dp 专题

A_zjzj

Peking University

2025 年 7 月 30 日

热身

P2515 [HAOI2010] 软件安装

有 n 个物品，每个物品体积 W_i、价值 V_i

但是有一些限制，对于每个物品 i，都要求必须先选择物品 D_i，才能选择物品 i。特别地，若 $D_i=0$，则表示 i 没有这个限制。

你需要选择一些物品，满足上述限制且体积之和不超过 M，且价值之和最大，求出这个最大价值。

$0 \le N \le 100$，$0 \le M \le 500$，$0 \le W_i \le M$，$0 \le V_i \le 1000$，$0 \le D_i \le N, D_i \ne i$。

P2607 [ZJOI2008] 骑士

给定一个基环树，每个点有点权，求最大独立集。

$1 \leq n \leq 10^6$。

P1880 [NOI1995] 石子合并

在一个圆形操场的四周摆放 N 堆石子，现要将石子有次序地合并成一堆，规定每次只能选相邻的 2 堆合并成新的一堆，并将新的一堆的石子数，记为该次合并的得分。

试设计出一个算法，计算出将 N 堆石子合并成 1 堆的最小得分和最大得分。

$1 \leq N \leq 100$。

P3478 [POI 2008] STA-Station

给定一个 n 个点的树，请求出一个结点，使得以这个结点为根时，所有结点的深度之和最大。

一个结点的深度之定义为该节点到根的简单路径上边的数量。

$1 \leq n \leq 10^6$。

Ucup 3rd Stage Xi'an M. Random Variables

对于所有长度为 n，每个元素的取值范围为 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的序列，求出他们的众数出现次数之和，对 p 取模（不一定是质数）。

$1 \le T \le 10^4$，$2 \le p \le 10^9 + 7$，$1 \le n \le 10^3$，$1 \le m \le 10^9$，$\sum n \le 10^4$。

Hint

- 首先，如果枚举众数的出现次数，再计算有多少种符合的序列，这是很困难的。

Hint

- 首先，如果枚举众数的出现次数，再计算有多少种符合的序列，这是很困难的。
- 但是，如果枚举一个 k，计算所有元素出现次数不超过 k 的序列方案数 $f(k)$，这是相对容易的。

Hint

- 首先，如果枚举众数的出现次数，再计算有多少种符合的序列，这是很困难的。
- 但是，如果枚举一个 k，计算所有元素出现次数不超过 k 的序列方案数 $f(k)$，这是相对容易的。
- 以此，发现答案可以表示为：

$$n \times m^n - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Hint

- 首先，如果枚举众数的出现次数，再计算有多少种符合的序列，这是很困难的。
- 但是，如果枚举一个 k，计算所有元素出现次数不超过 k 的序列方案数 $f(k)$，这是相对容易的。
- 以此，发现答案可以表示为：

$$n \times m^n - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

- 接下来考虑，对于一个 k，如何求出 $f(k)$。

Solution

设 $g_{n,m}$ 表示 n 个元素，值域大小为 m，每个元素出现次数不超过 k 的方案数，则有如下转移：

$$g_{n,m} = m\left(g_{n-1,m} - \binom{n-1}{k} g_{n-k-1,m-1}\right)$$

数据结构优化 dp

CF1476F Lanterns

有 n 个灯笼排成一排，第 i 个灯笼具有 p_i 的亮度。每个灯笼要么朝向左，照亮左边编号为 $[i-p_i, i-1]$ 的灯笼，要么朝向右，照亮右边编号为 $[i+1, i+p_i]$ 的灯笼。

