简单动态规划

唐彬峪

2025.6

CF2B

- 给定一个网格，每个格子里有数，每次只能往右或往下走一格。从左上角走到右下角，求路径上的数乘积末位的 0 的数量最小是多少
  $n, m \leq 2000$

ABC132F

- 长度为 N 的由正整数构成的序列，相邻项乘积不超过 K，求方案数。
  $N \le 100, K \le 10^9$

ABC192F

- 你在时刻零可以选择任意多的物品，初始魔法值为你选的物品的魔法值总和
  不妨记你选择了 K 个物品，那么，此后每秒，总魔法值将会增加 K。
  现在你想让总魔法值恰好等于 X，求你需要花费的最小时间。
- $N \leq 100, A_i \leq 10^7, 10^9 \leq X \leq 10^{18}$

ABC189F

- 有一个人想从 0 走到 N，每轮等概率从 $[1, M]$ 中选择一个正整数 x，从当前位置 i 走到位置 $i+x$，当前位置大于等于 N 则游戏结束，有 K 个特殊位置，到特殊位置会直接传送回位置 0（不算轮数），问期望轮数。
- $N, M, K \leq 10^5$

ABC182F

- 有 N 种硬币，面值分别为 $A_1, A_2, ...A_n$ 元，满足 $A_1 = 1$，且对于所有 $1 \le i < N$，有 $A_i < A_{i+1}$，且 $A_i | A_{i+1}$。
- 有人用 y 元买了一件 X 元的商品，收到了 $y-X$ 的找零。两个人都用了硬币最少数量的支付方式来付钱。且两个人没有使用相同种类的硬币。
- $A_n \le 10^{15}$

ABC175F

- 有 N 个仅含小写字母的字符串 $S_1, S_2, ..., S_n$。你需要把从这些字符串中选择一些以任意顺序拼接起来，同一个字符串可以被选择多次。每选择一次 S_i，你都需要花费 C_i 的代价。
- 求使拼接得到的字符串为回文串所需的最小花费。
  无解输出 -1
  $1 \le N \le 50$ $1 \le |S_i| \le 20$ $1 \le C_i \le 10^9$。

ABC129F

- 有一等差数列，首项为 A，公差为 B，长度为 L。
  把这个数列中所有数拼起来（e.g. 3,7,11,15,19>37111519）。
- 问拼起来的这个数 $\bmod M$ 的值。
- $1 \le L, A, B \le 10^{18}, 1 \le M \le 10^9$。等差数列末项不超过 10^{18}。

ABC176F

- 有 $3n$ 张卡片，其中每张卡片上都写着 $1 \sim n$ 中的一个数，他会重复以下操作 $n-1$ 次：将最左侧的 5 张牌任意排列，排列后，删去最左侧的 3 张牌，如果这三张牌上写着同样的数，可以获得 1 分。
- 最后，如果剩余的 3 张牌上的数字一样，那么他还可以额外得到 1 分。求最大得分。
- $n \leq 2000$

ABC134F

- 定义一个 $1 \sim n$ 的排列 p 的怪异度为 $\sum_{i=1}^{n} |p_i - i|$
- 求怪异度为 k 的 $1 \sim n$ 的排列数，答案对 $10^9 + 7$ 取模。

LOJ 2743

- 将互不相同的 N 个整数 $A_1, A_2, ..., A_n$ 按照一定顺序排列。
- 假设排列为 $f_1, f_2, ..., f_n$，要求：
  $|f_1 - f_2| + |f_2 - f_3| + \quad + |f_{n-1} - f_n| \leq L$
- $\mod 10^9 + 7$。

从最简单的开始

- 本质上状态压缩通常没有任何复杂度层面的优化

从最简单的开始

- 本质上状态压缩通常没有任何复杂度层面的优化
- 处理高维的复杂状态的通用技巧

从最简单的开始

- 本质上状态压缩通常没有任何复杂度层面的优化
- 处理高维的复杂状态的通用技巧
- 可以利用位运算等常用技巧进行加速

SCOI2005 互不侵犯

- 给定一个 $N * M$ 的棋盘，放置任意多个国王，要求相互不攻击。
  棋盘上有 K 个位置损坏不能放置国王，求方案数。

SCOI2005 互不侵犯

- 给定一个 $N * M$ 的棋盘，放置任意多个国王，要求相互不攻击。
  棋盘上有 K 个位置损坏不能放置国王，求方案数。
- $N, M <= 10$

SCOI2005 互不侵犯

- 给定一个 $N * M$ 的棋盘，放置任意多个国王，要求相互不攻击。
  棋盘上有 K 个位置损坏不能放置国王，求方案数。
- $N, M <= 10$
- 用 2^n 的状态表示每行的棋子放置状态，2^n 枚举下一行

