $\frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

Teleskopreihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
- s_n konvergiert gegen 1

3.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Damit s_n konvergieren kann muss $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gelten.

Majorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dann ist a_n konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist auch s_n konvergent.

Minorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und a_n divergiert, dann ist auch b_n divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch s_n divergent.

Quotientenkriterium

Sei $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

- Falls $q < 1$, dann ist konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Für $q > 1$ divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!}$
- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da $q < 1$, ist s_n konvergent.

Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da $a_k = \frac{1}{2^k}$ monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist s_n konvergent.

3.3 Wert einer Reihe

Wert einer Reihe

Die Summe einer Reihe ist der Grenzwert der Partialsummen.

Beispiele für konvergente Reihen:

- $\lim_{n \downarrow 0} x^a =$
 - 0 falls $a > 0$
 - 1 falls $a = 0$
 - ∞ falls $a < 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x^a =$
 - 0 falls $a < 0$
 - 1 falls $a = 0$
 - ∞ falls $a > 0$
- $\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

3.4 Rechenregeln Reihen

Addition von Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **konvergente** Reihen. Dann folgt, dass auch die Summe der Beiden Reihen konvergiert:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$

Multiplikation mit einer Konstanten

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe ist, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Addition von konvergenten und divergenten Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe. Dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k).$

Divergenz des Kehrwertes

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$

Umordnungssatz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Multiplikation von Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$ (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

3.5 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

4. Stetigkeit

4.1 Definition

Definition Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit Definitionsbereich \mathbb{D} ist stetig im Punkt x falls:

- Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{D} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt:

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

- Man schreibt auch:

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ist eine Funktion in allen Punkten $x \in \mathbb{D}$ stetig, nennt man sie auch *stetig*.

Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Um die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zu prüfen zeige, dass:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Beispiel: $f(x) = |x|$

- $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x_n - x_0|$
 - Für $x_n \rightarrow x_0$ gilt $|x_n - x_0| \rightarrow 0$
 - $\implies f$ ist stetig

Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}^d

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d konvergiert gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$, falls alle Komponenten der Folge gegen die entsprechenden Komponenten von x konvergieren.

Beispiel:

- $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$
- Die Folge konvergiert gegen den Punkt $(1, 0)$ da die Komponenten gegen 1 bzw. 0 konvergieren

Stetigkeit der Exponentialfunktion in \mathbb{C}

Die Exponentialfunktion e^x ist in \mathbb{C} stetig.

Komposition stetiger Funktionen

Seien $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ und $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f$ stetig.

Beispiele für stetige Funktionen:

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = x \cdot y$

- $f(x, y) = \frac{x}{y}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Damit sind auch Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

- Somit sind insbesondere auch Polynome stetig
- Rationalen Funktionen mit $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit p und q Polynomen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig

4.2 Zwischenwertsatz

Falls eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$ ist, dann nimmt sie jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel:

- Hat $f(x) = \cos(x) - x$ eine Nullstelle auf $[0, \pi/2]$?
 - $f(0) = 1$ und $f(\pi/2) = -\pi/2$
 - Da die Funktion stetig ist, nimmt sie auf $[0, \pi/2]$ jeden Wert zwischen 1 und $-\pi/2$ an. Somit $\exists x \in [0, \pi/2]$ mit $f(x) = 0$

4.3 Häufungspunkte

Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Dann heißt a^* ein *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es eine Teilfolge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a^*$ gibt

Falls die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist der Häufungspunkt der Folge gleich dem Grenzwert.

Beispiel:

- $a_n = (-1)^n$
- Diese Folge hat die Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ welche jeweils konstant 1 bzw -1 sind.
 - Somit hat die Folge a_n den Häufungspunkt 1 und -1

Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge und somit auch mindestens einen Häufungspunkt.

Diese Aussage lässt sich auch auf \mathbb{R}^d mit $d \geq 2$ übertragen. Dabei heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^d$ beschränkt, falls:

- $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \ ||x_n||_2 \leq M.$

4.4 Existenz von Maxima und Minima

Ein Punkt $x \in D$ heißt:

- Minimumstellen von f falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in D$
- Maximumstellen von f falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in D$

Nicht jede Funktion hat ein Maximum bzw. Minimum (z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$)

Abgeschlossenheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt abgeschlossen, falls der Grenzwert jeder Konvergenten Folgen aus A wieder in A liegt.

