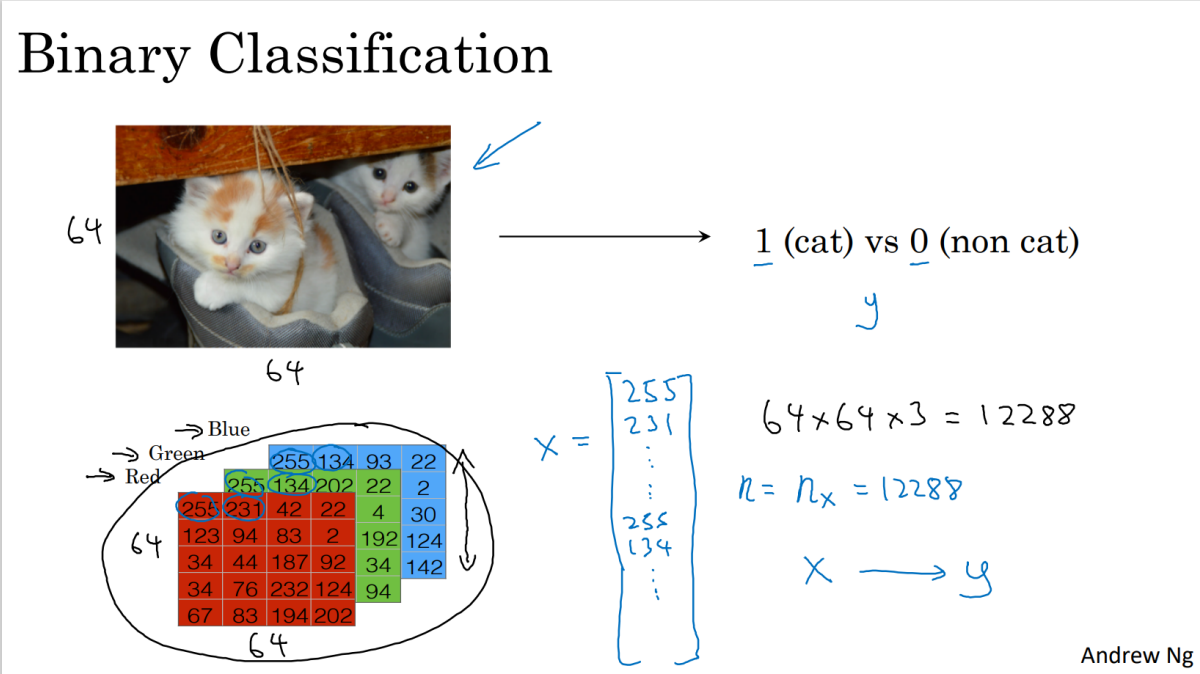
2. 신경망과 로지스틱회귀

신경망 프로그래밍의 기초

신경망 구현 기법

- m개의 훈련 샘플의 훈련 세트가 있을 때 for문을 이용해 m개의 데이터를 일일이 보기?
- 계산 과정이 왜 정방향 전파와 역전파로 구성되어 있는지

Binary Classification



- 목표: 고양이 사진이 입력으로 주어졌을 때, 고양이인지(1) 아닌지(0) 분류
- 사진 데이터는 빨강, 초록, 파랑 각각의 행렬에 저장됨
- 이 픽셀값들을 특성 벡터로 바꾸려면 모든 픽셀값을 입력 특성 벡터 x의 한 열로 나열
- 이 사진이 64 * 64 크기였으면 벡터 x의 전체 차원이 64 * 64 * 3 = 12,288이 됨. 세 행렬의 모든 원소를 포함하고 있기 때문.
- n: 입력 벡터의 차원

- 입력된 사진을 나타내는 특성 벡터 x를 가지고, 그에 대한 레이블 y가 1 아니면 0인지 예측
  다시 말해 고양이 사진인지 아닌지를 예측할 수 있는 분류기를 학습하는 것

Notation

$$(x, y)$$

- 하나의 훈련 샘플 쌍

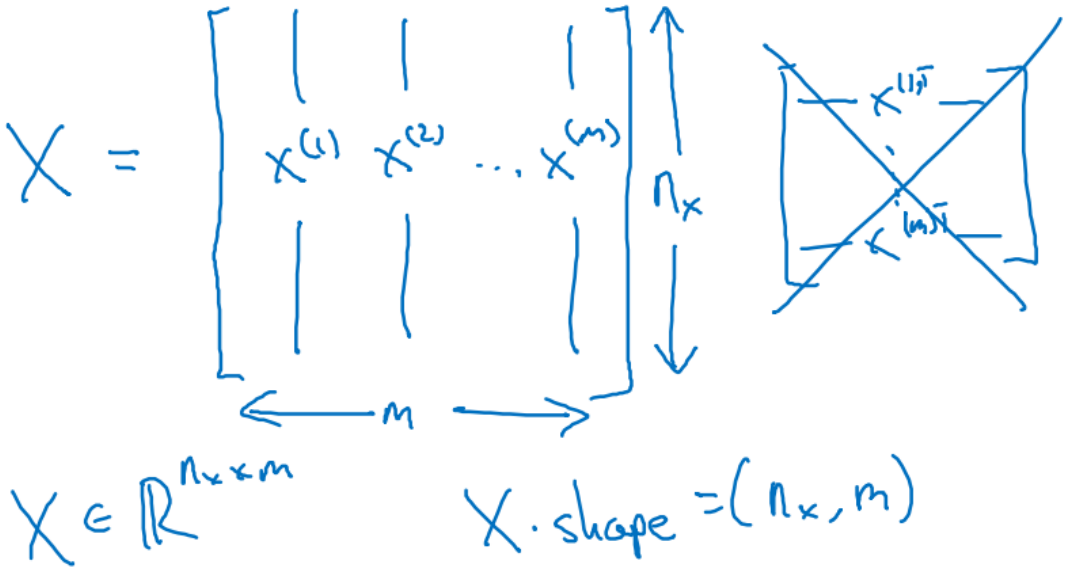
$$x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad y \in \{0, 1\}$$

- x는 n_x차원 상의 특성 벡터(n은 입력 벡터의 차원. n_x = n), y는 0 또는 1

$$m \text{ training examples}: \{(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \ldots, (x^{(m)}, y^{(m)})\}$$

$$m = m_{train} \qquad m_{test} = \#test \text{ examples.}$$

- m개의 훈련 샘플
- 훈련 세트: 첫 번째 훈련 샘플의 입력과 출력부터 마지막 훈련 샘플까지
- m_train: 훈련 세트 / m_tes: 테스트 세트



