

TUM Analysis für Informatik [MA0902], WiSe 2022/2023

Mitschriften basierend auf der Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles

Zuletzt aktualisiert: 13. Dezember 2022

# Introduction

## About

Hier sind die wichtigsten Konzepte / Formeln der Analysis Vorlesung von Prof. Dr. Silke Rolles im Wintersemester 2022/2023 zusammengefasst.

Die erstellten Notizen sind stark an den Vorlesungsfolien von Prof. Dr. Silke Rolles orientiert.

Die Mitschriften selbst sind in Markdown geschrieben und werden mithilfe einer GitHub-Action nach jedem Push mithilfe von [Pandoc](#) zu einem PDF konvertiert.

Eine stets aktuelle Version der PDFs kann über <https://github.com/ManuelLerchner/analysis/releases/download/Release/merge.pdf> heruntergeladen werden.

## How to Contribute

1. Fork [this](#) Repository
2. Commit and push your changes to **your** forked repository
3. Open a Pull Request to this repository
4. Wait until the changes are merged

## Contributors



# Inhaltsverzeichnis

Introduction . . . . .	1
About . . . . .	1
How to Contribute . . . . .	1
Contributors . . . . .	1
<b>1. Reelle Zahlen</b>	<b>4</b>
1.1 Zahlenmengen . . . . .	4
Definition Abzählbarkeit . . . . .	4
Anordnung von Körpern . . . . .	4
1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen . . . . .	4
Beschränktheit . . . . .	4
Supremumsaxiom in den reellen Zahlen . . . . .	4
$\mathbb{R}$ ist archimedisch . . . . .	5
Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.3 Wichtige Ungleichungen . . . . .	5
Dreiecksungleichung . . . . .	5
Cauchy-Schwarz Ungleichung . . . . .	5
<b>2. Folgen</b>	<b>6</b>
2.0 Definition . . . . .	6
Rechenregeln Grenzwerte: . . . . .	6
2.1 Konvergenz . . . . .	6
Definition Konvergenz . . . . .	6
Definition Divergenz . . . . .	6
Asymptotische Äquivalenz . . . . .	6
Beschränktheit . . . . .	7
Einschließungsregel . . . . .	7
2.2 Monotone Folgen . . . . .	7
Definition . . . . .	7
Hilfreiche Formeln . . . . .	7
<b>3. Reihen</b>	<b>8</b>
3.1 Definition . . . . .	8
Definition . . . . .	8
Hilfreiche Reihen . . . . .	8
3.2 Konvergenzkriterien . . . . .	8
Notwendige Bedingung . . . . .	8
Majorantenkriterium . . . . .	8
Minorantenkriterium . . . . .	9
Quotientenkriterium . . . . .	9
Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen) . . . . .	9
3.3 Wert einer Reihe . . . . .	9
Wert einer Reihe . . . . .	9
3.4 Rechenregeln Reihen . . . . .	10
Addition von Reihen . . . . .	10
Multiplikation mit einer Konstanten . . . . .	10
Addition von konvergenten und divergenten Reihen . . . . .	10
Divergenz des Kehrwertes . . . . .	10

Umordnungssatz . . . . .	10
Multiplikation von Reihen . . . . .	10
3.5 Eigenschaften der Exponentialfunktion . . . . .	10
<b>4. Stetigkeit</b>	<b>11</b>
4.1 Definition . . . . .	11
Definition Stetigkeit . . . . .	11
Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	11
Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$ . . . . .	11
Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ . . . . .	11
Komposition stetiger Funktionen . . . . .	11
4.2 Zwischenwertsatz . . . . .	12
4.3 Häufungspunkte . . . . .	12
Satz von Bolzano-Weierstrass . . . . .	12
4.4 Existenz von Maxima und Minima . . . . .	12
Abgeschlossenheit von Mengen . . . . .	12
Beschränktheit von Mengen . . . . .	12
Kompaktheit von Mengen . . . . .	13
Satz von Maximum und Minimum . . . . .	13
<b>5. Wichtige Funktionen</b>	<b>14</b>
5.1 Umkehrfunktion . . . . .	14
Definition Umkehrfunktion . . . . .	14
Stetigkeit von Umkehrfunktionen . . . . .	14
5.2 Logarithmus . . . . .	14
Definition Logarithmus . . . . .	14
Asymptotisches Verhalten von $\exp$ und $\ln$ . . . . .	14
Allgemeine Potenzfunktion . . . . .	15
5.3 Trigonometrische Funktionen . . . . .	15
Reihendarstellung der Trigonometrischen Funktionen . . . . .	15
Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen . . . . .	15
<b>Differenzierbarkeit</b>	<b>16</b>
Landau Symbole . . . . .	16
Definition . . . . .	16
Differenzierbarkeit . . . . .	16
Spezielle Ableitungen . . . . .	16
Ableitungsregeln . . . . .	17
Ableitungsregeln für Potenzen . . . . .	17
Ableitungen Triigonometrischer Funktionen . . . . .	17
Kettenregel . . . . .	17
Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	17
Beispiele: . . . . .	17
<b>Anwendungen der Ableitung</b>	<b>18</b>
Extrema . . . . .	18
Mittelwertsatz . . . . .	18
Spezialfall Satz von Rolle . . . . .	18