- $x_n \in A \forall n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in A$

Beschränktheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, falls es eine positive Zahl M gibt, sodass für alle $x \in A$ $|x| \leq M$ gilt.

Kompaktheit von Mengen

Eine Menge $A \in \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel: $[0, 1]$

- $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, da für alle $0 \leq x_n \leq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt, dass $x \in [0, 1]$
- Diese Menge ist auch beschränkt, da z.B. $|x| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$
 - Somit ist $[0, 1]$ kompakt

Beispiel: $[0, 1)$

- Diese Menge ist nicht abgeschlossen, da z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ und $1 \notin [0, 1)$
- Somit ist diese Menge auch nicht kompakt.

Jede kompakte Menge $K \in \mathbb{R}$ $K \neq \emptyset$ ist beschränkt und besitzt somit auch ein Maximum und ein Minimum.

Wenn $K \in \mathbb{R}^d$ kompakt ist \iff Jede Folge aus K besitzt eine Konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K .

Wenn $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und K kompakt ist, dann ist auch $f(K)$ bzw. das Bild von f kompakt.

- Somit ist insbesondere auch $f([a, b])$ kompakt, falls f stetig ist. Somit besitzt $f([a, b])$ auch ein Maximum und ein Minimum. \$\$

Satz von Maximum und Minimum

Jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum in K , falls K kompakt ist.

Somit existieren $\underline{x}, \bar{x} \in K$ mit $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$ für alle $x \in K$.

- $\underline{x} = \arg \min_{x \in K} f(x)$ bzw. $f(\underline{x}) = \min_{x \in K} f(x)$
- $\bar{x} = \arg \max_{x \in K} f(x)$ bzw. $f(\bar{x}) = \max_{x \in K} f(x)$

5. Wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktion

Definition Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^q$ heißt bijektiv, falls für alle $y \in B$ genau ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt.

- Man schreibt auch: $f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{D}, y \mapsto x$

Stetigkeit von Umkehrfunktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, und streng monoton wachsende Funktion.

- Dann ist $f : I \rightarrow f(I)$ bijektiv.
- Und $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ stetig und streng monoton wachsend.

5.2 Logarithmus

Definition Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ist definiert als:

- $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln(x)$

Er ist die Umkehrfunktion von e^x . Somit gilt auch:

- $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in (0, \infty)$
- $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$
- $\ln(x^k) = k \ln(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x > 0$

Wichtige Werte:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Asymptotisches Verhalten von \exp und \ln .

- Die Exponentialfunktion wächst schneller gegen unendlich als jedes Polynom: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$
- x wächst schneller gegen unendlich als jede Potenz des Logarithmus: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\ln x)^m} = \infty$
- Mehrfache Anwendung des Logarithmus führt zu langsamerem Wachstum: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln \ln x} = \infty$

Allgemeine Potenzfunktion

Definition:

- $x^a = e^{a \ln x}$

Spezialfälle:

- $\forall n \in \mathbb{N} : x^n = e^{n \ln x} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \dots e^{\ln x} \text{ (n-mal)} = x \cdot x \dots x \text{ (n-mal)}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, denn $(x^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n} \ln x})^n = e^{\ln x} = x$

Logarithmus zur Basis b :

$$\forall b > 1 \text{ und } a > 0$$

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln b}$$

5.3 Trigonometrische Funktionen

Komplexe Zahlen mit Betrag 1 können in folgender Form dargestellt werden (Eulersche Formel):

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies ist äquivalent zu:

- $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Daraus können auch die Additionstheoreme für die Trigonometrischen Funktionen abgeleitet werden:

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

Außerdem wird der Tangens und die Cotangens definiert als:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ wenn $\cos x \neq 0$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ wenn $\sin x \neq 0$

Reihendarstellung der Trigonometrischen Funktionen

Die Trigonometrischen Funktionen können auch als unendliche Summen dargestellt werden:

- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Über diese Reihendarstellung lassen sich auch Grenzwerte bestimmen:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \dots = 1$

Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen sind:

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
– $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
– $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$
– $\arctan(x) : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Differenzierbarkeit