행렬 X 정의

- x^(1)은 이 행렬의 첫 열로 놓고 x^(2)는 두 번째 열로 x^(m)까지 m 번째 열로 놓으면 행렬 X가 완성
- m이 훈련 샘플의 개수일 때, X는 m개의 열과 n_x개의 행들로 이루어져 있음. n_x × m 행렬
- 다른 강좌에서는 훈련 세트들을 X의 열 대신 행들로 놓았을 수 있음.
  (x^(1)의 전치부터 x^(m)의 전치까지) 하지만 왼쪽의 방법으로 신경망을 구현하는 게 훨씬 쉬움.
- 파이썬 명령인 X.shape로 행렬의 차원을 알 수 있음 → (n_x, m) 출력
  n_x × m 행렬인 것을 뜻함

$$Y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

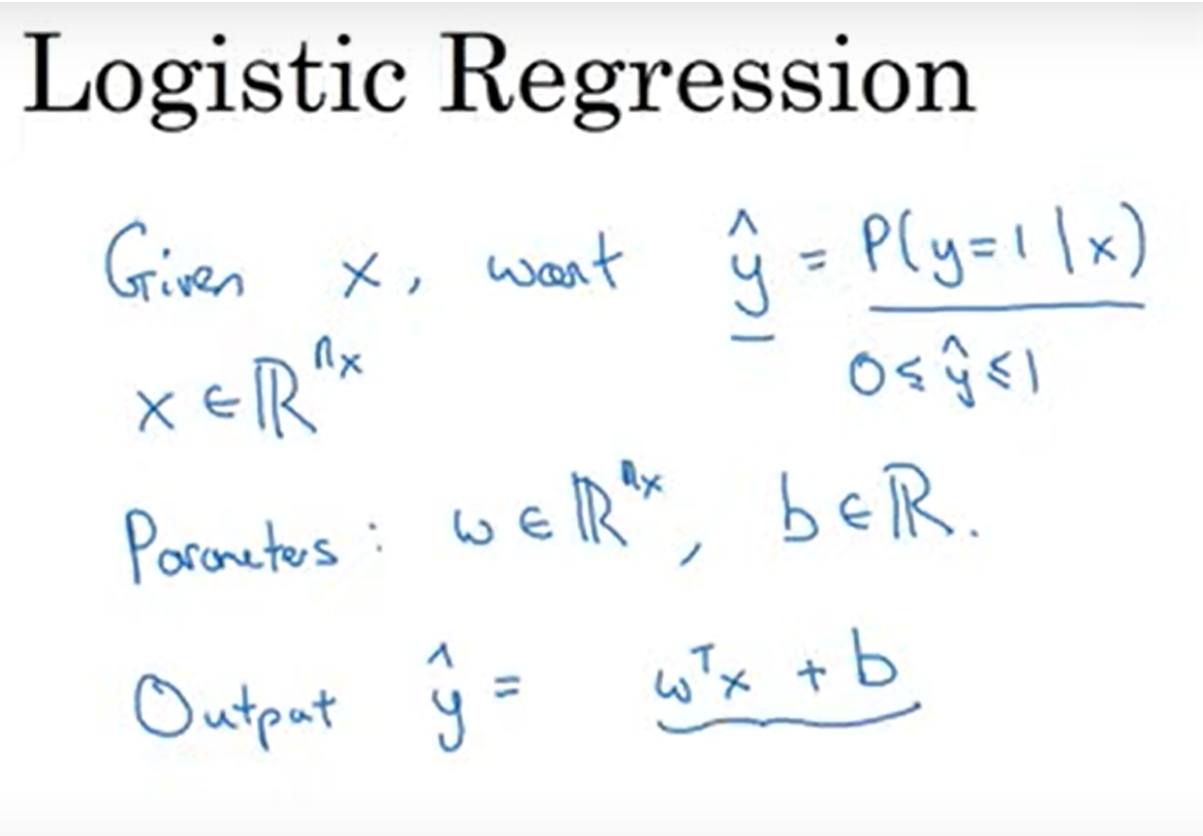
$$Y.shape = (1, m)$$

출력될 레이블 Y

- y의 값들은 열로 놓는 것이 편리
- Y는 y^(1) y^(2)부터 y^(m)으로 이루어진 1 x m 행렬
- 파이썬 Y.shape → Y의 차원 (1, m)

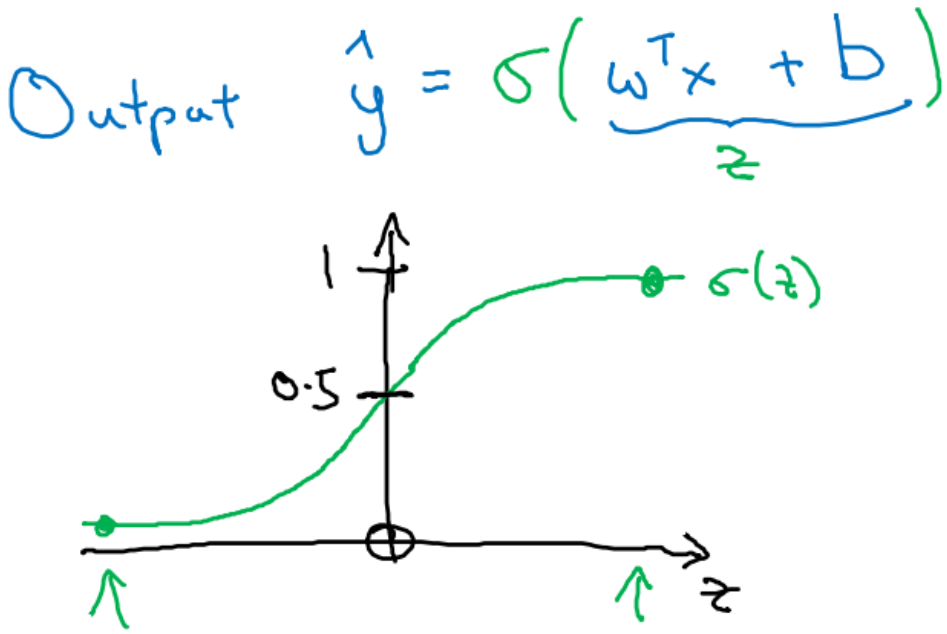
로지스틱 회귀 Logistic Regression

- 이 학습 알고리즘은 지도 학습 문제에서 출력될 레이블 y가 0이나 1일 경우, 즉 이진 분류 문제들에서 쓰임
- 고양이 사진인지 아닌지 구분하고 싶을 때, y의 예측값을 출력
- 여기서 y의 예측값은 입력 특성 x가 주어졌을 때 y가 1일 확률