找到一种方案，为所有的灯笼确定朝向，使得每一个灯笼被至少一个其他灯笼照亮，或判断无解。

$2 \le n \le 3 \times 10^5, p_i \in [0, n]$。

设计 dp 并尝试转移

- 设 f_i 表示用前 i 个灯笼，最多能够覆盖 $[1, f_i]$ 范围内的灯笼。

设计 dp 并尝试转移

- 设 f_i 表示用前 i 个灯笼，最多能够覆盖 $[1, f_i]$ 范围内的灯笼。
- 可以明显发现的转移：

设计 dp 并尝试转移

- 设 f_i 表示用前 i 个灯笼，最多能够覆盖 $[1, f_i]$ 范围内的灯笼。
- 可以明显发现的转移：
  - i 号位置的灯笼向左：

$$f_i \leftarrow i - 1(\exists 1 \leq j < i, f_j + 1 \geq i - p_i)$$

设计 dp 并尝试转移

- 设 f_i 表示用前 i 个灯笼，最多能够覆盖 $[1, f_i]$ 范围内的灯笼。
- 可以明显发现的转移：
  - i 号位置的灯笼向左：

$$f_i \leftarrow i - 1(\exists 1 \leq j < i, f_j + 1 \geq i - p_i)$$

  - i 号位置的灯笼向右：

$$f_i \leftarrow i + p_i(\exists 1 \leq j < i, f_j \geq i)$$

进一步分析转移

- 但是，这样的转移并不够，还有这种转移：

进一步分析转移

- 但是，这样的转移并不够，还有这种转移：
  - $1 \leq j < k < i, f_k + 1 \geq i - p_i;$

进一步分析转移

- 但是，这样的转移并不够，还有这种转移：
  - $1 \leq j < k < i, f_k + 1 \geq i - p_i$;
  - $f_i \leftarrow j + p_j$;

进一步分析转移

- 但是，这样的转移并不够，还有这种转移：
  - $1 \leq j < k < i, f_k + 1 \geq i - p_i$;
  - $f_i \leftarrow j + p_j$;
- 发现 j 的限制和 i 无关，所以在 k 处就能找到一个最优的 j，并在 i 处查询一个最优的 k 即可完成转移。

进一步分析转移

- 但是，这样的转移并不够，还有这种转移：
  - $1 \le j < k < i, f_k + 1 \ge i - p_i$;
  - $f_i \leftarrow j + p_j$;
- 发现 j 的限制和 i 无关，所以在 k 处就能找到一个最优的 j，并在 i 处查询一个最优的 k 即可完成转移。
- 时间复杂度：$O(n \log n)$。

P2605 [ZJOI2010] 基站选址

有 N 个村庄坐落在一条直线上，第 $i(i>1)$ 个村庄距离第 1 个村庄的距离为 D_i。需要在这些村庄中建立不超过 K 个通讯基站，在第 i 个村庄建立基站的费用为 C_i。如果在距离第 i 个村庄不超过 S_i 的范围内建立了一个通讯基站，那么就村庄被基站覆盖了。如果第 i 个村庄没有被覆盖，则需要向他们补偿，费用为 W_i。现在的问题是，选择基站的位置，使得总费用最小。

$K \le N$，$K \le 100$，$N \le 2\times 10^4$，$D_i \le 10^9$，$C_i \le 10^4$，$S_i \le 10^9$，$W_i \le 10^4$。

Solution

- 设 $f_{k,i}$ 表示前 i 个村庄建立了 k 个基站，其中 i 必须建基站，$1 \sim i$ 村庄的费用的最小值。

Solution

- 设 $f_{k,i}$ 表示前 i 个村庄建立了 k 个基站，其中 i 必须建基站，$1 \sim i$ 村庄的费用的最小值。
- 按照 k 分层转移，每一层枚举 i，使用线段树维护所有的 $f_{k-1,j-1} + cost(j, i)$。

特殊的一类 dp

问题概述

- 这类问题大概长这样：

问题概述

- 这类问题大概长这样：
- 求一个排列 $p_{1\sim n}$，最小（大）化如下值：

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$$

问题概述

- 这类问题大概长这样：
- 求一个排列 $p_{1\sim n}$，最小（大）化如下值：

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$$

- 其中 $f(i,j)$ 如下：

$$f(i,j) = \begin{cases} a(i) + b(j) & i < j \\ c(i) + d(j) & i > j \end{cases}$$

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。
- 每次插入，大致有一下几种情况：

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。
- 每次插入，大致有一下几种情况：
    - 将两个连续段合并成一个；

