

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Reelle Zahlen</b>	<b>3</b>
1.1 Zahlenmengen	3
Definition Abzählbarkeit	3
Anordnung von Körpern	3
1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen	3
Beschränktheit	3
Supremumsaxiom in den reellen Zahlen	3
$\mathbb{R}$ ist archimedisch	4
Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$	4
1.3 Wichtige Ungleichungen	4
Dreiecksungleichung	4
Cauchy-Schwarz Ungleichung	4
<b>2. Folgen</b>	<b>5</b>
2.0 Definition	5
Rechenregeln Grenzwerte:	5
2.1 Konvergenz	5
Definition Konvergenz	5
Definition Divergenz	5
Asymptotische Äquivalenz	5
Beschränktheit	6
Einschließungsregel	6
2.2 Monotone Folgen	6
Definition	6
Hilfreiche Formeln	6
<b>3. Reihen</b>	<b>7</b>
3.1 Definition	7
Definition	7
Hilfreiche Reihen	7
3.2 Konvergenzkriterien	7
Notwendige Bedingung	7
Majorantenkriterium	7
Minorantenkriterium	7
Quotientenkriterium	8
Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)	8
3.3 Rechenregeln Reihen	8
Addition von Reihen	8
Umordnungssatz	8
Multiplikation von Reihen	8
3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion	8
<b>4. Stetigkeit</b>	<b>9</b>
4.1 Definition	9
Definition Stetigkeit	9
Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$	9
Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$	9

Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ . . . . .	9
Komposition stetiger Funktionen . . . . .	9
4.2 Zwischenwertsatz . . . . .	10

# 1. Reelle Zahlen

## 1.1 Zahlenmengen

### Definition Abzählbarkeit

$A$  ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$  gibt. ( $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ )

- Mit anderen Worten:  $A$  kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$  ist abzählbar (Alle Brüche können “schlangenartig” durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

### Anordnung von Körpern

Der Körper  $\mathbb{R}$  ist angeordnet da:

1.  $\forall a \in \mathbb{R}$  gilt entweder:
  - $a = 0$  oder
  - $a > 0$  oder
  - $a < 0$
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$  gilt:
  - $a + b > 0$  und
  - $a \cdot b > 0$

Der Körper  $\mathbb{C}$  kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$  dann muss entweder:
  - $a > 0$ , und laut definition von Anordnung auch  $a \cdot a > 0$  oder
  - $-a > 0$ , und somit auch  $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall  $a^2 > 0$ 
  - Sei  $a = i$  dann gilt  $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

## 1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

### Beschränktheit

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist nach oben beschränkt, falls sein  $s_0 \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\forall s \in M$  gilt:  $s \leq s_0$

- Die Zahl  $s_0$  heißt obere Schranke von  $M$

### Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt  $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von  $\mathbb{R}$  hat eine größte untere Schranke, diese heißt  $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge  $M$  auch selbst in  $M$  liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von  $M$  bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$  falls  $M$  nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$  falls  $M$  nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

### **$\mathbb{R}$ ist archimedisch**

$\forall a \in \mathbb{R}$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a < n$

### **Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  existiert  $r \in \mathbb{N}$  mit  $a < r < b$

## **1.3 Wichtige Ungleichungen**

### **Dreiecksungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

### **Cauchy-Schwarz Ungleichung**

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- $|\langle x, y \rangle| \leq ||x| \cdot |y||$
- “Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren”

# 2. Folgen

## 2.0 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$

### Rechenregeln Grenzwerte:

Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  falls  $b \neq 0$

## 2.1 Konvergenz

### Definition Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach  $a \in \mathbb{C}$  falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$

### Definition Divergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert gegen  $-\infty$  / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

### Asymptotische Äquivalenz

Falls  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  und  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$  mit  $a, b \neq 0$  dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls  $a_n \simeq b_n$  dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

## Beschränktheit

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt falls  $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

## Einschließungsregel

Falls  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle bis auf endlich viele  $n$  dann gilt:

- Falls  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

## 2.2 Monotone Folgen

### Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
  - Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    - \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

### Hilfreiche Formeln

#### Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1+nx$  für  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$

#### Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

#### Endliche Geometrische Summe

- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

# 3. Reihen

## 3.1 Definition

### Definition

Eine Reihe  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Reihe für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

- $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$
- Hierbei ist  $s_n$  die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls  $s_n$  konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

### Hilfreiche Reihen

#### Harmonische Reihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$

#### Geometrische Reihe

- $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$
- $s_n$  divergiert nach  $\infty$  falls  $|q| \geq 1$  und konvergiert nach  $\frac{1}{1-q}$  falls  $|q| < 1$

#### Teleskopreihe

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
- $s_n$  konvergiert gegen 1

## 3.2 Konvergenzkriterien

### Notwendige Bedingung

Damit  $s_n$  konvergieren kann muss  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  gelten.

### Majorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , dann ist  $a_n$  konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  konvergiert, ist auch  $s_n$  konvergent.

### Minorantenkriterium

Falls  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a_n$  divergiert, dann ist auch  $b_n$  divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  divergiert, ist auch  $s_n$  divergent.

## Quotientenkriterium

Sei  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

- Falls  $q < 1$ , dann ist konvergiert die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- Für  $q > 1$  divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!}$
- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da  $q < 1$ , ist  $s_n$  konvergent.

## Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da  $a_k = \frac{1}{2^k}$  monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist  $s_n$  konvergent.

## 3.3 Rechenregeln Reihen

### Addition von Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  **konvergente** Reihen. Dann konvergiert auch die Summe der Reihen mit:  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

### Umordnungssatz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut  $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

### Multiplikation von Reihen

Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$  (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

## 3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

- $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}$



# 4. Stetigkeit

## 4.1 Definition

### Definition Stetigkeit

Eine Funktion  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{D}$  ist stetig im Punkt  $x$  falls:

- Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{D}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt:

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

- Man schreibt auch:

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ist eine Funktion in allen Punkten  $x \in \mathbb{D}$  stetig, nennt man sie auch *stetig*.

### Beispiel Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Um die Stetigkeit einer Funktion  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zu prüfen zeige, dass:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Beispiel:  $f(x) = |x|$

- $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x_n - x_0|$ 
  - Für  $x_n \rightarrow x_0$  gilt  $|x_n - x_0| \rightarrow 0$
  - $\implies f$  ist stetig

### Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^d$

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^d$  konvergiert gegen einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$ , falls alle Komponenten der Folge gegen die entsprechenden Komponenten von  $x$  konvergieren.

Beispiel:

- $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$
- Die Folge konvergiert gegen den Punkt  $(1, 0)$  da die Komponenten gegen 1 bzw. 0 konvergieren

### Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion  $e^x$  ist in  $\mathbb{C}$  stetig.

### Komposition stetiger Funktionen

Seien  $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  und  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$  stetige Funktionen. Dann ist auch  $g \circ f$  stetig.

Beispiele für stetige Funktionen:

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = x \cdot y$
- $f(x, y) = \frac{x}{y}$  mit  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Damit sind auch Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig.

- Somit sind insbesondere auch Polynome stetig
- Rationalen Funktionen mit  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit  $p$  und  $q$  Polynomen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig

## 4.2 Zwischenwertsatz