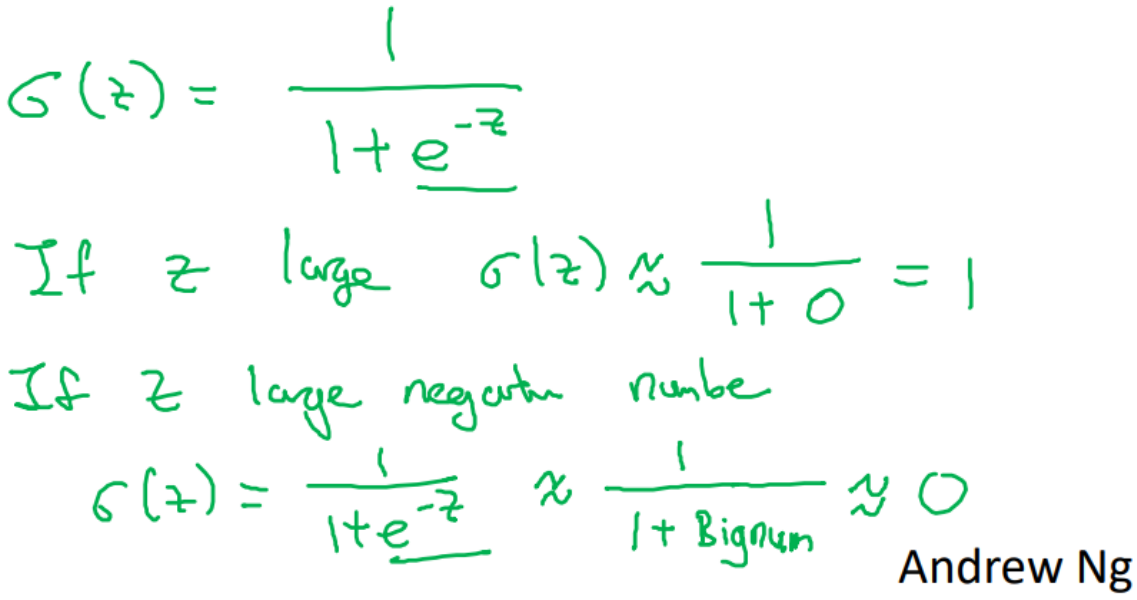


- x는 n_x 차원 상의 벡터, 파라미터 w와 b는 각각 n_x 차원 상의 벡터와 실수
- x, w, b가 주어졌을 때, 어떻게 y의 예측값 출력?
- 선형 회귀(Linear Regression)처럼 y = wTx + b? → y는 항상 0과 1 사이인데, w의 전치 × x + b는 1보다 훨씬 크거나 음수일 수도 있음

→ 그래서 로지스틱 회귀에서는 y의 예측값에 시그모이드 함수를 적용함



- z는 w의 전치 × x + b의 값



- 시그모이드 공식
- 만약 z가 매우 크면 1에 수렴, 매우 작으면 0에 수렴
- y가 1일 확률을 잘 예측하도록 파라미터 w와 b를 학습해야 함.

로지스틱 회귀의 비용함수

$$\hat{y} = \sigma(w^T x + b), \text{ where } \sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\text{Given } \{(x^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (x^{(m)}, y^{(m)})\}, \text{ want } \hat{y}^{(i)} \approx y^{(i)}.$$

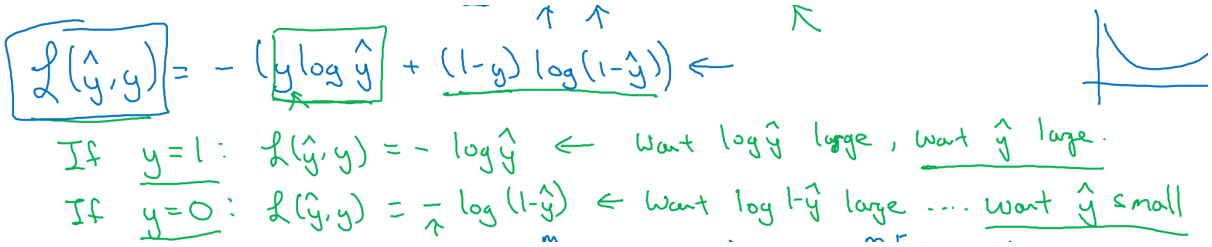
- 매개변수 w와 b를 학습하려면 비용함수를 정의해야 함.
- 위첨자 (i): x이든 y이든 z이든 i번째 훈련 샘플에 관한 데이터
- y의 예측값은 w의 전치 × x + b의 시그모이드
- w와 b는 매개변수
- 주어진 m개의 훈련 샘플로 학습할 때,
  훈련 세트를 바탕으로 출력한 y^(i)의 예측값이 훈련 세트에 포함된 참값 y^(i)에 가까워지도록 하는 게 목표

최적화함수는 볼록해야 좋음. 여러 개의 지역 최적값을 가지고 있으면 전체 최솟값을 찾을 수 없을 수도 있음.

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = -(y \log \hat{y} + (1-y) \log(1-\hat{y}))$$

- 로지스틱 회귀에서 쓰는 오차함수

L은 손실 함수이고, y의 예측값과 y의 참값 사이에 오차가 얼마나 큰지 측정. 이 오차를 최소화하고 싶음.

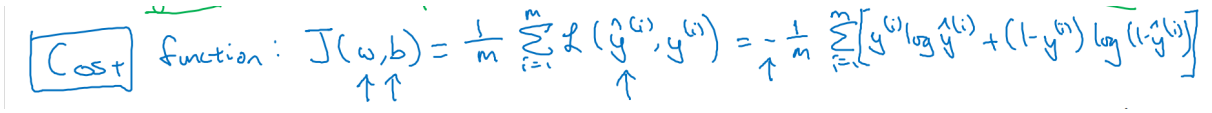


- 그렇다면 이걸 왜 쓸까?

y가 1일 때: y의 예측값이 최대한 커야 함. 그런데 시그모이드 함수의 결과값인 y의 최대값은 1임. 따라서 y가 1에 수렴하길 원함.

y가 0일 때: y의 예측값이 최대한 작아야 함. 그런데 시그모이드 함수의 결과값인 y의 최소값은 0임. 따라서 y가 0에 수렴하길 원함.