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。
- 每次插入，大致有一下几种情况：
  - 将两个连续段合并成一个；
  - 插入一个连续段的左边/右边；

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。
- 每次插入，大致有一下几种情况：
  - 将两个连续段合并成一个；
  - 插入一个连续段的左边/右边；
- 此时，可以轻松计算出插入元素产生的贡献。另外，需要维护连续段个数，确保最终连续段都合并为一个。

解法

- 考虑按照 p_i 的大小，从小到大插入序列的过程，维护若干连续段。
- 每次插入，大致有一下几种情况：
  - 将两个连续段合并成一个；
  - 插入一个连续段的左边/右边；
- 此时，可以轻松计算出插入元素产生的贡献。另外，需要维护连续段个数，确保最终连续段都合并为一个。
- 可能需要判断插入时是否插在全局的开头或末尾。

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;
- 你需要求出一个 $1 \sim n$ 的排列 p，满足 $p_1 = s, p_n = e$，同时最小化这个排列的权值;

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;
- 你需要求出一个 $1 \sim n$ 的排列 p，满足 $p_1 = s, p_n = e$，同时最小化这个排列的权值;
- 一个排列的权值为 $\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$，其中 $f(i, j)$ 的值有两种情况:

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;
- 你需要求出一个 $1 \sim n$ 的排列 p，满足 $p_1 = s, p_n = e$，同时最小化这个排列的权值;
- 一个排列的权值为 $\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$，其中 $f(i, j)$ 的值有两种情况:
  - 若 $i > j$，则 $f(i, j) = x_i - x_j + c_i + b_j$;

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;
- 你需要求出一个 $1 \sim n$ 的排列 p，满足 $p_1 = s, p_n = e$，同时最小化这个排列的权值;
- 一个排列的权值为 $\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$，其中 $f(i,j)$ 的值有两种情况:
  - 若 $i > j$，则 $f(i,j) = x_i - x_j + c_i + b_j$;
  - 若 $i < j$，则 $f(i,j) = x_j - x_i + d_i + a_j$;

CF704B Ant Man

- 有 n 个元素，第 i 个元素有五个参数 $(x_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$;
- 你需要求出一个 $1 \sim n$ 的排列 p，满足 $p_1 = s, p_n = e$，同时最小化这个排列的权值;
- 一个排列的权值为 $\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$，其中 $f(i,j)$ 的值有两种情况:
  - 若 $i > j$，则 $f(i,j) = x_i - x_j + c_i + b_j$;
  - 若 $i < j$，则 $f(i,j) = x_j - x_i + d_i + a_j$;
- $2 \le n \le 5 \times 10^3$，$s \ne e$，$1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le 10^9$，$1 \le a_i, b_i, c_i, d_i \le 10^9$。

Solution

- 这类问题的入门：

Solution

- 这类问题的入门：
  - $a(i) = d_i - x_i$;

Solution

- 这类问题的入门:
  - $a(i) = d_i - x_i;$
  - $b(i) = x_i + a_i;$

Solution

- 这类问题的入门：
  - $a(i) = d_i - x_i$;
  - $b(i) = x_i + a_i$;
  - $c(i) = x_i + c_i$;

Solution

- 这类问题的入门：
  - $a(i) = d_i - x_i$;
  - $b(i) = x_i + a_i$;
  - $c(i) = x_i + c_i$;
  - $d(i) = b_i - x_i$;

Solution

- 这类问题的入门：
  - $a(i) = d_i - x_i$;
  - $b(i) = x_i + a_i$;
  - $c(i) = x_i + c_i$;
  - $d(i) = b_i - x_i$;
- 直接套用这种方法解决即可。

[JOI Open 2016] 摩天大楼

将互不相同的 N 个整数 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 按照一定顺序排列。

假设排列为 $f_1, f_2, \cdots, f_N$，要求:
$|f_1 - f_2| + |f_2 - f_3| + \cdots + |f_{N-1} - f_N| \leq L$。