# 1. Reelle Zahlen

## 1.1 Zahlenmengen

### Definition Abzählbarkeit

$A$  ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$  gibt. ( $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ )

- Mit anderen Worten:  $A$  kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$  ist abzählbar (Alle Brüche können “schlangenartig” durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

### Anordnung von Körpern

Der Körper  $\mathbb{R}$  ist angeordnet da:

1.  $\forall a \in \mathbb{R}$  gilt entweder:
  - $a = 0$  oder
  - $a > 0$  oder
  - $a < 0$
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$  gilt:
  - $a + b > 0$  und
  - $a \cdot b > 0$

Der Körper  $\mathbb{C}$  kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$  dann muss entweder:
  - $a > 0$ , und laut definition von Anordnung auch  $a \cdot a > 0$  oder
  - $-a > 0$ , und somit auch  $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall  $a^2 > 0$ 
  - Sei  $a = i$  dann gilt  $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

## 1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

### Beschränktheit

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist nach oben beschränkt, falls sein  $s_0 \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\forall s \in M$  gilt:  $s \leq s_0$

- Die Zahl  $s_0$  heißt obere Schranke von  $M$

### Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt  $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine größte untere Schranke, diese heißt  $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge  $M$  auch selbst in  $M$  liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von  $M$  bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$  falls  $M$  nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$  falls  $M$  nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

### **$\mathbb{R}$ ist archimedisch**

$\forall a \in \mathbb{R}$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a < n$

### **Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  existiert  $r \in \mathbb{N}$  mit  $a < r < b$

## **1.3 Wichtige Ungleichungen**

### **Dreiecksungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

### **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|\langle x, y \rangle| \leq ||x| \cdot |y||$
- “Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren”

# 2. Folgen

## 2.0 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$

### Rechenregeln Grenzwerte:

Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  falls  $b \neq 0$

## 2.1 Konvergenz

### Definition Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach  $a \in \mathbb{C}$  falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

### Definition Divergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $-\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

Teilfolgen

- Sollte es eine Teilfolge geben, die nicht konvergiert, dann ist die gesamte Folge nicht konvergent

### Asymptotische Äquivalenz

Falls  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  und  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  mit  $a, b \neq 0$  dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls  $a_n \simeq b_n$  dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

## Beschränktheit

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt falls  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

## Einschließungsregel

Falls  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle bis auf endlich viele  $n$  dann gilt:

- Falls  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

## 2.2 Monotone Folgen

### Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

### Hilfreiche Formeln

#### Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1+nx$  für  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$

#### Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

#### Endliche Geometrische Summe

- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$



# 3. Reihen

## 3.1 Definition

### Definition

Eine Reihe  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Reihe für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

- $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$
- Hierbei ist  $s_n$  die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls  $s_n$  konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

### Hilfreiche Reihen

#### Harmonische Reihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$

#### Geometrische Reihe

- $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$  falls  $|q| \geq 1$  und konvergiert nach  $\frac{1}{1-q}$  falls  $|q| < 1$

#### Teleskopreihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
- $s_n$  konvergiert gegen 1

## 3.2 Konvergenzkriterien

### Notwendige Bedingung

Damit  $s_n$  konvergieren kann muss  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  gelten.

### Majorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , dann ist  $a_n$  konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  konvergiert, ist auch  $s_n$  konvergent.

## Minorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a_n$  divergiert, dann ist auch  $b_n$  divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  divergiert, ist auch  $s_n$  divergent.

## Quotientenkriterium

Sei  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

- Falls  $q < 1$ , dann ist konvergiert die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- Für  $q > 1$  divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!}$
- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da  $q < 1$ , ist  $s_n$  konvergent.

## Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da  $a_k = \frac{1}{2^k}$  monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist  $s_n$  konvergent.

## 3.3 Wert einer Reihe

### Wert einer Reihe

Die Summe einer Reihe ist der Grenzwert der Partialsummen.

Beispiele für konvergente Reihen:

- $\lim_{n \downarrow 0} x^a =$ 
  - 0 falls  $a > 0$
  - 1 falls  $a = 0$
  - $\infty$  falls  $a < 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x^a =$ 
  - 0 falls  $a < 0$
  - 1 falls  $a = 0$
  - $\infty$  falls  $a > 0$
- $\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

### 3.4 Rechenregeln Reihen

#### Addition von Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  **konvergente** Reihen. Dann folgt, dass auch die Summe der Beiden Reihen konvergiert:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$

#### Multiplikation mit einer Konstanten

Falls  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe ist, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

#### Addition von konvergenten und divergenten Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine divergente Reihe. Dann divergiert auch die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k).$

#### Divergenz des Kehrwertes

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Dann divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$

#### Umordnungssatz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

#### Multiplikation von Reihen

Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$  (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

### 3.5 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

# 4. Stetigkeit

## 4.1 Definition

### Definition Stetigkeit

Eine Funktion  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{D}$  ist stetig im Punkt  $x$  falls:

- Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{D}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt:

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

- Man schreibt auch:

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ist eine Funktion in allen Punkten  $x \in \mathbb{D}$  stetig, nennt man sie auch *stetig*.

### Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Um die Stetigkeit einer Funktion  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zu prüfen zeige, dass:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Beispiel:  $f(x) = |x|$

- $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x_n - x_0|$ 
  - Für  $x_n \rightarrow x_0$  gilt  $|x_n - x_0| \rightarrow 0$
  - $\implies f$  ist stetig

### Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^d$  konvergiert gegen einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$ , falls alle Komponenten der Folge gegen die entsprechenden Komponenten von  $x$  konvergieren.

Beispiel:

- $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$
- Die Folge konvergiert gegen den Punkt  $(1, 0)$  da die Komponenten gegen 1 bzw. 0 konvergieren

### Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion  $e^x$  ist in  $\mathbb{C}$  stetig.

### Komposition stetiger Funktionen

Seien  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  und  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$  stetige Funktionen. Dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

Beispiele für stetige Funktionen:

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = x \cdot y$

- $f(x, y) = \frac{x}{y}$  mit  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Damit sind auch Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

- Somit sind insbesondere auch Polynome stetig
- Rationalen Funktionen mit  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit  $p$  und  $q$  Polynomen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig

## 4.2 Zwischenwertsatz

Falls eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem Intervall  $[a, b]$  ist, dann nimmt sie jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

Beispiel:

- Hat  $f(x) = \cos(x) - x$  eine Nullstelle auf  $[0, \pi/2]$ ?
  - $f(0) = 1$  und  $f(\pi/2) = -\pi/2$
  - Da die Funktion stetig ist, nimmt sie auf  $[0, \pi/2]$  jeden Wert zwischen 1 und  $-\pi/2$  an. Somit  $\exists x \in [0, \pi/2]$  mit  $f(x) = 0$

## 4.3 Häufungspunkte

Sei  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Dann heißt  $a^*$  ein *Häufungspunkt* von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  falls es eine Teilfolge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a^*$  gibt

Falls die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann ist der Häufungspunkt der Folge gleich dem Grenzwert.

Beispiel:

- $a_n = (-1)^n$
- Diese Folge hat die Teilfolgen  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  welche jeweils konstant 1 bzw  $-1$  sind.
  - Somit hat die Folge  $a_n$  den Häufungspunkt 1 und  $-1$

## Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat mindestens eine konvergente Teilfolge und somit auch mindestens einen Häufungspunkt.

Diese Aussage lässt sich auch auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $d \geq 2$  übertragen. Dabei heißt eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in \mathbb{R}^d$  beschränkt, falls:

- $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\|_2 \leq M.$

## 4.4 Existenz von Maxima und Minima

Ein Punkt  $x \in D$  heißt:

- Minimumstellen von  $f$  falls  $f(x) \leq f(y)$  für alle  $y \in D$
- Maximumstellen von  $f$  falls  $f(x) \geq f(y)$  für alle  $y \in D$

Nicht jede Funktion hat ein Maximum bzw. Minimum (z.B.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ )

## Abgeschlossenheit von Mengen

Eine Menge  $A \in \mathbb{R}^d$  heißt abgeschlossen, falls der Grenzwert jeder Konvergenten Folgen aus  $A$  wieder in  $A$  liegt.