→ 손실 함수는 y의 예측값이 원하는 값에 수렴하도록 매개변수들을 조절할 것



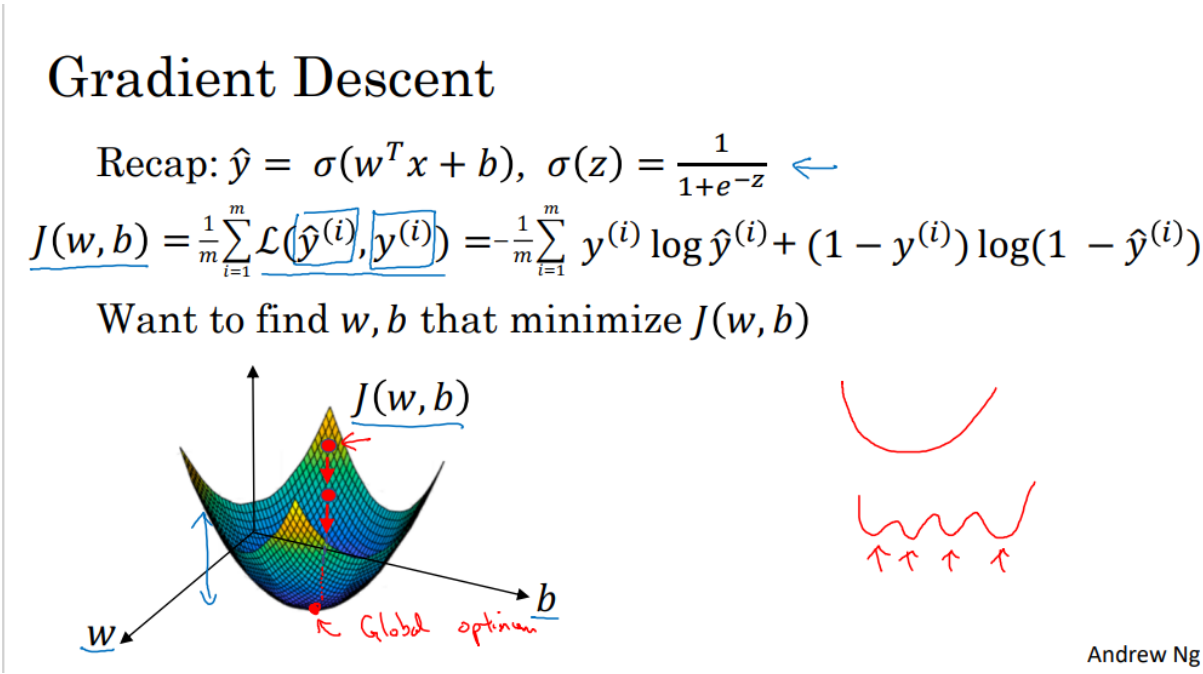
- **손실 함수(Loss/error function)는 훈련 샘플 하나에 관하여 정의**
- **비용 함수(Cost function)는 훈련 세트 전체에 대해 정의, 매개변수의 비용처럼 작용함**

비용 함수는 매개 변수 w와 b에 대해 손실 함수를 각각의 훈련 샘플에 적용한 값의 합들의 평균, 즉 m으로 나눈 값

→ 결과적으로 **로지스틱 회귀 모델을 학습하는 것: 비용 함수 J를 최소화해주는 매개 변수들 w와 b를 찾는 것**

경사 하강법 (Gradient Descent)

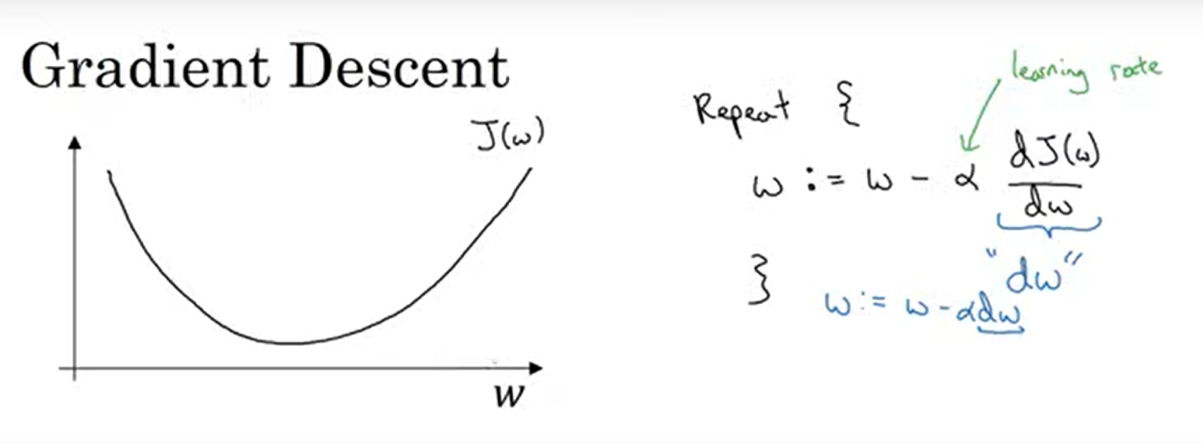
- 경사 하강법 알고리즘을 사용해 매개변수 w와 b를 훈련 세트에 학습시키는 방법을 배울 것



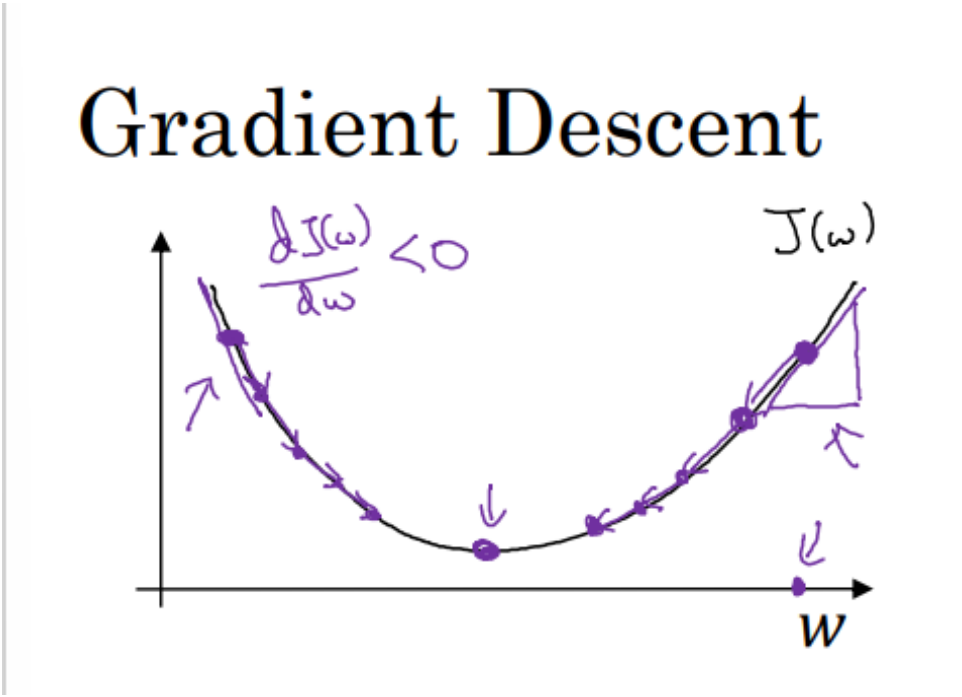
- 로지스틱 회귀 알고리즘
- 비용 함수 J : 손실 함수의 합의 평균
- 비용 함수의 역할: 매개변수 w와 b가 훈련 세트를 잘 예측하는지 측정
- w와 b의 공간. 비용 함수 J(w, b)는 가로축 w, b 위의 곡면이고 곡면의 높이는 그 점의 J(w, b) 값
- 매개변수 w와 b를 알아내기 위해서는, 비용 함수 J(w,b)를 가장 작게 만드는 w와 b를 찾아야 함.

