

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Reelle Zahlen</b>	<b>1</b>
1.1 Zahlenmengen . . . . .	1
Definition Abzählbarkeit . . . . .	1
Anordnung von Körpern . . . . .	1
1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen . . . . .	1
Beschränktheit . . . . .	1
Supremumsaxiom in den reellen Zahlen . . . . .	1
$\mathbb{R}$ ist archimedisch . . . . .	2
Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$ . . . . .	2
1.3 Wichtige Ungleichungen . . . . .	2
Dreiecksungleichung . . . . .	2
Cauchy-Schwarz Ungleichung . . . . .	2
<b>2. Folgen</b>	<b>3</b>
2.0 Definition . . . . .	3
Rechenregeln Grenzwerte: . . . . .	3
2.1 Konvergenz . . . . .	3
Definition Konvergenz . . . . .	3
Definition Divergenz . . . . .	3
Asymptotische Äquivalenz . . . . .	3
Beschränktheit . . . . .	4
Einschließungsregel . . . . .	4
2.2 Monotone Folgen . . . . .	4
Definition . . . . .	4
Hilfreiche Formeln . . . . .	4
<b>3. Reihen</b>	<b>5</b>
3.1 Definition . . . . .	5
Definition . . . . .	5
Hilfreiche Reihen . . . . .	5
3.2 Konvergenzkriterien . . . . .	5
Notwendige Bedingung . . . . .	5
Majorantenkriterium . . . . .	5
Minorantenkriterium . . . . .	5
Quotientenkriterium . . . . .	6
Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen) . . . . .	6
3.3 Rechenregeln Reihen . . . . .	6
Addition von Reihen . . . . .	6
Umordnungssatz . . . . .	6
Multiplikation von Reihen . . . . .	6
3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion . . . . .	6

# 1. Reelle Zahlen

## 1.1 Zahlenmengen

### Definition Abzählbarkeit

$A$  ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$  gibt. ( $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ )

- Mit anderen Worten:  $A$  kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$  ist abzählbar (Alle Brüche können “schlangenartig” durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

### Anordnung von Körpern

Der Körper  $\mathbb{R}$  ist angeordnet da:

1.  $\forall a \in \mathbb{R}$  gilt entweder:
  - $a = 0$  oder
  - $a > 0$  oder
  - $a < 0$
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$  gilt:
  - $a + b > 0$  und
  - $a \cdot b > 0$

Der Körper  $\mathbb{C}$  kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$  dann muss entweder:
  - $a > 0$ , und laut definition von Anordnung auch  $a \cdot a > 0$  oder
  - $-a > 0$ , und somit auch  $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall  $a^2 > 0$ 
  - Sei  $a = i$  dann gilt  $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

## 1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

### Beschränktheit

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist nach oben beschränkt, falls sein  $s_0 \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\forall s \in M$  gilt:  $s \leq s_0$

- Die Zahl  $s_0$  heißt obere Schranke von  $M$

### Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt  $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine größte untere Schranke, diese heißt  $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge  $M$  auch selbst in  $M$  liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von  $M$  bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$  falls  $M$  nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$  falls  $M$  nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

### **$\mathbb{R}$ ist archimedisch**

$\forall a \in \mathbb{R}$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a < n$

### **Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  existiert  $r \in \mathbb{N}$  mit  $a < r < b$

## **1.3 Wichtige Ungleichungen**

### **Dreiecksungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

### **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|\langle x, y \rangle| \leq ||x| \cdot |y||$
- “Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren”

# 2. Folgen

## 2.0 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$

### Rechenregeln Grenzwerte:

Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  falls  $b \neq 0$

## 2.1 Konvergenz

### Definition Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach  $a \in \mathbb{C}$  falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$

### Definition Divergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $-\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

### Asymptotische Äquivalenz

Falls  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  und  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$  mit  $a, b \neq 0$  dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls  $a_n \simeq b_n$  dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent

**Beschränktheit**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt falls  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

**Einschließungsregel**

Falls  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle bis auf endlich viele  $n$  dann gilt:

- Falls  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

**2.2 Monotone Folgen****Definition**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

**Hilfreiche Formeln****Bernoulli-Ungleichung**

- $(1+x)^n \geq 1+nx$  für  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$

**Binomialkoeffizienten**

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

**Endliche Geometrische Summe**

- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

# 3. Reihen

## 3.1 Definition

### Definition

Eine Reihe  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Reihe für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

- $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$
- Hierbei ist  $s_n$  die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls  $s_n$  konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

### Hilfreiche Reihen

#### Harmonische Reihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$

#### Geometrische Reihe

- $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$  falls  $|q| \geq 1$  und konvergiert nach  $\frac{1}{1-q}$  falls  $|q| < 1$

#### Teleskopreihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
- $s_n$  konvergiert gegen 1

## 3.2 Konvergenzkriterien

### Notwendige Bedingung

Damit  $s_n$  konvergieren kann muss  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  gelten.

### Majorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , dann ist  $a_n$  konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  konvergiert, ist auch  $s_n$  konvergent.

### Minorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a_n$  divergiert, dann ist auch  $b_n$  divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  divergiert, ist auch  $s_n$  divergent.

### Quotientenkriterium

Sei  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

- Falls  $q < 1$ , dann ist konvergiert die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- Für  $q > 1$  divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!}$
- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da  $q < 1$ , ist  $s_n$  konvergent.

### Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da  $a_k = \frac{1}{2^k}$  monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist  $s_n$  konvergent.

## 3.3 Rechenregeln Reihen

### Addition von Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  **konvergente** Reihen. Dann konvergiert auch die Summe der Reihen mit:  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

### Umordnungssatz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut  $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

### Multiplikation von Reihen

Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$  (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

## 3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

- $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}$