- $x_n \in A \forall n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in A$

## Beschränktheit von Mengen

Eine Menge  $A \in \mathbb{R}^d$  heißt beschränkt, falls es eine positive Zahl  $M$  gibt, sodass für alle  $x \in A$   $|x| \leq M$  gilt.

## Kompaktheit von Mengen

Eine Menge  $A \in \mathbb{R}^d$  heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel:  $[0, 1]$

- $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen, da für alle  $0 \leq x_n \leq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt, dass  $x \in [0, 1]$
- Diese Menge ist auch beschränkt, da z.B.  $|x| \leq 1$  für alle  $x \in [0, 1]$ 
  - Somit ist  $[0, 1]$  kompakt

Beispiel:  $[0, 1)$

- Diese Menge ist nicht abgeschlossen, da z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$  und  $1 \notin [0, 1)$
- Somit ist diese Menge auch nicht kompakt.

Jede kompakte Menge  $K \in \mathbb{R}$   $K \neq \emptyset$  ist beschränkt und besitzt somit auch ein Maximum und ein Minimum.

Wenn  $K \in \mathbb{R}^d$  kompakt ist  $\iff$  Jede Folge aus  $K$  besitzt eine Konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $K$ .

Wenn  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und  $K$  kompakt ist, dann ist auch  $f(K)$  bzw. das Bild von  $f$  kompakt.

- Somit ist insbesondere auch  $f([a, b])$  kompakt, falls  $f$  stetig ist. Somit besitzt  $f([a, b])$  auch ein Maximum und ein Minimum. \$\$

## Satz von Maximum und Minimum

Jede stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein Maximum und ein Minimum in  $K$ , falls  $K$  kompakt ist.

Somit existieren  $\underline{x}, \bar{x} \in K$  mit  $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$  für alle  $x \in K$ .

- $\underline{x} = \arg \min_{x \in K} f(x)$  bzw.  $f(\underline{x}) = \min_{x \in K} f(x)$
- $\bar{x} = \arg \max_{x \in K} f(x)$  bzw.  $f(\bar{x}) = \max_{x \in K} f(x)$

# 5. Wichtige Funktionen

## 5.1 Umkehrfunktion

### Definition Umkehrfunktion

Eine Funktion  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^q$  heißt bijektiv, falls für alle  $y \in B$  genau ein  $x \in \mathbb{D}$  existiert, sodass  $f(x) = y$  gilt.

- Man schreibt auch:  $f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{D}, y \mapsto x$

### Stetigkeit von Umkehrfunktionen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, und streng monoton wachsende Funktion.

- Dann ist  $f : I \rightarrow f(I)$  bijektiv.
- Und  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  stetig und streng monoton wachsend.

## 5.2 Logarithmus

### Definition Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ist definiert als:

- $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \ln(x)$

Er ist die Umkehrfunktion von  $e^x$ . Somit gilt auch:

- $e^{\ln(x)} = x$  für alle  $x \in (0, \infty)$
- $\ln(e^x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y > 0$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$  für alle  $x, y > 0$
- $\ln(x^k) = k \ln(x)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x > 0$

Wichtige Werte:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

### Asymptotisches Verhalten von $\exp$ und $\ln$ .

- Die Exponentialfunktion wächst schneller gegen unendlich als jedes Polynom:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$
- $x$  wächst schneller gegen unendlich als jede Potenz des Logarithmus:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\ln x)^m} = \infty$
- Mehrfache Anwendung des Logarithmus führt zu langsamerem Wachstum:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln \ln x} = \infty$

## Allgemeine Potenzfunktion

Definition:

- $x^a = e^{a \ln x}$

Spezialfälle:

- $\forall n \in \mathbb{N} : x^n = e^{n \ln x} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \dots e^{\ln x} \text{ (n-mal)} = x \cdot x \dots x \text{ (n-mal)}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ , denn  $(x^{1/n})^n = (e^{\frac{1}{n} \ln x})^n = e^{\ln x} = x$

Logarithmus zur Basis  $b$ :

$$\forall b > 1 \text{ und } a > 0$$

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln b}$$

## 5.3 Trigonometrische Funktionen

Komplexe Zahlen mit Betrag 1 können in folgender Form dargestellt werden (Eulersche Formel):