경사 하강법 과정

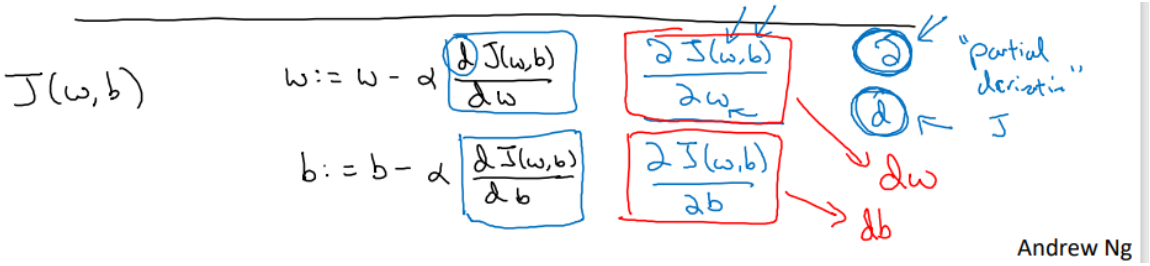
1. w와 b 초기화 필요, 보통 0으로 설정함. 볼록한 함수이기 때문에 어디서 초기화하더라도 같은 점에 도착
2. 가장 가파른 방향으로 한 단계 내려감
3. 계속 내려가며 최솟값을 찾음



- :=는 값을 업데이트한다는 뜻
- α: learning rate
- J(w)의 미분계수를 dw라고 함. = 함수의 기울기

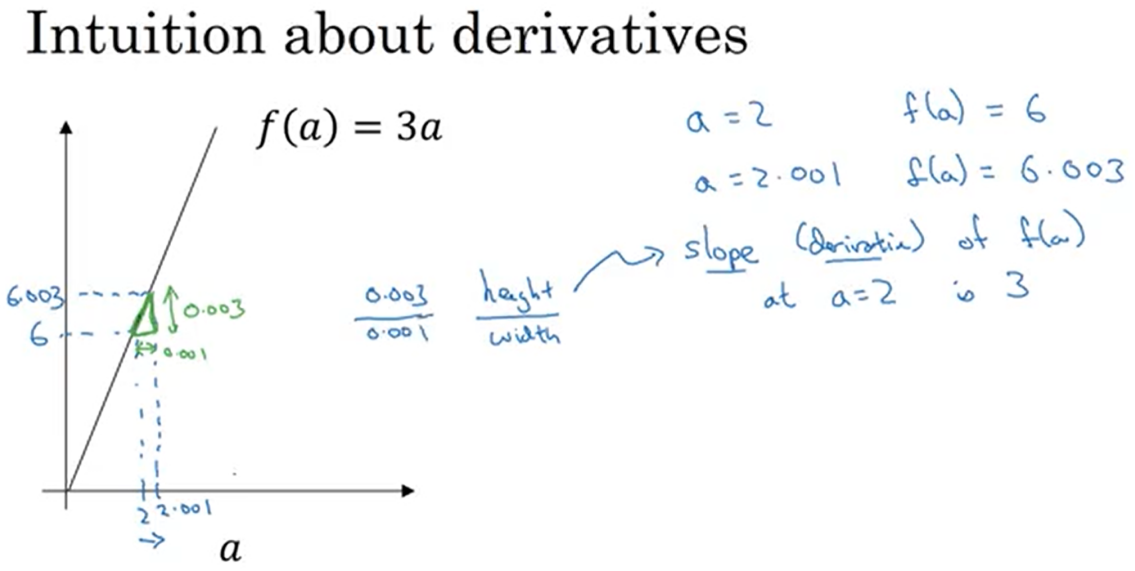


- w > 0이면 기울기 > 0, w값 감소
- w < 0이면, 기울기 < 0, w값 증

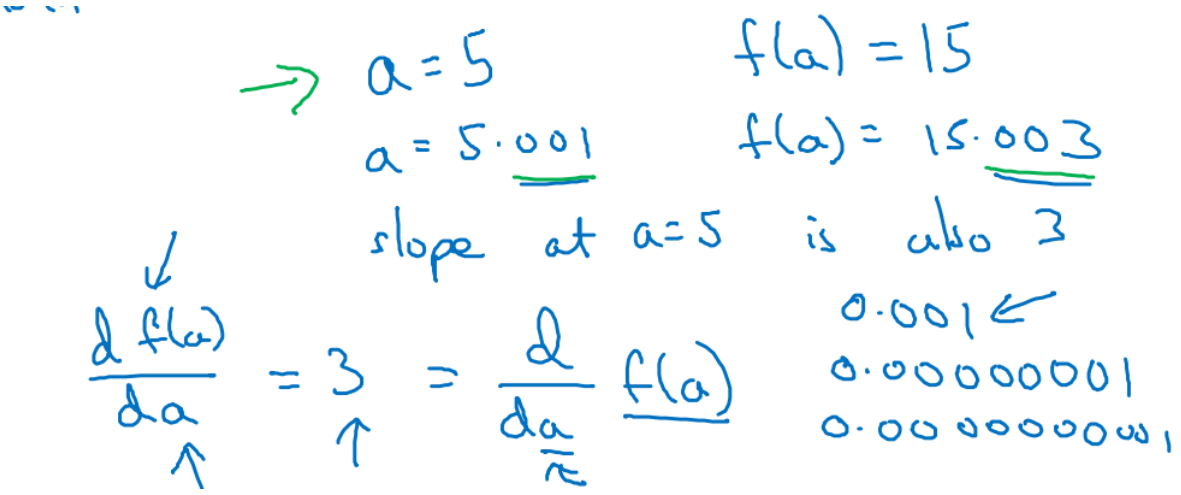


- 골뱅이같이 생긴 문자는 소문자 d를 다른 글씨체로 쓴 것
- J가 두 개 이상의 변수를 가진 함수일 때 d 대신 사용 (편미분 기호)
  편미분은 여러 변수 중 하나에 대한 함수의 기울기를 구하는 것
- 코드 구현 시, w의 변화량은 dw, b의 변화량은 db로 표시함.
-

미분 (Derivatives)