求满足题意的排列的方案数对 $10^9 + 7$ 取模后的结果。

$1 \leq N \leq 100$，$1 \leq L \leq 1000$，$1 \leq A_i \leq 1000$。

Solution

- 此类型 dp 的一个变种，并无多少差别，需要注意权值的计算不能再使用减法了。

其他技巧

P3554 [POI 2013] LUK-Triumphal arch

给一颗 n 个节点的树（$n \leq 3 \times 10^5$），初始时 1 号节点被染黑，其余是白的。两个人轮流操作，一开始 B 在 1 号节点。每一轮，A 选择 k 个点染黑，然后 B 走到一个相邻节点，如果 B 当前处于白点则 B 胜，否则当 A 将所有点染为黑点时 A 胜。求能让 A 获胜的最小的 k。

Solution

- 首先发现 B 不会走回头路，这样一定不优。

Solution

- 首先发现 B 不会走回头路，这样一定不优。
- 其次考虑二分答案是否 $\leq k$，考虑如何 check。

Solution

- 首先发现 B 不会走回头路，这样一定不优。
- 其次考虑二分答案是否 $\leq k$，考虑如何 check。
- 设 f_u 表示在 B 走到 u 的时候（B 已经染黑），对于 u 子树内部的点，至少需要在之前额外染黑多少个节点。

Solution

- 首先发现 B 不会走回头路，这样一定不优。
- 其次考虑二分答案是否 $\leq k$，考虑如何 check。
- 设 f_u 表示在 B 走到 u 的时候（B 已经染黑），对于 u 子树内部的点，至少需要在之前额外染黑多少个节点。
- 那么转移是

$$f_u = \max(-k + \sum_{v \in \mathrm{son}(u)} (1 + f_v), 0)$$

P8386 [PA 2021] Od deski do deski

给定 n，m，求满足以下限制的长度为 n 的序列数目：

1. 每个元素在 $[1, m]$ 之间；
2. 一次操作定义为删除一个长度至少为 2 且区间两端相等的区间，该序列需要在若干次操作内被删空。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

$1 \le n \le 3000$，$1 \le m \le 10^9$。

Hint

- 考虑如何 check 一个序列是否合法。

Hint

- 考虑如何 check 一个序列是否合法。
- 设 $f_i = 0/1$ 表示 $1 \sim i$ 是否可以被删空，转移如下：

$$f_i = \bigvee_{j=1}^{i-1} [a_i = a_j] f_{j-1}$$

Solution

- 当出现一个 $f_{j-1} = 1$ 时，那么之后所有的 $a_i = a_j$ 的 f_i 都为 1;

Solution

- 当出现一个 $f_{j-1}=1$ 时，那么之后所有的 $a_i=a_j$ 的 f_i 都为 1;
- 另外发现计数的时候，并不关心每个 a_j 具体是多少，只关注有多少个不同的 a_j;

Solution

- 当出现一个 $f_{j-1}=1$ 时，那么之后所有的 $a_i=a_j$ 的 f_i 都为 1;
- 另外发现计数的时候，并不关心每个 a_j 具体是多少，只关注有多少个不同的 a_j;
- 所以设 $g_{i,k,0/1}$ 表示 $1\sim i$ 已经确定，有 k 个不同的 j 满足 $a_j=a_i, f_{j-1}=1, 1\le j\le i-1$，最后一维 $0/1$ 表示 $1\sim i$ 能否被删空，转移如下:

Solution

- 当出现一个 $f_{j-1}=1$ 时，那么之后所有的 $a_i=a_j$ 的 f_i 都为 1;
- 另外发现计数的时候，并不关心每个 a_j 具体是多少，只关注有多少个不同的 a_j;
- 所以设 $g_{i,k,0/1}$ 表示 $1\sim i$ 已经确定，有 k 个不同的 j 满足 $a_j=a_i, f_{j-1}=1, 1\le j\le i-1$，最后一维 $0/1$ 表示 $1\sim i$ 能否被删空，转移如下：
- $$\begin{aligned} g_{i,k,0} &= (m-k)g_{i-1,k,0}+(m-k+1)g_{i-1,k-1,1} \\ g_{i,k,1} &= k(g_{i-1,k,0}+g_{i-1,k,1}) \end{aligned}$$