Landau Symbole

Definition

- $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ wenn:
 - $\exists \epsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x \text{ mit } ||x - x_0|| < \epsilon \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
 - “f ist in der Nähe von x_0 bis auf Konstanten asymptotisch kleiner gleich g”
- $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$ wenn:
 - $\exists M > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x \text{ mit } x < -M \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
 - “Im unendlichen ist f bis auf Konstanten kleiner gleich g”
- $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ wenn:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
 - “f ist asymptotisch kleiner als g”

Differenzierbarkeit

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$, falls für eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ folgende Linearisierung gültig ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

Hierbei approximiert die Tangente die Funktion für $x \rightarrow x_0$ besser als jede andere Gerade:

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Differenzierbarkeit in x_0 impliziert auch Stetigkeit in diesem Punkt.

Die Steigung der Tangente $f'(x_0)$ bezeichnet man als Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Die Ableitung kann durch Umformung der oben genannten Linearisierung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) \quad (\text{Differenzenquotient}) \end{aligned}$$

- Ist eine Funktion in jedem Punkt differenzierbar so heißt die Funktion differenzierbar.
- Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar (z.B. Betragsfunktion).

Spezielle Ableitungen

- $f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

Ableitungsregeln

- (a) $(cf)'(x) = cf'(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- (b) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ Summenregel
- (c) $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ Produktregel
- (d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ falls $g(x) \neq 0$ Quotientenregel

Ableitungsregeln für Potenzen

Ist $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

Ableitungen Triigonometrischer Funktionen

- $f(x) = \tan x \longrightarrow f'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $f(x) = \cot x \longrightarrow f'(x) = -1 - \cot(x)^2 = \frac{1}{\sin(x)^2}$

Kettenregel

- $f(x) = g(h(x)) \longrightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Falls f bijektiv und in x differenzierbar ist.

Beispiele:

Aus der Regel für Ableitung der Umkehrfunktion folgt:

- Ableitung des Logarithmus

$$* \ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

- Ableitung von arcsin

$$* \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Ableitung von arccos

$$* \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Ableitung von arctan

$$* \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Anwendungen der Ableitung

Extrema

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat bei x_0 ein:

- globales Maximum, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$
- globales Minimum, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$
- lokales Maximum, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \cap [a, b]$
- lokales Minimum, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \cap [a, b]$

Ersetzt man \leq mit $<$ und \geq mit $>$ spricht man von strikten Maxima und Minima.

Eine Notwendige Bedingung für ein Maximum oder Minimum ist, dass die Ableitung an der Stelle x_0 gleich 0 ist.

Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz besagt, dass eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ welche auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist und auf (a, b) differenzierbar ist, ein $\xi \in (a, b)$ besitzt, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Das heißt, dass die Steigung der Tangente an der Stelle ξ gleich der Sekantensteigung zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Vergemeinerter Mittelwertsatz

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Spezialfall Satz von Rolle

Ist $f(a) = f(b)$, so besitzt f auf (a, b) eine waagerechte Tangente.

Monotonie

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf I : - monoton steigend, falls - $\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- monoton fallend, falls - $\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$ - streng monoton steigend, falls -
 $\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) < f(y)$ - streng monoton fallend, falls

Monotoniekriterium

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ differenzierbar, dann gilt:

- $f'(x) > 0 \forall x \in [a, b] \implies f$ ist streng monoton steigend
- $f'(x) < 0 \forall x \in [a, b] \implies f$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \iff f$ ist monoton steigend

- $f'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b] \iff f$ ist monoton fallend

Hinreichende Kriterien für Extrema

Eine funktion nimmt auf einem Intervall I ein - Maximum an, wenn - Die Ableitung links von x_0 stets größer gleich 0 ist und die Ableitung rechts von x_0 stets kleiner gleich 0 ist. - Minimum an, wenn - Die Ableitung links von x_0 stets kleiner gleich 0 ist und die Ableitung rechts von x_0 stets größer gleich 0 ist.

- Analog kann man ein lokales Maximum und Minimum bestimmen, wenn man nur einen kleinen Bereich um x_0 betrachtet.

Berechnung von Grenzwerten

Regel von L'Hospital

Ist $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{0, \infty\}$, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert von $f'(x)/g'(x)$ existiert.