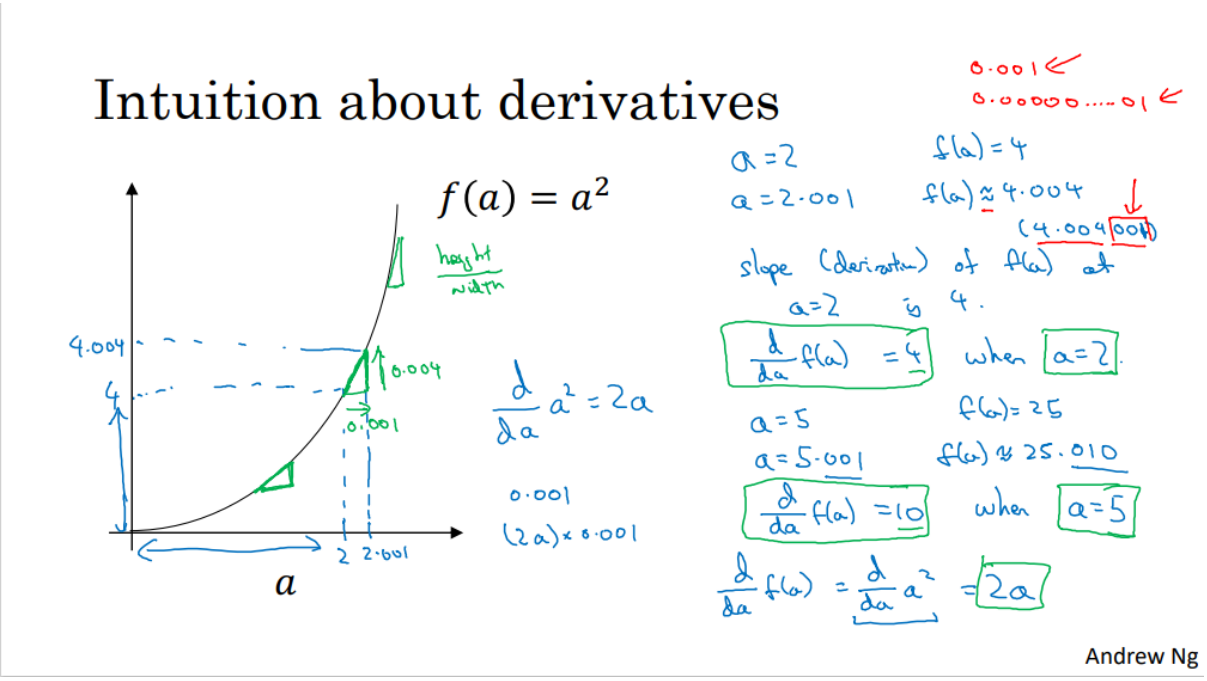
- a를 오른쪽으로 0.001만큼 밀었을 때, f(a)는 0.003 증가함. 즉 f(a)가 증가한 정도는 a가 증가 정도보다 세 배 많음
- 도함수(derivative) = 기울기(slope) = 삼각형의 높이/밑변



- df(a)/da = 변수 a를 아주 조금(무한소만큼) 움직였을 때 함수 f의 기울기 = 3
- 이 함수의 특성은 함수의 어느 곳이든 기울기가 3이라는 것

더 많은 미분 예제(More Derivative Examples)

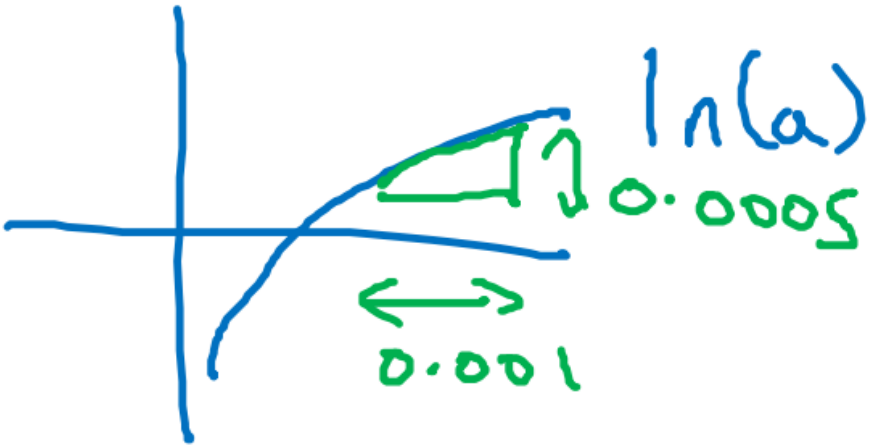
1. f(a) = a². 입력값에 따라 기울기가 다른 함수



- a = 2이면, 기울기는 4
- a = 5이면, 기울기는 10

- 각 점에서 삼각형을 그려보면 높이/밑변의 비율이 다른 걸 알 수 있음.
- 아무 값 a를 아주 작은 값 0.001만큼 밀었을 때 f(a)의 값은 **2a**만큼 증가한다.

2. $f(a) = a^3 \rightarrow (d/da)\cdot(f(a)) = 3a^2$



3. $f(a) = \ln(a), (d/da)\cdot(f(a)) = 1/a$

→ 도함수는 선의 기울기

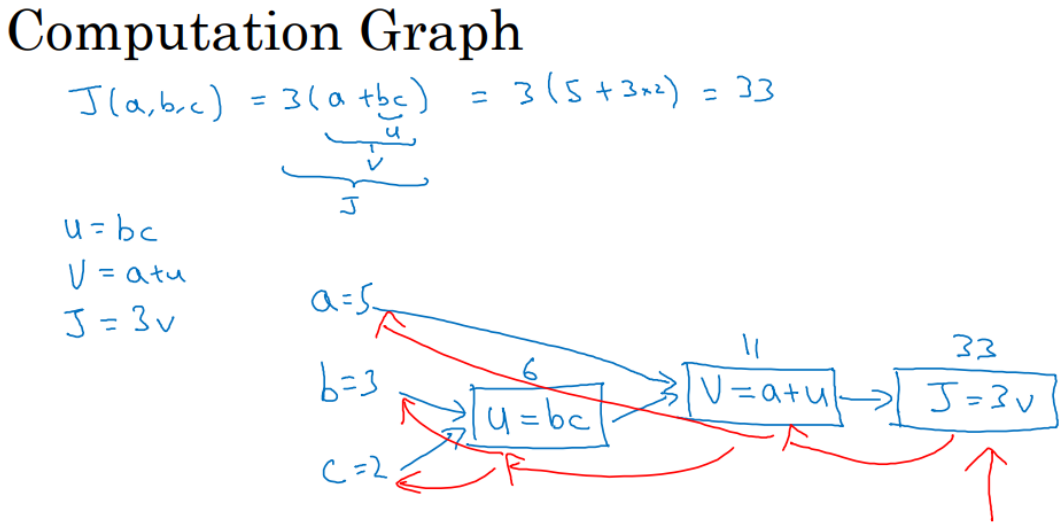
첫 예제였던 f(a) = 3a는 직선이어서 미분계수가 모든 곳에서 같았음.
하지만 뒤의 예시들은 선의 기울기가 다르기 때문에, 위치가 달라지면 도함수의 값이 달라짐.

→ 어떤 함수의 도함수를 찾아야 할 때, 미적분 관련 책이나 위키피디아를 보면 공식을 확인할 수 있음

계산 그래프 (Computation Graph)

신경망의 계산은 두 가지로 나뉨.