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies ist äquivalent zu:

- $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Daraus können auch die Additionstheoreme für die Trigonometrischen Funktionen abgeleitet werden:

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

Außerdem wird der Tangens und die Cotangens definiert als:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ wenn } \cos x \neq 0$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ wenn } \sin x \neq 0$

## Reihendarstellung der Trigonometrischen Funktionen

Die Trigonometrischen Funktionen können auch als unendliche Summen dargestellt werden:

- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Über diese Reihendarstellung lassen sich auch Grenzwerte bestimmen:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \dots = 1$

## Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen sind:

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$   
–  $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$   
–  $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$   
–  $\arctan(x) : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



# Differenzierbarkeit

## Landau Symbole

### Definition

- $f(x) = O(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  wenn:
  - $\exists \epsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x \text{ mit } ||x - x_0|| < \epsilon \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
  - “f ist in der Nähe von  $x_0$  bis auf Konstanten asymptotisch kleiner gleich g”
- $f(x) = O(g(x))$  für  $x \rightarrow \infty$  wenn:
  - $\exists M > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x \text{ mit } x < -M \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$
  - “Im unendlichen ist f bis auf Konstanten kleiner gleich g”
- $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  wenn:
  - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
  - “f ist asymptotisch kleiner als g”

## Differenzierbarkeit

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $x_0 \in I$ , falls für eine Zahl  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  folgende Linearisierung gültig ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

Hierbei approximiert die Tangente die Funktion für  $x \rightarrow x_0$  besser als jede andere Gerade:

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Differenzierbarkeit in  $x_0$  impliziert auch Stetigkeit in diesem Punkt.

Die Steigung der Tangente  $f'(x_0)$  bezeichnet man als Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Die Ableitung kann durch Umformung der oben genannten Linearisierung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) \quad (\text{Differenzenquotient}) \end{aligned}$$

- Ist eine Funktion in jedem Punkt differenzierbar so heißt die Funktion differenzierbar.
- Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar (z.B. Betragsfunktion).

### Spezielle Ableitungen

- $f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

## Ableitungsregeln

- (a)  $(cf)'(x) = cf'(x)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$
- (b)  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  Summenregel
- (c)  $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$  Produktregel
- (d)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$  falls  $g(x) \neq 0$  Quotientenregel

## Ableitungsregeln für Potenzen

Ist  $f(x) = x^a$  mit  $a \in \mathbb{R}$ , so gilt:

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

## Ableitungen Triigonometrischer Funktionen

- $f(x) = \tan x \longrightarrow f'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $f(x) = \cot x \longrightarrow f'(x) = -1 - \cot(x)^2 = \frac{1}{\sin(x)^2}$

## Kettenregel

- $f(x) = g(h(x)) \longrightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

## Ableitung der Umkehrfunktion

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$  Falls  $f$  bijektiv und in  $x$  differenzierbar ist.

### Beispiele:

Aus der Regel für Ableitung der Umkehrfunktion folgt:

- Ableitung des Logarithmus

$$* \ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

- Ableitung von arcsin

$$* \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Ableitung von arccos

$$* \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Ableitung von arctan

$$* \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

# Anwendungen der Ableitung

## Extrema

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat bei  $x_0$  ein:

- globales Maximum, wenn  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$
- globales Minimum, wenn  $f(x_0) \leq f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$
- lokales Maximum, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, sodass  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \cap [a, b]$
- lokales Minimum, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, sodass  $f(x_0) \leq f(x)$  für alle  $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \cap [a, b]$

Ersetzt man  $\leq$  mit  $<$  und  $\geq$  mit  $>$  spricht man von strikten Maxima und Minima.

Eine Notwendige Bedingung für ein Maximum oder Minimum ist, dass die Ableitung an der Stelle  $x_0$  gleich 0 ist.

## Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz besagt, dass eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  welche auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig ist und auf  $(a, b)$  differenzierbar ist, ein  $\xi \in (a, b)$  besitzt, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Das heißt, dass die Steigung der Tangente an der Stelle  $\xi$  gleich der Sekantensteigung zwischen den Punkten  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  ist.

### Vergemeinerter Mittelwertsatz

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Spezialfall Satz von Rolle

Ist  $f(a) = f(b)$ , so besitzt  $f$  auf  $(a, b)$  eine waagerechte Tangente.