Inhaltsverzeichnis

1. Reelle Zahlen

1.1 Zahlenmengen

Definition Abzählbarkeit

A ist abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt. ($f : \mathbb{N} \to A$)

- Mit anderen Worten: A kann durchnummeriert werden
- Beispiele:
  - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (Alle Brüche können "schlangenartig" durchnummeriert werden, siehe Diagonalargument)
  - $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (Widerspruchsbeweis)

Anordnung von Körpern

Der Körper $\mathbb{R}$ ist angeordnet da:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt entweder:
   - $a = 0$ oder
   - $a > 0$ oder
   - $a < 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt:
   - $a + b > 0$ und
   - $a \cdot b > 0$

Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden da:

- Angenommen: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ dann muss entweder:
  - $a > 0$, und laut definition von Anordnung auch $a \cdot a > 0$ oder
  - $-a > 0$, und somit auch $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$
- Somit gilt in jedem Fall $a^2 > 0$
  - Sei $a = i$ dann gilt $a^2 = -1$
  - Das ist ein Widerspruch

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Beschränktheit

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, falls sein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\forall s \in M$ gilt: $s \leq s_0$

- Die Zahl s_0 heißt obere Schranke von M

Supremumsaxiom in den reellen Zahlen

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke, diese heißt $\sup M \in \mathbb{R}$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke, diese heißt $\inf M \in \mathbb{R}$

Falls das Supremum oder das Infimum einer Menge M auch selbst in M liegt, dann wird es auch als Maximum bzw. Minimum von M bezeichnet

- Konventionen:
  - $\sup M = \infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist
  - $\inf M = -\infty$ falls M nicht nach unten beschränkt ist
  - $\sup \emptyset = -\infty$

$\mathbb{R}$ ist archimedisch

$\forall a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$

Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $a < r < b$

1.3 Wichtige Ungleichungen

Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
- "Der Betrag vom Skalarprodukt ist kleiner oder gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren"

2. Folgen

2.0 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$

Rechenregeln Grenzwerte:

Falls $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt:

- $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2.1 Konvergenz

Definition Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach $a \in \mathbb{C}$ falls:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweisen:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

Definition Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert falls:

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 |a_n - a| \geq \varepsilon$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \geq K$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ / konvergiert uneigentlich falls:

- $\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq -K$

Asymptotische Äquivalenz

Falls $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ mit $a, b \neq 0$ dann gilt:

- $a_n \simeq b_n$ falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Außerdem: Falls $a_n \simeq b_n$ dann gilt:

- Es sind entweder beide Folgen konvergent oder beide divergent
- $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt nur für konvergente, asymptotisch gleiche Folgen.

Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

- Insbesondere ist eine Folge beschränkt falls sie konvergiert

Einschließungsregel

Falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n dann gilt:

- Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$ dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

2.2 Monotone Folgen

Definition

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Zusammenhang mit Supremum und Infimum
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist dann gilt:
    * $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
  - Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist dann gilt:
    * $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Hilfreiche Formeln

Bernoulli-Ungleichung

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Endliche Geometrische Summe

- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. Reihen

3.1 Definition

Definition

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Reihe für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
- Hierbei ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe.

Falls s_n konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Der Grenzwert heißt dann der Wert der Reihe.

Falls die Reihe der Absolutbeträge einer Folge konvergiert, dann heißt die ursprüngliche Reihe *absolut konvergent*

Hilfreiche Reihen

Harmonische Reihe

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- s_n divergiert nach ∞

Geometrische Reihe

- $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$
- s_n divergiert nach ∞ falls $|q| \geq 1$ und konvergiert nach $\frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

Teleskopreihe

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
- s_n konvergiert gegen 1

3.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Damit s_n konvergieren kann muss $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten.

Majorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann ist a_n konvergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^3+k}$
- $a_k = \frac{k}{k^3+k} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$
- Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist auch s_n konvergent.

Minorantenkriterium

Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und a_n divergiert, dann ist auch b_n divergent.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$
- Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch s_n divergent.

Quotientenkriterium

Sei $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

- Falls $q < 1$, dann ist konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Für $q > 1$ divergiert diese.
- Ansonsten ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}$
- $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- Da $q < 1$, ist s_n konvergent.

Leibnitz Kriterium (Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\not{0}}}$ monoton fallend mit $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Dann konvergiert die alternierende Reihe $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Beispiel:

- $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2^k}$
- Da $a_k = \frac{1}{2^k}$ monoton fallend ist, und gegen 0 konvergiert, ist s_n konvergent.

3.3 Rechenregeln Reihen

Addition von Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **konvergente** Reihen. Dann konvergiert auch die Summe der Reihen mit: $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Umordnungssatz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Jede Umordnung von Reihenelementen muss gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Multiplikation von Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b_{k-l}$ (Cauchy-Produkt) absolut konvergent.

3.4 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

- $\exp(w + z) = \exp(w) + \exp(z)$
- $\exp(0) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
- $|\exp(z)| \leq \exp(|z|) \ \forall z \in \mathbb{C}$