SCOI2005 互不侵犯

- 给定一个 $N * M$ 的棋盘，放置任意多个国王，要求相互不攻击。
  棋盘上有 K 个位置损坏不能放置国王，求方案数。
- $N, M <= 10$
- 用 2^n 的状态表示每行的棋子放置状态，2^n 枚举下一行
- $N, M <= 20$

SCOI2005 互不侵犯

- 给定一个 $N * M$ 的棋盘，放置任意多个国王，要求相互不攻击。
  棋盘上有 K 个位置损坏不能放置国王，求方案数。
- $N, M <= 10$
- 用 2^n 的状态表示每行的棋子放置状态，2^n 枚举下一行
- $N, M <= 20$
- 将棋盘的 (i, j) 号格子编号为 $(i-1) * m + j$，按照顺序枚举所有格子
  在这个枚举顺序下，考虑任意时刻会影响未来的格子数量

SCOI2005 互不侵犯

- 惊喜的发现，只需要考虑至多 $m+1$ 个格子是否有国王即可。

SCOI2005 互不侵犯

- 惊喜的发现，只需要考虑至多 $m+1$ 个格子是否有国王即可。
- 时间复杂度 $O(2^n * n * m)$

SCOI2005 互不侵犯

- 惊喜的发现，只需要考虑至多 $m+1$ 个格子是否有国王即可。
- 时间复杂度 $O(2^n * n * m)$
- $N <= 20, M <= 500$

SCOI2005 互不侵犯

- 惊喜的发现，只需要考虑至多 $m+1$ 个格子是否有国王即可。
- 时间复杂度 $O(2^n * n * m)$
- $N <= 20, M <= 500$
- 不难发现，任意时刻我们的状态中记录了轮廓线中的 $n+1$ 个格子上是否有国王。
  而其中有大量状态是不合法的。

SCOI2005 互不侵犯

- 惊喜的发现，只需要考虑至多 $m+1$ 个格子是否有国王即可。
- 时间复杂度 $O(2^n * n * m)$
- $N <= 20, M <= 500$
- 不难发现，任意时刻我们的状态中记录了轮廓线中的 $n+1$ 个格子上是否有国王。
  而其中有大量状态是不合法的。
- 优化后复杂度 $O(T(n) * n * m)$

SCOI2005 互不侵犯

- 回顾这道题，首先在经典的棋盘模型中，轮廓线相比于整行整行的 dp 很可能有巨大的优势
  这种优势主要体现在转移的时间复杂度上

SCOI2005 互不侵犯

- 回顾这道题，首先在经典的棋盘模型中，轮廓线相比于整行整行的 dp 很可能有巨大的优势
这种优势主要体现在转移的时间复杂度上
- 具体实现代码的时候，常见的 2/3/4 进制状态通常都可以直接视作二进制无符号整数
而对于更复杂的高维状态，通常会使用哈希处理

codeforces 165E

- 给定 $n(n \le 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4*10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0

codeforces 165E

- 给定 $n(n \leq 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 首先考虑比“暴力”稍微优秀一点的枚举子集

codeforces 165E

- 给定 $n(n \leq 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 首先考虑比“暴力”稍微优秀一点的枚举子集
- 复杂度为 $O(|A|^{\frac{3}{2}})$

codeforces 165E

- 给定 $n(n \le 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4*10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 首先考虑比“暴力”稍微优秀一点的枚举子集
- 复杂度为 $O(|A|^{\frac{3}{2}})$
- 如何进一步优化？

codeforces 165E

- 给定 $n(n \leq 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0

codeforces 165E

- 给定 $n(n \le 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 不妨把所有数先按最高位是 0/1 进行分类，显然的观察是，两个最高位为 1 的数不可能 and 起来为 0

codeforces 165E

- 给定 $n(n \le 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 不妨把所有数先按最高位是 0/1 进行分类，显然的观察是，两个最高位为 1 的数不可能 and 起来为 0
- 仔细观察，这个问题能否转化为某个 $|A|$ 更小的子问题？