[AGC013D] Piling Up

一开始有 n 个颜色为黑白的球，但不知道黑白色分别有多少，m 次操作，每次先拿出一个球，再放入黑白球各一个，再拿出一个球，最后拿出的球按顺序排列会形成一个颜色序列，求颜色序列有多少种。答案对 10^9+7 取模。

$1 \le n, m \le 3 \times 10^3$。

题型分析

- 像如此这样的题目，你稍微好计算一点的是所有可能（初始局面不同也认为不同)。

题型分析

- 像如此这样的题目，你稍微好计算一点的是所有可能（初始局面不同也认为不同）。
- 然而，它却只提取了一部分特征，让你计算该特征的方案数。

题型分析

- 像如此这样的题目，你稍微好计算一点的是所有可能（初始局面不同也认为不同）。
- 然而，它却只提取了一部分特征，让你计算该特征的方案数。
- 你就需要设计一个“自动机”，能够判断一个方案是否是满足该特征的方案中需要计算到贡献的唯一的那一个。

题型分析

- 像如此这样的题目，你稍微好计算一点的是所有可能（初始局面不同也认为不同)。
- 然而，它却只提取了一部分特征，让你计算该特征的方案数。
- 你就需要设计一个“自动机”，能够判断一个方案是否是满足该特征的方案中需要计算到贡献的唯一的那一个。
- 当然，也有可能是容斥、多项式等做法。

题目分析

- 而对于这题来说，总的方案就是从初始局面开始每一步取出/放入后黑球个数构成的序列。

题目分析

- 而对于这题来说，总的方案就是从初始局面开始每一步取出/放入后黑球个数构成的序列。
- 而特征就是该序列的差分（表示每一步变化前后的区别）。

题目分析

- 而对于这题来说，总的方案就是从初始局面开始每一步取出/放入后黑球个数构成的序列。
- 而特征就是该序列的差分（表示每一步变化前后的区别）。
- 于是，我们设计的“自动机”为：该序列必须要存在 0 时才计算到贡献。

题目分析

- 我们逐步减少黑球个数，直到再减少一个该方案就不合法了停止（即保证黑球个数存在一个时刻为 0)。

题目分析

- 我们逐步减少黑球个数，直到再减少一个该方案就不合法了停止（即保证黑球个数存在一个时刻为 0)。
- 此时特征一样的方案变换之后就成为了同一个方案。

题目分析

- 我们逐步减少黑球个数，直到再减少一个该方案就不合法了停止（即保证黑球个数存在一个时刻为 0)。
- 此时特征一样的方案变换之后就成为了同一个方案。
- 所以，在此基础上进行 dp 即可。

题目分析

- 我们逐步减少黑球个数，直到再减少一个该方案就不合法了停止（即保证黑球个数存在一个时刻为 0)。
- 此时特征一样的方案变换之后就成为了同一个方案。
- 所以，在此基础上进行 dp 即可。
- 当然，这题也有容斥做法，此处并不讨论。

总结

- 这类问题可以如此总结：给定函数 $A(x,y)=0/1$，求出有多少 x，$\exists y, A(x,y)=1$。

总结

- 这类问题可以如此总结：给定函数 $A(x,y)=0/1$，求出有多少 x，$\exists y, A(x,y)=1$。
- 做法大致有三种：转化判定方式、带权计数、对判定过程 dp；

总结

- 这类问题可以如此总结：给定函数 $A(x,y)=0/1$，求出有多少 x，$\exists y, A(x,y)=1$。
- 做法大致有三种：转化判定方式、带权计数、对判定过程 dp；
- 该题的做法不仅可以理解为转化判定方式，也可以理解为带权计数；

总结

- 这类问题可以如此总结：给定函数 $A(x,y)=0/1$，求出有多少 x，$\exists y, A(x,y)=1$。
- 做法大致有三种：转化判定方式、带权计数、对判定过程 dp；
- 该题的做法不仅可以理解为转化判定方式，也可以理解为带权计数；
- 更多的资料参考曹立的 2024 国家集训队论文的 3.4 小节。

结语

感谢聆听