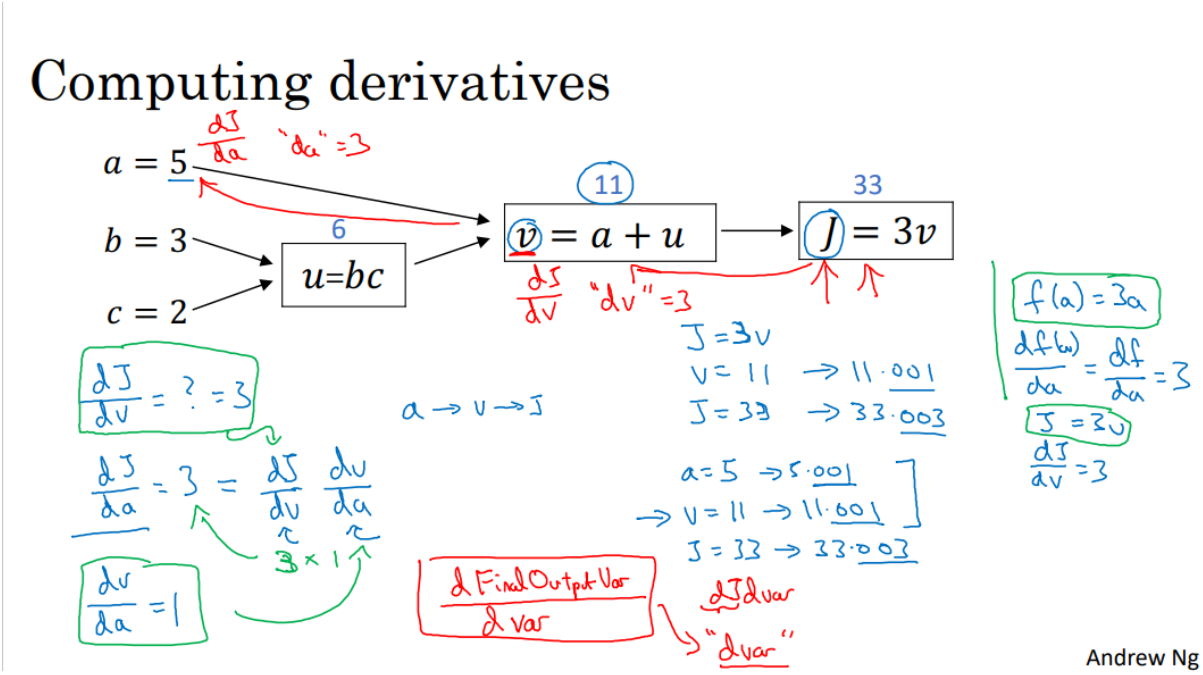
- forward pass or a forward propagation step
  - 신경망의 출력값 계산
- backward pass or a backward propagation step
  - 경사나 도함수 계산



Andrew Ng

- 계산 그래프는 J와 같이 특정한 출력값 변수를 최적화하고 싶을 때 유용
- 로지스틱 회귀의 경우에 J는 최적화할 비용 함수
- **J값(비용 함수) 계산: 왼쪽 → 오른쪽**
- **도함수 계산: 오른쪽 → 왼쪽**

계산 그래프로 미분하기 (Computing Derivatives)



- J = 3v, dJ/dv = 3
- dJ/da는?
  - dJ/da = dJ/dv * dv/da = 1
- **연쇄법칙**
  - 만약 a가 v에 영향을 끼치고 그것이 J에 영향을 끼친다면, a를 밀었을 때 J의 변화량은 a를 밀었을 때 v의 변화량과 v를 밀었을 때 J의 변화량의 곱
- **역방향 전파를 구현할 때**, 구하고자 하는 최종 출력값이 있을텐데 아마 최적화 하려는 값일 것. 여기서 최종 출력값은 J. 계속 최종 출력값 J의 도함수를 구하고 있는 것이니까 **변수 이름을 dvar**라고 함. (dv, da, …)
- db = dJ/db = dJ/dv * dv/du * du/db

로지스틱 회귀의 경사하강법 (Logistic Regression Gradient Descent)

- 로지스틱 회귀 복습

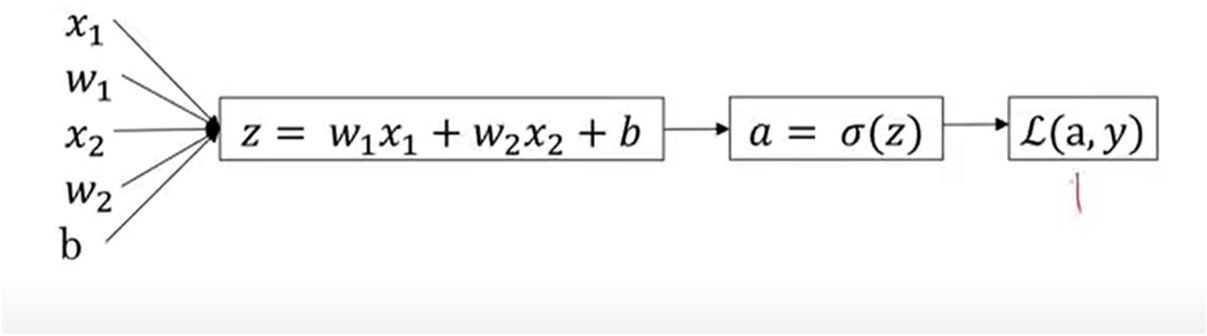
1. z 정의
2. y의 예측값

$z = w^T x + b$
$\hat{y} = a = \sigma(z)$
$\mathcal{L}(a, y) = -(y \log(a) + (1 - y) \log(1 - a))$

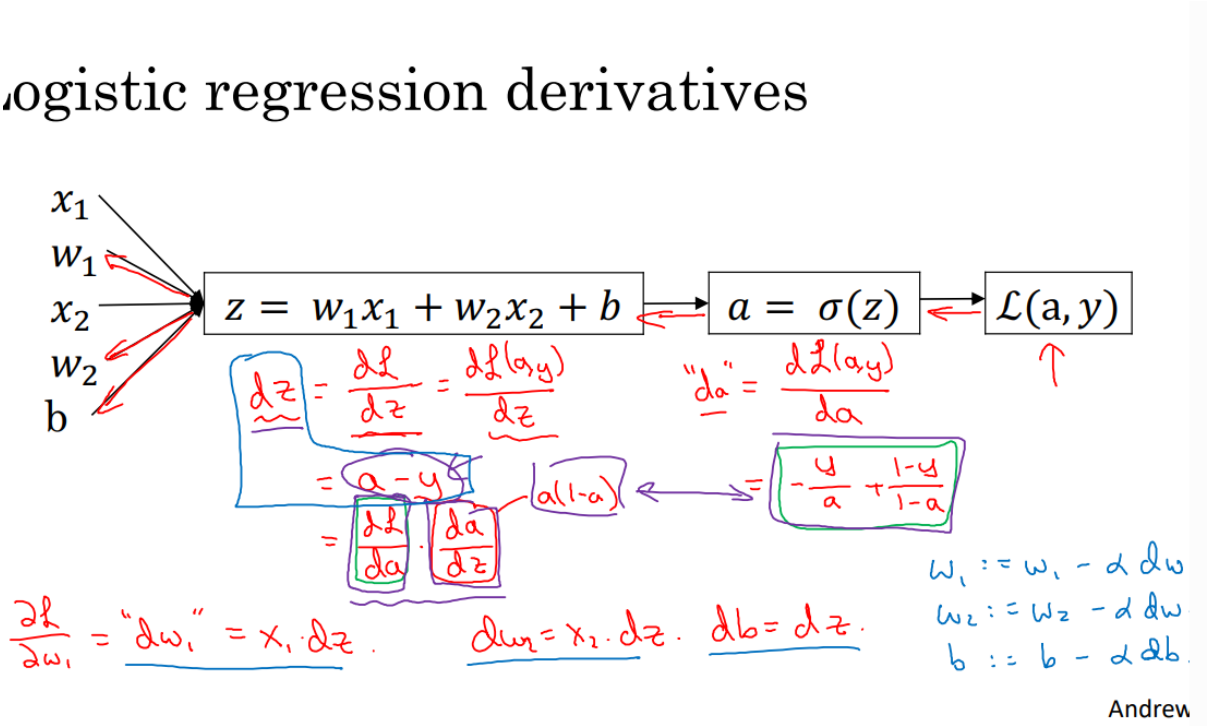
3. 하나의 샘플에 대한 손실 함수 (Loss/error function)