codeforces 165E

- 给定 $n(n \le 10^6)$ 个数，所有数不超过 $4 * 10^6$
  问对于每个数，能否找到另一个数和它 and 之后是 0
- 不妨把所有数先按最高位是 0/1 进行分类，显然的观察是，两个最高位为 1 的数不可能 and 起来为 0
- 仔细观察，这个问题能否转化为某个 $|A|$ 更小的子问题？
- 对于最高位为 0 的，和最高位为 1 的状态，分开统计，可以得到两个规模为 $\frac{|A|}{2}$ 的子问题因此总复杂度为 $O(|A|log|A|)$

codeforces 1245F

- 100 次询问，每次问有多少有序二元组 (a, b) 满足
  $a + b = a \quad xor \quad b$
  a, b 满足 $l \leq a \leq b \leq r$
  l, r 每次给定

codeforces 1245F

- 100 次询问，每次问有多少有序二元组 (a,b) 满足
  $a+b=a \quad xor \quad b$
  a,b 满足 $l \le a \le b \le r$
  l,r 每次给定
- 观察到题目等价于求有多少 (a,b) 满足 $a\&b=0$ 差分以后不难处理

概述

- 数位 DP：用来解决一类特定问题，这种问题比较好辨认，一般具有这几个特征：
  1. 要求统计满足一定条件的数的数量（即，最终目的为计数）；
  2. 这些条件经过转化后可以使用按位分析的思想去理解和判断；
  3. 输入会提供一个上界来作为统计的限制；
  4. 上界很大（比如 10^{18}），暴力枚举验证会超时。
- 一般的，如果要求 $[l, r]$ 之内合法的数量，可以通过差分转化成两个基础的前缀问题。

codeforces 55D

- 称一个数是好的，当且仅当它能够被自己的所有非 0 数位 $(1-9)$ 整除
  如 123 是好的，因为 123 可以被 1 2 3 整除
  求 $[l, r]$ 中好的数的个数，l 和 r 大于 0 小于 $9 * 10^{18}$

codeforces 55D

- 称一个数是好的，当且仅当它能够被自己的所有非 0 数位 $(1-9)$ 整除
  如 123 是好的，因为 123 可以被 1 2 3 整除
  求 $[l, r]$ 中好的数的个数，l 和 r 大于 0 小于 $9 * 10^{18}$
- 考虑一个暴力的状态，即记录 2^8 个状态表示每种 digit 是否出现过，以及目前这个数对 $lcm(2,3,4,5,6,7,8,9) = 2520$ 取模的结果估算复杂度

codeforces 55D

- 稍微加强一下：多测 50 组数据

codeforces 55D

- 稍微加强一下：多测 50 组数据
- 考虑记录的状态是否存在冗余，即是否需要记录 2^8 个状态再考虑是否需要记录对 2520 取模的结果，能否在中途转移的时候略微进行优化

codeforces 55D

- 稍微加强一下：多测 50 组数据
- 考虑记录的状态是否存在冗余，即是否需要记录 2^8 个状态再考虑是否需要记录对 2520 取模的结果，能否在中途转移的时候略微进行优化
- $2, 4, 8$ 和 $3, 9$ 显然只需要记录 4 个和 3 个状态，而在这种情况下还需要记录 $5, 7$。总状态数 $4 * 3 * 2 * 2 = 48$

codeforces 55D

- 稍微加强一下：多测 50 组数据
- 考虑记录的状态是否存在冗余，即是否需要记录 2^8 个状态再考虑是否需要记录对 2520 取模的结果，能否在中途转移的时候略微进行优化
- $2, 4, 8$ 和 $3, 9$ 显然只需要记录 4 个和 3 个状态，而在这种情况下还需要记录 $5, 7$。总状态数 $4 * 3 * 2 * 2 = 48$
- 显然我们只需要知道最后一位，就可以判断这个数是否能被 5 整除。因此除了最后一位的转移以外，只需要记录 504 个状态。还可以利用模 8 的性质，只在最后三层记录对 8 取模的情况。

codeforces 55D

- 稍微加强一下：多测 50 组数据
- 考虑记录的状态是否存在冗余，即是否需要记录 2^8 个状态再考虑是否需要记录对 2520 取模的结果，能否在中途转移的时候略微进行优化
- $2,4,8$ 和 $3,9$ 显然只需要记录 4 个和 3 个状态，而在这种情况下还需要记录 $5,7$。总状态数 $4*3*2*2=48$
- 显然我们只需要知道最后一位，就可以判断这个数是否能被 5 整除。因此除了最后一位的转移以外，只需要记录 504 个状态。还可以利用模 8 的性质，只在最后三层记录对 8 取模的情况。
- 估算复杂度

Thanks!