a: 로지스틱 회귀 출력값 (y 예측값), y = 참값

- 이걸 계산 그래프로 나타내보면



- 로지스틱 회귀의 목적
  - 매개변수 w와 b를 변경해서 손실(L)을 줄이는 것

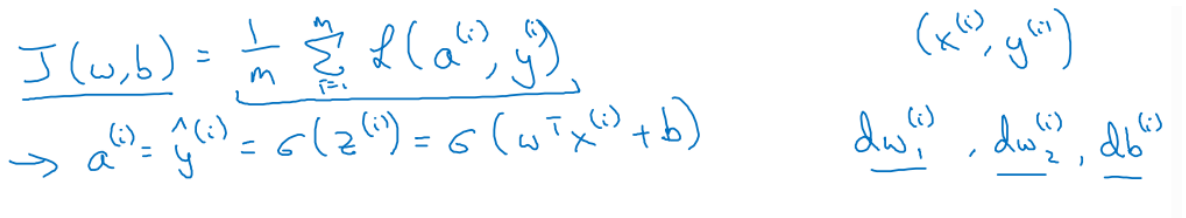


- *da=−y/a+1−y/1-a*

- dz = a - y
- $dw1=dL/dw1=x1dz$
- $db=dL/db=dz$

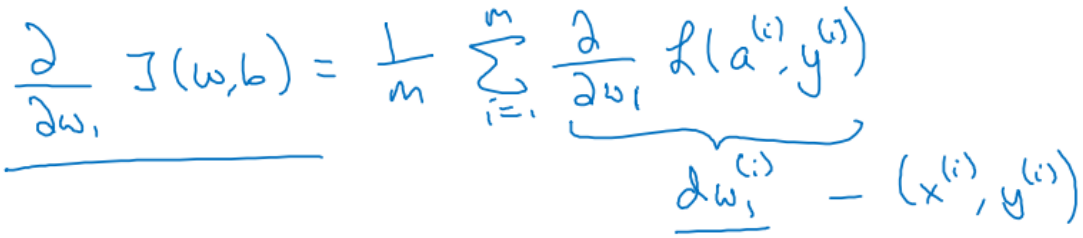
m개 훈련 샘플에 대한 경사하강법

- m개의 훈련 샘플의 cost function (1부터 m까지 더한 값의 평균값)

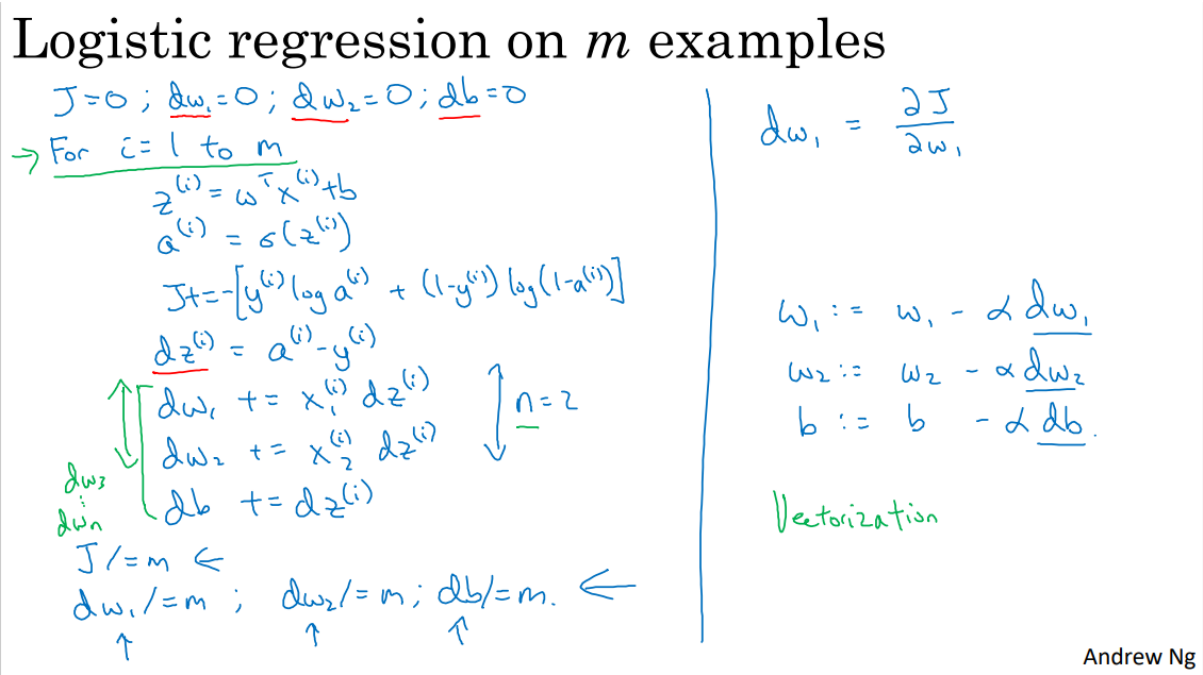


- 전체 비용 함수의 도함수도 각 손실 항 도함수의 평균값

→ 경사 하강법에 사용할 전체적인 경사를 구할 수 있음



프로그래밍



1. J = 0, dw_1 = 0, dw_2 = 0, db = 0으로 초기화
2. 훈련 세트를 반복해 각 훈련 샘플에 대한 도함수를 계산하고 이를 더해 dw와 db를 업데이트할 것
3. z^(i) = w^T·x(i) + b와 예측값 a^(i) = σ(z^(i))를 계산하고 J에 더함
4. 도함수 계산 (n = 2라고 가정)
5. 평균 계산을 위해 J, dw, db를 모두 m으로 나눔

- dw는 w에 대한 전체 비용 함수의 도함수

6. w_1 := w_1 - (학습률 α) dw_1

   w_2 := w_2 - (학습률 α) dw_2

   b := b - α db

→ 이 과정은 모두 경사 하강법 한 단계에 사용됨. 여러 번 진행하려면 반복 필요.

두 가지 단점

1. for 문을 두 개 만들어야 함

첫 번째 for 문: m개의 훈련 샘플 반복 / 두 번째 for 문은 dw를 계산하며 특성(n)을 반복

- 딥러닝 알고리즘을 구현할 때 이런 명시적인 for 문은 알고리즘을 비효율적으로 만듦. for문이 없어야 더 큰 데이터 집합 처리 가능

→ **벡터화**로 명시적인 for문 삭제 가능